

**Zeitschrift:** IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

**Band:** 11 (1971)

**Artikel:** Analyse du comportement des plaques minces raidies dans le domaine des grands déplacements

**Autor:** Gachon, H.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-12064>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**Analyse du comportement des plaques minces raidies dans le domaine des grands déplacements**

Untersuchung des Verhaltens ausgesteifter dünner Bleche im Bereich grosser Verformungen

Analysis of the Behavior of Thin Stiffened Plates in the Large Displacements Range

**H. GACHON**

Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure  
d'Arts et Métiers  
Paris, France

**I - INTRODUCTION**

Le présent mémoire développe une méthode d'analyse approchée, par éléments finis, du champ de déplacement des structures très déformables.

Cette méthode trouve, en particulier, son application dans l'étude du comportement non linéaire des plaques minces raidies utilisées sous forme de panneaux constituant les parois de structures légères ou de poutres de grande portée (âme mince élancée, plaque orthotrope, ...).

Cette méthode convient bien à l'analyse du champ de déplacement car, d'une part, elle prend parfaitement bien en compte les conditions aux limites de chargement, de liaisons et d'appuis et, d'autre part, elle est développée de manière à assurer une bonne continuité, non seulement des déplacements, mais aussi des déformations donc des contraintes dans toute la structure.

Les raidisseurs associés à la plaque mince peuvent être orientés suivant des directions parallèles, orthogonales ou obliques (cas des membrures obliques des poutres de hauteur variable) et disposés symétriquement ou non par rapport au plan moyen de la plaque. Ils sont à parois minces et à section droite ouverte ou fermée. Ils sont traités dans certains cas dans le domaine des déplacements finis.

L'introduction d'une déformée initiale de faible courbure aussi bien pour la plaque que pour les raidisseurs et d'un état de contraintes propre dans la plaque permet de compléter la prise en compte des données initiales dans le but d'une bonne simulation du comportement réel de la structure.

Nous avons admis, dans une première étape, une loi de comportement élastique du matériau, nous réservant la possibilité dans une seconde étape de prolonger l'étude dans le domaine plastique.

La méthode des "éléments finis" est développée à partir du théorème des travaux virtuels. Le modèle mathématique ainsi défini est traité sur ordinateur numérique automatique - I B M 360-75 - et conduit à l'établissement d'un système non linéaire d'équations exprimant une application de l'espace des déplacements dans l'espace des chargements. La dimension de ces espaces correspond au nombre de degrés de liberté du modèle mathématique adopté. Ce système est résolu par "incrémentations" de la charge, ce qui conduit à mettre en évidence la matrice de raideur tangente de la structure.

Nous présentons ci-après :

- L'équation fondamentale du travail de déformation dans un champ de déplacement virtuel infinitésimal à partir d'un état actuel caractérisé par un champ de déplacement fini, en coordonnées de Lagrange.
- Le choix du champ de déplacement cinématiquement admissible et son application aux plaques minces raidies.
- L'établissement et la méthode de résolution du système d'équations définissant l'application de l'espace des déplacements dans l'espace des chargements du modèle mathématique adopté.
- Un organigramme général du programme développé sur ordinateur - I B M 360-75 - dans le système I C E S (Integrated Civil Engineering System) développé au M I T.

## II - TRAVAIL DE DEFORMATION EN DEPLACEMENTS FINIS

(Coordonnées Cartésiennes - Définition de LAGRANGE)

- Etat initial : coordonnées  $x_i^0$
- Etat actuel : coordonnées  $x_i = x_i^0 + u_i$

- Transformation virtuelle infinitésimale cinématiquement admissible :  $\delta u_i$

- Travail de déformation dans la transformation virtuelle

$$\delta \mathcal{F} = \int_{V^0} S_{ij} \cdot \delta E_{ij} \cdot DV^0$$

avec :

- $\bar{\bar{E}}$  : tenseur de la déformation de GREEN

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j^0} \right]$$

- $\bar{\bar{S}}$  : tenseur de la contrainte de KIRCHHOFF

$$S_{ij} = J \cdot \frac{\partial x_i^0}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_j^0}{\partial x_\ell} \cdot \sigma_{k\ell} \quad ( \sigma_{k\ell} : \text{tenseur d'EULER} )$$

- $J$  : Jacobien de la transformation  $(u_i)$

$$J = \det \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right| = \frac{\rho^0}{\rho}$$

- En déformation infinitésimale  $J = 1$   
et en élasticité :

$$S_{ij} = G_{ijmn} \cdot E_{mn}$$

### III - TENSEURS GENERALISES DE LA DEFORMATION ET DE LA CONTRAINTE DANS LES PLAQUES MINCES, EN ELASTICITE

$$(\bar{E}_{ij})_m \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{E}_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x^0} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x^0} \right)^2 + \frac{\partial w^0}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial w}{\partial x^0} \\ \bar{E}_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial x^0} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y^0} \right)^2 + \frac{\partial w^0}{\partial y^0} \cdot \frac{\partial w}{\partial y^0} \\ \bar{E}_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y^0} + \frac{\partial v}{\partial x^0} + \frac{\partial w}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial w}{\partial y^0} + \frac{\partial w^0}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial w}{\partial y^0} + \frac{\partial w^0}{\partial y^0} \cdot \frac{\partial w}{\partial x^0} \right) = \bar{E}_{yx} \end{aligned} \right.$$

$$(\chi_{ij}) \quad \left\{ \begin{aligned} \chi_{xx} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^{02}} \\ \chi_{yy} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^{02}} \\ \chi_{xy} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^0 \partial y^0} = \chi_{yx} \end{aligned} \right.$$

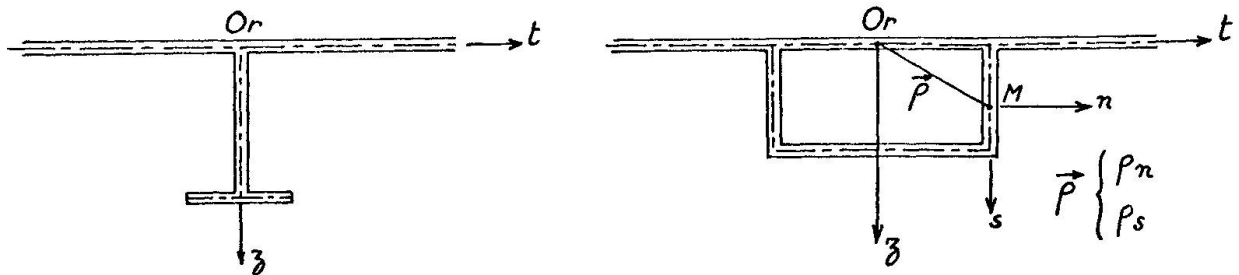
$$(\bar{S}_{ij})_m \quad \left\{ \begin{aligned} N_{xx} &= \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} \cdot (\bar{E}_{xx} + \nu \cdot \bar{E}_{yy}) + N_{xx}^0 \\ N_{yy} &= \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} \cdot (\bar{E}_{yy} + \nu \cdot \bar{E}_{xx}) + N_{yy}^0 \\ N_{xy} &= \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} \cdot \frac{1 - \nu}{2} \cdot \bar{E}_{xy} + N_{xy}^0 \end{aligned} \right.$$

$$(\bar{S}_{ij})_f \quad \left\{ \begin{aligned} M_{xx} &= D \cdot (\chi_{xx} + \nu \cdot \chi_{yy}) \\ M_{yy} &= D \cdot (\chi_{yy} + \nu \cdot \chi_{xx}) \\ M_{xy} &= D \cdot (1 - \nu) \cdot \chi_{xy} \end{aligned} \right. \quad D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

- Travail de déformation dans une transformation virtuelle ( $\delta u_i$ )

$$(\delta \mathcal{C})_{\text{plaque}} = \int_{S^0} (N_{ij} \cdot \delta \bar{E}_{ij} + M_{ij} \cdot \delta \chi_{ij}) \cdot dx^0 \cdot dy^0$$

## IV - CHAMP DE DEPLACEMENT DANS UN RAIDISSEUR



- En O suivant  $Ox, Oy, Oz$   $u, v, w$   
 suivant  $Or, Ot, Oz$   $u_r, u_t, w, \theta$
- En M suivant  $M_t, M_z$

$$\begin{aligned}
 u_t(r, s) &= u_t(r) - \theta(r) \cdot z(s) \\
 w(r, s) &= w(r) + \theta(r) \cdot t(s)
 \end{aligned}$$

suivant  $M_s, M_n$

$$u_s(r, s) = u_t(r) \cdot \frac{dt(s)}{ds} + w(r) \cdot \frac{dz(s)}{ds} + \theta(r) \cdot \rho_n(s)$$

$$u_n(r, s) = u_t(r) \cdot \frac{dz(s)}{ds} - w(r) \cdot \frac{dt(s)}{ds} - \theta(r) \cdot \rho_s(s)$$

suivant  $M_r$  :

$$u_r(r, s) = u_r(r) - \frac{\partial u_t(r)}{\partial r} \cdot t(s) - \frac{\partial w(r)}{\partial r} \cdot z(s) - \frac{\partial \theta(r)}{\partial r} \cdot \Omega(s)$$

avec

$$\Omega(s) = \omega(s) - \frac{\omega_0}{\Gamma_0} \cdot \Gamma(s)$$

$$\omega(s) = \int_0^s \rho_n(s) \cdot ds \quad \Gamma(s) = \int_0^s \frac{ds}{e}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_0 &= \oint \rho_n(s) \cdot ds \\
 \Gamma_0 &= \oint \frac{ds}{e}
 \end{aligned} \right\}$$

en section droite fermée

$$(E_{ij})_m \left\{ \begin{aligned} E_{rr}(r,s) &= \frac{\partial u_r(r)}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_t(r)}{\partial r^2} \cdot t(s) - \frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} \cdot z(s) - \frac{\partial^2 \theta(r)}{\partial r^2} \cdot \Omega(s) \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w(r)}{\partial r} + \frac{\partial \theta(r)}{\partial r} \cdot t(s) \right]^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_t(r)}{\partial r} - \frac{\partial \theta(r)}{\partial r} \cdot z(s) \right]^2 \\ &+ \left[ \frac{\partial w^0(r)}{\partial r} + \frac{\partial \theta^0(r)}{\partial r} \cdot t(s) \right] \left[ \frac{\partial w(r)}{\partial r} + \frac{\partial \theta(r)}{\partial r} \cdot t(s) \right] + \left[ \frac{\partial u_t^0(r)}{\partial r} - \frac{\partial \theta^0(r)}{\partial r} \cdot z(s) \right] \left[ \frac{\partial u_t(r)}{\partial r} - \frac{\partial \theta(r)}{\partial r} \cdot z(s) \right] \\ \left[ E_{rs}(r,s) \right]_{\text{torsion}} &= \frac{\omega_0}{I_0} \cdot \frac{d\theta(r)}{dr} \quad (\text{section droite fermée en torsion uniforme}) \end{aligned} \right.$$

$$(S_{ij})_m \left\{ \begin{aligned} S_{rr}(r,s) &= E \cdot E_{rr}(r,s) \\ S_{rs}(r,s) &= \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot E_{rs}(r,s) \end{aligned} \right.$$

Travail de déformation dans une transformation virtuelle ( $\delta u_i$ )

$$(\delta \mathcal{P})_{\text{raidisseur}} = E \left\{ \int_0^c \int_0^l \left[ E_{rr} \cdot \delta E_{rr} + \frac{e^2}{12} \cdot \frac{d^2 u_n}{dr^2} \cdot \delta \left( \frac{d^2 u_n}{dr^2} \right) \right] e \cdot ds \right. \\ \left. + \frac{1}{2(1+\nu)} \cdot \left( \frac{\omega_0^2}{I_0} + J \right) \cdot \frac{d\theta}{dr} \cdot \delta \left( \frac{d\theta}{dr} \right) \cdot dr \right\}$$

$$\text{avec } J = \frac{1}{3} \cdot \int_0^l e^3 \cdot ds$$

## VI - EQUATION FONDAMENTALE DE L'EQUILIBRE

( Théorème des Travaux Virtuels )

- La transformation virtuelle  $\delta u_i$  est cinématiquement admissible -

$$\int_{V^0} S_{ij} \cdot \delta E_{ij} \cdot dV^0 = \int_{V^0} \rho^0 \cdot F_i^0 \cdot \delta u_i \cdot dV^0 + \int_{S^0} T_i^0 \cdot \delta u_i \cdot dS^0$$

$F_i^0$  : force massique rapportée à l'état initial

$T_i^0$  : force de contact par unité de surface, rapportée à l'état initial

Dans le cas des plaques raidies

$$(\delta \mathcal{E})_{\text{plaque}} + (\delta \mathcal{E})_{\text{raidisseurs}} = \int_{S^0} p_i^0 \cdot \delta u_i \cdot dx^0 \cdot dy^0$$

$p_i^0$  : force active rapportée au plan moyen de la plaque dans son état initial.

## VII - FORMULATION MATRICIELLE DU CHAMP DE DEPLACEMENT

DANS UN ELEMENT DU MAILLAGE

- Champ de déplacement dans l'état actuel :

$$u_i^k(x^0) = \left\{ \widetilde{\varphi(x^0)} \right\}_i \cdot [A]^k \cdot \{D\}$$

- Transformation virtuelle cinématiquement admissible :

$$\delta u_i^k(x^0) = \left\{ \widetilde{\varphi(x^0)} \right\}_i \cdot [A]^k \cdot \left\{ \frac{\partial D}{\partial D_\rho} \right\}$$

où :

$$D_\rho \in [A]^k \cdot \{D\} = \{D\}^k \subset \{D\}$$

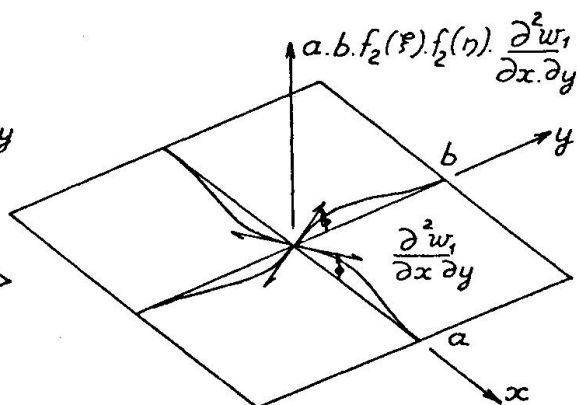
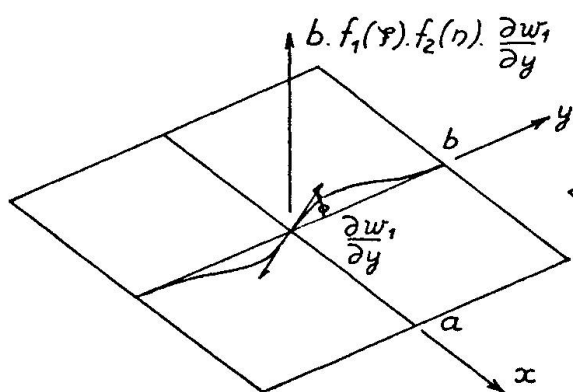
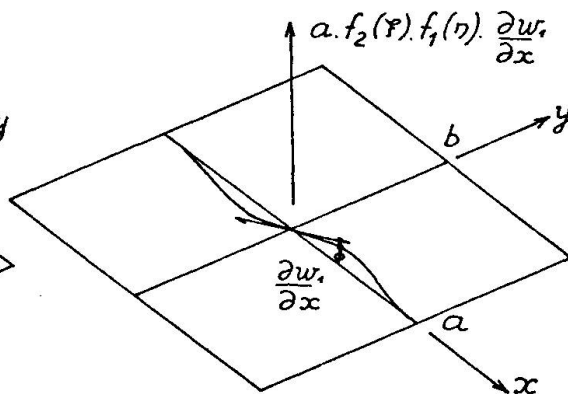
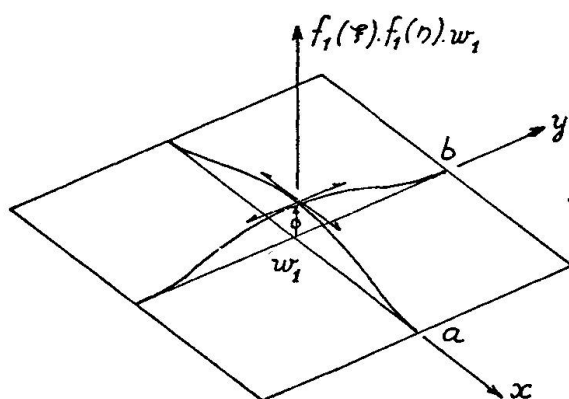
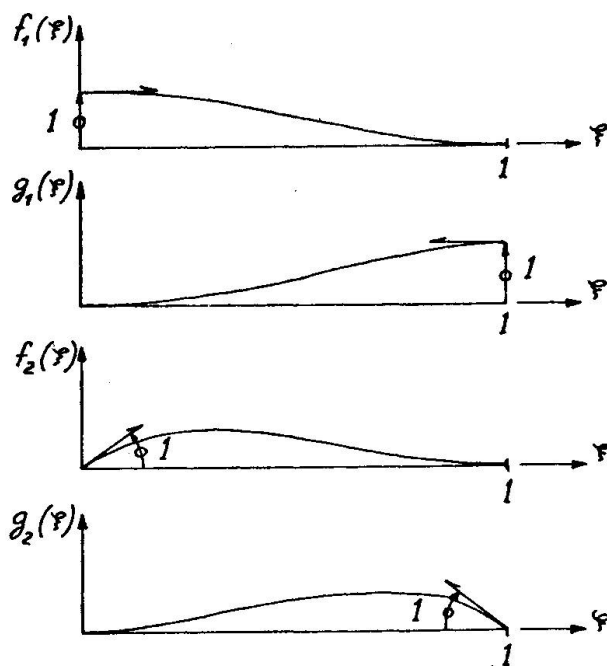
VIII - CHAMP DE DEFORMATION DE FLEXION-TORSION

$$f_1(\varphi) = 1 - 3\varphi^2 + 2\varphi^3 \quad (f_1''''(\varphi) = 0)$$

$$g_1(\varphi) = 3\varphi^2 - 2\varphi^3 \quad (g_1''''(\varphi) = 0)$$

$$f_2(\varphi) = \varphi - 2\varphi^2 + \varphi^3 \quad (f_2''''(\varphi) = 0)$$

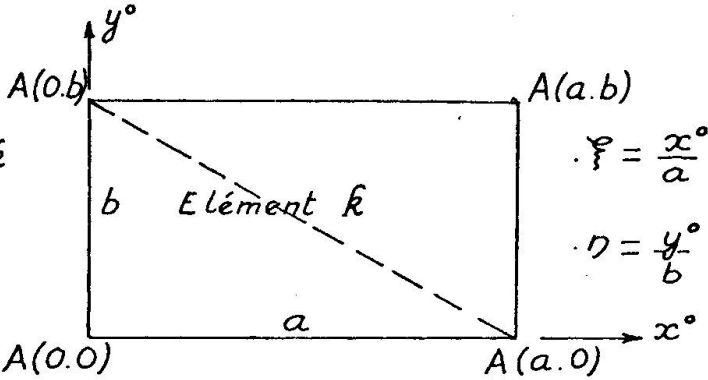
$$g_2(\varphi) = -\varphi^2 + \varphi^3 \quad (g_2''''(\varphi) = 0)$$



avec  $\varphi = \frac{x}{a}$  et  $\eta = \frac{y}{b}$

## IX - CHAMP DE DEPLACEMENT DANS UN ELEMENT DE PLAQUE

$$u_i^k(x^0, y^0) = \{ \widetilde{\varphi(x^0, y^0)} \} \cdot \{ D_i \}^k$$

$$(i = 1, 2, 3)$$


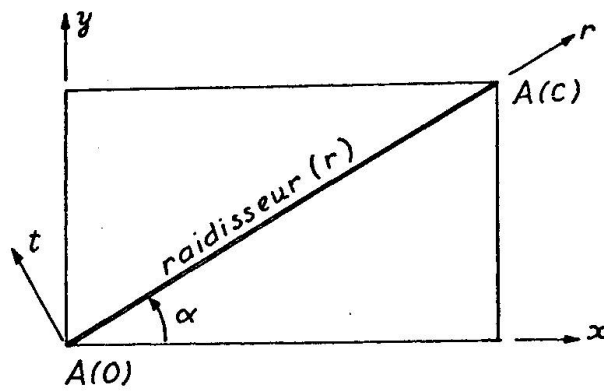
$\xi = \frac{x^0}{a}$   
 $\eta = \frac{y^0}{b}$

$$u_i^k(x, y) = \begin{Bmatrix} f_1(\xi) \cdot f_1(\eta) \\ a \cdot f_2(\xi) \cdot f_1(\eta) \\ b \cdot f_1(\xi) \cdot f_2(\eta) \\ a \cdot b \cdot f_2(\xi) \cdot f_2(\eta) \\ g_1(\xi) \cdot f_1(\eta) \\ a \cdot g_2(\xi) \cdot f_1(\eta) \\ b \cdot g_1(\xi) \cdot f_2(\eta) \\ a \cdot b \cdot g_2(\xi) \cdot f_2(\eta) \\ g_1(\xi) \cdot g_1(\eta) \\ a \cdot g_2(\xi) \cdot g_1(\eta) \\ b \cdot g_1(\xi) \cdot g_2(\eta) \\ a \cdot b \cdot g_2(\xi) \cdot g_2(\eta) \\ f_1(\xi) \cdot g_1(\eta) \\ a \cdot f_2(\xi) \cdot g_1(\eta) \\ b \cdot f_1(\xi) \cdot g_2(\eta) \\ a \cdot b \cdot f_2(\xi) \cdot g_2(\eta) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i,x} \\ u_{i,y} \\ u_{i,xy} \end{Bmatrix}_{0,0} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i,x} \\ u_{i,y} \\ u_{i,xy} \end{Bmatrix}_{a,0} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i,x} \\ u_{i,y} \\ u_{i,xy} \end{Bmatrix}_{a,b} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i,x} \\ u_{i,y} \\ u_{i,xy} \end{Bmatrix}_{0,b} \quad k$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

## X - CHAMP DE DÉPLACEMENT DANS UN RADISSEUR (r).

$$\begin{aligned}
 \{\Delta_1\}_O &= \begin{Bmatrix} u_r(0) \\ u_{r,r}(0) \end{Bmatrix} & \{\Delta_1\}_C &= \begin{Bmatrix} u_r(c) \\ u_{r,r}(c) \end{Bmatrix} \\
 \{\Delta_2\}_O &= \begin{Bmatrix} u_t(0) \\ u_{t,r}(0) \end{Bmatrix} & \{\Delta_2\}_C &= \begin{Bmatrix} u_t(c) \\ u_{t,r}(c) \end{Bmatrix} \\
 \{\Delta_3\}_O &= \begin{Bmatrix} w(0) \\ w_{,r}(0) \end{Bmatrix} & \{\Delta_3\}_C &= \begin{Bmatrix} w(c) \\ w_{,r}(c) \end{Bmatrix} \\
 \{\Delta_4\}_O &= \begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \theta_{,r}(0) \end{Bmatrix} & \{\Delta_4\}_C &= \begin{Bmatrix} \theta(c) \\ \theta_{,r}(c) \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$



Posons  $\{\Delta_i\}^r = \begin{Bmatrix} \{\Delta_i\}_O \\ \{\Delta_i\}_C \end{Bmatrix}$  composantes de déplacement de  $A(0)$  et  $A(c)$  dans  $(r, t, z)$

- Champ de déplacement dans le système  $(r, t, z)$

$$u_i^r(r) = \{\widetilde{\rho}(r)\} \cdot \{\Delta_i\}^r \quad (u_i \equiv u_r, u_t, w, \theta)$$

$$\{\widetilde{\rho}(r)\} = / f_1(\varphi), c.f_2(\varphi), g_1(\varphi), c.g_2(\varphi) / \quad (\varphi = \frac{r}{c})$$

- Matrices de passage :

$$\cdot \{\Delta_1\}_{O \text{ ou } C} = [T_r] \cdot \begin{Bmatrix} \{D_1\} \\ \{D_2\} \end{Bmatrix}_{O \text{ ou } C}$$

$$\cdot \{\Delta_2\}_{O \text{ ou } C} = [T_t] \cdot \begin{Bmatrix} \{D_1\} \\ \{D_2\} \end{Bmatrix}_{O \text{ ou } C}$$

$$\cdot \{\Delta_3\}_{O \text{ ou } C} = [T_w] \cdot \{D_3\}_{O \text{ ou } C}$$

$$\cdot \{\Delta_4\}_{O \text{ ou } C} = [T_\theta] \cdot \{D_3\}_{O \text{ ou } C}$$

avec  $\{D_i\}_O = \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u_{i,x}(0) \\ u_{i,y}(0) \\ u_{i,xy}(0) \end{Bmatrix}$   
 $(i = 1, 2, 3)$   
 Composantes de déplacement de  $A(0)$   
 dans  $(x, y, z)$

XI - RESOLUTION DU SYSTEME NON LINEAIRE

$$F(D) = P$$

Developpons :

$$\left[ [\kappa_0] + [\kappa_1(D)] + [\kappa_2(D^2)] \right] \{D\} = \{P\}$$

ou

$$[\kappa(D)] \{D\} = \{P\}$$

- Méthode de résolution selon NEWTON -

$$F(D^{(n)}) + \frac{\partial F(D^{(n)})}{\partial D_i} \Delta D_i^{(n+1)} = P$$

$$\left\{ \left[ \frac{\partial \kappa}{\partial D_i} \right]^n \{D\}^n + [\kappa]^n \left\{ \frac{\partial D}{\partial D_i} \right\}^n \right\} \Delta D_i^{n+1} = \{P\} - [\kappa(D)]^n \{D\}^n$$

$$\left( \frac{\partial \kappa_{\ell j}}{\partial D_i} D_j + \kappa_{\ell i} \right)^n \Delta D_i^{n+1} \quad \text{avec} \quad (\Delta D_i^{n+1} \rightarrow 0)_{n+1 \rightarrow \infty}$$

$$R_{\ell i} \quad \text{avec} \quad R_{\ell i} = R_{i\ell} \in [R]$$

$$[R(D)]^n \{\Delta D\}^{n+1} = \{P\} - [\kappa(D)]^n \{D\}^n$$

- Méthode de résolution par petits accroissements de charge

$$[R(D)]^n \{\Delta D\}^{n+1} = \{\Delta P\}^{n+1}$$

$[R(D)]^n$  : matrice de raideur tangente de la structure  
dans un état  $(P, D)^n$

## XII - PROPRIETES DE LA MATRICE DE RAIDEUR TANGENTE

1 - La matrice  $[R]$  est symétrique réelle :  $[R]_{ii} = [\widetilde{R}]_{ii}$  ,  $[R]_{ij} = [\widetilde{R}]_{ji}$

$$\begin{bmatrix}
 [R]_{ii} & [R]_{ij} & [R]_{ik} & [R]_{il} \\
 [R]_{ji} & [R]_{jj} & [R]_{jk} & [R]_{jl} \\
 [R]_{ki} & [R]_{kj} & [R]_{kk} & [R]_{kl} \\
 [R]_{li} & [R]_{lj} & [R]_{lk} & [R]_{ll}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \{\Delta D\}_i \\
 \{\Delta D\}_j \\
 \{\Delta D\}_k \\
 \{\Delta D\}_l
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \{\Delta P\}_i \\
 \{\Delta P\}_j \\
 \{\Delta P\}_k \\
 \{\Delta P\}_l
 \end{bmatrix}$$

2 - Critère général de stabilité :

$$\{\widetilde{\Delta D}^*\} [R] \{\Delta D^*\} > 0 \quad \forall \quad \widetilde{\Delta D}^* \longrightarrow \det [R] > 0$$

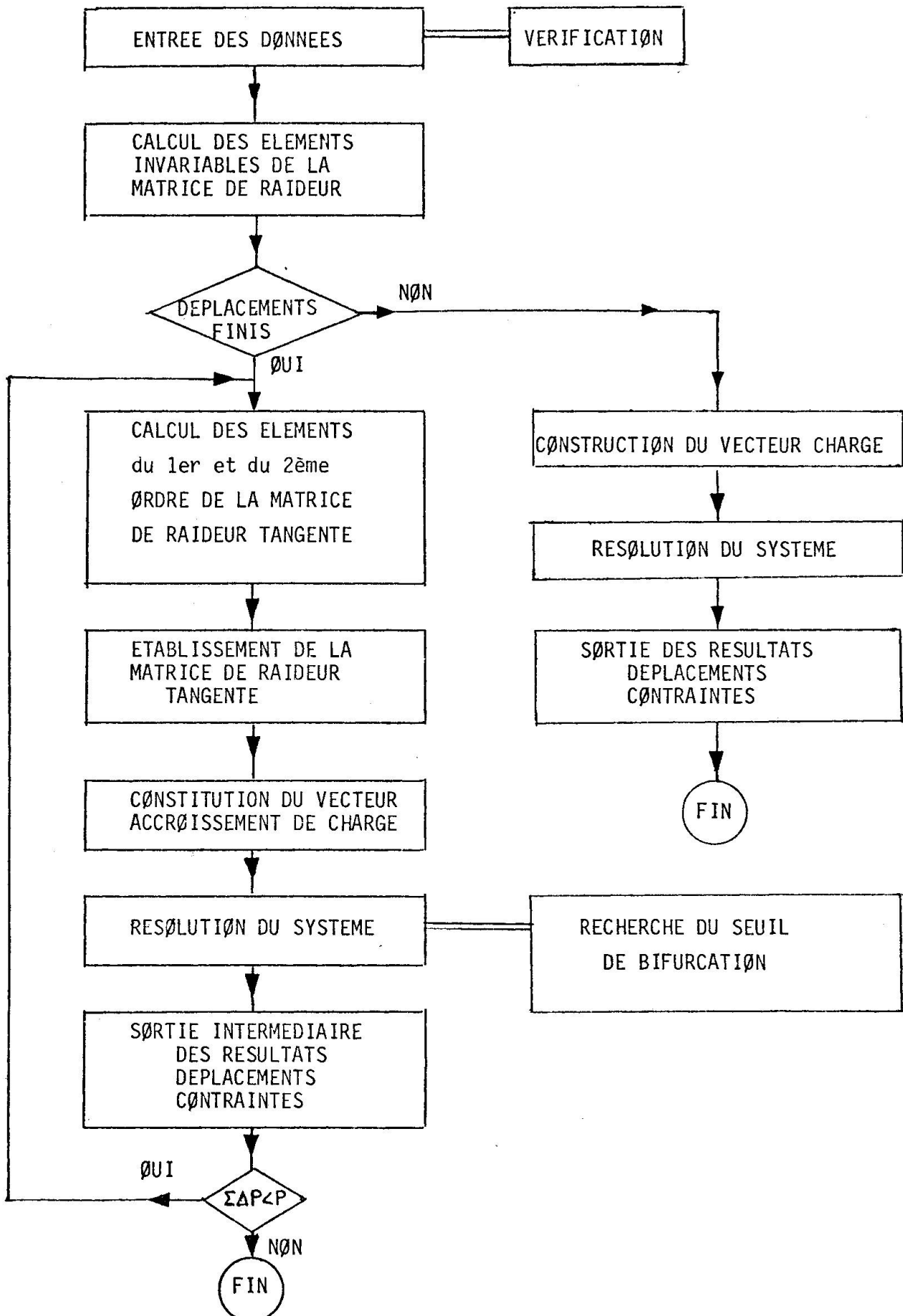
ou plus précisément, les valeurs propres  $\lambda_i > 0$  ,  $\forall i$  .

La matrice  $[R]$  est définie positive -

3 - Seuil de bifurcation d'une plaque idéale :  $\det [R]_{ww} = 0$

$$\begin{bmatrix}
 [R]_{uu} & [R]_{uv} & [R]_{uw} \\
 [R]_{vu} & [R]_{vv} & [R]_{vw} \\
 [R]_{wu} & [R]_{wv} & [R]_{ww}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \{\Delta D\}_u \\
 \{\Delta D\}_v \\
 \{\Delta D\}_w
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \{\Delta P\}_u \\
 \{\Delta P\}_v \\
 \{\Delta P\}_w
 \end{bmatrix}$$

## XIII - ORGANIGRAMME GENERAL



### CONCLUSION

Cette méthode de calcul s'avère satisfaisante sur le plan théorique et permet une bonne approche de l'étude du comportement des structures à plaques minces raidies dans le domaine des petits déplacements et dans celui des déplacements finis.

La définition du champ de déplacement dans le modèle mathématique adopté est suffisamment complète pour permettre un maillage de faible densité de la structure, sans altérer de manière sensible la solution. Une moins bonne définition aurait conduit, pour une même précision, à un modèle mathématique différent, présentant un maillage plus dense et un nombre de degré de liberté plus élevé. Dans la solution adoptée, la constitution de la matrice de raideur tangente demande plus de temps, car chacun des éléments est une combinaison de termes constants, de termes du premier degré et de termes du second degré du déplacement dans l'état actuel. La triangularisation de la matrice s'effectue sans difficulté et avec une bonne précision étant donné sa dimension relativement faible.

Le nombre de petits accroissements qu'il convient de donner à la charge pour décrire les différents états de la structure dépend de sa réponse. La non linéarité de cette réponse dépend de deux facteurs :

- les déplacements sont finis,
- la loi de comportement du matériau n'est pas linéaire.

Cette étude permet de rendre compte, dans une structure donnée, de l'état de déformation à toutes les étapes de chargement et de suivre, par conséquent, une loi de chargement quelconque. Nous pouvons donc adopter un critère de dimensionnement basé soit sur la contrainte limite, soit sur la déformation limite.

Il est à noter qu'une certaine forme d'instabilité est observée expérimentalement et se manifeste à certains niveaux de chargement par un claquement traduisant le passage brutal du panneau d'une configuration d'équilibre instable à une autre configuration d'équilibre stable cette fois et nettement différente de la précédente. Ce phénomène se produit toujours pour un niveau de chargement situé au delà du seuil de bifurcation et il est lié essentiellement à l'état

de déformation initiale du panneau. En effet, un panneau tend, dans son état ultime, vers une configuration indépendante de son état de déformation initiale. Si celles-ci sont d'allure nettement différentes, le panneau, au cours du chargement, doit franchir un certain seuil dit de "claquement" qui marque une profonde modification de la configuration actuelle du panneau, pour lui donner l'allure de la configuration ultime vers laquelle il tend. La difficulté de rendre compte théoriquement d'un pareil phénomène est liée à une ignorance de sa cause essentielle, c'est-à-dire de l'état initial de déformation et aussi sans doute de l'état de contrainte propre de la structure.

L'incidence que peut avoir l'apparition du phénomène de "claquement" sur la résistance locale d'un panneau est sans doute très sensible dans le cas d'un chargement répété de la structure. En effet, dans la zone où cette instabilité de forme se produit, l'effet de fatigue est plus accentué car il correspond à une action cyclique alternée des déformations.

Nous pensons développer, en élasticité, une méthode de résolution des systèmes non linéaires selon Newton, ce qui nous permettra de rechercher, sans suivre la loi de chargement, un état de déformation correspondant à un niveau de chargement donné.

Nous avons réalisé, pour tester la méthode, des essais de chargement suivant des lois bien établies, comportant un nombre limité de cycles de chargement, engendrant dans diverses structures à parois minces des types de sollicitations variées.

Nous projetons, dans un avenir très proche, de poursuivre cette recherche en développant un programme d'essais de fatigue sur un large échantillonnage de structures.

La réalisation complète du programme de calcul, sur ordinateur IBM 360-75, a été prise en charge par le C.T.I.C.M. (Centre Technique Industriel de la Construction Métallique). Ce programme réalisé par Monsieur Barraco, Ingénieur de Recherche, est actuellement au stade expérimental et doit être développé prochainement dans le domaine plastique et dans l'étude des petits mouvements autour d'une position d'équilibre déformée.

Nous présenterons dans une annexe à ce mémoire, l'étude comparée des résultats des essais en laboratoire et de la simulation sur ordinateur, portant sur diverses structures ayant servi de tests à la méthode.

- BIBLIOGRAPHIE -

1 - Ouvrages fondamentaux

- Y.C. FUNG, Foundations of solid mechanics  
- Prentice-Hall.
- P. GERMAIN, Mécanique des milieux continus  
- Masson & Cie - Paris
- J. MANDEL, Mécanique des milieux continus  
- Gauthier-Villars - Paris.
- OLSZAC, Recent trends in the developpement of theory of plasticity  
- Pergamon Press.
- J.H. ARGYRIS, Energy theorems and strutural analysis  
- Butterworths - Londres 1960.

2 - Ouvrages spécialisés

- J.H. ARGYRIS, S. KELSEY et H. KAMEL, Matrix methods of structural analysis  
- Agardograph n° 72, Pergamon Press - N.Y. 1964.
- HOLAND et BELL, Finite element method in structural analysis  
- Tapir 1969.
- O.C. ZIENKIEWICZ, The finite element method in structural and continuum mechanics  
- Mc. Graw-Hill 1967.

3 - Congrès et Conférences

- Engineering Plasticity (Cambridge University Press),
  - . J.N. GOODIER, Dynamic buckling of rectangular plates in surtained plastic compression flow.
  - . Ch. MASSONNET, General theory of elasto-plastic menbrane-plates  
- edited by J. HEYMAN & F.A. LECKIE.
- Finite element techniques in solids mechanics (University of Southampton Department of Civil Engineering - 15,17 April 1970).

4 - Publications dans des revues ou des collections

- J. COAN, Large deflection theory for plates with small initial curvature loaded in edge compression  
- Journal of App. Mech. 1959.
- J. DJUBEK, Solution of the non linear problem of the deformation of webs  
- Mém. A.I.P.C. 1963.
- ZIAD M. ELIAS, Duality in finite element methods - Proceedings of A.S.C.E.  
- vol. 94 - EM 4 - august 1968.

- H.D. HIBBITT, P.V. MARCAL et J.R. RICE, A finite element formulation for problems of large strain and large displacement  
- Int. Jour. of solids & structures - August 1970, vol.6, n° 8.
- ROBERT H. MALLET et PEDRO D. MARCAL, Finite element analysis of non linear structures - Proceedings of the A.S.C.E.  
- vol. 94 - ST 9 - September 1968.
- Ch. MASSONNET, M. SKALoud, J. DONEA, Comportement post-critique des plaques cisailées raidies  
- A.I.P.C. 1968
- Ch. MASSONNET, Plaques et coques cylindriques orthotropes à nervures dissymétriques  
- A.I.P.C. - Zurich - 1959.
- DAVID W. MURRAY et EDWARD L. WILSON, Finite element large deflection analysis of plates  
- A.S.C.E. - vol. 95 - EM 1 - February 1969.
- K.C. ROCKEY et D.K. BAGGHI, Buckling of plate girder webs under partial edge loadings  
- Report n° W/SB/KCR/4 - University College Cardiff, Faculty of Applied Science, Depart. of Civil and Structural Engineering
- G. SANDER, Application de la méthode des éléments finis à la flexion des plaques  
- Collection des publications n° 15-1969- Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées (thèse de Doctorat).
- WILLIAM Y.J. SHIEH, SENG-LIP LEE et RICHARD A. PARMALEE, Analysis of plate bending by triangular elements  
- A.S.C.E. - vol. 94 - EM 5 - October 1968.
- M. SKALoud et J. DONEA, Voilement des âmes à tensions résiduelles  
- A.I.P.C. - vol. 23 - 1963.
- M. SKALoud, Effet d'une courbure initiale sur le comportement post-critique d'une âme comprimée uniformément et renforcée par un raidisseur longitudinal.  
- Acier - n° 5 - 1965.
- SEMITH S. TEZCAN, B.C. MAHAPATRA et C.I. MATHEWS, Tangent stiffness matrices for finite elements  
- A.I.P.C. - 30 I - 1970.
- ALASTAIR C. WALKER, Rayleigh, Ritz method for plate flexure  
- A.S.C.E. - vol. 93 - EM 6, December 1967.
- O.C. ZIENKIEWICZ et Y.K. CHEUNG, The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs  
- Proc. Inst. Civil Eng. - vol. 28 - 1964

## RESUME

Le présent mémoire développe une méthode d'analyse approchée, par éléments finis des plaques raidies anisotropes, présentant un état de contraintes propres et une faible courbure initiale. Cette analyse s'applique au domaine des grands déplacements, aussi bien pour la plaque que pour les raidisseurs. Un programme a été établi et fonctionne sur - IBM 360-75. Il est actuellement au stade expérimental et sera développé prochainement dans le domaine plastique et dans l'étude des petits mouvements autour d'une position d'équilibre déformée. Divers tests expérimentaux de la méthode seront présentés en annexe.

## ZUSAMMENFASSUNG

Diese Darlegung entwickelt eine Näherungsmethode mittels endlicher Elemente für die Analyse anisotroper, ausgesteifter dünner Platten mit Eigenspannungszustand und schwacher Vorkrümmung. Die Analyse findet Verwendung im Bereich der grossen Verschiebungen, sowohl der Platten als auch der Versteifungen. Ein elektronisches Programm wurde bereits aufgestellt und läuft gegenwärtig auf einer -IBM 360-75 - Rechenmaschine. Vorläufig wird es nur experimentell studiert; demnächst wird das Programm im plastischen Bereich und für die Untersuchung kleiner Schwingungen um eine verformte Gleichgewichtslage entwickelt. Im Anhang werden verschiedene Kontrollversuche dieser Methode angegeben.

## SUMMARY

The present paper gives an approximate analytical method using the finite element technique, for thin anisotropic stiffened plates with residual stresses and small initial curvature. This analysis takes into account the large displacement of plates as well as stiffeners. A computer program has been set up and works on a - IBM 360-75. This program is used, at the present time, as an experimental tool; in a next future it will be performing in the plastic range and for the study of small movement around the deformed equilibrium position. Various experimental tests of the method will be presented in appendices.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide