

Zeitschrift: IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

Band: 6 (1970)

Artikel: Der Einfluss des Kriechens und Schwindens des Betons in dünnwandigen Trägern mit gekrümmter Achse

Autor: Hajdin, Nikola

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7807>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Der Einfluß des Kriechens und Schwindens des Betons in dünnwandigen Trägern mit gekrümmter Achse

Influence of Creep and Shrinkage of Concrete in Thin-Walled Curved Beams

Influence du fluage et du retrait du béton sur une barre courbe à parois minces

NIKOLA HAJDIN
Prof., Dr.sc.techn.
Universität Beograd
Jugoslawien

Einleitung

Vorgespannte und Verbundkonstruktionen werden heute in Bauwesen in zahlreicher Formen angewendet. Die Erscheinungen des Kriechens und Schwindens des Betons spielen bei diesen Konstruktionsarten eine besondere Rolle.

Im letztem Dezennium hat das Interesse für die Berechnung von Trägern mit, in der Horizontalebene gelegener, gekrümmter Achse zugenommen. Einer der Gründe dafür ist die immer häufigere Ausführung von Brücken mit gekrümmter Achse welche eine Folge der Anpassung der modernen Strassen an die Erfordernisse des Schnellverkehrs ist.

In konstruktiver Hinsicht gehören diese Brücken öfter in den Bereich der dünnwandigen Träger.

Die Einflüsse des Kriechens und Schwindens haben bei Stäben mit gekrümmter Achse eine besondere Bedeutung, da neben der Beanspruchung auf Biegung, die Torsionsbeanspruchung eine wesentliche Rolle spielt.

Der Einfluss des Eigengewichtes des Trägers sowie die Wirkung der Vorspannung rufen bei dem Träger mit gekrümmter Achse ungünstigere Beanspruchung hervor als bei dem Träger mit gerader Achse.

In diesem Beitrag werden die Einflüsse des Kriechens und Schwindens des Betons auf den dünnwandigen Stab mit offenem Querschnitt und mit in einer Ebene gelegener, gekrümmter Achse, behandelt.

Der Querschnitt des Trägers setzt sich aus einem Beton- und aus einem Stahlanteil zusammen. Der letztere kann die Bewehrung oder, im Falle des Verbundträgers, der Querschnitt des Stahlanteiles sein.

Der hier vorgeschlagene Berechnungsvorgang kann als Näherungslösung auch für den dünnwandigen Träger mit geschlossenem Querschnittsprofil angewendet werden, sofern die entsprechenden Unterschiede im Verhalten gegenüber der Torsionsbeanspruchung Berücksichtigung finden.

2. Verformung des Stabes

Die beliebig geformte Profilmittellinie ersetzen wir durch einen Polygonzug, dessen Seitenlängen wir je nach der gewünschten Genauigkeit den krummlinigen Teilen derselben anpassen.

In den Stabquerschnitt legen wir ein Kartesisches Koordinatensystem x, y . Den Koordinatenursprung C verlegen wir so damit die folgenden Bedingungen befriedigt werden:

$$\int x t_p ds = 0 \quad (1)$$

und

$$\int y t_p ds = 0 \quad (2)$$

wo t_p durch den Ausdruck (21) bestimmt ist.

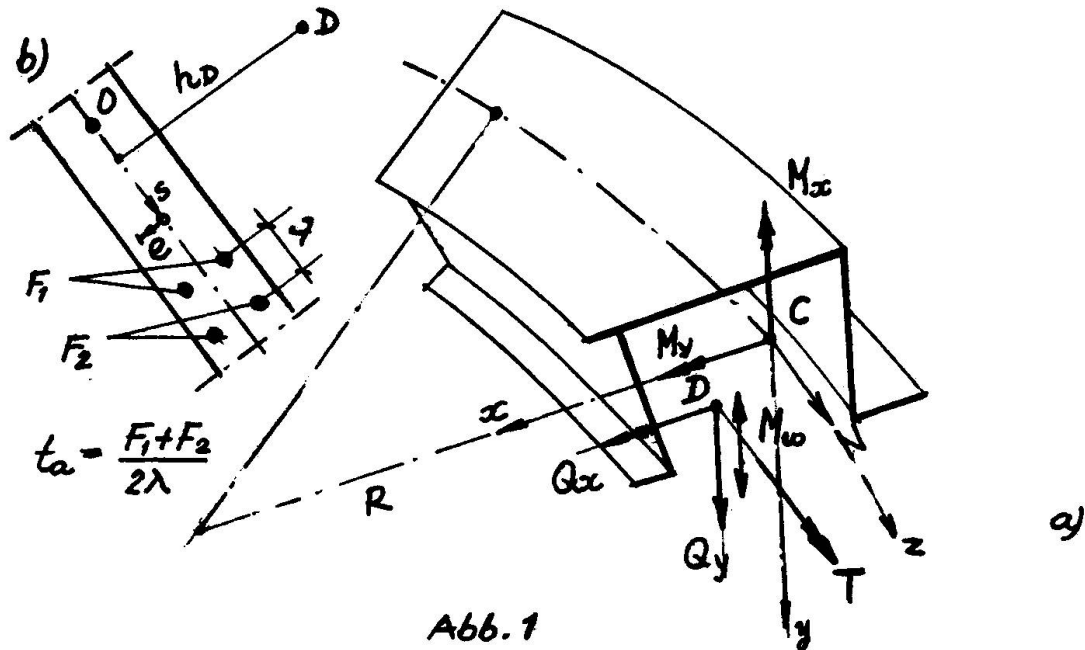


Abb. 1

Die Achse x und die Stabachse (Abb. 1a) mit dem Halbmesser R , welche die Punkte C der Stabquerschnitte verbindet, liegen in einer Ebene. Die längs der Stabachse gemessene Bogenlänge von einem vorhergenommenen Querschnitt aus ist durch die Koordinate z bestimmt.

Ausser den Koordinaten x, y, z wählen wir auf der Mittelfläche des Stabes ein System orthogonaler, krummliniger Koordinaten s, z , wo s die Länge der Profilmittellinie des Querschnitts ist und z , die Länge des kreisförmigen, mit der Stabachse konzentrischen Bogens auf der Mittelfläche des Stabes.

Den Abstand von der Mittelfläche in der Richtung der Normalen bezeichnen wir mit e .

Nach der Theorie des dünnwandigen Stabes mit offenem Profil, führen wir die folgenden Voraussetzungen über die Verformung ein:

a/ Die Querschnittsform des Stabes bleibt während der Verformung unverändert, und

b/ die Gleitverzerrung γ_{xs} in der Mittelfläche des Stabes wird vernachlässigt.

Die verschiebungskomponenten ξ und η des beliebigen Punktes der Mittelfläche in Richtungen x und y sind unter Berücksichtigung der Voraussetzung a/ durch die folgenden Ausdrücke bestimmt:

$$\xi = \xi_D - (y - y_D) \varphi \quad (3)$$

$$\eta = \eta_D + (x - x_D) \varphi \quad (4)$$

wo ξ_D und η_D die Verschiebungen des Punktes D mit den Koordinaten x_D und y_D , und φ die Verdrehung des Querschnitts um diesen Punkt.

Die Verschiebungskomponente w in Richtung der Tangente auf der Stabachse wird auf Grund der Voraussetzung b/ nach [1] wie folgt ausgedrückt:

$$w = \xi'_D x + \eta'_D \left[y \left(1 - \frac{x_D}{R} \right) - \frac{y_D}{R} x \right] + \left(1 - \frac{x}{R} \right) (\theta' \omega - w_0), \quad (5)$$

wo

$$\theta' = \varphi' + \frac{\eta'_D}{R}, \quad \omega = \int_0^s \frac{h_D}{\left(1 - \frac{x}{R} \right)^2} ds \quad (6), (7)$$

und $w_0 = w_0(x)$ die Verschiebung des Punktes C ist

Der Ausdruck (6) wird oft als spezifische Verwindung bezeichnet. Die Grösse ω stellt die sektorielle Koordinate oder Einheitsverwölbung des Stabes mit gekrümmter Achse dar, wobei h_D der Abstand der Tangente an der Profilmittellinie vom Pol D ist.

Für einen Stab mit schwach gekrümmter Achse können wir schreiben:

$$\omega = \int_0^s h_D ds \quad (8)$$

überführt werden, wo

$$\begin{aligned} E_{b\phi} &= \frac{E_b}{1 + \frac{\phi}{2}} \\ G_{b\phi} &= \frac{G_b}{1 + \frac{\phi}{2}} \\ \mu &= \frac{\phi}{1 + \frac{\phi}{2}} \end{aligned} \quad (17a-d)$$

und

$$E_{s_1} = \frac{E_{sch}}{\phi_n} \phi$$

Die Werte $\bar{\sigma}_0$ und $\bar{\tau}_{s0}$ stellen die Normalspannung und Schubspannung für $t=0$ dar.

Wenn man die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung des Betons nach Trost [3] annimmt, ergeben sich die folgenden Werte für $E_{b\phi}$ und μ :

$$\begin{aligned} E_{b\phi} &= \frac{E_b}{1 + \rho\phi}, \quad G_{b\phi} = \frac{G_b}{1 + \rho\phi} \\ \mu &= \frac{(1-\rho)\phi}{1 + \rho\phi} \end{aligned} \quad (18, a-c)$$

wo, (vgl. [3], Gl. 4),

$$\rho = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Delta\sigma(t_i)}{\bar{\sigma}_0 - \bar{\sigma}_0} \cdot \frac{t_i}{t_0}$$

ist.

Für den Stahlanteil gelten die Beziehungen auf Grund des Hooke-schen Gesetzes:

$$\bar{\sigma}_a = E_a \varepsilon \quad (19)$$

$$\bar{\tau}_{sa} = G_a \gamma_s \quad (20)$$

5. Torsion des Stabes

Die Schnittkräfte können wir, unter Benutzung der Gleichungen (13), (14), (19) und (20), und der Ausdrücke (9) und (10) durch die Verschiebungsparameter w_0, ξ, η, φ ausdrücken.

Durch Einsetzen dieser Werte in das Gleichungssystem (12) können wir die Differentialgleichungen des Stabes erhalten

Der Einfachheit halber setzen wir voraus dass der Stahl über die Wandstärke t symmetrisch angeordnet ist. Der Anteil der Stärke welchen wir mit α bezeichnen wollen, stellt die, auf Einheit der Profilmittellinie bezogene Fläche der Bewehrung (siehe Abb. 46) oder, im

$$\begin{aligned}
N' - \frac{N_x'}{R} + p_z - \frac{m_x}{R} &= 0 \\
M_x'' - \frac{N'}{R} + p_x + m_x' &= 0 \\
M_y''(1 + \frac{x_0}{R}) - M_x'' \frac{y_0}{R} + \frac{1}{R} (M_\omega'' + T_s') + p_y & \\
+ m_y'(1 + \frac{x_0}{R}) - m_x' \frac{y_0}{R} + \frac{1}{R} m_\omega' &= 0 \quad (12a-d) \\
M_\omega'' + T_s' - \frac{1}{R} (M_y - N y_0) + m_\omega + m_\omega' &= 0
\end{aligned}$$

wo p_x, p_y und p_z die Linienbelastungen in den Richtungen x, y und z , und $m_\omega, m_x, m_y, m_\omega'$ das äussere verteilte Torsionsmoment, die Biegemomente und das Bimoment sind.

4. Beziehungen zwischen den Schnittkräften und Formänderungen

Das visko-elastische Verhalten des Betons wird in der Weise dargestellt, wie es von M. Djurić vorgeschlagen wird [2].

Die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung wird auf folgender Art ausgedrückt:

$$\epsilon = \frac{1}{E_b} (\sigma_b + \int_0^\phi \sigma_b d\phi) - \frac{E_{sch}}{\phi_n} \phi \quad (13)$$

$$\tau_s = \frac{1}{G_b} (\tau_{sb} + \int_0^\phi \tau_{sb} d\phi) \quad (14)$$

wo - σ_b Normalspannung für den Betonanteil des Querschnitts
 τ_{sb} St. Venantsche Schubspannung für den Betonanteil des Querschnitts

$\phi = \phi(t)$ Kriechzahl

ϕ_n Grenzwert der Kriechzahl für $t = t_n$

E_{sch} Endschwindmass des Betons

E_b Elastizitätsmodul

G_b Schubmodul

bedeuten.

Unter der Voraussetzung linearen Veränderlichkeit der Spannungen mit der Zeit, können die bestimmten Integrale auf den Rechten Seiten der Gleichungen auf folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\int_0^\phi \sigma_b d\phi = \frac{\sigma_b + \sigma_{b0}}{2} \phi$$

$$\int_0^\phi \tau_{sb} d\phi = \frac{\tau_{sb} + \tau_{sb0}}{2} \phi$$

und die Ausdrücke (13) und (14) in die Gleichungen

$$\sigma_b = E_{bp} (\epsilon - \epsilon_s) - \mu \sigma_{b0} \quad (15)$$

$$\tau_{bs} = G_{bp} \tau_s - \mu \tau_{sb0} \quad (16)$$

Für die Dehnung in z -Richtung ergibt sich nach [1]:

$$\varepsilon = \frac{1}{1-\frac{z}{R}} \left\{ \xi_D'' x + \eta_D'' y + \frac{1}{R} [\xi - (y - y_D)] \varphi - \theta'' \omega - \frac{\eta_D''}{R} (x_D y - y_D x) + w_0' \right\} \quad (9)$$

Wenn wir von der Kirchhoff-Loveschen Hypothese, welche charakteristisch für die Theorie der dünnwandigen Schalen ist, ausgehen, erhalten wir nach [1] für die Gleitverzerrung γ_s ausserhalb der Mittel- fläche den folgenden Ausdruck:

$$\gamma_s = 2\theta' e \quad (10)$$

3. Schnittkräfte und Gleichgewichtsbedingungen

Die Schnittkräfte des Stabes definieren wir wie folgt:

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma dF \\ Q_x &= \int_F (\tau_{zn} \cos \alpha - \tau_{zs} \sin \alpha) dF \\ Q_y &= \int_F (\tau_{zn} \sin \alpha + \tau_{zs} \cos \alpha) dF \\ M_x &= \int_F \sigma x dF \\ M_y &= \int_F \sigma y dF \\ T &= \int_F [\tau_{zn} h_{nD} + \tau_{zs} (h_D + e)] dF \\ M_\omega &= \int_F \sigma \left(1 - \frac{z}{R}\right) \omega dF \\ T_s &= 2 \int_F \tau_s e dF \end{aligned} \quad (11a-h)$$

wo σ Normalspannung und τ_{zs} und τ_{zn} die Schubspannungen sind.

Die ersten drei Ausdrücke stellen Reihe nach die Normalkraft und die Querkräfte des Querschnitts dar. Durch die Ausdrücke (11d-f) sind die Biegemomente in bezug auf die Achsen y und x , sowie das Torsionsmoment in bezug auf den Punkt D bestimmt. Durch den Ausdruck (11g) ist das Bimoment M_ω gegeben, und die Grösse T_s stellt das sog. St. Venantsche Torsionsmoment dar.

Wenn wir die Gleichgewichtsbedingungen der, auf ein Element des Stabes wirkenden Kräfte aufstellen, erhalten wir nach [1] die folgenden Gleichungen:

Fälle des Verbundträgers, des Stahlanteiles dar

Setzen wir

$$t_\phi = \frac{E_{b\phi}}{E_c} t_b + \frac{E_a}{E_c} t_a; \quad dF_\phi = t_\phi ds; \quad F_\phi = \int dF_\phi, \quad (21)$$

wo E_c ein beliebiger konstanter Elastizitätsmodul ist.

Die Punkte D und O wählen wir in der Weise damit die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

$$\begin{aligned} \int x \omega dF_\phi &= 0 \\ \int y \omega dF_\phi &= 0 \\ \int \omega dF_\phi &= 0 \end{aligned}$$

Der Punkt D stellt den Schubmittelpunkt des Querschnitts aus homogenen Material mit der Wandstärke t_ϕ ,

Die Ausdrücke für das Bimoment M_ω und das St. Venantsche Torsionsmoment T_s können wir jetzt in der folgenden Form anschreiben:

$$M_\omega = -E_c J_{\omega\omega} \theta'' - \mu M_{b\omega 0} - M_{\omega, sch} \quad (22)$$

und

$$T_s = G_c K_\phi \theta' - \mu T_{bso} \quad (23)$$

wo

$$J_{\omega\omega} = \int \omega^2 dF_\phi, \quad M_{\omega, sch} = -E_{b\phi} \int \omega dF_\phi$$

und

$$K_\phi = 4 \int_s \left(\int_b \frac{G_{b\phi}}{G_c} e^2 de + \int_a \frac{G_a}{G_c} e^2 de \right) ds$$

ist.

Die, mit b bzw. a bezeichnete Integrale beziehen sich auf Beton- bzw. Stahlteil der Wandstärke.

Die Werte

$$M_{b\omega 0} = \int_b \bar{G}_{b0} \omega dF, \quad T_{bso} = 2 \int_s ds \int_b \bar{\tau}_{bso} e de,$$

betrachten wir als bekannt und durch die Berechnung des elastischen Stabes mit der Wandstärke t_f

$$t_f = \int_b \frac{E_b}{E_c} de + \int_a \frac{E_a}{E_c} de$$

und Torsionskonstante

$$K_f = 4 \int_s \left(\int_b \frac{G_b}{G_c} e^2 de + \int_a \frac{G_a}{G_c} e^2 de \right) ds$$

erhalten.

Durch Einsetzen der Ausdrücke (22) und (23) in die Gleichung (12d) erhalten wir die Differentialgleichung der Torsion:

$$\begin{aligned} E_c J_{\omega\omega} \theta'' - G_c K_\phi \theta'' &= m_D + m_\omega' - \\ &- \frac{1}{R} (M_y - N y_D) - \mu (M_{b\omega 0}'' + T_{bso}') \end{aligned} \quad (24)$$

Die Gleichung (24) hat dieselbe Form wie die klassische Gleichung der Wölbkrafttorsion. Die Grössen

$$N = \int \sigma dF, \quad M_y = \int \sigma y dF$$

sind für den statisch bestimmten Träger bekannt. Ist dies nicht der Fall, so erhalten wir die Lösung der Aufgabe durch parallele Behandlung der Biegungs- und Axialbeanspruchung des Stabes. Bei den Trägern mit grösserem Krümmungsradius können die Grössen N und M_y wie für den geraden Träger in Rechnung gesetzt werden.

Schrifttum

C.F. Kollbrunner und N. Hajdin: Beitrag zur Theorie dünnwandiger Stäbe mit gekrümmter Achse. Inst. f. bauwissenschaftliche Forschung, H. 8., Verl. Leemann, Zürich 1969.

M. Djurić: Theorie der Verbund- und vorgespannten Konstruktionen /serbo-kroatisch/. Serbische Akademie der Wissenschaften und Künste, Monographien, Band CCCLXIV, Beograd 1963.

H. Trost: Folgerungen aus Theorien und Versuche für die baupraktische Untersuchung von Kriech-Relaxationsprobleme in Spannbetontragwerken. Symposium "Der Einfluss des Kriechens, Schwindens und der Temperaturänderungen in Stahlbetonkonstruktionen", Madrid, 1970, Vorbericht.

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Beitrag werden die Grundlagen für die praktische Berechnung dünnwandiger Stäbe mit gekrümmter Achse, unter Berücksichtigung der Einflüsse des Kriechens und Schwindens des Betons, gegeben. Diese Einflüsse haben bei Stäben mit gekrümmter Achse eine besondere Bedeutung, da neben der Beanspruchung auf Biegung, die Torsionsbeanspruchung eine wesentliche Rolle spielt.

SUMMARY

The paper deals with the analysis of thin-walled members curved in the horizontal plane, taking into account the effects of concrete creep and shrinkage. These effects are of particular importance in curved members, which are subjected to torsion in addition to moment.

RESUME

Dans cet article, on présente une méthode pour le calcul des poutres à parois minces avec axe courbe en tenant compte des effets du fluage et du retrait du béton. Ces effets ont une influence particulière pour les poutres à axe courbe, car, en plus des contraintes de flexion, les contraintes de torsion jouent un rôle considérable.