

**Zeitschrift:** IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

**Band:** 6 (1970)

**Artikel:** Tensions et déformations différencées dans les ponts en encorbellement

**Autor:** Croci, Giorgio

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7808>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## **Tensions et déformations différencées dans les ponts en encorbellement**

Spannungen und Verformungen in Freivorbaubrücken

Differential Stresses and Deformations in a Cantilever Built Bridge

**GIORGIO CROCI**  
 Istituto di Scienza delle Costruzioni  
 Università di Roma  
 Italia

### **1) Aspects généraux du problème**

Nous allons examiner l'évolution dans le temps de la distribution des tensions et des déformations par effet de l'élasticité, du retrait, de la relaxation et de la température, d'abord dans le cas plus général d'une structure hyperstatique composée d'éléments de matériaux divers rendus adhérents par stades successifs, ensuite dans le cas particulier de ponts bâties en encorbellement.

Etant donné le peu d'espace à disposition, nous sommes forcés d'omettre tout passage analytique, le programme pour le computer et nombreux diagrammes. Nous restons à la disposition de quiconque voudra nous demander de plus amples renseignements.

Dans l'exposé général nous allons considérer comme variables dans le temps soit la géométrie d'une seule section (soudure d'éléments divers) (fig. 1 a), soit la géométrie de la structure dans son ensemble (soudure de voussoirs divers) (fig 1 b), soit la configuration statique (introduction ou abolition de liens nouveaux).

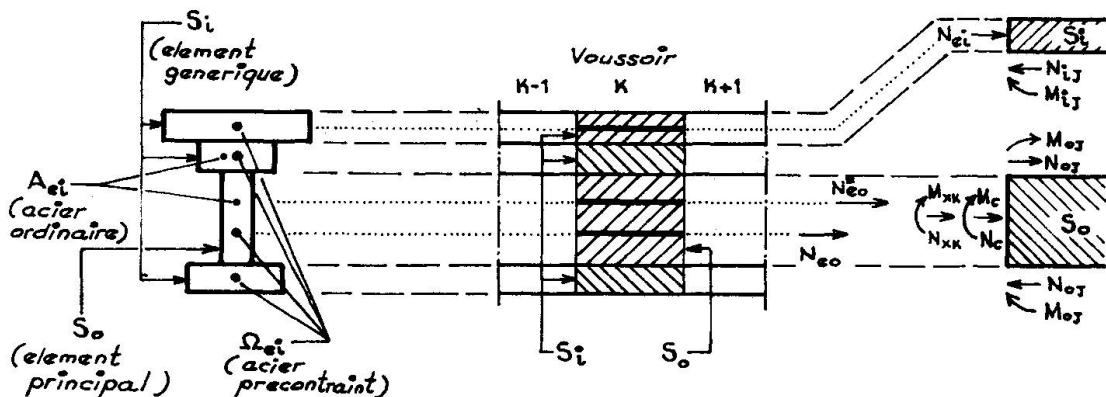
### **2) Hypothèses et symboles**

Bien que la théorie suivante soit valable en cas plus général, nous allons traiter le cas d'une structure en béton armé précontraint à câbles injectés après mise en tension.

#### **2.1) Géometrie de la section (fig. 1)**

Une section générique  $S$  sera constituée dans le cas général de l'union d'un certain nombre d'éléments "rigides à la flexion" en béton ( $S_i$ ) et d'éléments qui "n'ont pas de rigidité à la flexion", voir les câbles de précontrainte ( $\Omega_{ei}$ ) et l'acier ordinaire ( $A_{ei}$ ) (en indiquant par  $ei$  l'excentricité de l'élément  $\Omega$  ou  $A$  à partir de l'axe de barycentre de l'élément  $S_i$  qui les contient).

Nous allons indiquer en outre :



a). Coupe transversale

b). Coupe longitudinale

c). Forces sur un élément  $S_o$  et  $S_i$ 

-Fig. 1 -

$S_o$  : aire de la section transversale du premier élément mis en oeuvre (élément principal)

$y_i$  : ordonnée d'une fibre générique à partir du barycentre de l'élément  $S_i$   
 $x$  : abscisse d'une section  $S$

$g_i(x, y, e)$ ;  $g_i(x, y)$ ;  $g_i(x)$  : rapport entre la tension dans la fibre et la sollicitation qui la produit (respectivement pression-flexion, flexion, effort normal).

## 2.2) Forces agissant sur l'élément principal $S_o$ (fig. 1 c)

Forces connues (moments  $M$ , effort normal  $N$ ) (1) :

$\dot{N}_c$ ,  $\dot{M}_c$  : dues aux charges extérieures

$\dot{N}_{eo}$  (2) : dues à la mise en tension d'un câble

Forces inconnues :

$\dot{N}_{xk}$ ,  $\dot{M}_{xk}$  : dues aux réactions hyperstatiques  $x_k$  aux liens extérieurs

$\dot{N}_{oj}$ ,  $\dot{M}_{oj}$  : dues à l'action mutuelle entre les éléments  $S_o$  et  $S_j$

$\dot{N}_{eo}^*$  : due à l'action mutuelle entre les éléments  $S_o$  et  $\Omega_{ei}$

$\dot{N}_{eo}^{**}$  : due à l'action mutuelle entre les éléments  $S_o$  et  $A_{ei}$

## 2.3) Forces agissant sur les autres éléments

Il s'agit uniquement d'actions mutuelles transmises entre éléments contigus (par ex.  $\dot{N}_{ei}$ ,  $\dot{N}_{ij}$ ,  $\dot{M}_{ij}$ ,  $\dot{N}_{ei}^*$ ,  $\dot{N}_{ei}^{**}$  agissent sur  $S_i$ ; dans  $\Omega_{ei}$  on a  $\dot{N}_{ei}$ ,  $\dot{N}_{ei}^*$ ; dans  $A_{ei}$  on a  $\dot{N}_{ei}^{**}$ ).

## 2.4) Caractéristiques des temps

$t$  : instant générique pendant lequel on examine le phénomène

$t_i$  : instant de coulée d'un élément  $S_i$  ou de mise en tension de l'élément  $\Omega_{ei}$

$\tau$  : instant d'application d'une variation de sollicitation.

## 2.5) Déformations

Les déformations sont dues à :

(1) Nous allons indiquer par un point les dérivées par rapport au temps.

(2) Imaginons que la mise en tension  $\dot{N}_{eo}$  soit faite dans un temps très limité mais fini afin qu'il y soit la dérivée  $\dot{N}_{eo}$ . Les parenthèses indiquent que ce terme existe seulement au moment de la mise en tension.

- l'élasticité: nous allons adopter le module d'élasticité constant  $E_a$  pour l'acier, et variables dans le temps  $E(t, t_i)$  pour le béton -

- le fluage : nous allons considérer le "fluage linéaire" pour le béton sur la base des dernières "Récommandations du Comité Euroéen du Béton" en adoptant une expression :

$$\dot{\epsilon}(t) = \int_{E(28)}^{\dot{\sigma}(t)} \phi(t, t_i, \tau) d\tau$$

étant  $E(28)$  le module d'élasticité à 28 jours et  $\phi(t, t_i, \tau)$  une fonction du temps qui dépend des conditions climatiques, âge du béton lors de la mise en charge, épaisseur fictive de la pièce, température, composition du béton. Pour l'acier de pré-tension les phénomènes de viscosité sont représentés dans le cas de "déformation libre" suivant l'expression  $\dot{\epsilon}(t) = \dot{\sigma}/E_a \cdot R(\dot{\sigma}) \cdot r(t, t_i)$ , en indiquant par  $r(t, t_i)$  la fonction de relaxation dans le temps,  $\dot{\sigma}$  la tension initiale du câble,  $R(\dot{\sigma})$  une fonction de la tension initiale prise égale à zéro pour  $\dot{\sigma} \leq 0.5 \sigma_{0.2}$

- retrait dans le béton: toujours suivant les Récommandations du C.E.B. on prend  $\dot{\epsilon}_{\infty} = \dot{\epsilon}_{\infty} \cdot g(t, t_i)$ , où  $\dot{\epsilon}_{\infty}$  représente la déformation à temps infini et  $g(t, t_i)$  une fonction du temps dépendant des paramètres analogues à ceux du fluage

- température: tout en étant presque égaux les coefficients de dilatation du béton et de l'acier - si la loi de distribution des températures dans la section n'est pas linéaire - on a, outre que des réactions hyperstatiques aux liens extérieurs, même des actions mutuelles inconnues entre fibre et fibre, telles à assurer la conservation des sections planes. Si la section est partagée en éléments  $S_i$  de hauteur suffisamment petite (1) ou pourra considérer dans chaque élément une température moyenne: on considère donc une déformation  $\dot{\epsilon}(t) = \alpha \dot{T}(t)$

### 3) Expressions générales des déformations

Comme nous avons déjà dit la déformation dépend des forces indiquées dans les paragraphes 2.2), 2.3) et des phénomènes indiqués au paragraphe 2.5).

En cas général on parvient aux expressions suivantes :

3.1) Variation de déformation longitudinale, à l'instant  $t$ , dans une fibre en position  $y$  de l'élément  $S_o$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(x, y, t) = & \dot{\epsilon}_{\infty} \cdot g(t, t_o) + \frac{\dot{N}_c(t, x)}{E_a(t, t_o)} \cdot g_o(x, y, e) + \int_{t_o}^t \frac{\dot{N}_c(\tau, x)}{E(28)} \cdot g_o(x, y, e) \cdot \dot{\phi}(t, t_o, \tau) d\tau + \sum_e \frac{\dot{N}_e(t, x) + \dot{N}_e^*(t, x)}{E_o(t, t_o)} \cdot g_e(x, y, e) + \\ & + \int_{t_o}^t \frac{\dot{N}_e(\tau, x) + \dot{N}_e^*(\tau, x)}{E(28)} \cdot g_e(x, y, e) \cdot \dot{\phi}(t, t_o, \tau) d\tau + \left[ \sum_e \frac{\dot{N}_e(t, x)}{E_o(t, t_o)} \cdot g_e(x, y, e) \right] + \int_{t_o}^t \sum_e \frac{\dot{N}_e(\tau, x)}{E(28)} \cdot g_e(x, y, e) \cdot \\ & \cdot \dot{\phi}(t, t_o, \tau) d\tau + \sum_i \frac{\dot{N}_{oi}(t, x)}{E_o(t, t_o)} \cdot g_o(x, y, e) + \int_{t_o}^t \sum_i \frac{\dot{N}_{oi}(\tau, x)}{E(28)} \cdot g_o(x, y, e) \cdot \dot{\phi}(t, t_o, \tau) d\tau + \sum_i \frac{\dot{N}_{oi}(t, x)}{E_o(t, t_o)} \cdot \\ & \cdot g_o(x, y) + \int_{t_o}^t \sum_i \frac{\dot{N}_{oi}(\tau, x)}{E(28)} \cdot g_o(x, y) \cdot \dot{\phi}(t, t_o, \tau) d\tau + \sum_k \frac{\dot{N}_{x,k}(t, x)}{E_o(t, t_o)} \cdot g_o(x, y, e) + \int_{t_o}^t \sum_k \frac{\dot{N}_{x,k}(\tau, x)}{E(28)} \cdot \\ & \cdot g_o(x, y, e) \cdot \dot{\phi}(t, t_o, \tau) d\tau + \alpha \dot{T}(x, y, t) \end{aligned}$$

3.2) Variation de déformation longitudinale, à l'instant  $t$ , dans un câble  $\Omega_{ei}$

$$\dot{\epsilon}(x, t) = - \frac{\dot{N}_{ei}(t, x)}{E_a \cdot \Omega_{ei}} - \left[ \frac{\dot{N}_{ei}(t, x)}{E_a \cdot \Omega_{ei}} \right] - \frac{\dot{N}_{ei}(t, x)}{E_a \cdot \Omega_{ei}} \cdot R(\dot{N}_{ei}) \cdot r(t, t_{ei}) + \alpha \dot{T}(x, t)$$

(1) : On tient compte seulement de la variation de température dans la hauteur de la section et non dans la largeur.

3.3) Les variations de déformations dans les éléments  $S_i$  et  $A_{ei}$  sont respectivement analogue à la surnommée (3.1) sans les valeurs relatives aux forces extérieures et aux réactions hyperstatiques et à la (3.2) sans la valeur relative à la relaxation.

3.4) Les expressions des variations de courbure d'un élément  $S_i$  peuvent être obtenues directement suivant l'hypothèse de conservation des sections planes selon l'expression

$$\dot{\chi}(x,t) = \frac{\partial \dot{\varepsilon}(x,y,t)}{\partial y} = \frac{\dot{\varepsilon}(x,y_{i1},t) - \dot{\varepsilon}(x,y_{i2},t)}{y_{i1} - y_{i2}}$$

#### 4) Solution du problème

Le problème a été résolu suivant la méthode des forces qui exige deux types d'équations de congruence:

a) Equations de congruence "locale" qui expriment, section par section, l'égalité des variations des déformations unitaires  $\dot{\varepsilon}$  entre toutes les fibres contigues qui font partie de deux éléments divers, aussi que l'égalité des variations de courbure  $\dot{\chi}$ . Au cas où l'un ou bien les éléments voisins les deux soient dépourvus de rigidité à la flexion (par ex. les câbles de précontrainte et les aciers ordinaires) il faut imposer seulement l'égalité des  $\dot{\varepsilon}$  correspondants.

Il en résulte un système du type:

$$(4.1) \begin{cases} \dot{\varepsilon}_i(x,y_j,t) = \dot{\varepsilon}_j(x,y_i,t) & \rightarrow i \neq j \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \text{ congruence des déformations entre les éléments } S_i \text{ et } S_j \\ \dot{\varepsilon}_i(x,e_i,t) = \dot{\varepsilon}_{ei}(x,t) & \rightarrow \text{congruence des déformations entre les éléments } S_i \text{ et les } \Omega_{ei}, A_{ei} \text{ correspondantes.} \\ \dot{\chi}_i(x,t) = \chi_j(x,t) & \rightarrow \text{congruence des courbures entre les éléments } S_i, S_j \end{cases}$$

b) Equations de congruence "globale" exprimant la compatibilité avec les liens extérieurs et qui fournissent, dans le cas où ces derniers ne présentent aucune déformation, un système du type :

$$(4.2) \begin{cases} \delta_K(x_K,t) = \int_K \dot{\chi}(x,t) M'_K(x) dx = 0 \\ \dot{\delta}_K(x_K,t) = \int_K \dot{\chi}(x,t) M''_K(x) dx = 0 \end{cases}$$

étant  $M'_K$ ,  $M''_K$  les moments dûs respectivement à une force et à une couple unitaires appliqués au lien  $K$ , sur la structure rendue isostatique.

4.1) Le système constitué des équations (4.1) plus (4.2) permettrait de résoudre, dans certaines conditions, "d'un point de vue théorique", le problème fourniissant pour chaque valeur de l'abscisse  $x$  et de temps  $t$ , les valeurs des variations des efforts dans les câbles ( $N_{ei}$ ) et dans l'acier ordinaire ( $N_{ei}^*$ ), des réactions mutuelles ( $N_{ij}, M_{ij}$ ) et des réactions hyperstatiques ( $X_K$ ). La solution effective du système d'équations intégral-différentielles (4.1) plus (4.2) est pourtant pratiquement impossible; ainsi le système a été rapporté aux différences finies et résolu par l'emploi d'un ordinateur (1).

#### 5) Ponts en encorbellement

Le système de construction est assez connu pour en souligner les moyens d'exécution. La fig. 2 montre les phases d'exécution d'un pont, actuellement en construction, auquel on a appliquée la méthode ci-dessus exposée; naturellement dans ce cas-ci on a un seul élément de béton  $S$  et plusieurs éléments  $\Omega_e$ ,  $A_e$  (fig. 1); (1) Le programme a été préparé avec la collaboration de l'ing. Giuseppe Pedretti

## PHASES DE CONSTRUCTION

(A)

- construction de la pile et du tablier nécessaire pour le montage du coffrage roulant.



(B)

- montage du coffrage roulant, bétonnage du premier voussoir et mise en tension des câbles.



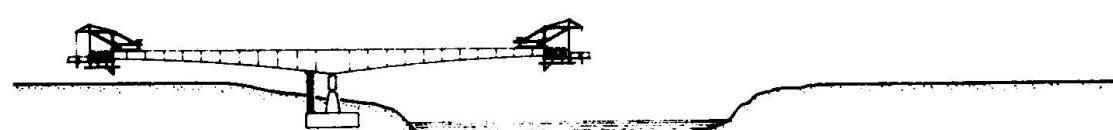
(C)

- montage du deuxième coffrage roulant, bétonnage et précontrainte des voussoirs successifs.



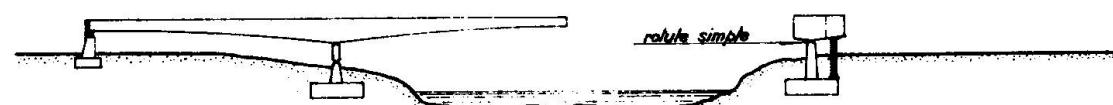
(D)

- fin de la construction des cantilevers A et B



(E)

- démontage des coffrages roulants, mise en tension des câbles dans la semelle inférieure du cantilever A et appui sur la culée correspondante.



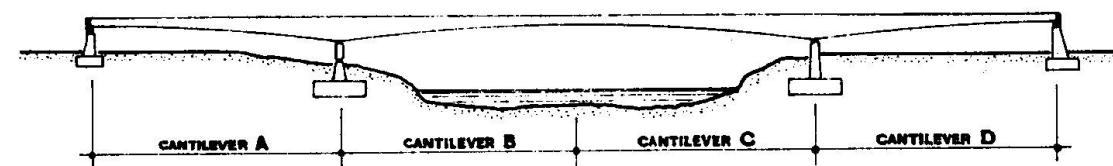
(F)

- fin de la construction des cantilevers C et D, soudure au milieu avec résine époxy et mise en tension des câbles de continuité.



(G)

- démontage du coffrage roulant employé pour la soudure au milieu et exécution du revêtement routier.



-Fig. 2-

la "congruance locale" se réduit donc seulement à des équations d'égalité des déformations ( $t$ ), et la "congruance globale" à des équations d'égalité des flèches et des rotations relatives dans la clé du pont. Le programme réalisé en language Fortran pour le computer UNIVAC du Centre de calcul de l'Université de Rome fournit directement, outre que les valeurs des actions mutuelles, des chutes de tension dans les câbles et des réactions hyperstatiques, les valeurs des tensions et des flèches aussi. La valeur des flèches à temps infini représente les modifications à faire à l'instant de la construction de chaque voussoir pour aboutir au niveau prévu dans le projet; pourtant le coffrage roulant supporte en effet des déformations produites par le bétonnage du voussoir pris en considération. Il faut donc tenir compte même de ce terme.

#### 6) Résultats numériques

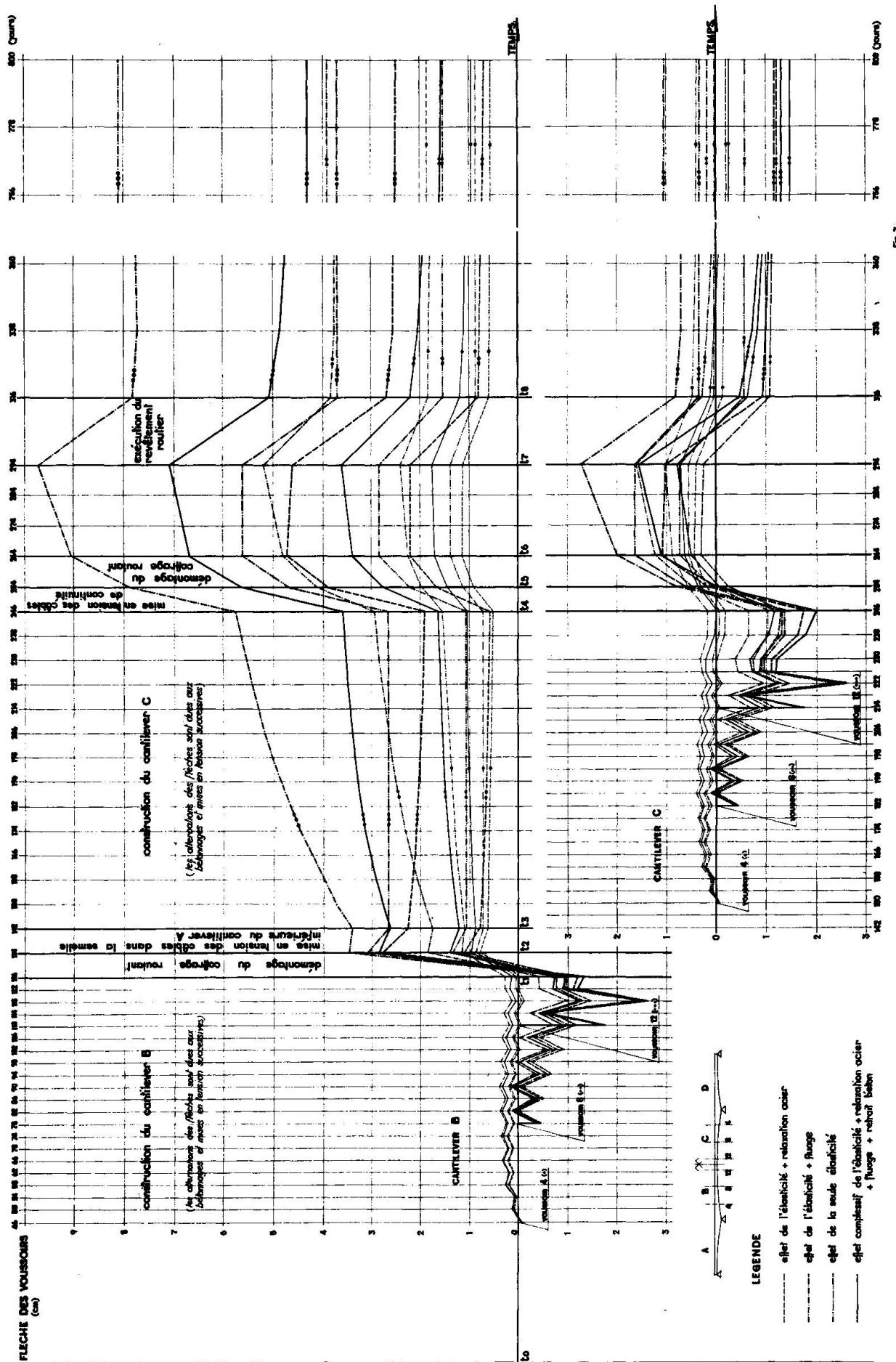
Quelques résultats numériques sont illustrés dans les figures suivantes:

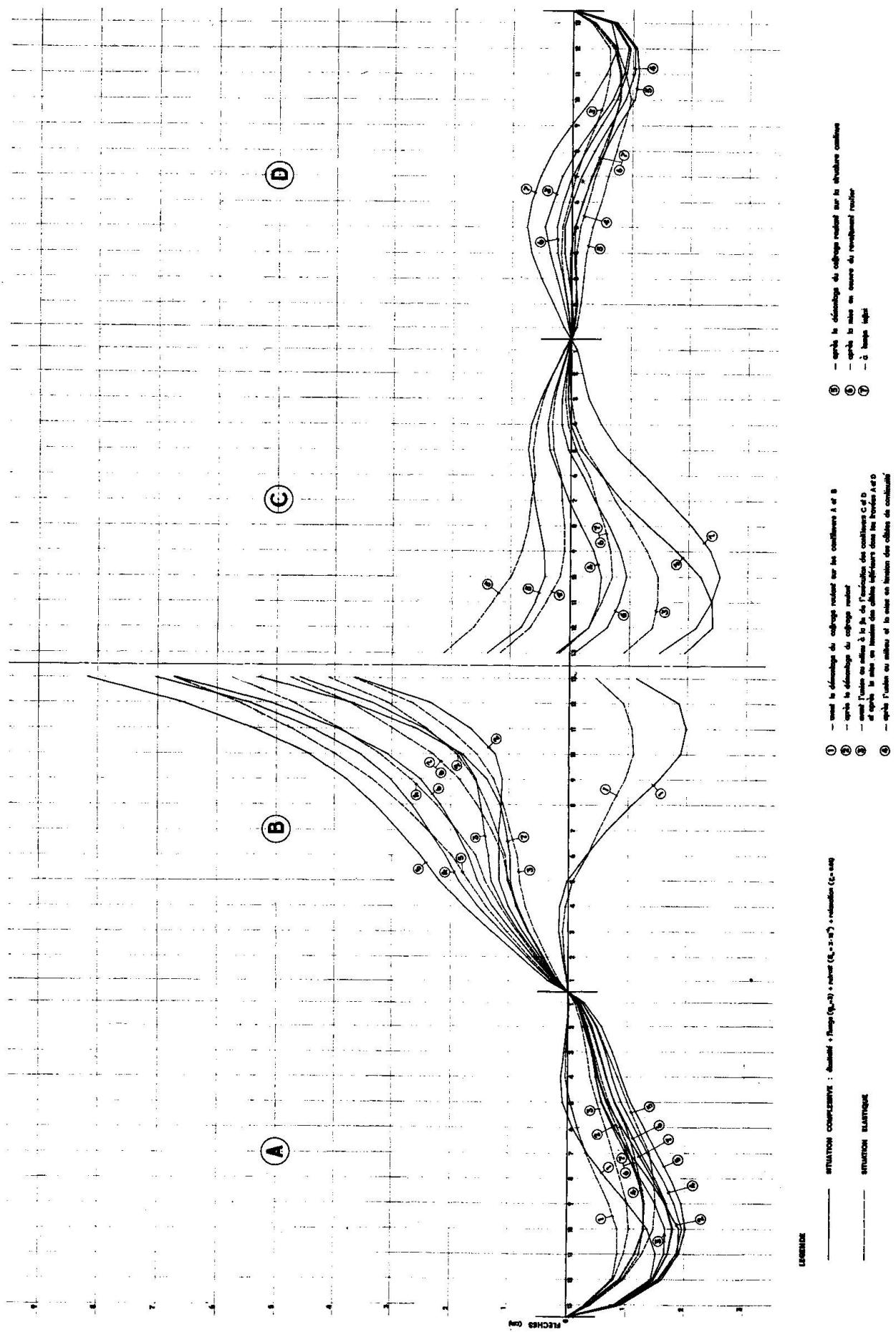
- figure 3 : montre les déformations des voussoirs n°4,8,12, concernant les cantilevers centraux B et C. Il faut se rappeler que la construction du cantilever C est successive à la construction du cantilever B (cfr. fig. 2). Pour chaque voussoir on a calculé quatre déformées différentes comme est-il indiqué dans la figure n.3 elle même.
- figure 4 : on montre la déformée de la structure dans son ensemble dans les instants plus significatifs, depuis fin construction des cantilevers jusqu'au temps théorique infini; ce dernier représente à moins de la déformation du coffrage roulant, les contre-flèches à donner au moment du bétonnage.
- figure 5 : montre les diagrammes des moments dûs aux différentes conditions de charge et les diagrammes résultants, en tenant compte du seul effet élastique et de l'effet total.

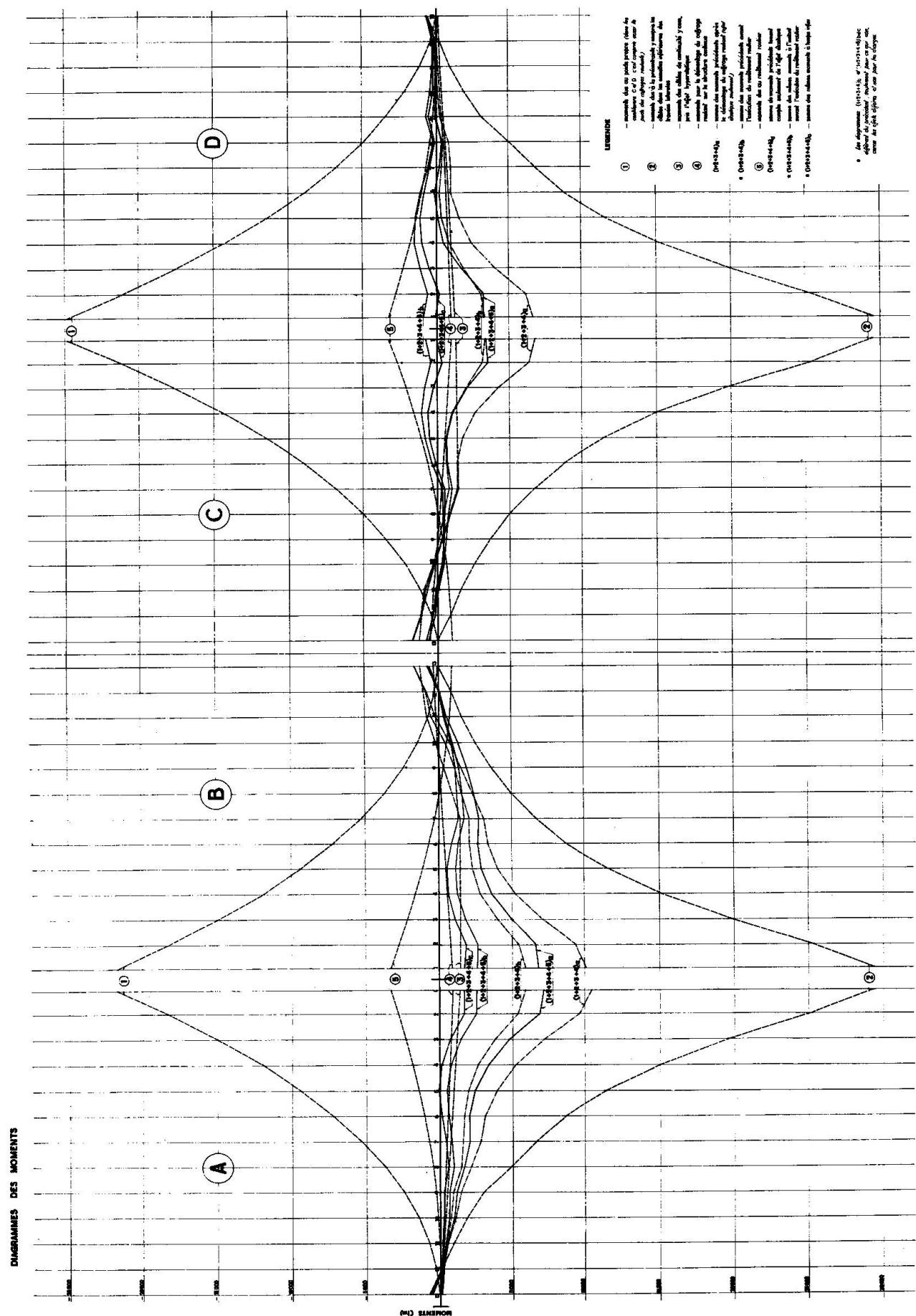
#### 7) Conclusions

Dans le pont en objet les moments de précontrainte sont supérieure à ceux du poids propre: ceci comporte que tandis que la relaxation et le retrait provoquent des flèches tournées vers le bas, le fluage comporte des flèches vers le haut. On ne peut pas donc établir à l'avance, en général, si les déformations différencées seront positives ou négatives, sauf savoir: dans les petites portées le moment de précontrainte est plus grand que le poids propre (donc les flèches de fluage seront vers le haut) tandis que dans les grandes portées vaut le contraire (les déformations compressives différencées seront donc sûrement vers le bas et beaucoup plus grandes). Dans la prévision des contre-flèches est très important l'effet des déformations vers le haut dues au démontage des coffrages roulants et à la mise en tension des câbles de continuité (figg. 3,4); il faut donc tenir compte que souvent, comme il arrive dans le cas en examen, est-il nécessaire d'imposer, à l'instant du bétonnage, des contre-flèches tournées vers le bas et non vers le haut, comme pourrait-il paraître plus logique.

Pour ce qui concerne les moments valent des considérations pareilles: n'est-il pas toujours vrai que les phénomènes différencés comportent un rehaussement de la fondamentale des diagrammes des moments résultants. Pour avoir des renseignements plus adhérents à la réalité à l'égard des coefficients et des fonctions du fluage, du retrait, de la relaxation et de l'influence de la température, on est en train d'effectuer des essais sur le pont en question illustré dans la fig. 2,







et sur des éléments isolés en béton et acier.

Rome - Istituto di Scienza delle Costruzioni - Cattedra di Costruzione di Ponti.

## RESUME

On a examiné l'évolution dans le temps de la distribution des tensions et des déformations dans les structures composées d'éléments rendus adhérents par stades successifs.

Le problème a été résolu à l'aide d'un ordinateur selon la méthode des forces. Quelques diagrammes illustrent des résultats numériques relatifs à un pont bâti en encorbellement.

## ZUSAMMENFASSUNG

Es wird die Entwicklung der Spannungs- und Verformungsverteilung im Verlauf der Zeit an Bauwerken geprüft, die aus hintereinander angehafteten Teilen zusammengesetzt sind.

Das Problem wurde mit der Kräftemethode durch einen Elektronenrechner gelöst; einige Diagramme zeigen die numerischen Ergebnisse bei einer Freivorbaubrücke aus vorgespanntem Beton.

## SUMMARY

A study was made of the time-varying distributions of stress and strain in structures built from successively assembled prestressed elements. An analysis was carried out using a computer program based on the force method.

Some of the results, obtained from a worked example for a cantilever built bridge, are presented in diagrammatic form.