

**Zeitschrift:** IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

**Band:** 13 (1973)

**Artikel:** Valeurs et représentation de la capacité d'amortissement

**Autor:** Mazilu, P. / Sandi, H.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-13752>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 31.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## II

### Valeurs et représentation de la capacité d'amortissement

Werte und Darstellung der Dämpfungsfähigkeit

Values and Representation of Damping Capacity

P. MAZILU

Professeur de résistance des matériaux  
Institut des Constructions  
Bucarest, Roumanie

H. SANDI

Chef du laboratoire de mécanique des structures  
Institut de Recherches du Bâtiment (INCERC)  
Bucarest, Roumanie

#### 1. Quelques déterminations de la capacité d'amortissement des vibrations

Il est un fait bien connu, issu des résultats obtenus à la suite de nombreuses recherches, que la capacité d'amortissement des vibrations est fortement variable d'un cas à l'autre. Le type de structure et les liaisons avec les corps environnants, aussi bien que l'état de sollicitation, ont une influence sensible, même spectaculaire, sur la capacité des structures d'absorber de l'énergie de vibration. Quoique la littérature de spécialité présente une grande quantité de données à ce sujet, on juge comme utile de résumer dans le tableau 1 quelques résultats obtenus pendant les dernières années par les chercheurs roumains, à la suite de l'utilisation de différents techniques expérimentales.

Tableau 1

No	Type de structure	Technique d'essai	Méthode d'analyse	Valeurs de "n"	Référence	Commentaire
1.	Barrages-vôûte, encastrés dans des massifs rocheux	Explosions souterraines de faible intensité	Mesurement du décrément logarithmique	0,004 à 0,008	[7]	Valeurs spécifiques pour le comportement linéaire
2.	Bâtiments résidentiels ou administratifs à 8 ... 25 étages	Agitation microsismique permanente vibro-grammes	Examination qualitative des vibrogrammes	Pas de précises tives des grammes	[8]	Discussion à la suite du tableau
3.	Structures industrielles soumises à l'action des ponts-roulants	Fonctionnement des ponts-roulants	Analyse du décrément logarithmique	0,015 à 0,025 (métal) 0,02 à 0,04 (béton armé)	INCERC, Bugheanu	Des différences sensibles entre les structures et même entre les modes de vibration

4.	Structure en Agitation béton armé à microsism-cadres, avec mique antenne en acier	Examina-tion qualifiative des vibrogrammes	Pas de valeurs précises	INCERC, Ţerbănescu, Zorapapel	Discussion à la suite du tableau
5.	Eléments Chocs de préfabriqués faible cylindriques intensité en béton pré contraint, pour les toitures	Mesurement du décrément logarithmique	0,003	[1]	Superposi-tion des mouvements de flexion et de torsion
6.	Fragments de Chocs de grands panneaux à joints site par boucles bétonnées	Mesurement du décrément logarithmique	0,04 à 0,06 av. 0,07 à 0,11 avec 0,11 à 0,18 après fissuration complète	IEB, Mazilu ţerbănescu	Influence décisive du développement des fissures dans les joints
7.	Modèles de structures en grands panneaux, à différents systèmes de joints, à l'échelle 1: 4	Générateurs de vibrations. Essais jusqu'à la rupture	Analyse de la courbe de reso-nance	0,03 à 0,09, avec forte influence du système de ţerbănescu, ţorapapel	[9], INCERC, ţerbănescu, ţorapapel Tendance de stabilisation des va-leurs pour les hauts niveaux de sollicitati-on
8.	Modèles de diaphragmes en béton armé, à l'échelle 1:4	Flexion dynamique, à l'aide des générateurs de vibrations	Analyse de la courbe de reso-nance	0,04 à 0,14	[3] Tendance de stabilisation à des va-leurs de l'ordre 0,04 à 0,07

L'utilisation de l'agitation microsismique comme agent perturbateur ne permet pas d'obtenir des conclusions fermes sur la capacité d'amortissement lorsque l'on ne dispose pas de la possibilité d'effectuer une analyse automatique, correlative ou spectrale, des enregistrements obtenus. Néanmoins, l'observation visuelle des vibrogrammes est hautement instructive. Elle permet de comparer les sélectivités des différentes structures et même de remarquer une différence qualitative du comportement des différentes parties des structures. Par exemple, les essais mentionnés au No. 2 du tableau ont permis de mettre en évidence de hautes sélectivités de quelques structures (dues surtout à des conditions particulières de fondation). Tout de même, l'essai mentionné au No. 4 du tableau a permis d'observer un comportement tout spécial: oscillation de l'infrastructure en béton armé avec une fréquence prédominante de l'ordre de 1 Hz., tandis que la tour en acier oscillait presque sinusoïdalement, avec une fréquence de 3,2 Hz. (les problèmes analysés au paragraphe 4 de la discussion sont d'intérêt direct pour ce dernier cas).

## 2. Localisation de la capacité d'amortissement

La capacité d'amortissement peut être analysée dans le stade de comportement linéaire des matériaux à l'aide des relations établies pour une vibration sinusoïdale. Si les différents paramètres des vibrations peuvent être exprimés sous la forme

$$f(t) = \operatorname{Re} [\hat{f}(i\omega) e^{i\omega t}] \quad (1)$$

il existe, pour chaque fréquence circulaire  $\omega$ , une relation entre les amplitudes complexes des tensions et des déformations, de la sorte

$$\hat{s}(i\omega) = \hat{B}(i\omega) \hat{e}(i\omega) \quad (2)$$

Si l'on peut établir une relation analytique (2), valable pour un ensemble de valeurs  $\omega$  ayant au moins un point d'accumulation à distance finie, cette relation peut être prolongée analytiquement dans le plan complexe

$$p = \chi + i\omega \quad (3)$$

et peut être considérée comme l'image Laplace-Carson d'une loi rhéologique entre les tensions  $s(t)$  et les déformations  $e(t)$  (la transformation intégrale bilatérale Laplace-Carson entre l'original  $f(t)$  et son image  $\hat{f}(p)$  a la forme [10]

$$\begin{aligned} \hat{f}(p) &= p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (\operatorname{Re} p \in \text{domaine de convergence}) \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} \hat{f}(p) dp \quad (\operatorname{Re} p = \text{const.}) \end{aligned} \quad (4)$$

où il faut prêter l'attention nécessaire à la valeur  $\operatorname{Re} p$ , qui détermine le domaine de convergence de la transformation).

En particulier, le modèle rhéologique Kelvin-Voigt correspond à un coefficient

$$\hat{B}(i\omega) = E + i\omega\eta \quad (5)$$

(E: module d'élasticité,  $\eta$ : module de viscosité) ou, bien, pour l'original,

$$B(t) = E H(t) + \eta \frac{d}{dt} \quad (H(t): \text{fonction de Heaviside}) \quad (6)$$

La quantité  $\operatorname{Re} [\hat{B}(p)]$  doit être strictement positive pour toute l'axe imaginaire  $p = i\omega$  (corps solide), tandis que la quantité  $\operatorname{Im} [\hat{B}(i\omega)]$  doit être non-négative pour toute l'axe, lorsqu'il n'existe pas de source d'énergie interne. De plus,  $\operatorname{Re} [\hat{B}(p)] = \operatorname{Re} [\hat{B}(\bar{p})]$  et  $\operatorname{Im} [\hat{B}(p)] = -\operatorname{Im} [\hat{B}(\bar{p})]$  ( $\bar{p}$ : conjugué complexe de  $p$ ) lorsque la loi rhéologique pour l'original ne contient pas de termes complexes. Les zéros de la fonction  $\hat{B}(p)$  sont des points du spectre de fluage du matériau (variation d' $e(t)$  pour  $s(t)$  constant), tandis que les poles de cette fonction sont des points du spectre de relaxation du matériau (variation de  $s(t)$  pour  $e(t)$  constant). Pour un modèle Kelvin la condition  $\hat{B}(p) = 0$  conduit à la valeur

$$p_{fl.} = -\frac{E}{\eta} \quad (7)$$

et donc, à des phénomènes de fluage du type

$$e(t) = e_0 e^{p_{fl.} t} = e_0 e^{-\frac{E}{\eta} t} = e_0 e^{-\frac{E}{\eta} T_{ret}} \quad (T_{ret} = \frac{1}{p_{fl.}}) \quad (8)$$

Si, pour un processus de déformation caractérisé par une relation (2), l'on compare l'énergie spécifique de déformation maximum par cycle,  $E_1$ , et l'énergie dissipée par cycle,  $E_2$ ,

$$E_1 = \frac{1}{2} |\hat{s}(i\omega)| \cdot |\hat{e}(i\omega)| \cos \arg \hat{B}(i\omega) \quad (9)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} |\hat{s}(i\omega)| \cdot |\hat{e}(i\omega)| \sin \arg \hat{B}(i\omega)$$

le rapport  $\psi$ , donné par la relation

$$\Psi = \frac{E_2}{E_1} = 2\pi \frac{\text{Im} [\hat{B}(i\omega)]}{\text{Re} [\hat{B}(i\omega)]} \quad (10)$$

est une mesure de la capacité d'amortissement qui permet une analyse approfondie du mécanisme d'absorption de l'énergie. Les différences de phase entre les tensions et les déformations, déterminées par le rapport  $\text{Im} [\hat{B}(i\omega)] / \text{Re} [\hat{B}(i\omega)]$  permettent d'analyser la localisation des pertes d'énergie, donc de la capacité d'amortissement.

Le problème de définir un coefficient  $\Psi$  pour un corps non-homogène est délicat, puisque l'on peut sommer d'une manière naturelle les quantités  $E_2$ , mais pas les quantités  $E_1$ , lorsqu'il s'agit de différences de phase entre les différentes parties d'un corps.

### 3. Modèles rhéologiques linéaires élémentaires

Le modèle rhéologique linéaire le plus simple de matériau solide non-élastique est le modèle Kelvin, donné par la relation (6) ou par sa transformée Laplace-Carson,

$$\hat{B}(p) = E + \eta p \quad (11)$$

Ce modèle a un point du spectre de fluage, donné par la relation (9). Le modèle, largement utilisé dans la dynamique des structures, présente l'inconvénient majeur de conduire à une capacité d'amortissement proportionnelle à la fréquence circulaire:

$$\frac{\Psi}{2\pi} = \frac{\text{Im} [\hat{B}(i\omega)]}{\text{Re} [\hat{B}(i\omega)]} = \frac{\eta\omega}{E} \quad (12)$$

qui est en contradiction directe avec l'expérience.

Le modèle de complexité suivante est celui de Poynting,

$$\hat{B}(p) = E_o + \frac{p\eta_1}{1 + \frac{p\eta_1}{E_1}} \quad (E_o = E_{\text{statique}}, \quad E_1 = E_{\text{dynamique}} - E_o) \quad (13)$$

qui a un point du spectre de fluage,  $p_{\text{fl.}}$ , et un point du spectre de relaxation,  $p_{\text{rel.}}$ , donnés par les relations

$$p_{\text{fl.}} = - \frac{E_o}{(1 + \frac{E_o}{E_1})\eta_1} \quad (T_{\text{ret}} = 1/p_{\text{fl.}}) \quad (14)$$

$$p_{\text{rel.}} = - \frac{E_1}{\eta_1} \quad (T_{\text{rel}} = 1/p_{\text{rel.}})$$

Ce modèle, plus perfectionné que le précédent, a toutefois l'inconvénient de conduire à une capacité d'amortissement qui disparaît pour de très hautes fréquences.

Le modèle de Poynting peut être encore corrigé par le modèle de Maxwell généralisé,

$$\hat{B}(p) = E_o + \sum_i^{1,n} \frac{p\eta_i}{1 + \frac{p\eta_i}{E_i}} \quad (15)$$

qui présente plusieurs points pour les spectres de fluage et de relaxation. Ce modèle permet une approximation des propriétés d'amortissement observées expérimentalement pour une bande de fréquences convenablement large.

Le modèle de l'amortissement constant,

$$\hat{B}(p) = E(1 + i\gamma) \quad (16)$$

est souvent en bonne correspondance avec l'expérience, mais présente les inconvénients de ne pas permettre d'obtenir un original réel ou des phénomènes de fluage et, aussi, de présenter une capacité d'amortissement qui ne disparaît pas pour de très basses fréquences.

En conclusion il semble que, pour une analyse théorique, concernant aussi l'analyse des mouvements vibratoires linéaires des structures, il est convenable de chercher une approximation des propriétés observées par une loi du type (15), dont les coefficients seront déterminés en partant des phénomènes de mouvement sinusoïdal.

#### 4. Formulation des problèmes de la dynamique des structures

Une structure réduite à un système à  $n$  degrés de liberté, dont les déplacements sont représentés par un vecteur  $n$ -dimensionnel  $U(t)$ , soumise à un système de forces sinusoïdales, dont les amplitudes complexes constituent le vecteur  $\hat{F}(i\omega)$ , va effectuer des vibrations linéaires satisfaisant une équation matricielle de la forme

$$[-\omega^2 M + \hat{K}(i\omega)] \cdot \hat{U}(i\omega) = \hat{F}(i\omega) \quad (17)$$

où  $\hat{U}(p)$  est l'image du vecteur  $U(t)$ ,  $M$  représente la matrice d'inertie, lorsque  $\hat{K}(i\omega)$  représente la matrice de rigidité. En cas de l'existence de liaisons internes exclusivement visco-élastiques du type Kelvin, la matrice  $\hat{K}(i\omega)$  aura la forme

$$\hat{K}(i\omega) = K_o + i\omega C_o \quad (18)$$

( $K_o$ : matrice de rigidité élastique;  $C_o$ : matrice de rigidité visqueuse).

La matrice  $\hat{K}(i\omega)$  est (en cas de l'hypothèse (18), aussi que dans celui d'hypothèses plus générales) symétrique mais complexe, donc non plus auto-adjointe. Les valeurs propres deviendront en ce cas complexes, tel que les vecteurs propres. En cas des valeurs propres multiples, il n'est plus possible, en général, de déterminer une base complète de vecteurs propres, mais il faut faire appel aux vecteurs principaux pour arriver à une base  $n$ -dimensionnelle convenable. Une voie utilisée dans la littérature [2], [5] consiste à formuler un problème de valeurs propres  $2n$ -dimensionnel. Cette voie, qui est utilisable seulement en partant de l'hypothèse (18), conduit à des valeurs propres qui correspondent aux vibrations propres (atténuées) du système considéré.

Dans le cas d'une matrice  $\hat{K}(p)$  plus générale, il est convenable d'adopter un point de vue différent [6]. On associe à l'équation (17) le problème de valeurs propres  $n$ -dimensionnel, fonction du paramètre  $p$ ,

$$[-\lambda(p)M + \hat{K}(p)] \cdot \hat{U}(p) = 0 \quad (19)$$

Les solutions  $\lambda_r(p)$  et  $\hat{U}_r(p)$  ( $r = 1 \dots n$ ) permettent d'établir l'expression de la matrice de transfert,  $\hat{H}(p)$ , pour chaque valeur  $p$ ,

$$\hat{H}(p) = \sum_{r=1}^{1,n} \frac{\hat{U}_r(p) \cdot \hat{U}_r^T(p)}{[\lambda_r(p) + p^2] \cdot M_r} \quad (M_r = \hat{U}_r^T(p) \cdot M \cdot \hat{U}_r(p)) \quad (20)$$

(cette expression doit être généralisée pour des points  $p'$  avec des valeurs propres multiples). Lorsque l'on veut déterminer les vibrations propres atténuées, il faut chercher les pôles de  $\hat{H}(p)$ , donnés par la relation  $\lambda_r(p) + p^2 = 0$ .

## Bibliographie

- |  |  |
|--|--|
| 1. St. Bălan, M. Arcan<br>(sous direction de)            | Essai des Constructions<br>Eyrolles, 1972  |
| 2. T. K. Caughey, M. E. J.<br>O'Kelly                    | General theory of vibrations of damped<br>linear dynamic systems.<br>C.I.T. Report, 1963.                                    |
| 3. D. Dumitrescu, I. Brînzan,<br>H. Sandi, G. Ţerbănescu | Modèles de diaphragmes en béton armé, soumis<br>à de fortes sollicitations dynamiques.<br>Colloque RILEM, Mexico City, 1966. |
| 4. F. Eirich<br>(edited by)                              | Rheology, theory and applications.<br>Academic Press, N.Y., 1956   |
| 5. M. E. J. O'Kelly                                      | Vibration of viscously damped linear<br>dynamic systems.<br>C.I.T. Report, 1964.   |
| 6. H. Sandi  | Eigenwertaufgaben und Übertragungsmatrizen<br>für nichtkonservative mechanische Systeme.<br>ZAMM, 5, 1970.                   |
| 7. H. Sandi, D. Dragomir,<br>I. Toma                     | Experimental studies on the normal vibration<br>modes of arch dams.<br>Colloque RILEM, Bucarest, 1969.                       |
| 8. H. Sandi, G. Ţerbănescu                               | Experimental results on the dynamic defor-<br>mation of multi-story buildings.<br>Proc. 4wcee, Santiago, 1969.               |
| 9. G. Ţerbănescu, H. Sandi,<br>T. Zorapapel              | Dynamic model tests of a large-panel<br>structure.<br>Colloque RILEM, Bucarest, 1969.  |
| 10. B. Van der Pol, H. Bremmer                           | Operational calculus based on the two-sided<br>Laplace transform.<br>(transl. into Russian), Moscow, 1952.                   |

## RESUME

La contribution présente d'abord quelques résultats sur la capacité d'amortissement obtenus sur des structures grandeur nature ou sur des modèles à grande échelle. On s'occupe ensuite de la localisation de la capacité d'amortissement et on discute l'utilisation des modèles rhéologiques élémentaires linéaires. Finalement on s'occupe de la formulation des équations de mouvement et des problèmes de la dynamique des structures.

## ZUSAMMENFASSUNG

Es werden einige quantitative Ergebnisse über die Dämpfungsfähigkeit von Naturmassstabbauwerken und Grossmassstabmodellen angegeben. Die Arbeit befasst sich dann mit der Lokalisation der Dämpfungsfähigkeit und erörtert die Anwendung linearer elementarer rheologischer Modelle. Schliesslich werden die Formulierung der Bewegungsgleichungen und die Aufgaben der Baudynamik betrachtet.

## SUMMARY

Some quantitative results on the damping capacity obtained on fullscale structures and on large-scale models are first presented. Localisation of damping capacity is then dealt with. The use of linear elementary rheological models is discussed. Finally the formulation of equations of motion and of problems of dynamics is dealt with.