

Zeitschrift: IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen
Band: 13 (1973)
Artikel: Traglasten der Stahlstützen unter statischer und dynamischer Wirkung
Autor: Dimitrov, Nikola S. / Glaser, P.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-13745>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Traglasten der Stahlstützen unter statischer und dynamischer Wirkung

Ultimate Loads of Steel Columns under Static and Dynamic Action

Charges ultimes des colonnes en acier soumis à des efforts statiques et dynamiques

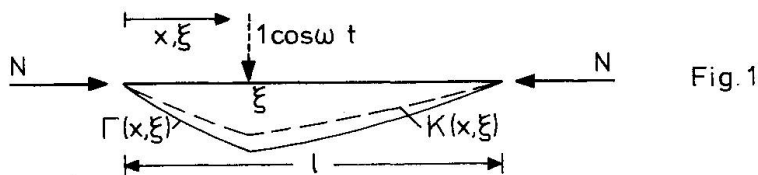
Nikola S. DIMITROV P. GLASER

Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Ing.

Institut für Tragkonstruktionen und konstruktives Entwerfen
Universität Stuttgart, BRD

Traglasten der Stahlstützen unter statischer und dynamischer Wirkung

Mit den Greenschen Funktionen $K(x, \xi)$ und $\Gamma(x, \xi)$ gemäß Fig. 1



lassen sich leicht die Biegemomente $M(x)$ und die Biegelinien $y(x)$ unter beliebiger Last $p(x)$ ermitteln:

Einfache Biegung:

$$M_0(x) = \int_0^l K(x, \xi) p(\xi) d\xi \quad (1)$$

Druckbiegung und harmonischer Schwingung:

$$M(x) = \int_0^l \Gamma(x, \xi) p(\xi) d\xi \quad (1a)$$

Allgemeine Biegelinie:

$$y(x) = \int_0^l \Gamma(x, \xi) \frac{M_0(\xi)}{EI} d\xi = \int_0^l K(x, \xi) \frac{M(\xi)}{EI} d\xi \quad (1b)$$

$$= \frac{M(x) - M_0(x)}{N} \quad (1c)$$

mit

$$\Gamma(x, \xi) = \begin{cases} x \leq \xi: & 1 \left[\frac{\varphi_1^2}{\varphi_1 + \varphi_2} \frac{\sin \varphi_1 x/l}{\varphi_1 \sin \varphi_1} \sin \varphi_1 (1 - \xi/l) + \right. \\ & \left. + \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1 + \varphi_2} \frac{\sinh \varphi_2 x/l}{\varphi_2 \sinh \varphi_2} \sinh \varphi_2 (1 - \xi/l) \right] \cos \omega t \\ x \geq \xi: & x \text{ mit } \xi \text{ vertauschen} \end{cases} \quad (2)$$

$$\varphi_1 = l \sqrt{\pm \frac{N}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{N}{2EI}\right)^2 + m \frac{\omega^2}{EI}}} \quad (2a)$$

$$\varphi_2 = l \sqrt{\pm \frac{N}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{N}{2EI}\right)^2 + m \frac{\omega^2}{EI}}} \quad (2b)$$

Das obere Vorzeichen gilt für N als Druckkraft, das untere für Zugkraft.

Es bedeuten:

- m - Masse je Längeneinheit
- ω - Kreisfrequenz einer erzwungenen harmonischen Schwingung
- EI - Biegesteifigkeit des Stabes.

Aus der Gl. (2) kann man im Sonderfall $N=0$, $\omega=0$ die einfache Kernfunktion $K(x,\xi)$ bekommen.

Der kritische Fall $\varphi_1=\pi$ gem. Gl. (2a), ergibt die allgemeine Euler-Last:

$$N_K = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(1 - m \frac{\omega^2 l^4}{\pi^2 EI} \right) \quad (3)$$

$$= N_{K0} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{K0}^2} \right) \quad (3a)$$

oder nach ω_K (als Resonanzzahl)

$$\omega_K^2 = \frac{\pi^4 EI}{l^4 m} \left(1 - \frac{N}{N_{K0}} \right) \quad (3b)$$

wenn

$$\omega_{K0} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (3c)$$

$$N_{K0} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (\text{ Euler - Last }) \quad (3d)$$

bedeuten.

Der Winkel φ_1 bleibt kleiner als π , wenn $N < N_K$ ist.

Es ist noch darauf hinzuweisen, daß bei rollender Einzellast mit einer Geschwindigkeit V_0 und einer Einzelmasse m_ξ sowie unter harmonischer Schwingung als auch unter Normallast die Euler-Last noch weiter abgebaut wird, s. [4] :

$$N_{Kr} = N_{K0} \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_{K0}^2} - m \frac{V_0^2 l^2}{\pi^2 EI} - m_\xi \frac{V_0^2 l}{4 EI} - m_\xi \frac{\omega^2 l^3}{4 \pi^2 EI} \right] \quad (4)$$

Für die praktischen Berechnungen lassen sich leichte Näherungsformeln aus den Gl. (1 bis 1c) mit Hilfe der Reihenentwicklungen angeben.

So lautet ein einfacher Vergrößerungsfaktor:

$$f/f_0 = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_{K0})^2 \mp N/N_{K0}} \quad (5)$$

wenn f_0 der Biegepfel nach der linearen Theorie
und f die größte Amplitude bedeuten

Auch hier ist das obere Vorzeichen für N als Druckkraft und das untere für Zugkraft.

Fig. 2 soll eine außermittig gedrückte Stütze bedeuten, die unter harmonischer Schwingung steht. Ihre Randmomente können im Sonderfall den Trapezverlauf annehmen.

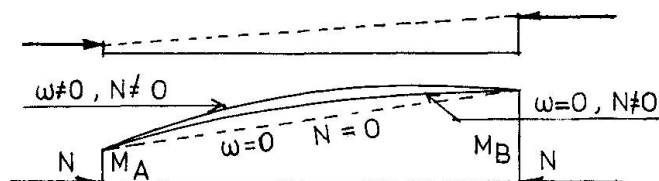


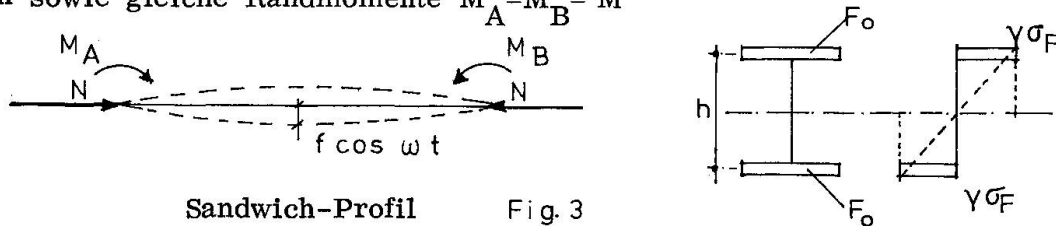
Fig. 2

Biegemomente beim gedrückten Stab

Der allgemeine Verlauf lautet, wenn $\cos \omega t = 1$ gesetzt wird :

$$M(x) = M_A \left[\frac{\varphi_1^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \frac{\sin \varphi_1 (1-x/l)}{\sin \varphi_1} + \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \frac{\sinh \varphi_2 (1-x/l)}{\sinh \varphi_2} \right] + M_B \left[\frac{\varphi_1^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \frac{\sin \varphi_1 (1-x/l)}{\sin \varphi_1} + \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \frac{\sinh \varphi_2 (1-x/l)}{\sinh \varphi_2} \right] \quad (6)$$

Als Stützenquerschnitt wird ein Sandwich-Profil s. Fig.3, angenommen. Hierbei wird die Querschnittsfestigkeit im plastischen Zustand nicht beeinflusst. Um störende Einflüsse zu vermeiden, wird Biegung nur in einer Ebene angenommen sowie gleiche Randmomente $M_A = M_B = M$



Sandwich-Profil Fig. 3

Unter Beachtung der Parameter

$$n_1 = \frac{N}{N_u} < 1 ; \quad n_2 = \frac{\omega}{\omega_K} < 1 ; \quad \mu = \frac{M}{M_u} < 1 ; \quad \gamma = \frac{\sigma_w}{\sigma_F} < 1 ;$$

mit

$N_u = 2 \sigma_F F_0$	(obere Schranke der Bruchlast)
$M_u = \gamma \sigma_F F_0 h$	(Tragmoment)
$\gamma < 1$	(Abminderungsfaktor der Baustofffestigkeit infolge Wechselwirkung als untere Schranke)

und der Querschnittswerte

$$F = 2 F_0 ; \quad I = \frac{F_0 h^2}{2}$$

sowie der Schlankheitsgrad

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{I/F}} = \frac{2l}{h} \quad (7)$$

kann die Tragfähigkeit der Stütze ermittelt werden. Sie ist gekennzeichnet durch die Grenzspannung $\gamma \sigma_F$ und durch die maximale Durchbiegung $f = y(l/2)$

Die Durchbiegung kann aus Gl. (1c) ermittelt werden:

$$N_y(x) = M(x) - M_0(x)$$

wobei $M(x)$ nach Gl. (6) und

$$M_0(x) = M_A (1-x/l) + M_B x/l$$

Für $M_A = M_B = M$ hat man dann:

$$N \cdot y(x) = M \left[\frac{\varphi_1^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \frac{\sin \varphi_1 (1-x/l) + \sin \varphi_1 x/l}{\sin \varphi_1} + \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \frac{\sinh \varphi_2 (1-x/l) + \sinh \varphi_2 x/l}{\sinh \varphi_2} - 1 \right] \quad (8)$$

Für $x=l/2$ hat man für die größte Biegeordinate bezogen auf die Querschnittshöhe h die Beziehung:

$$\frac{f}{h} = \frac{\mu}{2 n_1} \left[\frac{\varphi_1^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \frac{1}{\cos \varphi_1/2} + \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \frac{1}{\cosh \varphi_2/2} - 1 \right] \quad (9)$$

Diese nichtlineare Funktion ist eine äußere Gleichgewichtsaussage.

Die Winkel φ_1 und φ_2 lauten für das obere Vorzeichen der Gl. (2a) u. (2b) mit Einführung der Parameter n_1 und n_2

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \lambda \sqrt{\frac{\sigma_F}{2E}} \sqrt{n_1 + \sqrt{n_1^2 + \frac{4\pi^4 EI^2 n_2^2}{l^2 \gamma^2 \sigma_F F^2}}} \\ \varphi_2 &= \lambda \sqrt{\frac{\sigma_F}{2E}} \sqrt{-n_1 + \sqrt{n_1^2 + \frac{4\pi^4 EI^2 n_2^2}{l^2 \gamma^2 \sigma_F F^2}}} \end{aligned} \quad (10)$$

In [1] ist der Sonderfall $n_2=0$, d.h. reine Knickbiegung bereits behandelt.

Der homogene Fall ($M_A = M_B = M = 0$) ergibt sich aus Gl. (3a) mit der abgeminderten kritischen Last

$$\frac{N_K}{N_U} = \frac{\pi^2 E}{\sigma_F \lambda^2} (1 - n_2^2) \quad (11)$$

Die innere Gleichgewichtsaussage \bar{f}/h erhält man aus der Bemessung für die Grenzspannung:

$$\frac{N}{F} + \frac{\bar{M}}{W} = \frac{N}{2F} + \frac{\bar{M}}{h F_0} = \gamma \sigma_F \text{ (bzw. } = \sigma_F \text{)} \quad (12)$$

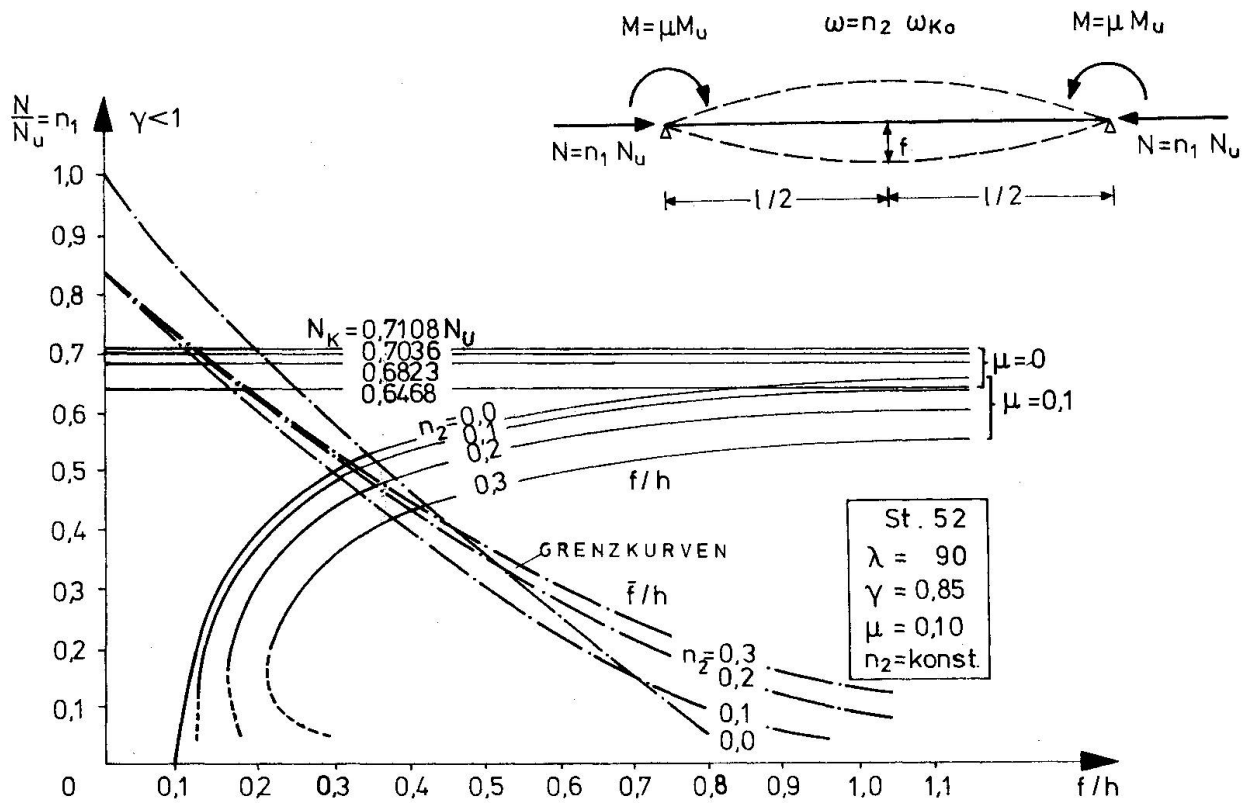
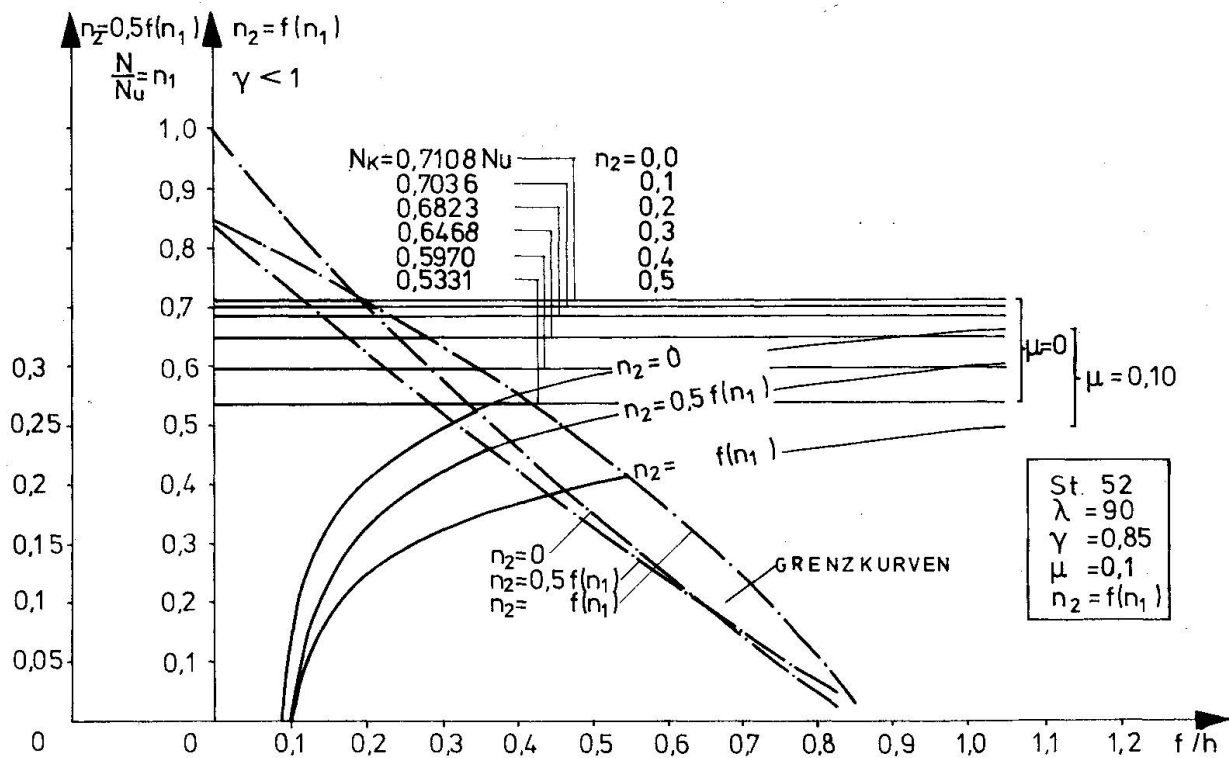
Das vorhandene innere Moment $M = \bar{M}$ bezogen auf das Tragmoment M_U lautet jetzt:

$$\frac{\bar{M}}{M_U} = \frac{1}{\frac{\varphi_1^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \frac{1}{\cos \varphi_1/2} + \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \frac{1}{\cosh \varphi_2/2}} \left(1 - \frac{\sigma_n}{\sigma_F} \right) \frac{1}{\gamma} \quad (13)$$

In Gl. (9) eingesetzt erhält man entsprechend:

$$\frac{\bar{f}}{h} = \frac{1}{\frac{\varphi_1^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \frac{1}{\cos \varphi_1/2} + \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \frac{1}{\cosh \varphi_2/2}} \left[1 - \frac{n}{\gamma} \right] \left(\frac{\varphi_1^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \frac{1}{\cos \varphi_1/2} + \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \frac{1}{\cosh \varphi_2/2} - 1 \right) \frac{1}{2 n_1} \quad (14)$$

Diese Beziehung stellt in den Fig. 4 und 5 die Grenzkurven dar.

Traglastkurven für $n_2 = \text{konst.}$ Fig. 4Traglastkurven für veränderliche $n_2 = f(n_1)$ Fig. 5

Schriftum

- 1 Dimitrov, N. und W. Herberg : Festigkeitslehre, Bd. 1, Sammlung Götschen Band 6144, Walter de Gruyter, Berlin-New York: 1971
- 2 Dimitrov, N. : Die Schnittkräfte des Balkens mit schwingender Querbelastung unter Berücksichtigung einer zusätzlichen Normalkraft. Der Stahlbau 26 (1956) Nr. 4 S. 107/111
- 3 Dimitrov, N. : Der Reduktionssatz und die Integralgleichung der Balkenbiegung. Der Bauingenieur 47 (1972) Nr. 5, S. 176/178, sowie Nr. 12
- 4 Dimitrov, N. : Berechnung der Stabwerke unter rollender Last und zusätzlicher Normalkraft. VDI-Z (1967) Nr. 2
- 5 Schuller, R. : Zum Stabilitätsproblem des querschwingenden Druckstabes mit konstanter Normalkraft auf der Grundlage der Elastizitätstheorie. Der Bauingenieur 48 (1973) Nr. 1, S.16/22.

ZUSAMMENFASSUNG

Ganz allgemein wird gezeigt, dass mit Hilfe der Integralgleichungstheorie Traglasten bei Berücksichtigung verschiedenartiger Einflüsse berechnet werden können. Dies gilt auch für beliebige Systeme.

Die Berechnung wird an einer ausmittig beanspruchten Stahlstütze mit Sandwichquerschnitt vorgeführt. Es wird die Abminderung dieser Spannungen, wenn die Stütze unter harmonischen Schwingungen steht, gezeigt. Dabei sind zweierlei Einflüsse zu beachten:

1. geometrische: durch Zunahme der Verformung infolge Abnahme der kritischen Last bei Berücksichtigung von Schwingungen und Druckbiegung.
2. physikalische: durch Abnahme der Querschnittfestigkeit (Baustofffestigkeit) infolge Wechselwirkung als einfache Abminderung.

Die Kurven gem. Fig. 4 und 5 können einen Hinweis auf die Traglasten vermitteln, wobei viele störende Einflüsse wie Dämpfung, Torsion und Kippen vernachlässigt wurden.

SUMMARY

It is shown that by use of the theory of the integral equation one can compute the ultimate loads under consideration of various influences. This is valid for any system.

The computation is demonstrated on the example of a steel column with sandwich-cross-section under an excentric force. The reduction of these stresses are shown when the column is under harmonic vibration. Two influences are to be considered:

1. geometrical: by the increase of the deflection owing to the reduction of the critical load considering vibration and bending under compression.

2. physical: by the decrease of the strength of the cross-section (strength of material) owing to the alternating action as simple reduction.

The curves in Fig. 4 and 5 can give a hint of the ultimate load, whereby many influences of damping, torsion and buckling are neglected.

RESUME

On montre, de manière générale, le calcul des charges ultimes par la méthode des équations intégrales en tenant compte des différentes influences, ceci restant valable pour des systèmes quelconques.

On présente ensuite le calcul d'une colonne en acier à section en sandwich avec charge excentrique. On montre la diminution des tensions lorsque la colonne est soumise à des vibrations harmoniques. On soulignera deux sortes d'influences:

1. Influences géométriques: à cause de l'augmentation des déformations due à la diminution de la charge critique en tenant compte des vibrations et de la flexion due aux efforts de compression.

2. Influences physiques: à cause de la diminution de la résistance de la section (résistance du matériau) due aux charges alternées.

Les courbes des figures 4 et 5 donnent une idée des charges ultimes, bien que beaucoup d'influences gênantes, tel que l'amortissement, la torsion et le renversement aient été négligées.

Leere Seite
Blank page
Page vide