

**Zeitschrift:** IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

**Band:** 6 (1970)

**Artikel:** Spannungsänderungen infolge Kriechen und Schwinden in beliebig bewehrten Spannbetonträgern bei statisch bestimmter und unbestimmter Auflagerung

**Autor:** Trost, H. / Wolff, H.-J.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7805>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**Spannungsänderungen infolge Kriechen und Schwinden in beliebig bewehrten  
Spannbetonträgern bei statisch bestimmter und unbestimmter Auflagerung**

Stress Redistribution as a Result of Creep and Shrinkage in Statically Determinate and Indeterminate Prestressed Concrete Girders with arbitrary Arrangements of Reinforcement

Changements de contraintes dûs au fluage et au retrait dans des poutres isostatiques ou hyperstatiques en béton précontraint

H. TROST                      H.-J. WOLFF  
Professor Dr.-Ing.              Dipl.-Ing.  
Technische Universität Hannover  
Deutschland

1. Problemstellung und Übersicht

In Verbundquerschnitten aus Beton und Stahl ergeben sich durch die unterschiedlichen Verformungseigenschaften dieser Werkstoffe Spannungsänderungen gegenüber den anfänglichen Spannungen aus andauernden Lasten und Vorspannung. Diese sogenannten Spannungsänderungen infolge des Kriechens und Schwindens des Betons sind nach folgendem mechanischen Prinzip zu bestimmen: Beim Lösen des Verbundes würden sich die Kriech- und Schwindverformungen des Betons unbehindert einstellen, wobei die Betonspannungen bei konstanter Dauerbelastung unverändert bleiben. Die im Verbund liegenden Bewehrungsstäbe - und zwar sowohl die vorgespannten als auch die schlaffen Stahleinlagen - behindern jedoch die zeitabhängigen Verformungen des Betons, wodurch gleichzeitig Spannungsänderungen im Stahl und Beton hervorgerufen werden.

Aus den Verträglichkeitsbedingungen des Verbundquerschnittes ergeben sich im statisch bestimmten Grundzustand nur Umlagerungen der inneren Kräfte bei gleichbleibenden äußeren Schnittgrößen. Bei statisch unbestimmt gelagerten Trägern kann dieser Eigenspannungszustand die Kontinuitätsbedingungen des Tragwerks verletzen, wodurch dann zusätzliche Zwängschnittgrößen und damit Änderungen der Auflagerreaktionen hervorgerufen werden.

Die meisten der vorliegenden Arbeiten zu diesem Fragenkomplex benutzen als Ausgangspunkt die differentielle Form der linearen zeitabhängigen  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehung des Betons von Dischinger, die aber die physikalisch unzutreffende Gültigkeit der Idealkriechkurven von Withney voraussetzt (vgl. hierzu [9]). Während damit der sogenannte Spannkraftverlust beim einlagig bewehrten Träger einfach berechnet werden kann, werden die Lösungen der Differentialgleichungssysteme bei zwei- und mehrlagig bewehrten Querschnitten recht umfangreich (vgl. u.a. [1] bis [6]).

Unter Vermeidung dieser Mängel ermöglicht es das im folgenden erläuterte Verfahren, die tatsächlichen Bewehrungsverhältnisse in den vorhandenen Querschnitten zu berücksichtigen und die Auswirkungen verschiedener Grenzannahmen für die maßgebenden Baustoffkennwerte (Kriech- und Schwindmaße, Elastizitätsmoduli) übersichtlich zu beurteilen.

2. Berechnungsgrundlagen

Die bei Aufbringen der Dauerlasten und Vorspannung in stabartigen Tragwerken vorhandenen Spannungen seien in üblicher Weise ermittelt, wobei entweder Vorspannung mit sofortigem Verbund oder Vorspannung mit nachträglichem Verbund vorliegen kann.

Im Bereich der Gebrauchsbeanspruchung wird zur beliebigen Zeit nach Belastung ein linearer Zusammenhang zwischen dem Spannungs- und Verzerrungszustand bei Stahl und Beton angenommen. Während für den Stahl (Index a für acier) das Hookesche Gesetz in der Form

$$(1) \quad \epsilon_a = \frac{\sigma_a}{E_a}$$

mit  $E_a$  als Elastizitätsmodul des Stahls gültig ist, wird der zeitabhängige lineare Zusammenhang zwischen der Betonspannung  $\sigma_b(t)$  und der Betondehnung  $\epsilon_b(t)$  in der in [9] erläuterten zweckmäßigen Form

$$(2) \quad \epsilon_b(t) = \frac{\sigma_{b0}}{E_b} (1 + \varphi) + \frac{\sigma_b(t) - \sigma_{b0}}{E_b} (1 + \xi\varphi) + \epsilon_s(t)$$

angenommen. In der Spannungs- Dehnungs- Beziehung (2) bedeuten:

- $\sigma_{b0}$  Ausgangsspannung bei Eintritt der untersuchten Beanspruchung,
- $E_b$  der als konstant angenommene Elastizitätsmodul des Betons,
- $\varphi$  die Kriechzahl oder genauer die Kriechfunktion  $\varphi(t, t_0)$  zur Beschreibung von Verlauf und Größe der durch  $\sigma_{b0}$  hervorgerufenen Kriechdehnung, die in der Form  $\varphi(t, t_0) = k_0 \varphi_N f(t)$  mit  $k_0$  den Einfluß des Betonalters  $t_0$  bei der Belastung, mit dem Normkriechmaß  $\varphi_N = \frac{\varphi_\infty}{k_0}$  die Auswirkung der Bauwerksbedingungen und mit der Zeitfunktion  $0 < f(t) < 1$  den Verlauf der Kriechdehnung erfassen läßt [7],
- $\sigma_b(t) - \sigma_{b0}$  die durch eine Dehnungsbedingung erzwungene zeitliche Änderung der Ausgangsspannung,
- $\xi$  der Relaxationskennwert für die infolge der Betonalterung abgeminderte Kriechfähigkeit, auf die die erzwungene Spannungsänderung trifft,
- $\epsilon_s(t)$  die Schwinddehnung, die das Endschwindmaß  $\epsilon_{s\infty}$  erreicht und üblicherweise affin zum Kriechverlauf angenommen werden kann.

Da bei Spannbetonträgern die Spannungsänderung praktisch zeitgleich mit dem Kriechen erfolgt, kann der Relaxationskennwert hier mit  $\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{4k_0}$  unabhängig von  $\varphi_N$  angenommen werden. [9]

Weiterhin wird für die Ermittlung der Spannungsänderungen vorausgesetzt, daß ein voller Verbund zwischen Stahl und Beton besteht und das Ebenbleiben der Verbundquerschnitte gewährleistet ist.

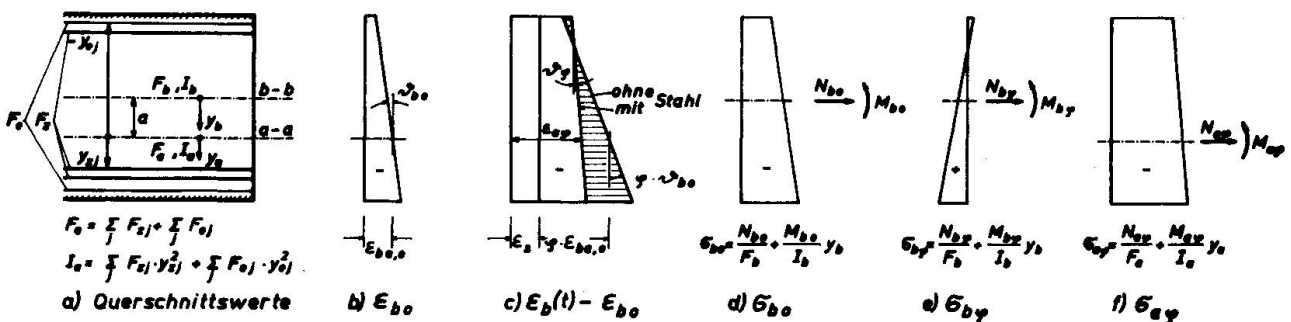


Fig.1 Verformungen und Spannungen im Querschnitt

### 3. Spannungsumlagerungen im beliebig bewehrten Querschnitt.

Alle Bewehrungslagen, d.h. die Spannbewehrung und die schlaffe Bewehrung, werden in der gemeinsamen Stahlachse a-a zusammengefaßt, so daß man die gesamte Stahlfläche  $F_a$  und das gemeinsame Stahlträgheitsmoment  $I_a$  erhält (Fig. 1a). Die Vorspannung kann in verschiedenen Lagen mit unterschiedlichen Spannkraften  $Z_i$  aufgebracht sein.

Zur Bestimmung der Spannungsänderungen wird zunächst der Verbund zwischen den Stahleinlagen und dem Beton nach Eintritt der elastischen Verformungen (Fig. 1b) gelöst. Dadurch könnten sich im Beton die Kriechverformungen  $\varphi \cdot \epsilon_{b0}$  und  $\varphi \cdot \gamma_{b0}$  und die Schwindverformung  $\epsilon_s$  unbehindert einstellen (Fig. 1c). Die infolge der Verbundwirkung entstehenden Umlagerungsgrößen werden für den Beton bezeichnet mit  $M_{b\varphi}$  und  $N_{b\varphi}$  und für den Stahl mit  $M_{a\varphi}$  und  $N_{a\varphi}$ .

Die nachträglichen Formänderungen im Stahl ergeben sich dann

$$(3) \quad \epsilon_{a\varphi} = \frac{N_{a\varphi}}{E_a F_a} + \frac{M_{a\varphi}}{E_a I_a} y_a \quad .$$

Entsprechend läßt sich die zeitabhängige Betondehnung in der Faser  $y_b$  nach der  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehung (2) angeben

$$(4) \quad \epsilon_{b\varphi} = \epsilon_{b0} \cdot \varphi + \left( \frac{N_{b\varphi}}{E_b F_b} + \frac{M_{b\varphi}}{E_b I_b} y_b \right) \cdot (1 + \rho \varphi) + \epsilon_s \quad .$$

Die Stahleinlagen befinden sich mit dem Beton in Verbund, so daß für den gesamten Querschnitt die Verträglichkeitsbedingungen gelten

$$(5) \quad \epsilon_{a\varphi} = \epsilon_{b\varphi} \quad \text{und}$$

$$(6) \quad \gamma_{a\varphi} = \gamma_{b\varphi} \quad .$$

So läßt sich z.B. für die Faser a-a in Höhe der Schwerlinie der Stahleinlagen die Dehnungsbedingung angeben mit

$$(7) \quad \frac{N_{a\varphi}}{E_a F_a} = \frac{\sigma_{ba,0}}{E_b} \cdot \varphi + \left( \frac{N_{b\varphi}}{E_b F_b} + \frac{M_{b\varphi}}{E_b I_b} a \right) (1 + \rho \varphi) + \epsilon_s \quad ,$$

wenn

$$(8) \quad \sigma_{ba,0} = \frac{N_{b0}}{F_b} + \frac{M_{b0}}{I_b} a \quad ,$$

die Betonspannung in Höhe der Stahlschwerlinie infolge äußerer Dauerlast und infolge Vorspannung bedeutet (Fig. 1d).

Es sei vermerkt, daß in  $\sigma_{ba,0}$  sowohl die Vorspannung mit sofortigem Verbund (Spannbettvorspannung) als auch Vorspannung mit nachträglichem Verbund berücksichtigt werden kann. Der Unterschied besteht nur in der Art der Berechnung von  $\sigma_{ba,0}$ , auf die hier nicht eingegangen werden soll.

Als weitere Bedingung soll die Verträglichkeit der Verdrehungen nach (6) dargestellt werden mit

$$(9) \quad \frac{M_{a\varphi}}{E_a I_a} = \frac{M_{b0}}{E_b I_b} \cdot \varphi + \frac{M_{b\varphi}}{E_b I_b} (1 + \rho \varphi) \quad .$$

Da die Umlagerungsgrößen einen Eigenspannungszustand bilden, gelten die Gleichgewichtsbedingungen

$$(10) \quad \begin{aligned} N_{b\varphi} &= -N_{a\varphi} \\ M_{b\varphi} &= -N_{a\varphi} \cdot a - M_{a\varphi} \quad . \end{aligned}$$

Mit den Gleichungen (7), (9) und (10) läßt sich jetzt das Gleichungssystem zur Bestimmung der zeitabhängigen Schnittgrößen angeben zu

$$(11) \quad N_{a\varphi} \left[ \frac{1}{E_a F_a} + \left( \frac{1}{E_b F_b} + \frac{a^2}{E_b J_b} \right) (1 + \varphi) \right] + M_{a\varphi} \frac{a}{E_b J_b} (1 + \varphi) = \frac{\sigma_{ba,0} \cdot \varphi + \epsilon_s}{E_b}$$

$$N_{a\varphi} \frac{a}{E_b J_b} (1 + \varphi) + M_{a\varphi} \left[ \frac{1}{E_a J_a} + \frac{1}{E_b J_b} (1 + \varphi) \right] = \frac{M_{b0} \cdot \varphi}{E_b J_b}$$

Wird mit  $n = E_a : E_b$  zur Abkürzung der dimensionslose Umlagerungswert

$$(12) \quad \frac{1}{\lambda} = 1 + \frac{n F_a}{F_b} \left( 1 + \frac{F_b a^2}{J_b} \right) (1 + \varphi) + \frac{n J_a}{J_b} (1 + \varphi) \left( 1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \varphi) \right)$$

eingeführt, der durch die Querschnittsverhältnisse und die Stahlanordnung festgelegt ist, so bildet dieser charakteristische Wert  $\lambda$  eine Maßzahl für die Verformung des Verbundquerschnittes im Vergleich zur unbehinderten Betonverformung. Wenn die kriecherzeugende Spannung  $\sigma_{ba,0}$  durch die Teilschnittgrößen entsprechend (8) ausgedrückt wird, so erhält man durch Auflösung des Gleichungssystems (11) die Umlagerungsgrößen des Eigenspannungszustandes unter Beachtung der Gleichgewichtsbedingungen (10)

$$(13) \quad N_{a\varphi} = -N_{b\varphi} = \lambda \cdot F_a \left[ (E_a \epsilon_s + n \varphi \frac{N_{b0}}{F_b}) \left( 1 + \frac{n J_a}{J_b} (1 + \varphi) \right) + n \varphi \frac{M_{b0} a}{J_b} \right]$$

$$(14) \quad M_{a\varphi} = \lambda \cdot \frac{n J_a}{J_b} \left[ - (E_a \epsilon_s + n \varphi \frac{N_{b0}}{F_b}) F_a a (1 + \varphi) + \varphi M_{b0} \left( 1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \varphi) \right) \right]$$

$$(15) \quad M_{b\varphi} = \lambda \cdot F_a a \left[ - (E_a \epsilon_s + n \varphi \frac{N_{b0}}{F_b}) - n \varphi \frac{M_{b0} a}{J_b} \left( 1 + \frac{J_a}{F_a a^2} \left( 1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \varphi) \right) \right) \right]$$

Aus diesen geschlossenen Lösungen läßt sich der Einfluß von Momentenbeanspruchung, Normalkraftbeanspruchung und Schwinden auf die Größe der Kräfteumlagerungen unmittelbar ablesen. Die Spannungsänderungen im Beton und im Stahl ergeben sich entsprechend Fig. 1e und 1f.

Für den Sonderfall der einlagigen Bewehrung, die im Abstand  $a = y_b z$  von der Betonschwerlinie liegt, ergibt sich aus Gleichung (13) unmittelbar die Lösung mit  $I_a = 0$  zu (siehe [9])

$$(16) \quad N_{a\varphi} = \frac{1}{1 + \frac{n F_a}{F_b} \left( 1 + \frac{F_b a^2}{J_b} \right) (1 + \varphi)} \cdot F_a \left[ E_a \epsilon_s + n \varphi \left( \frac{N_{b0}}{F_b} + \frac{M_{b0} a}{J_b} \right) \right]$$

Für diesen einlagig bewehrten Träger ist in Fig. 2 die Stahlspannungsänderung, die durch den Umlagerungskennwert  $\lambda$  gekennzeichnet ist, als Verhältnis der Stahldehnung zur unbehinderten Betondehnung in der Stahlschwerlinie aufgetragen.

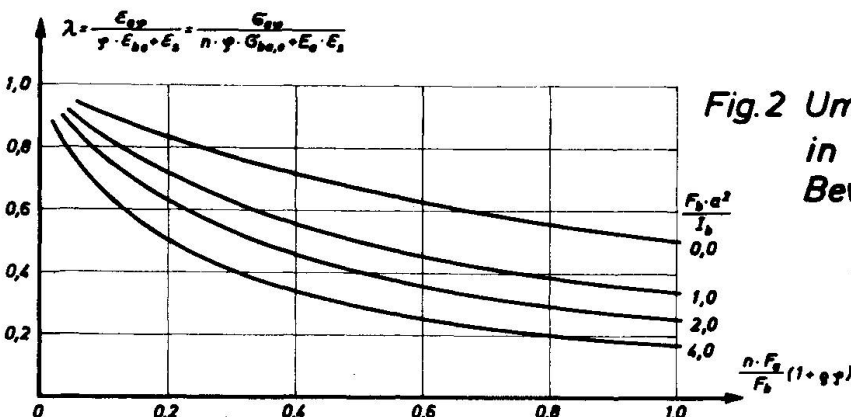


Fig. 2 Umlagerungskennwert  $\lambda$  in Abhängigkeit von der Bewehrungsanordnung ( $I_a = 0$ )

$$\frac{1}{\lambda} = 1 + \frac{n F_a}{F_b} \left( 1 + \frac{F_b a^2}{I_b} \right) (1 + \varphi)$$

Für den Fall der zweilagigen Bewehrung läßt sich die Größe der Spannungumlagerung für die beiden Stränge unmittelbar aus (13) und (14) errechnen. Man könnte auch statt der beiden Verträglichkeitsbedingungen (7) und (9) von der Gleichheit der Dehnungen in Höhe der beiden Stahlstränge ausgehen. Dies führt zu dem Gleichungssystem für die beiden Umlagerungskräfte

$$(17) \quad \frac{z\varphi_1}{F_{z1}} [1 + \bar{\alpha}_{11}(1 + s\varphi)] + \frac{z\varphi_2}{F_{z2}} \bar{\alpha}_{12}(1 + s\varphi) = r\varphi \sigma_{b1,0} + E_s \epsilon_s$$

$$\frac{z\varphi_1}{F_{z1}} \bar{\alpha}_{21}(1 + s\varphi) + \frac{z\varphi_2}{F_{z2}} [1 + \bar{\alpha}_{22}(1 + s\varphi)] = r\varphi \sigma_{b2,0} + E_s \epsilon_s$$

mit den Steifigkeitswerten des Betonquerschnittes

$$\bar{\alpha}_{11} = \frac{r F_{z1}}{F_b} \left(1 + \frac{F_b y_{b1}^2}{J_b}\right) \quad \bar{\alpha}_{12} = \frac{r F_{z2}}{F_b} \left(1 + \frac{F_b y_{b1} y_{b2}}{J_b}\right)$$

$$\bar{\alpha}_{21} = \frac{r F_{z1}}{F_b} \left(1 + \frac{F_b y_{b1} y_{b2}}{J_b}\right) \quad \bar{\alpha}_{22} = \frac{r F_{z2}}{F_b} \left(1 + \frac{F_b y_{b2}^2}{J_b}\right)$$

Werden aus (17) die Stahlspannungsänderungen  $\sigma_{z1,\varphi}$  und  $\sigma_{z2,\varphi}$  errechnet, erhält man das in [10] dargestellte Ergebnis.

#### 4. Spannungsänderungen am statisch unbestimmten Träger

Zweckmäßig bestimmt man bei statisch unbestimmten Trägern zunächst die Umlagerungen des statisch bestimmten Grundzustandes (im folgenden Kopfzeiger  $\circ$ ) mit den kriecherzeugenden Spannungen oder Schnittgrößen des unbestimmten Systems nach den Gleichungen (11) bis (15). Wenn man sich mit der Bestimmung dieses inneren Eigenspannungszustandes begnügt, vernachlässigt man eine eventuelle Änderung der Auflagerkräfte, die durch die Verletzung der Kontinuitätsbedingungen entstehen kann.

Im folgenden soll jedoch ein Verfahren zur Ermittlung der Zwängschnittgrößen infolge Kriechen und Schwinden angegeben werden.

Dazu bestimmt man die eintretenden Umlagerungsgrößen als Summe des am statisch bestimmten Grundsystem ermittelten Anteiles und des Anteiles aus der Zwängung. Die aus den Gleichungen (11) bis (15) mit den Schnittgrößen des unbestimmten Systems ermittelten Umlagerungsgrößen am statisch bestimmten Grundsystem  $M_{b\varphi}^\circ, N_{b\varphi}^\circ$  und  $M_{a\varphi}^\circ, N_{a\varphi}^\circ$  bilden nach Gleichung (10) einen inneren Eigenspannungszustand (Fig. 3b). Wenn dieser Zustand jetzt mit den Verformungsbedingungen des Gesamtsystems unverträglich ist, stellen die zusätzlichen Zwänggrößen (Kopfzeiger  $'$ )  $N_{b\varphi}'$  und  $M_{b\varphi}'$  als äußere Schnittgrößen die Verträglichkeit her. Die anteiligen Schnittkräfte dieser Zwänggrößen werden bezeichnet mit  $N_{b\varphi}', M_{b\varphi}'$  und  $N_{a\varphi}', M_{a\varphi}'$ . Damit ergeben sich die anteiligen Umlagerungsgrößen für den Beton und den Stahl zu

$$(18) \quad M_{b\varphi} = M_{b\varphi}^\circ + M_{b\varphi}' \quad N_{b\varphi} = N_{b\varphi}^\circ + N_{b\varphi}'$$

$$M_{a\varphi} = M_{a\varphi}^\circ + M_{a\varphi}' \quad N_{a\varphi} = N_{a\varphi}^\circ + N_{a\varphi}'$$

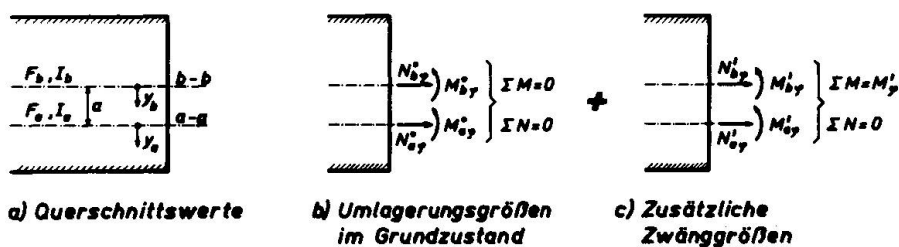


Fig. 3 Umlagerungsgrößen beim Durchlaufträger

Für die Zwängschnittgrößen erhält man aus den Verträglichkeitsbedingungen (7) und (9) nach Abzug des Grundzustandes

$$(19) \quad \frac{N_{a\varphi}'}{E_a F_a} = \left( \frac{N_{b\varphi}'}{E_b F_b} + \frac{M_{b\varphi}'}{E_b J_b} a \right) (1 + \varphi)$$

$$\frac{M_{a\varphi}'}{E_a J_a} = \frac{M_{b\varphi}'}{E_b J_b} (1 + \varphi) .$$

Um den Zusammenhang zwischen den anteiligen Zwängschnittgrößen und der Gesamtzwängung herzustellen, benötigt man weiterhin die Gleichgewichtsbedingungen (vgl. Fig. 3c)

$$(20) \quad N_{\varphi}' = N_{b\varphi}' + N_{a\varphi}'$$

$$M_{\varphi}' = M_{b\varphi}' + M_{a\varphi}' + N_{a\varphi}' \cdot a ,$$

wobei für ein in Normalkraftrichtung zwängungsfrei gelagertes Tragsystem  $N_{\varphi}' = 0$  ist, was für die weiteren Ableitungen angenommen werden soll.

Mit (20) erhält man aus (19) das Gleichungssystem

$$(21) \quad N_{a\varphi}' \left[ \frac{1}{E_a F_a} + \left( \frac{1}{E_b F_b} + \frac{a^2}{E_b J_b} \right) (1 + \varphi) \right] + M_{a\varphi}' \frac{a}{E_b J_b} (1 + \varphi) = \frac{M_{\varphi}'}{E_b J_b} a (1 + \varphi)$$

$$N_{a\varphi}' \frac{a}{E_b J_b} (1 + \varphi) + M_{a\varphi}' \left[ \frac{1}{E_a J_a} + \frac{1}{E_b J_b} (1 + \varphi) \right] = \frac{M_{\varphi}'}{E_b J_b} (1 + \varphi) ,$$

das in den Koeffizienten genau dem System (11) für die Umlagerungsgrößen am statisch bestimmten Grundsystem entspricht. Nach einem Vergleich der rechten Seiten von (21) und (11) ergibt sich der Zusammenhang zwischen den anteiligen Zwängschnittgrößen des Stahles und der Gesamtzwängung  $M_{\varphi}'$  entsprechend (13) und (14) zu

$$(22) \quad N_{a\varphi}' = -N_{b\varphi}' = M_{\varphi}' \cdot \lambda \cdot n F_a \frac{a}{J_b} (1 + \varphi)$$

$$M_{a\varphi}' = M_{\varphi}' \cdot \lambda \cdot \frac{n J_a}{J_b} (1 + \varphi) \left( 1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \varphi) \right) .$$

$M_{b\varphi}'$  erhält man jetzt nicht entsprechend Gleichung (15), sondern mit der maßgebenden Gleichgewichtsbedingung (20) zu

$$(23) \quad M_{b\varphi}' = M_{\varphi}' \cdot \lambda \cdot \left( 1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \varphi) \right) .$$

Man ermittelt die noch unbekannte Zwänggröße  $M_{\varphi}'$  aus den Kontinuitätsbedingungen des zusammenhängenden Tragwerks. Die folgenden Überlegungen werden an einem einfach unbestimmten System erläutert, sie gelten jedoch allgemein.

Da aus dem auf das statisch bestimmte Hauptsystem einwirkenden Eigenspannungszustand keine äußere Schnittgröße resultiert, kann die Gesamtverdrehung des Querschnittes nur über die Betonverdrehung bestimmt werden, die gleich der Verdrehung des Gesamtquerschnittes sein muß. An der Wirkungsstelle der statisch Überzähligen  $X_{1\varphi}'$  erhält man dann die Verdrehung im Grundzustand infolge des Eigenspannungszustandes der Spannungumlagerungen mit

$$(24) \quad \delta_{1\varphi} = \delta_{1b,\varphi} = \int \frac{M_{b\varphi}'}{E_b J_b} (1 + \varphi) M_1 dx .$$

Die zeitabhängige Verdrehung infolge der Überzähligen  $X_{1\varphi}' = "1"$  ergibt sich aus entsprechenden Überlegungen mit (23) zu

$$(25) \quad \delta_{11,\varphi} = \int \frac{M_{b\varphi}'(1)}{E_b J_b} M_1 (1 + \varphi) dx = \int \lambda \cdot \left( 1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \varphi) \right) \frac{M_1 M_2 (1 + \varphi) dx}{E_b J_b} .$$

Die zeitabhängige Überzählige  $X_{1\psi}$  folgt aus der bekannten Verträglichkeitsbedingung

$$(26) \quad X_{1\psi}' = - \frac{\mathcal{S}_{1\psi}}{\mathcal{S}_{11,\psi}} .$$

Da der Zahlenwert dieser Zwänggröße für Beanspruchungen aus Biegung und in Normalkraftrichtung sehr verschieden sein kann, sollen beide Einflüsse getrennt verfolgt werden.

Für die Momenteneinwirkung  $M_{b0}$  am statisch unbestimmten System läßt sich die Verdrehung  $\delta_{1\psi}$  nach (24) mit dem Wert für  $M_{b\psi}$  aus (15) angeben mit

$$(27) \quad \mathcal{S}_{1\psi} = - \int \lambda \frac{F_a a^2}{\eta_b} n \psi \left[ 1 + \frac{\eta_a}{F_a a^2} \left( 1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \rho \varphi) \right) \right] \frac{M_{b0} M_1 (1 + \rho \varphi)}{E_b \eta_b} dx .$$

Bei gleichbleibenden Bewehrungsverhältnissen und geraden Spanngliedern kann man (27) zusammenfassen zu

$$(28) \quad \mathcal{S}_{1\psi} = -K \cdot \int \frac{M_{b0} M_1}{E_b \eta_b} dx ,$$

worin K eine Konstante darstellt. Nach dem Reduktionssatz ist  $\delta_{1\psi}$  in diesem Fall Null, da der Momentenzustand  $M_{b0}$  bereits mit dem Gesamtsystem verträglich ist. Auch für veränderliche Stahlschwerlinie, d.h.  $a = a(x)$ , ist der Einfluß auf die Integration in (27) für Spannbetonquerschnitte so gering, daß mit guter Näherung  $\delta_{1\psi} = 0$  gesetzt werden kann. Das bedeutet, daß für Momentenbeanspruchung aus Dauerlast und Vorspannung praktisch keine Zwängung und damit keine Auflagerreaktionen infolge Kriechen entstehen.

Für die Beanspruchung aus mittiger Normalkraft auf den Betonquerschnitt und Schwinden ergibt sich mit (15) für  $\delta_{1\psi}$

$$(29) \quad \mathcal{S}_{1\psi} = - \int \lambda F_a \cdot a \left[ E_a \varepsilon_s + n \psi \frac{N_{b0}}{F_b} \right] \frac{M_1}{E_b \eta_b} (1 + \rho \varphi) dx .$$

Für gleichbleibenden Bewehrungsgehalt und konstante Normalkraft kann für die Zwänggröße  $X_{1\psi}$  der Ausdruck

$$(30) \quad X_{1\psi}' = \frac{F_a}{1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \rho \varphi)} \left[ E_a \varepsilon_s + n \psi \frac{N_{b0}}{F_b} \right] \cdot \frac{\int \lambda a \frac{M_1}{E_b \eta_b} dx}{\int \lambda \frac{M_1 M_1}{E_b \eta_b} dx}$$

angegeben werden.

Um den Quotienten der Integrale in (30) weiter zu verfolgen, werden zwei Vereinfachungen getroffen. Als erstes wird für die Ausführung der Integrationen angenommen, daß der Ausdruck  $\lambda$  konstant für  $x$  ist, so daß er vor die Integrale gezogen und gekürzt werden kann. Dies gilt streng für konstantes  $a$ , bei veränderlichem  $a$  zeigen Vergleichsrechnungen, daß diese Vereinfachung für übliche Spannbetonquerschnitte berechtigt ist. Als weitere Vereinfachung wird angenommen, daß  $a$  in (30) dem Abstand der resultierenden Spannstahtschwerlinie von der Betonschwerlinie entsprechen soll. Wird jetzt berücksichtigt, daß sich das Zwängmoment infolge Vorspannung aus

$$(31) \quad X_v' = - \frac{\int a N_{b,v} \frac{M_1}{E_b \eta_b} dx}{\int \frac{M_1 M_1}{E_b \eta_b} dx}$$

ergibt, läßt sich (30) umformen in

$$(32) \quad X_{\psi}' = - X_v' \frac{F_a}{N_{b,v}} \frac{1}{1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \rho \varphi)} \left( E_a \varepsilon_s + n \psi \frac{N_{b0}}{F_b} \right) ,$$

wenn  $N_{b,v}$  als konstant über die Länge angenommen wird.

Für den beliebig statisch unbestimmt gelagerten Träger läßt sich die Zwängung infolge Kriechen und Schwinden angeben

$$(33) \quad M'_{b\psi} = -M'_v \frac{F_a}{N_{b,v}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \psi)} \left( E_a \epsilon_s + n \psi \frac{N_{b0}}{F_b} \right).$$

Der Verlauf von  $M'_{b\psi}$  über die Trägerlänge ist entsprechend dem Verlauf von  $M'_v$  geradlinig. Die anteiligen Zwängschnittgrößen können dann aus den Gleichungen (22) und (23) bestimmt werden. So ergibt sich z.B. für die anteilige Betonzwängung

$$(34) \quad M'_{b\psi} = -\frac{M'_v}{N_{b,v}} \cdot \lambda \cdot F_a \left( E_a \epsilon_s + n \psi \frac{N_{b0}}{F_b} \right).$$

Es ist unmittelbar zu erkennen, daß der Verlauf von  $M'_{b\psi}$  bei veränderlicher Spanngliedlage mit der Änderung von  $\lambda$  nicht mehr geradlinig ist. Das Ergebnis (34) ermöglicht bei einem Vergleich mit  $M_{b\psi}^0$  aus Gleichung (15) für Normalbeanspruchung und Schwinden die folgende Aussage:

$$(35) \quad M'_{b\psi} = -\frac{e'}{a} M_{b\psi}^0 \quad \text{mit} \quad e' = \frac{M'_v}{N_{b,v}}.$$

Dabei stellt  $e'$  bekanntlich bei unbestimmten Systemen den Abstand zwischen der Wirkungslinie der Vorspannkraft auf den Betonquerschnitt und der Stahlschwerlinie oder kurz den Abstand der Betondrucklinie von der Stahlzuglinie dar.

Das Ergebnis (33) für die Zwängung aus Normalkraftbeanspruchung und Schwinden und die Aussage, daß  $M'_{b\psi}$  für Biegebeanspruchung zu Null wird, läßt sich anschaulich an Fig. 4 erläutern. Für das Beispiel eines einfach unbestimmten Trägers mit einem geraden Spannglied ist in Fig. 4a das System und der Verlauf von  $M'_v$  aufgetragen worden. Aufgrund der Gleichgewichtsaussage (20) läßt sich der dargestellte Zusammenhang zwischen der Gesamtwängung  $M'_{b\psi}$  und den anteiligen Zwängungen  $M_{b\psi}'$  und  $N_{a\psi}'$  unmittelbar ablesen. In Fig. 4b ist als Beispiel einer Momentenbeanspruchung die Momentenlinie  $M_g$  für das Eigengewicht gezeigt worden. Gleichung (15) ergibt mit  $I_a = 0$  und konstantem Umlagerungskennwert  $\lambda$  den Verlauf von  $M_{b\psi}^0$ , der affin zu  $M_g$  ist. Da  $M_g$  als Momentenzustand am Gesamtsystem mit diesem auch verträglich ist, ist sofort zu erkennen, daß auch  $M_{b\psi}^0$  keine zusätzlichen Zwänggrößen und damit keine Auflagerkräfte erzeugt. Das entsprechende Ergebnis erhält man für das Moment aus Vorspannung, so daß also  $M'_{b\psi}$  für Momentenbeanspruchung an dem betrachteten Träger Null wird.

In Fig. 4c ist als Beispiel einer Beanspruchung in Längsrichtung das Schwinden des Betons betrachtet worden. Wieder aus Gleichung (15) ergibt sich, daß  $M_{b\psi}^0$  infolge Schwinden den dargestellten Wert und Verlauf annimmt. Es ist unmittelbar zu erkennen, daß diese Momentenfläche am Grundsystem unverträglich mit dem Gesamtsystem ist. Für die Beanspruchung infolge der mittigen Normalkraft auf den Beton aus Vorspannung ergibt sich eine entsprechende Aussage. Die Größe der Zwängung wird nach Gleichung (33) bestimmt.

Durchgeführte Vergleichsrechnungen für die zusätzlichen Zwänggrößen zeigen, daß auch bei üblichen Spannbetonträgern mit geschwungener Spanngliedführung obige Aussagen qualitativ gültig bleiben. Da die Momente aus ständiger Last und Vorspannung praktisch immer entgegengesetzt wirken, können die nur bei veränderlicher Spanngliedführung entstehenden geringen Zwänggrößen aus Momentenbeanspruchung in jedem Fall vernachlässigt werden.

Die Ergebnisse des Abschnittes 4 seien wie folgt zusammengefaßt:

Die Berechnung der Zwängung wird getrennt durchgeführt für Beanspruchung durch Biegung und durch mittige Normalkraft auf den Beton; die Wirkung der Vorspannung ist aufzuteilen in  $M_{b,v}$  und  $N_{b,v}$ .

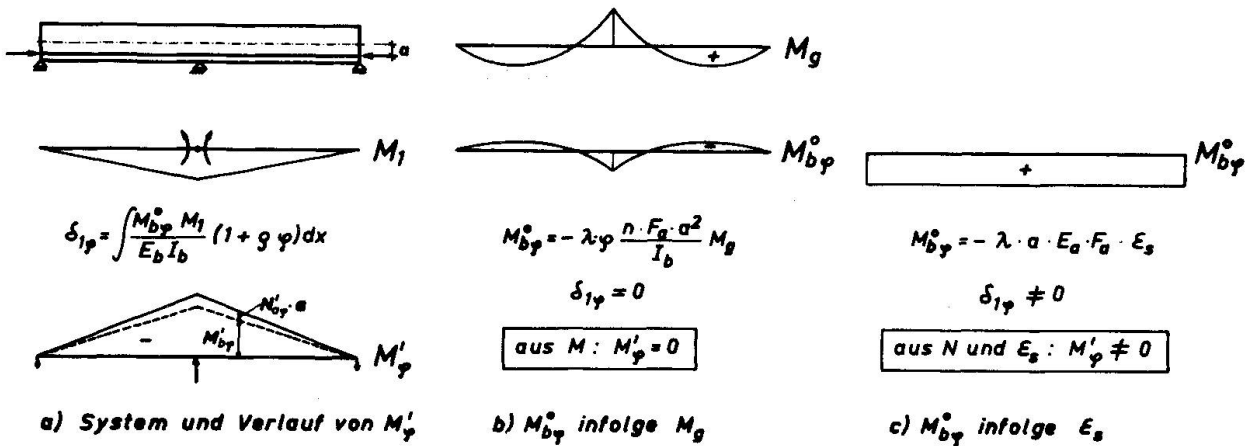


Fig.4 Zwängung  $M'_{\varphi}$  am Durchlaufträger

Aus Biegebeanspruchung treten bei den üblichen Durchlaufträgern keine zusätzlichen Zwänggrößen aus Kriechen auf; deshalb ist es also unzutreffend, die Änderung der Auflagerkräfte mit dem sogenannten Spannkraftverlust zu berechnen.

Aus Normalkraftbeanspruchung und Schwinden erhält man dagegen bei ausmittiger Anordnung der Bewehrung zusätzliche Zwänggrößen, auch wenn die Durchlaufträger in Längsrichtung zwängungsfrei gelagert sind. Man kann diese zusätzliche Zwängung infolge der behinderten Verdrehung innerhalb des Querschnitts, die bei ausmittiger Bewehrung und mittiger Normalbeanspruchung entsteht, als Bruchteil der Gesamtzwängung aus Vorspannung angeben. Dieser Bruchteil wird beeinflusst von dem Bewehrungsgehalt des Querschnitts, der Größe der einwirkenden Normalkraft und dem Schwindmaß. Da die Ausmittigkeit der Bewehrung denselben Einfluß auf die zusätzliche Zwängung wie auf die Zwängung aus Vorspannung hat, treten bei konkordanter Spannliedführung keine Änderung der Auflagerkräfte auf.

Diese Ergebnisse lassen sich auch mechanisch ausdeuten:

Für Momentenbeanspruchung fällt die Drucklinie der Umlagerungsgrößen des Betons mit der Stahlzuglinie zusammen.

Für Normalkraftbeanspruchung und Schwinden ist die Drucklinie der Umlagerungsgrößen des Betons identisch mit der Drucklinie der Vorspannung. Deshalb sind diese Zwänggrößen unmittelbar proportional der Zwängung aus Vorspannung.

Für die Berechnung der Umlagerungsgrößen von Stahlverbundträgern mit großem Stahlträgheitsmoment sei auf [8] verwiesen.

Literaturverzeichnis:

- [1] Knittel: Der Einfluß des Kriechens und Schwindens auf den Spannungszustand in Tragwerken aus vorgespanntem Beton. Der Bauingenieur 29 (1954) H. 1
- [2] Habel: Berechnung von Querschnitten mit mehrlagiger Spannbewehrung nach dem Verfahren von Busemann Beton- und Stahlbetonbau 49 (1954) H. 2
- [3] Sattler: Theorie der Verbundkonstruktionen. 2. Aufl. Berlin 1959
- [4] Wippel: Berechnung von Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton. Berlin 1962
- [5] Mehmel: Vorgespannter Beton. 2. Aufl. Berlin 1963

- [6] Hampe: Vorgespannte Konstruktionen. Berlin 1964
- [7] C.E.B.- Empfehlungen zur Berechnung und Ausführung von Spannbetonbauwerken. 1966
- [8] Trost: Zur Berechnung von Stahlverbundträgern im Gebrauchszustand auf Grund neuerer Erkenntnisse des viskoelastischen Verhaltens des Betons. Der Stahlbau 37 (1968) H. 11
- [9] Trost: Folgerungen aus Theorien und Versuchen für die baupraktische Untersuchung von Kriech- und Relaxationsproblemen in Spannbetontragwerken. Vorbericht Symposium 1970 IVBH
- [10] Dilger/Neville: Verification and Application of a New Method of Creep Analysis to Structural Members. Vorbericht Symposium 1970 IVBH

### ZUSAMMENFASSUNG

Mit der linearen zeitabhängigen  $\sigma$ - $\epsilon$  Beziehung des Betons aus (9) werden die Umlagerungsgrößen und damit die Spannungsänderungen infolge Kriechen und Schwinden für beliebig bewehrte Spannbetonquerschnitte explizit angegeben. Bei statisch unbestimmten Spannbetonträgern können zusätzliche Zwängungen nur aus Normalkraft und Schwinden entstehen, während sie aus Biegung vernachlässigbar sind. Mit der kurzen Formel (33) sind die zeitabhängigen Änderungen der Auflagerkräfte und Schnittgrößen zu bestimmen.

### SUMMARY

The linear, time-dependent  $\sigma$ - $\epsilon$  relation for concrete presented in Ref. 9 is used to determine the redistribution of internal actions and stresses as a result of creep and shrinkage in prestressed concrete sections with an arbitrary arrangement of reinforcement. Additional restraint forces in statically indeterminate prestressed concrete girders can only be produced by axial forces and shrinkage; those produced by bending action are negligible. Equation 33 allows the time-varying support forces and the internal actions to be determined.

### RESUME

A l'aide de la relation  $\sigma$ - $\epsilon$  linéaire du béton, en fonction du temps, voir (9), on calcule explicitement les efforts de redistribution et les changements de contraintes dus au fluage et au retrait pour des sections de béton précontraint. Dans les poutres hyperstatiques en béton précontraint, des efforts supplémentaires ne peuvent être provoqués que par un effort normal ou par le retrait, tandis que ceux venant de la flexion sont négligeables. On détermine aisément les variations dans le temps des réactions d'appuis et des efforts à l'aide de la formule (33).