

Zeitschrift: IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen
Band: 6 (1970)
Artikel: Tensions et déformations différées dans les ponts en encorbellement
Autor: Croci, Giorgio
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7808>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

III

Tensions et déformations différées dans les ponts en encorbellement

Spannungen und Verformungen in Freivorbaubrücken

Differential Stresses and Deformations in a Cantilever Built Bridge

GIORGIO CROCI

Istituto di Scienza delle Costruzioni
Università di Roma
Italia

1) Aspects généraux du problème

Nous allons examiner l'évolution dans le temps de la distribution des tensions et des déformations par effet de l'élasticité, du retrait, de la relaxation et de la température, d'abord dans le cas plus général d'une structure hyperstatique composée d'éléments de matériaux divers rendus adhérents par stades successifs, ensuite dans le cas particulier de ponts bâtis en encorbellement.

Etant donné le peu d'espace à disposition, nous sommes forcés d'omettre tout passage analytique, le programme pour le computer et nombreux diagrammes. Nous restons à la disposition de quiconque voudra nous demander de plus amples renseignements.

Dans l'exposé général nous allons considérer comme variables dans le temps soit la géométrie d'une seule section (soudure d'éléments divers) (fig. 1 a), soit la géométrie de la structure dans son ensemble (soudure de voussoirs divers) (fig. 1 b), soit la configuration statique (introduction ou abolition de liens nouveaux)

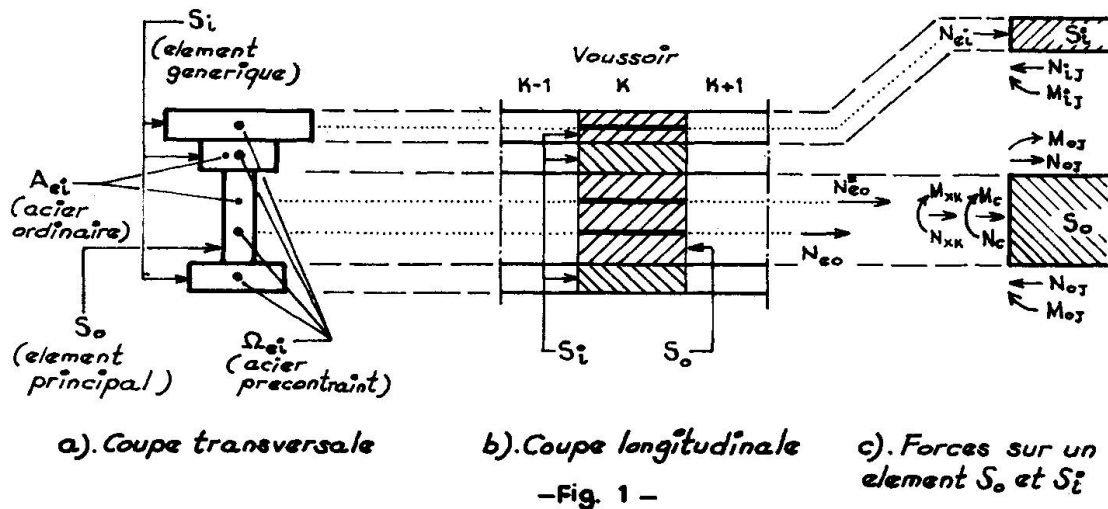
2) Hypothèses et symboles

Bien que la théorie suivante soit valable en cas plus général, nous allons traiter le cas d'une structure en béton armé précontraint à câbles injectés après mise en tension.

2.1) Géométrie de la section (fig. 1)

Une section générique S sera constituée dans le cas général de l'union d'un certain nombre d'éléments "rigides à la flexion" en béton (S_i) et d'éléments qui "n'ont pas de rigidité à la flexion", voir les câbles de précontrainte (Ω_{ei}) et l'acier ordinaire ($A_{e,i}$) (en indiquant par ei l'excentricité de l'élément Ω ou A à partir de l'axe de barycentre de l'élément S_1 qui les contient).

Nous allons indiquer en outre :



S_0 : aire de la section transversale du premier élément mis en oeuvre (élément principal)

y_i : ordonnée d'une fibre générique à partir du barycentre de l'élément S_i

x : abscisse d'une section S

$g_i(x, y, e)$; $g_i(x, y)$; $g_i(x)$: rapport entre la tension dans la fibre et la sollicitation qui la produit (respectivement pression-flexion, flexion, effort normal).

2.2) Forces agissant sur l'élément principal S_0 (fig. 1 c)

Forces connues (moments M , effort normal N) (1) :

\dot{N}_C , \dot{M}_C : dues aux charges extérieures

$[\dot{N}_{eo}]$ (2) : dues à la mise en tension d'un câble

Forces inconnues :

\dot{N}_{xk} , \dot{M}_{xk} : dues aux réactions hyperstatiques X_k aux liens extérieurs

\dot{N}_{oj} , \dot{M}_{oj} : dues à l'action mutuelle entre les éléments S_0 et S_j

\dot{N}_{eo} : due à l'action mutuelle entre les éléments S_0 et Ω_{ei}

\dot{N}_{eo}^* : due à l'action mutuelle entre les éléments S_0 et A_{ei}

2.3) Forces agissant sur les autres éléments

Il s'agit uniquement d'actions mutuelles transmises entre éléments contigus (par ex. $[\dot{N}_{ei}]$, \dot{N}_{ij} , \dot{M}_{ij} , \dot{N}_{ei} , \dot{N}_{ei}^* agissent sur S_i ; dans Ω_{ei} on a $[\dot{N}_{ei}]$, \dot{N}_{ei} ; dans A_{ei} on a \dot{N}_{ei}^*).

2.4) Caractéristiques des temps

t : instant générique pendant lequel on examine le phénomène

t_i : instant de coulée d'un élément S_i ou de mise en tension de l'élément Ω_{ei}

τ : instant d'application d'une variation de sollicitation.

2.5) Déformations

Les déformations sont dues à :

(1) Nous allons indiquer par un point les dérivées par rapport au temps.

(2) Imaginons que la mise en tension \dot{N}_{eo} soit faite dans un temps très limité mais fini afin qu'il y soit la dérivée \dot{N}_{eo} . Les parenthèses indiquent que ce terme existe seulement au moment de la mise en tension.

- l'élasticité: nous allons adopter le module d'élasticité constant E_a pour l'acier, et variables dans le temps $E(\tau, t_i)$ pour le béton -
- le fluage : nous allons considérer le "fluage linéaire" pour le béton sur la base des dernières "Recommandations du Comité Euroéen du Béton" en adoptant une expression :

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{E(28)} \dot{\phi}(t, t_i, \tau) d\tau$$

étant $E(28)$ le module d'élasticité à 28 jours et $\phi(t, t_i, \tau)$ une fonction du temps qui dépend des conditions climatiques, âge du béton lors de la mise en charge, épaisseur fictive de la pièce, température, composition du béton. Pour l'acier de précontrainte les phénomènes de viscosité sont représentés dans le cas de "déformation libre" suivant l'expression $\dot{\epsilon}(t) = \bar{\sigma}/E_a \cdot R(\bar{\sigma}) \cdot \dot{r}(t, t_i)$, en indiquant par $r(t, t_i)$ la fonction de relaxation dans le temps, $\bar{\sigma}$ la tension initiale du câble, $R(\bar{\sigma})$ une fonction de la tension initiale prise égale à zero pour $\bar{\sigma} \leq 0,5 \sigma_{0,2}$

- retrait dans le béton: toujours suivant les Recommandations du C.E.B. on prend $\dot{\epsilon}_w = \epsilon_\infty \dot{g}(t, t_i)$, où ϵ_∞ représente la déformation à temps infini et $g(t, t_i)$ une fonction du temps dépendant des paramètres analogues à ceux du fluage
- température: tout en étant presque égaux les coefficients de dilatation du béton et de l'acier - si la loi de distribution des températures dans la section n'est pas linéaire - on a, outre que des réactions hyperstatiques aux liens extérieurs, même des actions mutuelles inconnues entre fibre et fibre, telles à assurer la conservation des sections planes. Si la section est partagée en éléments S_i de hauteur suffisamment petite (1) ou pourra considérer dans chaque élément une température moyenne: on considère donc une déformation $\dot{\epsilon}(t) = \alpha \dot{T}(t)$

3) Expressions générales des déformations

Comme nous avons déjà dit la déformation dépend des forces indiquées dans les paragraphes 2.2), 2.3) et des phénomènes indiqués au paragraphe 2.5).

En cas général on parvient aux expressions suivantes :

3.1) Variation de déformation longitudinale, à l'instant t , dans une fibre en position y de l'élément S_0

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(x, y, t) = & \epsilon_\infty \dot{g}(t, t_0) + \frac{\dot{N}_c(t, x)}{E_0(t, t_0)} \cdot g_0(x, y, e) + \int_{t_0}^t \frac{\dot{N}_c(\tau, x)}{E(28)} \cdot g_0(x, y, e) \cdot \dot{\phi}(t, t_0, \tau) d\tau + \sum_e \frac{\dot{N}_e(t, x) + \dot{N}_e^*(t, x)}{E_0(t, t_0)} \cdot g_{L2}(x, y, e) + \\ & + \int_{t_0}^t \sum_e \frac{\dot{N}_e(\tau, x) + \dot{N}_e^*(\tau, x)}{E(28)} \cdot g_0(x, y, e) \cdot \dot{\phi}(t, t_0, \tau) d\tau + \left[\sum_e \frac{\dot{N}(t, x)}{E_0(t, t_0)} \cdot g_0(x, y, e) \right] + \int_{t_0}^t \sum_e \frac{\dot{N}(\tau, x)}{E(28)} \cdot g_0(x, y, e) \cdot \\ & \cdot \dot{\phi}(t, t_0, \tau) d\tau + \sum_i \frac{\dot{N}_{oi}(t, x)}{E_0(t, t_0)} \cdot g_0(x, y, e) + \int_{t_0}^t \sum_i \frac{\dot{N}_{oi}(\tau, x)}{E(28)} \cdot g_0(x, y, e) \cdot \dot{\phi}(t, t_0, \tau) d\tau + \sum_i \frac{\dot{N}_{oi}(t, x)}{E_0(t, t_0)} \cdot \\ & \cdot g_0(x, y) + \int_{t_0}^t \sum_i \frac{\dot{N}_{oi}(\tau, x)}{E(28)} \cdot g_0(x, y) \cdot \dot{\phi}(t, t_0, \tau) d\tau + \sum_k \frac{\dot{N}_{x,k}(t, x)}{E_0(t, t_0)} \cdot g_0(x, y, e) + \int_{t_0}^t \sum_k \frac{\dot{N}_{x,k}(\tau, x)}{E(28)} \cdot \\ & \cdot g_0(x, y, e) \cdot \dot{\phi}(t, t_0, \tau) d\tau + \alpha \dot{T}(x, y, t) \end{aligned}$$

3.2) Variation de déformation longitudinale, à l'instant t , dans un câble Ω_{ei}

$$\dot{\epsilon}(x, t) = - \frac{\dot{N}_{ei}(t, x)}{E_a \cdot \Omega_{e,i}} - \left[\frac{\dot{N}_{ei}(t, x)}{E_a \cdot \Omega_{e,i}} \right] - \frac{\bar{N}_{ei}(t, x)}{E_a \cdot \Omega_{e,i}} \cdot R(\bar{N}_{e,i}) \cdot \dot{r}(t, t_{e,i}) + \alpha \dot{T}(x, t)$$

(1) : On tient compte seulement de la variation de température dans la hauteur de la section et non dans la largeur.

3.3) Les variations de déformations dans les éléments S_i et A_{ei} sont respectivement analogue à la surnommée (3.1) sans les valeurs relatives aux forces extérieures et aux réactions hyperstatiques et à la (3.2) sans la valeur relative à la relaxation.

3.4) Les expressions des variations de courbure d'un élément S_i peuvent être obtenues directement suivant l'hypothèse de conservation des sections planes selon l'expression

$$\dot{\chi}(x,t) = \frac{\partial \dot{\epsilon}(x,y,t)}{\partial y} = \frac{\dot{\epsilon}(x,y_{i1},t) - \dot{\epsilon}(x,y_{i2},t)}{y_{i1} - y_{i2}}$$

4) Solution du problème

Le problème a été résolu suivant la méthode des forces qui exige deux types d'équations de congruance:

a) Equations de congruance "locale" qui expriment, section par section, l'égalité des variations des déformations unitaires $\dot{\epsilon}$ entre toutes les fibres contigues qui font partie de deux éléments divers, aussi que l'égalité des variations de courbure $\dot{\chi}$. Au cas où l'un ou bien les éléments voisins les deux soient dépourvus de rigidité à la flexion (par ex. les câbles de précontrainte et les aciers ordinaires) il faut imposer seulement l'égalité des $\dot{\epsilon}$ correspondants.

Il en résulte un système du type:

$$(4.1) \begin{cases} \dot{\epsilon}_i(x, y_{ij}, t) = \dot{\epsilon}_j(x, y_{ji}, t) & \rightarrow i \neq j \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \text{ congruence des déformations entre les éléments } S_i \text{ et } S_j \\ \dot{\epsilon}_i(x, e_i, t) = \dot{\epsilon}_{ei}(x, t) & \rightarrow \text{ congruence des déformations entre les éléments } S_i \text{ et les } \Omega_{ei}, A_{ei} \text{ correspondantes.} \\ \dot{\chi}_i(x, t) = \dot{\chi}_j(x, t) & \rightarrow \text{ congruence des courbures entre les éléments } S_i, S_j \end{cases}$$

b) Equations de congruance "globale" exprimant la compatibilité avec les liens extérieurs et qui fournissent, dans le cas où ces derniers ne présentent aucune déformation, un système du type :

$$(4.2) \begin{cases} \dot{\delta}_K(x_K, t) = \int_e \dot{\chi}(x, t) M'_K(x) dx = 0 \\ \dot{\gamma}_K(x_K, t) = \int_e \dot{\chi}(x, t) M''_K(x) dx = 0 \end{cases}$$

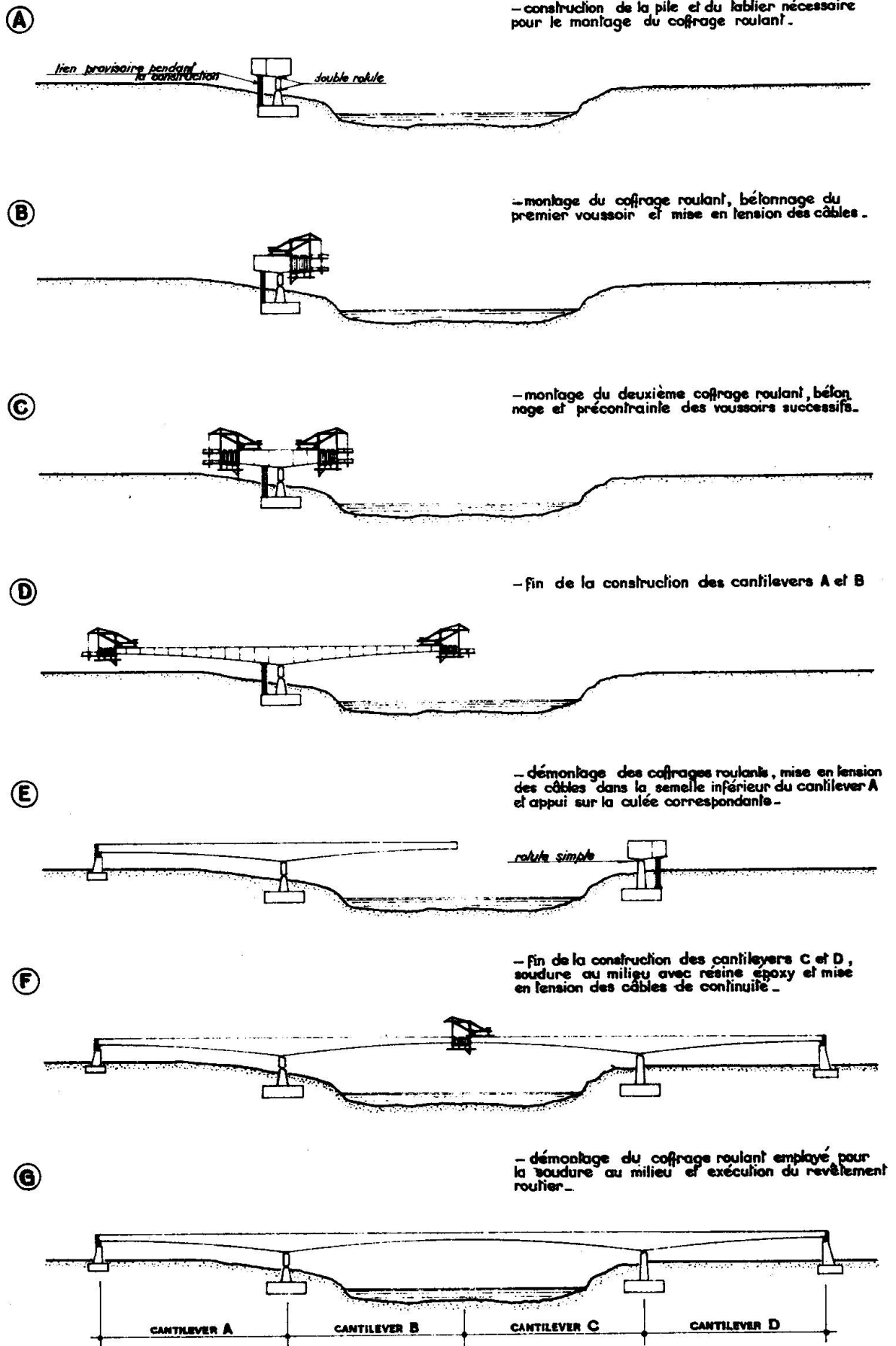
étant M'_K , M''_K les moments dus respectivement à une force et à une couple unitaires appliqués au lien K, sur la structure rendue isostatique.

4.1) Le système constitué des équations (4.1) plus (4.2) permettrait de résoudre, dans certaines conditions, "d'un point de vue théorique", le problème fournissant pour chaque valeur de l'abscisse x et de temps t , les valeurs des variations des efforts dans les câbles (N_{ei}) et dans l'acier ordinaire (N_{ei}^*), des réactions mutuelles (N_{ij} , M_{ij}) et des réactions hyperstatiques (X_K). La solution effective du système d'équations intégral-différentielles (4.1) plus (4.2) est pour tant pratiquement impossible; ainsi le système a été rapporté aux différences finies et résolu par l'emploi d'un computer (1)

5) Ponts en encorbellement

Le système de construction est assez connu pour en souligner les moyen d'exécution. La fig.2 montre les phases d'exécution d'un pont, actuellement en construction, auquel on a appliqué la méthode ci-dessus exposée; naturellement dans ce cas-ci on a un seul élément de béton S et plusieurs éléments Ω_e , A_e (fig.1); (1) Le programme a été préparé avec la collaboration de l'ing. Giuseppe Pedretti

PHASES DE CONSTRUCTION



- Fig. 2 -

la "congruence locale" se réduit donc seulement à des équations d'égalité des déformations (t), et la "congruence globale" à des équations d'égalité des flèches et des rotations relatives dans la clé du pont. Le programme réalisé en langage Fortran pour le computer UNIVAC du Centre de calcul de l'Université de Rome fournit directement, outre que les valeurs des actions mutuelles, des chûtes de tension dans les câbles et des réactions hyperstatiques, les valeurs des tensions et des flèches aussi. La valeur des flèches à temps infini représente les modifications à faire à l'instant de la construction de chaque voussoir pour aboutir au niveau prévu dans le projet; pourtant le coffrage roulant supporte en effet des déformations produites par le bétonnage du voussoir pris en considération. Il faut donc tenir compte même de ce terme.

6) Résultats numériques

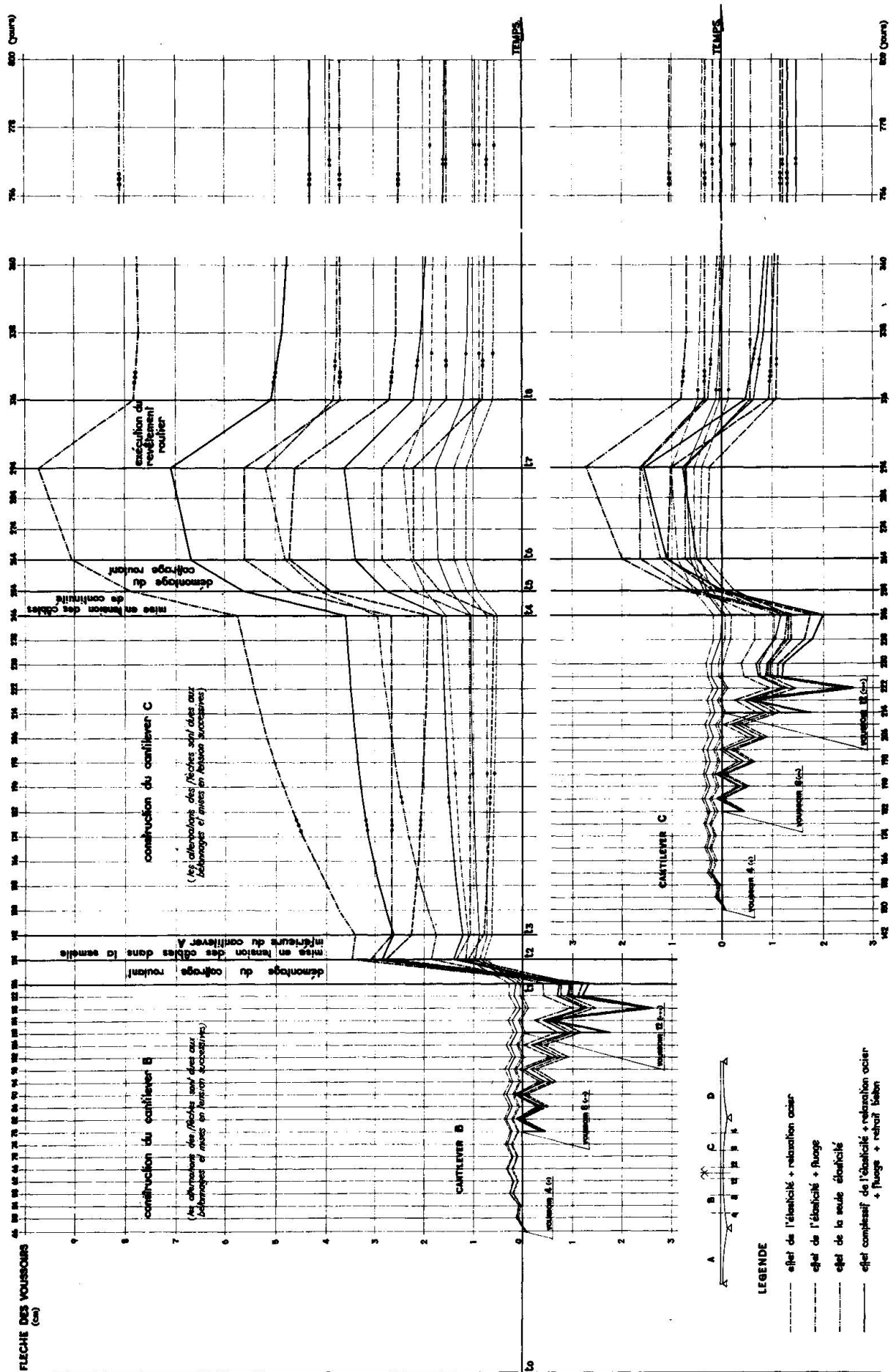
Quelques résultats numériques sont illustrés dans les figures suivantes:

- figure 3 : montre les déformations des voussoirs n°4,8,12, concernant les cantilevers centraux B et C. Il faut se rappeler que la construction du cantilever C est successive à la construction du cantilever B (cfr.fig.2). Pour chaque voussoir on a calculé quatre déformées différentes comme est-il indiqué dans la figure n.3 elle même.
- figure 4 : on montre la déformée de la structure dans son ensemble dans les instants plus significatifs, depuis fin construction des cantilevers jusqu'au temps théorique infini; ce dernier représente à moins de la déformation du coffrage roulant, les contre-flèches à donner au moment du bétonnage.
- figure 5 : montre les diagrammes des moments dûs aux différentes conditions de charge et les diagrammes résultants, en tenant compte du seul effet élastique et de l'effet total.

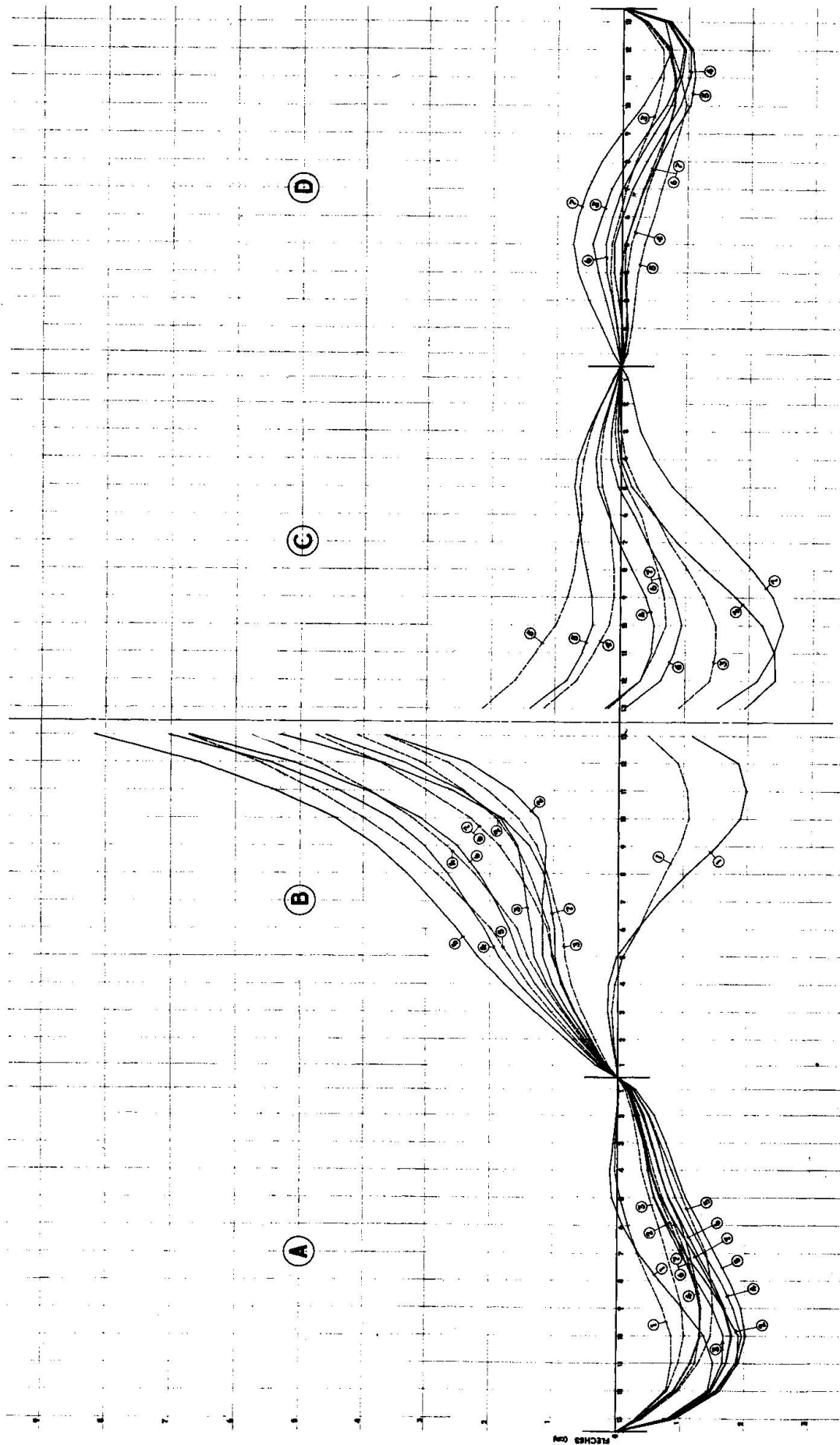
7) C o n c l u s i o n s

Dans le pont en objet les moments de précontrainte sont supérieures à ceux du poids propre: ceci comporte que tandis que la relaxation et le retrait provoquent des flèches tournées vers le bas, le fluage comporte des flèches vers le haut. On ne peut pas donc établir à l'avance, en général, si les déformations différées seront positives ou négatives, sauf savoir: dans les petites portées le moment de précontrainte est plus grand que le poids propre (donc les flèches de fluage seront vers le haut) tandis que dans les grandes portées vaut le contraire (les déformations compressives différées seront donc sûrement vers le bas et beaucoup plus grandes). Dans la prévision des contre-flèches est très important l'effet des déformations vers le haut dues au démontage des coffrages roulants et à la mise en tension des câbles de continuité (figg.3,4); il faut donc tenir compte que souvent, comme il arrive dans le cas en examen, est-il nécessaire d'imposer, à l'instant du bétonnage, des contre-flèches tournées vers le bas et non vers le haut, comme pourrait-il paraître plus logique.

Pour ce qui concerne les moments valent des considérations pareilles: n'est-il pas toujours vrai que les phénomènes différés comportent un rehaussement de la fondamentale des diagrammes des moments résultants. Pour avoir des renseignements plus adhérents à la réalité à l'égard des coefficients et des fonctions du fluage, du retrait, de la relaxation et de l'influence de la température, on est en train d'effectuer des essais sur le pont en question illustré dans la fig.2,



DIAGRAMMES DES FLECHES



LEGENDE

— SITUATION COMPLÈTE : $\Delta_{\text{total}} = \Delta_{\text{stat}} + \Delta_{\text{temp}} + \Delta_{\text{retrait}} + \Delta_{\text{creep}} + \Delta_{\text{relaxation}} + \Delta_{\text{shrinkage}}$

— SITUATION ELASTIQUE

- ① — avant le démarrage du collage réalisé sur les couillures A et B
- ② — après le démarrage du collage réalisé
- ③ — avant l'ajout au sol des 12 piles de l'encorbellement des couillures C et D
- ④ — après l'ajout au sol des 12 piles de l'encorbellement des couillures C et D
- ⑤ — après l'ajout au sol des 12 piles de l'encorbellement des couillures C et D
- ⑥ — après l'ajout au sol des 12 piles de l'encorbellement des couillures C et D
- ⑦ — après l'ajout au sol des 12 piles de l'encorbellement des couillures C et D
- ⑧ — après l'ajout au sol des 12 piles de l'encorbellement des couillures C et D
- ⑨ — après l'ajout au sol des 12 piles de l'encorbellement des couillures C et D
- ⑩ — après l'ajout au sol des 12 piles de l'encorbellement des couillures C et D
- ⑪ — après l'ajout au sol des 12 piles de l'encorbellement des couillures C et D
- ⑫ — après l'ajout au sol des 12 piles de l'encorbellement des couillures C et D

- ⑬ — après le démarrage du collage réalisé sur la structure entière
- ⑭ — après le collage en cours de réalisation
- ⑮ — à l'état initial

et sur des éléments isolés en béton et acier.

Rome - Istituto di Scienza delle Costruzioni - Cattedra di Costruzione di Ponti.

RESUME

On a examiné l'évolution dans le temps de la distribution des tensions et des déformations dans les structures composées d'éléments rendus adhérents par stades successifs.

Le problème a été résolu à l'aide d'un computer selon la méthode des forces. Quelques diagrammes illustrent des résultats numériques relatifs à un pont bâti en encorbellement.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird die Entwicklung der Spannungs- und Verformungsverteilung im Verlaufe der Zeit an Bauwerken geprüft, die aus hintereinander angehafteten Teilen zusammengesetzt sind.

Das Problem wurde mit der Kräftemethode durch einen Elektronenrechner gelöst; einige Diagramme zeigen die numerischen Ergebnisse bei einer Freivorbaubrücke aus vorgespanntem Beton.

SUMMARY

A study was made of the time-varying distributions of stress and strain in structures built from successively assembled prestressed elements. An analysis was carried out using a computer program based on the force method.

Some of the results, obtained from a worked example for a cantilever built bridge, are presented in diagrammatic form.