

**Zeitschrift:** IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

**Band:** 6 (1970)

**Artikel:** Ein Nähernugsverfahren zur Berechnung der Verbund- und vorgespannten Konstruktionen

**Autor:** Djuri, Milan

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7803>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Verbund- und vorgespannten Konstruktionen

An Approximate Method for Calculation of Composite and Prestressed Structures

Une méthode approchée pour le calcul des constructions mixtes acier-béton et en béton précontraint

MILAN DJURIĆ  
Prof., Dr. sc. techn.  
Universität Beograd  
Jugoslawien

#### 1. Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen des Betons

Bei der Berechnung der vorgespannten und der Verbundkonstruktionen wird noch immer die von Dischinger vorgeschlagene Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen des Betons angenommen. Diese Beziehung wird zumeist in Form einer Differentialgleichung geschrieben, kann aber auch in Form einer Integralgleichung angeschrieben werden, und zwar:

$$/1/ \quad \varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b} + \frac{1}{E_b} \int_0^\varphi \sigma_b d\varphi + \varepsilon_s,$$

wo durch  $\varphi = \varphi(t)$  das Kriechmass und durch  $\varepsilon_s = \varepsilon_s(t)$  das Schwindmass des Betons bezeichnet wird. Dabei wird gewöhnlich vorausgesetzt, dass

$$/2/ \quad \varepsilon_s = - \frac{\varepsilon_{sk}}{\varphi_k} \varphi(t)$$

ist, wo durch  $\varphi_k$  das Endkriechmass und durch  $\varepsilon_{sk}$  das Endschwindmass des Betons bezeichnet ist.

Es hat sich leider gezeigt, dass zahlreiche Probleme der vorgespannten und der Verbundkonstruktionen mit einer solchen Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen nicht gelöst werden können. Deshalb ist man gezwungen, sich mit angenäherten Lösungen zu begnügen.

In dem hier vorgeschlagenen Näherungsverfahren wird die Integralgleichung /1/ durch eine gewöhnliche algebraische Gleichung ersetzt, die sich ergibt, wenn der Wert des Integrals in der Gleichung /1/ bestimmt wird unter Voraussetzung, dass die Spannung im Beton von Werte  $\sigma_{b0}$  im Zeitpunkt  $t=0$  bis zum Wert  $\sigma_b$  im Zeitpunkt  $t$ , eine lineare Funktion der Veränderlichen  $\varphi$  ist, d.h. wenn in die Gleichung /1/ eingetragen wird:

$$/3/ \quad \int_0^\varphi \sigma_b d\varphi = \frac{\sigma_{b0} + \sigma_b}{2} \varphi.$$

Mit den Bezeichnungen

$$/4/, /5/ \quad E_{b\varphi} = \frac{2}{2+\varphi} E_b, \quad \rho = \frac{\varphi}{2+\varphi},$$

kann die Gleichung /1/ in folgender Form geschrieben werden:

$$/6/ \quad \sigma_b + \rho \sigma_{bo} = E_{b\varphi} (\varepsilon - \varepsilon_s).$$

Die Lösungen, die sich ergeben, indem man von der obigen Gleichung ausgeht, sind einfach und stets ausreichend genau, in bezug auf die Genauigkeit, mit der die Materialkonstanten bestimmt werden können und die Genauigkeit, mit der die Gleichung /1/ das reelle Verhalten des Betons darstellt.

## 2. Grundlegende Bezeichnungen

- $E_s$  - Elastizitätsmodul des Stahls,
- $E_b$  - Elastizitätsmodul des Betons,
- $E_{b\varphi}$  - fiktiver Elastizitätsmodul des Betons, Gleichung /4/,
- $E_c$  - Vergleichs-Elastizitätsmodul. Für Verbundkonstruktionen ist  $E_c = E_s$ , für vorgespannte Konstruktionen ist  $E_c = E_{b\varphi}$ ,
- $\nu_s = E_s/E_c$ ,  $\nu_b = E_{b\varphi}/E_c$  - Verhältnisse der Elastizitätsmoduli,
- $F_s$  - Querschnittsfläche des Stahls mit dem Schwerpunkt  $T_s$ ,
- $C$  - Abstand der Schwerpunkte  $T_s$  und  $T_b$ , positiv wenn der Schwerpunkt  $T_s$  unter dem Schwerpunkt  $T_b$  liegt,
- $F_{sr} = \nu_s F_s$ ,  $F_{br} = \nu_b F_b$  - reduzierte Querschnittsfläche des Stahls bzw. des Betons,
- $F_i = F_{sr} + F_{br}$  - ideale Querschnittsfläche,
- $y$  - Abstand der Querschnittspunkte von der zur Biegungsebene senkrechten Achse durch den Schwerpunkt des ideellen Querschnittes  $T_i$ . Die Abstände des Schwerpunktes  $T_i$  von den Schwerpunkten  $T_s$  und  $T_b$  sind:  $y_s = F_{br} C / F_i$  und  $y_b = F_{sr} C / F_i$ ,
- $I_s, I_b$  - Trägheitsmomente des Stahl- bzw. Betonteiles des Querschnittes in bezug auf die Schwerpunkrachsen durch  $T_s$  und  $T_b$ ,
- $I_{sr} = \nu_s I_s$ ,  $I_{br} = \nu_b I_b$  - reduziertes Trägheitsmoment des Stahls bzw. des Betons,
- $I_i = I_{sr} + F_{sr} y_s^2 + I_{br} + F_{br} y_b^2$  - Trägheitsmoment des ideellen Querschnittes.

Die eingeführten Bezeichnungen unterscheiden sich von den in der Theorie der vorgespannten und der Verbundkonstruktionen üblichen Bezeichnungen nur dadurch, dass die Betonfläche nicht nach dem reellen Elastizitätsmodul des Betons  $E_b$ , sondern nach dem fiktiven Modul  $E_{b\varphi}$  reduziert wird. Da der Modul  $E_{b\varphi}$  eine Funktion von  $\varphi$  bzw. von  $t$  ist, so sind auch die Grössen  $\nu_b$ ,  $F_{br}$ ,  $I_{br}$ ,  $F_i$ ,  $I_i$ , sowie die Grössen  $y_s$ ,  $y_b$  Funktionen von  $\varphi$  bzw. von  $t$ .

## 3. Spannungen und Verformungsgrössen

Der Bernoullischen Voraussetzung über ebenbleibende Querschnitte gemäss können, im Falle ebener Biegung, die Dehnungen in der Richtung der Stabachse in folgender Form dargestellt werden:

$$/7/ \quad \varepsilon = \varepsilon_T + \alpha y,$$

wo  $\varepsilon_T$  die Dehnung im Schwerpunkt des ideellen Querschnittes  $T_c$  ist, und  $\alpha$  die Krümmungsänderung der Stabachse. Die Spannungen im Stahl werden, laut Hooke-schem Gesetz, durch den Ausdruck:

$$/8/ \quad \sigma_s = E_s (\varepsilon_T + \alpha y)$$

gegeben, während die Spannungen im Beton, gemäss der Gleichung /6/, durch den Ausdruck:

$$/9/ \quad \sigma_b = E_{b\varphi} (\varepsilon_T + \alpha y) - \rho \sigma_{b0} - E_{b\varphi} \varepsilon_s,$$

gegeben werden. Die Verformungsgrössen  $\varepsilon_T$  und  $\alpha$  in dem Querschnitt mit den Querschnittskräften  $N$  und  $M$  ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen:

$$/10/ \quad \int_a \sigma_a dF + \int_b \sigma_b dF = N,$$

$$\int_a y \sigma_a dF + \int_b y \sigma_b dF = M,$$

wo der Index  $a$  bzw.  $b$  unterhalb des Integralzeichens bezeichnet, dass das Integrationsgebiet der Stahl- bzw. der Betonteil des Querschnittes ist. Wenn die Gleichungen /8/ und /9/ in die Gleichungen /10/ eingetragen werden, ergibt sich:

$$\varepsilon_T (E_s \int_a dF + E_{b\varphi} \int_b dF) + \alpha (E_s \int_a y dF + E_{b\varphi} \int_b y dF) =$$

$$= N + \rho \int_b \sigma_{b0} dF + E_{b\varphi} \varepsilon_s \int_b dF,$$

$$/11/ \quad \varepsilon_T (E_s \int_a y dF + E_{b\varphi} \int_b y dF) + \alpha (E_s \int_a y^2 dF + E_{b\varphi} \int_b y^2 dF) =$$

$$= M + \rho \int_b y \sigma_{b0} dF + E_{b\varphi} \varepsilon_s \int_b y dF.$$

Nach den Bezeichnungen im vorangehenden Abschnitt ist:

$$E_s \int_a dF + E_{b\varphi} \int_b dF = E_s F_a + E_{b\varphi} F_b = E_c F_c,$$

$$/12/ \quad E_s \int_a y dF + E_{b\varphi} \int_b y dF = E_s F_a y_a + E_{b\varphi} F_b y_b = 0,$$

$$E_s \int_a y^2 dF + E_{b\varphi} \int_b y^2 dF = E_s (I_a + F_a y_a^2) + E_{b\varphi} (I_b + F_b y_b^2) = E_c I_c.$$

Die Integrale:

$$\int_b \sigma_{b0} dF \quad \text{und} \quad \int_b y \sigma_{b0} dF,$$

an der rechten Seite der Gleichung /11/ haben einfache Bedeutungen. Das erste stellt die Resultierende der inneren Kräfte die von Beton im Zeitpunkt  $t=0$  aufgenommen werden dar, während das zweite das Moment in bezug auf den Schwerpunkt des ideellen Querschnittes

$T_i$  derselben Kräfte darstellt. Die Resultierende wird mit  $N_{b0}$  und das Moment wird mit  $M_{b0} + N_{b0}y_{b0}$  bezeichnet, wo  $M_{b0}$  das Moment der vom Beton im Zeitpunkt  $t=0$  aufgenommenen inneren Kräfte in bezug auf den Schwerpunkt des Betons  $T_b$  ist. Damit wird:

$$/13/ \quad \int_b \sigma_{b0} dF = N_{b0}, \quad \int_b y \sigma_b dF = M_{b0} + N_{b0}y_{b0}.$$

Wenn man nebst den bisher eingeführten Bezeichnungen noch die Bezeichnung:

$$/14/ \quad N_{SK} = E_{b\varphi} F_b \varepsilon_s = -E_{b\varphi} F_b \frac{\varepsilon_{SK}}{\varphi_K} \varphi,$$

eingführt, so können die Gleichungen /11/ auch in folgender Form angeschrieben werden:

$$/15/ \quad \begin{aligned} E_c F_i \varepsilon_T &= N + \rho N_{b0} + N_{SK}, \\ E_c I_i \varrho e &= M + \rho (M_{b0} + N_{b0} y_{b0}) + N_{SK} y_{b0}. \end{aligned}$$

Wird die Summe der Kräfte an der rechten Seite der ersten von diesen Gleichungen als eine fiktive Normalkraft  $N_\varphi$  und die Summe der Momente an der rechten Seite der zweiten von diesen Gleichungen als ein fiktives Biegemoment  $M_\varphi$  aufgefasst:

$$/16/ \quad \begin{aligned} N_\varphi &= N + \rho N_{b0} + N_{SK}, \\ M_\varphi &= M + \rho (M_{b0} + N_{b0} y_{b0}) + N_{SK} y_{b0}, \end{aligned}$$

so sind die Verformungsgrößen  $\varrho e$  und  $\varepsilon_T$  durch folgende Ausdrücke angegeben:

$$/17/ \quad \varepsilon_T = \frac{N_\varphi}{E_c F_i}, \quad \varrho e = \frac{M_\varphi}{E_c I_i}$$

Wenn man diese Werte für  $\varepsilon_T$  und  $\varrho e$  in die Gleichungen /8/ und /9/ einführt, so ergibt sich:

$$/18/ \quad \begin{aligned} \sigma_a &= \nu_a \left( \frac{N_\varphi}{F_i} + \frac{M_\varphi}{I_i} y \right), \\ \sigma_b &= \nu_b \left( \frac{N_\varphi}{F_i} + \frac{M_\varphi}{I_i} y \right) - \rho \sigma_{b0} - E_{b\varphi} \varepsilon_s. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen /17/ und /18/ wir folgern, dass in einem Verbund- oder vorgespannten Träger im Zeitpunkt  $t$  die Verformungsgrößen  $\varepsilon_T$  und  $\varrho e$  gleich sind und die Spannungen  $\sigma_a$  und  $\sigma_b + \rho \sigma_{b0} + E_{b\varphi} \varepsilon_s$  proportionell sind den entsprechenden Einflüssen in einem Träger von gleichartigem Material, mit einheitlichem Elastizitätsmodul  $E_c$ , mit den Querschnittsbeiwerten  $F_i$  und  $I_i$  und mit den fiktiven Querschnittskräften  $N_\varphi$  und  $M_\varphi$ , die durch die Gleichungen /16/ angegeben sind.

Um aus den Gleichungen /16/, /17/ und /18/ die Verformungsgrößen und die Spannungen im Zeitpunkt  $t$  zu berechnen, ist es erforderlich, die Größen  $\sigma_{b0}$ ,  $N_{b0}$  und  $M_{b0}$  zu kennen. Die erwähnten Größen ergeben sich aus den vorangehenden Gleichungen, wenn man für  $t=0$ :  $\varphi=0$ ,  $E_{b\varphi}=E_b$ ,  $\rho=0$ ,  $N_{SK}=0$  stellt, sowie dass

$N=N_0$  und  $M=M_0$  ist:

$$/19/ \quad \bar{\sigma}_{a0} = \nu_a \left( \frac{N_0}{F_{i0}} + \frac{M_0}{I_{i0}} y_0 \right), \quad \bar{\sigma}_{b0} = \nu_b \left( \frac{N_0}{F_{i0}} + \frac{M_0}{I_{i0}} y_0 \right),$$

$$/20/ \quad N_{b0} = N_0 \frac{F_{bro}}{F_{i0}} + M_0 \frac{F_{bro} y_{b0}}{I_{i0}}, \quad M_{b0} = M_0 \frac{I_{bro}}{I_{i0}}.$$

In den obigen Gleichungen sind  $F_{bro}$  und  $I_{bro}$  Querschnittswerte des Betons, reduziert nach dem reellen Elastizitätsmodul des Betons  $E_b$  und  $F_{i0}$ ,  $I_{i0}$  die Querschnittswerte des entsprechenden ideellen Querschnittes.

#### 4. Statisch unbestimmte Träger

Infolge des Schwindens und des Kriechens des Betons, unter Einwirkung einer ständigen Belastung, ändern sich im Laufe der Zeit die Verformungen der Verbund- oder vorgespannten Konstruktionen. Deshalb ändern sich in den statisch unbestimmten Verbund- oder vorgespannten Trägern auch die statisch unbestimmten Grössen  $X_K$ ,  $K=1,2,\dots,n$ , und damit auch die Querschnittskräfte:

$$/21/ \quad N = N_\phi + \sum_{K=1}^n X_K N_K, \quad M = M_\phi + \sum_{K=1}^n X_K M_K,$$

wo  $N_\phi$ ,  $M_\phi$  Querschnittskräfte des Gleichgewichtszustandes  $X_K=0$ , und  $N_K$ ,  $M_K$  Querschnittskräfte des Selbstspannungszustandes  $X_K=1$ , sind.

Die statisch unbestimmten Grössen  $X_K$ ,  $K=1,2,\dots,n$ , werden aus  $n$  Gleichungen des Prinzips der virtuellen Kräfte:

$$/22/ \quad \int (N_i \varepsilon_T + M_i \varrho e) ds = \sum_j C_{ji} c_j, \quad i=1,2,\dots,n,$$

berechnet, in denen  $C_{ji}$  Reaktionen, und  $N_i$ ,  $M_i$  Querschnittskräfte des Selbstspannungszustandes  $X_i=1$  bezeichnen, während  $\varepsilon_T$  und  $\varrho e$  die wirklichen Verformungsgrössen und  $c_j$  die wirklichen Stützenverschiebungen des Trägers sind.

In den Gleichungen /17/ und /18/ wurde nichts von den Querschnittskräften vorausgesetzt so dass dieselben auch dann gültig sind, wenn die Kräfte  $N$  und  $M$  mit der Zeit sich ändern, d.h. sowohl für statisch bestimmte als auch für statisch unbestimmte Träger. Laut Gleichungen /21/, Gleichungen /16/ und Gleichungen /17/ sind die Verformungsgrössen  $\varepsilon_T$  und  $\varrho e$  in einem statisch unbestimmten Träger durch folgende Ausdrücke angegeben:

$$/23/ \quad \varepsilon_T = \frac{1}{E_c F_c} \left( N_\phi' + \sum_{K=1}^n X_K N_K \right), \quad \varrho e = \frac{1}{E_c I_c} \left( M_\phi' + \sum_{K=1}^n X_K M_K \right),$$

worin

$$/24/ \quad N_\phi' = N_\phi + \rho N_{b0} + N_{sk},$$

$$M_\phi' = M_\phi + \rho (M_{b0} + N_{b0} y_{b0}) + N_{sk} y_{b0},$$

ist.

Wenn die Gleichungen /23/ in die Gleichungen /22/ eingetragen werden ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n \chi_k \left( \int \frac{M_i M_k}{E_c I_i} ds + \int \frac{N_i N_k}{E_c F_i} ds \right) + \\
 & \quad + \int \frac{M_i M_{\phi}'}{E_c I_i} ds + \int \frac{N_i N_{\phi}'}{E_c F_i} ds - \sum_j C_{ji} c_j = 0, \quad i=1,2,\dots,n
 \end{aligned}
 \tag{125/}$$

Mit den Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
 & \delta_{ik} = \int \frac{M_i M_k}{E_c I_i} ds + \int \frac{N_i N_k}{E_c F_i} ds, \\
 & \delta_{i\phi} = \int \frac{M_i M_{\phi}'}{E_c I_i} ds + \int \frac{N_i N_{\phi}'}{E_c F_i} ds - \sum_j C_{ji} c_j,
 \end{aligned}
 \tag{126/}$$

können die Gleichungen /25/ in folgender Form geschrieben werden:

$$\sum_{k=1}^n \chi_k \delta_{ik} + \delta_{i\phi} = 0, \quad i=1,2,\dots,n.
 \tag{127/}$$

Daraus wir folgern, dass die statisch unbestimmten Grössen in einem Verbund- oder vorgespannten Träger im Zeitpunkte  $t$  gleich sind den statisch unbestimmten Grössen eines statisch unbestimmten Trägers aus gleichartigem Material, mit einheitlichem Elastizitätsmodul  $E_c$ , mit den Querschnittswerten  $F_i$  und  $I_i$ , sowie mit den Einflüssen im Hauptsystem  $N_{\phi}'$  und  $M_{\phi}'$ , die durch die Gleichungen /24/ angegeben sind.

### 5. Träger mit zusammengesetztem Stahlquerschnitt

Der Stahlquerschnitt des Verbundträgers wird oft aus mehreren Teilen zusammengesetzt: Blech oder Walzträger, schlaaffe Bewehrung und Drähte bzw. Vorspannstähle, mit den Querschnittsflächen  $F_n$ ,  $F_m$ ,  $F_p$ , mit den Trägheitsmomenten  $I_n$ ,  $I_m$ ,  $I_p$  in bezug auf die Achse durch den Schwerpunkt  $T_n$ , bzw.  $T_m$  und  $T_p$ , und mit den Elastizitätsmoduli  $E_n$ ,  $E_m$  und  $E_p$ .

Es ist leicht zu beweisen, dass auch für diesen Fall sämtliche bisher abgeleiteten Gleichungen gelten, wobei darin  $F_{ar}$  die ideelle Stahlfläche bezeichnet, und zwar:

$$F_{ar} = F_{nr} + F_{mr} + F_{pr},
 \tag{128/}$$

$$F_{nr} = \nu_n F_n, \quad F_{mr} = \nu_m F_m, \quad F_{pr} = \nu_p F_p,
 \tag{129/}$$

$$\nu_n = \frac{E_n}{E_c}, \quad \nu_m = \frac{E_m}{E_c}, \quad \nu_p = \frac{E_p}{E_c},
 \tag{130/}$$

und  $I_{ar}$  das Trägheitsmoment der ideellen Stahlfläche in bezug auf den Schwerpunkt  $T_a$ :

$$I_{ar} = I_{nr} + I_{mr} + I_{pr} + F_{nr}(e_n - e_a)^2 + F_{mr}(e_m - e_a)^2 + F_{pr}(e_p - e_a)^2,
 \tag{131/}$$

$$I_{nr} = \nu_n I_n, \quad I_{mr} = \nu_m I_m, \quad I_{pr} = \nu_p I_p.
 \tag{132/}$$

Der abstand  $e_a$  des Schwerpunktes  $T_a$  von der Achse, die in den Abständen  $e_n$ ,  $e_m$ ,  $e_p$  von den Schwerpunkten  $T_n$ ,  $T_m$ ,  $T_p$  verläuft, wird aus der Gleichung:

$$F_{nr}(e_n - e_a) + F_{mr}(e_m - e_a) + F_{pr}(e_p - e_a) = 0.
 \tag{133/}$$

bestimmt.

Mit der ideellen Stahlfläche  $F_{ar}$ , dem Trägheitsmoment derselben Fläche  $I_{ar}$  in bezug auf die durch den Schwerpunkt  $T_a$  verlaufende Achse, wird die Schwerpunktslage des ideellen Verbundquerschnittes  $T_i$  berechnet, die Beiwerte  $F_i$  und  $I_i$ , ferner die fiktiven Kräfte  $N_\varphi$  und  $M_\varphi$ , die Verformungsgrössen  $\varepsilon_T$  und  $\varepsilon_e$ , sowie die Spannungen im Beton  $\sigma_b$  aus den vorhin abgeleiteten Gleichungen, während die Spannungen in den Stahlteilen des Trägers durch die Gleichungen:

$$/134/ \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_n \\ \sigma_m \\ \sigma_p \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} v_n \\ v_m \\ v_p \end{array} \right\} \left( \frac{N_\varphi}{F_i} + \frac{M_\varphi}{I_i} y \right),$$

gegeben sind.

## 6. Einfluss der Vorspannungskräfte

Die Vorspannung von Trägern wird gewöhnlich mittels Spanndrähte durchgeführt die sich in Röhren befinden, welche eine von den übrigen Teilen des Trägers unabhängige Drahtverformung sichern. Bei einer derartigen Vorspannungsweise im Moment der Vorspannung, d.h. im Zeitpunkt  $t=0$  ist die Spannkraft  $P$  eine äussere auf den spannstahllosen Querschnitt einwirkende Kraft. Der Spannstahl ist in diesem Augenblick bloss ein dem Träger die Kraft  $P$  vermittelndes Element. Dementsprechend ergeben sich die Spannungen im Zeitpunkt  $t=0$  infolge der Vorspannung, wenn in die Gleichung /19/  $N_0 = -P$  und  $M_0 = -P y_{p0}$  eingetragen wird:

$$/135/ \quad \sigma_{a0} = -v_a P \left( \frac{1}{F_{i0}} + \frac{y_{p0} y_0}{I_{i0}} \right), \quad \sigma_{b0} = -v_{b0} P \left( \frac{1}{F_{i0}} + \frac{y_{p0} y_0}{I_{i0}} \right),$$

wo  $F_{i0}$  und  $I_{i0}$  Querschnittswerte des ideellen spannstahllosen Querschnittes sind.

Nachdem die Drähte gespannt und verankert sind, werden die Röhre mit Zementmörtel injiziert. Der Spannstahl wird zu einem Teil des Trägers, der ihren weiteren Verformungen Folge leistet, und damit die ursprüngliche Spannung  $P/F_p$  im Laufe der Zeit stetig ändert. Die Änderung dieser Spannung ist dem Dehnungsunterschied  $\varepsilon - \varepsilon_0$  in den Zeitpunkten  $t$  und  $t=0$  proportionell, so dass die Spannung im Spannstahl im Zeitpunkt  $t$  gleich wird:

$$/136/ \quad \sigma_p = \frac{P}{F_p} + E_p (\varepsilon - \varepsilon_0).$$

Wenn man diese Gleichung sowie die Gleichungen:

$$/137/ \quad \sigma_n = E_n \varepsilon, \quad \sigma_m = E_m \varepsilon, \quad \sigma_b = E_{bp} \varepsilon - P \sigma_{b0},$$

in Bedingungen:

$$\int_n \sigma_n dF + \int_m \sigma_m dF + \int_p \sigma_p dF + \int_b \sigma_b dF = 0,$$

$$\int_n \sigma_n y dF + \int_m \sigma_m y dF + \int_p \sigma_p y dF + \int_b \sigma_b y dF = 0,$$

einführt, schliesst man daraus, dass auch für die durch die Vorspannungskraft hervorgerufenen Verformungsgrössen  $\varepsilon_T$  und  $\varepsilon_e$  die Gleichungen /17/ gelten, damit

$$\begin{aligned}
 /38/ \quad N_{\varphi} &= -P + \int_p E_p \varepsilon_0 dF + \varrho \int_b \sigma_{b0} dF, \\
 M_{\varphi} &= -P y_{p0} + \int_p E_p \varepsilon_0 y dF + \varrho \int_b \sigma_{b0} y dF,
 \end{aligned}$$

ist. Die Grösse  $E_p \varepsilon_0$  ist die Spannung, die von dem Spannstahl aufgenommen werden würde, wenn derselbe im Zeitpunkt  $t=0$  der Verformung des Trägers folgen würde. Das Integral dieser Spannungen im Ausdruck für  $N_{\varphi}$  ist die Resultierende  $N_{p0}$ , und das Integral der statischen Momente dieser Spannungen in bezug auf den Schwerpunkt des ideellen Querschnittes im Ausdrucke für  $M_{\varphi}$  ist das Moment  $M_{p0} + N_{p0} y_{p0}$ :

$$\begin{aligned}
 /39/ \quad \int_p E_p \varepsilon_0 dF &= N_{p0} = -P \nu_p \left( \frac{F_p}{F_{i0}} + \frac{F_p y_{p0}^2}{I_{i0}} \right), \\
 \int_p E_p \varepsilon_0 y dF &= M_{p0} + N_{p0} y_{p0} = -P y_{p0} \frac{I_{pr}}{I_{i0}} + N_{p0} y_{p0}.
 \end{aligned}$$

Wenn die Gleichungen /39/ und die Gleichungen /13/ in die Gleichungen /38/ eingetragen werden, erhält man:

$$\begin{aligned}
 /40/ \quad N_{\varphi} &= -P + N_{p0} + \varrho N_{b0}, \\
 M_{\varphi} &= -P y_p + M_{p0} + N_{p0} y_{p0} + \varrho (M_{b0} + N_{b0} y_{b0}).
 \end{aligned}$$

Die statisch unbestimmten Grössen infolge Vorspannung des Trägers bekommt man aus den Gleichungen /27/, wenn man in die Gleichung /26/ für die fiktiven Querschnittskräfte  $N_{\varphi}'$  und  $M_{\varphi}'$  die Grössen  $N_{\varphi}$  und  $M_{\varphi}$ , die durch die Gleichungen /40/ gegeben sind, einführt.

## ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Beitrag wird eine Methode zur Berechnung der Verbund- und vorgespannten Konstruktionen, unter Berücksichtigung der Einflüsse des Schwindens und Kriechens des Betons, vorgeschlagen. Dabei wird die Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons in Form einer algebraischen Gleichung angenommen.

## SUMMARY

The paper deals with a method for the calculation of composite and prestressed structures, taking into consideration the influences of shrinkage and creep. The stress-strain relationship used for the concrete is in the form of an algebraic equation.

## RESUME

Dans cet article, on présente une méthode pour le calcul des constructions mixtes acier-béton et en béton précontraint, en prenant en considération les effets du fluage et du retrait du béton. La relation entre les contraintes et les déformations est admise sous la forme d'une équation algébrique.