Zeitschrift: IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

Band: 6 (1970)

Artikel: Durchbiegung von Stahlbetonbalken unter kurz- und langfristiger Belastung nach Rechnung und Versuch

Autor: Herzog, Max

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7802

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Durchbiegung von Stahlbetonbalken unter kurz- und langfristiger Belastung nach Rechnung und Versuch

Calculated and Measured Deflections of Reinforced Concrete Beams under Short- and Long-Term Loads

Calcul et mesures de flèches des poutres en béton armé sous des charges instantanées et de longue durée

MAX HERZOG
Beratender Ingenieur
Aarau, Schweiz

1. Einleitung

Die Anwendung der plastischen bzw. Bruchlastverfahren zur Bemessung von Stahlbetonbalken setzt voraus, dass die Formänderungen für alle Beanspruchungsarten berechnet werden können. Auf Grund ausgeführter Versuche unterscheiden wir deutlich drei Be-

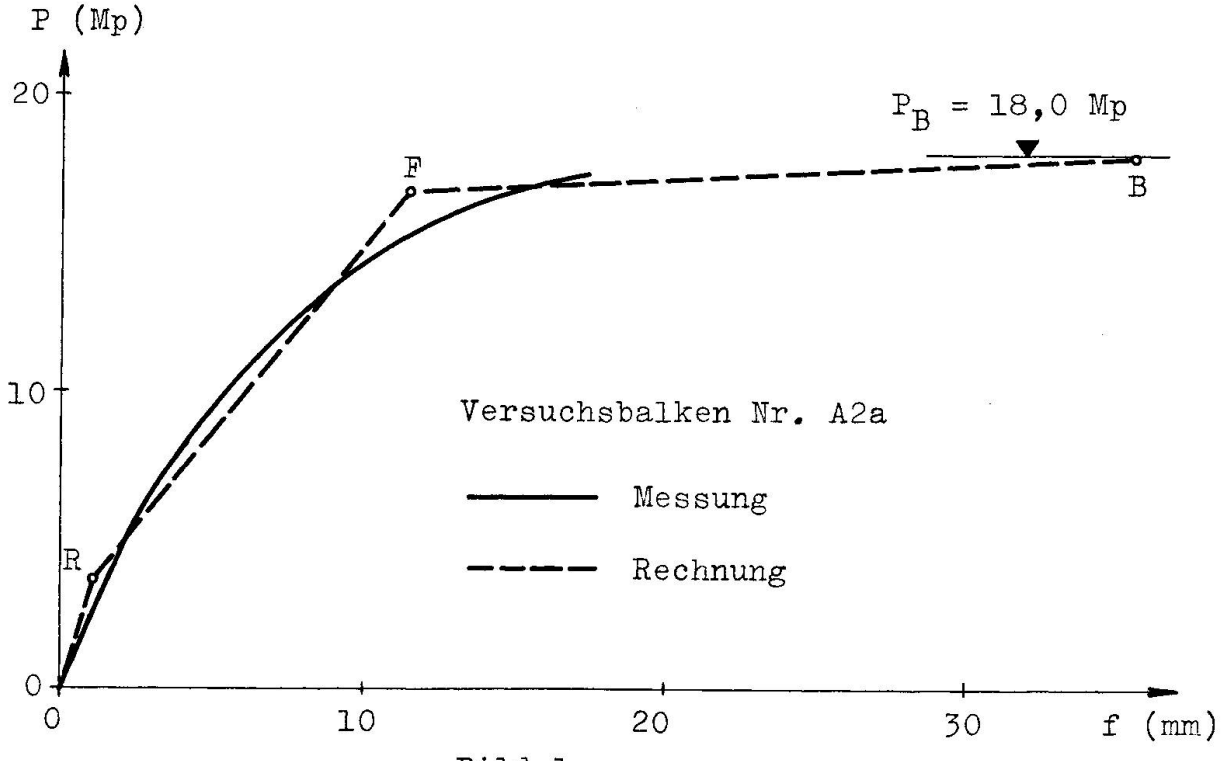

Bild 1

reiche (Bild 1): a) ungerissener (0 - R)
b) gerissener (R - F)
c) Fliessbereich (F - B).

Die wirkliche Last-Durchbiegungs-Linie kann näherungsweise durch drei gerade Teilstücke ersetzt werden. Diese Eigenschaft der Trilinearität erleichtert die wirklichkeitsnahe Berechnung der Durchbiegungen von Stahlbetonbalken erheblich.

2. Ungerissener Zustand

2.1 Kurzfristige Lasteinwirkung

Die Durchbiegungen von Stahlbetonbalken im ungerissenen Zustand und unter kurzfristiger Lasteinwirkung können mit der Elastizitätstheorie einigermassen zutreffend erfasst werden.

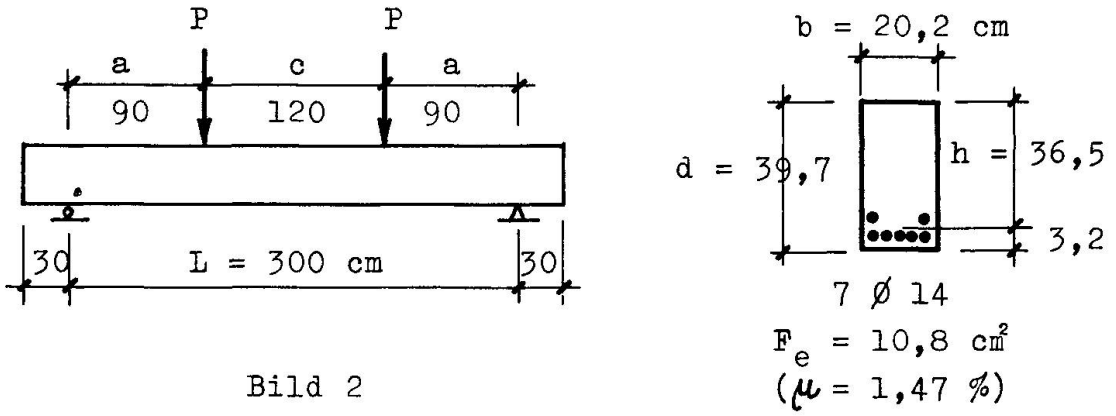

Bild 2

Für den Versuchsbalken Nr. A2a von FRANZ und BRENKER /1/ (Bild 2) mit den gemessenen Werten für die

Stahl-Fliessgrenze	$\sigma_F = \sigma_{0,2}$	= 4,55 Mp/cm²
Beton-Würfeldruckfestigkeit	β_{W29}	= 283 kp/cm²
-Zylinderdruckfestigkeit	β_{C29}	= 234 "
-Spaltzugfestigkeit	β_{Z29}	= 25,9 "
-Elastizitätsmodul	E_{bo}	= 265 Mp/cm²

und den aus ihnen nach CEB /2/ abgeleiteten Werten für die

Beton-Biegezugfestigkeit $\beta_{BZ} = \frac{25,9}{0,55} = 47,1$ kp/cm²

Verhältniszahl $n_o = \frac{E_e}{E_{bo}} = \frac{2100}{265} = 7,9$

sowie dem Trägheitsmoment I = 127100 cm⁴ (105800 cm⁴ ohne F_e) und dem Widerstandsmoment

$$W = \frac{I}{s_u} = \frac{127100}{18,23} = 6970 \text{ cm}^3 \quad (5330 \text{ cm}^3 \text{ ohne } F_e)$$

erhalten wir das Rissmoment

$$M_R = \beta_{BZ} W = 47{,}1 \times 6970 = 3{,}28 \text{ Mpm} \quad (1)$$

und daraus die Risslast

$$P_R = \frac{M_R}{a} = \frac{3{,}28}{0{,}90} = 3{,}65 \text{ Mp (gemessen 3,70 Mp)} \quad (2)$$

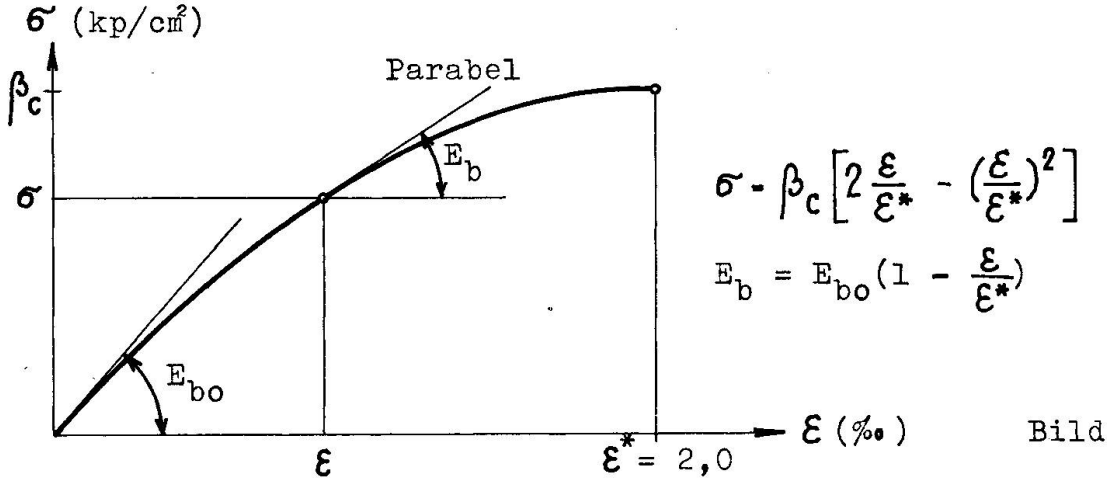

Bild 3

Die Durchbiegung in Balkenmitte beträgt ($E_b = 0{,}89\ E_{bo} = 237$ Mp/cm² gemäss Bild 3)

$$f_R = \frac{M_R}{E_b I} \frac{3L^2 - 4a^2}{24} = \frac{328(3 \times 300^2 - 4 \times 90^2)}{237 \times 127100 \times 24} = 0{,}11 \text{ cm} \quad (3)$$

(gemessen 0,16 cm).

2.2 Schwinden des Betons

Nach CEB /2/ kann das Schwindmass mit der Formel

$$\varepsilon_S = \psi \alpha_r \beta_r (1 - 0{,}1 \mu\%) \varrho \quad (4)$$

berechnet werden. Aus der Definition des Biegemoments mit Hilfe der Stabkrümmung (Bild 4b)

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} = \frac{\varepsilon_S}{h} \quad (5)$$

folgt die Durchbiegung in Balkenmitte

$$f_{S1} = \frac{\varepsilon_S L^2}{8h} = \frac{L^2}{8R} \quad (6)$$

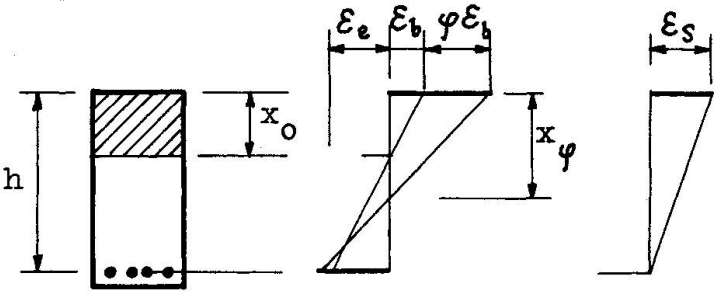

Bild 4

(a) Kriechen (b) Schwinden

2.3 Kriechen des Betons

Nach CEB /2/ kann das Kriechmass mit der Formel

$$\varphi = \varphi_o \alpha_f \beta_f \xi \varrho \tag{7}$$

berechnet werden. Damit erhalten wir die Durchbiegung in Balkenmitte

$$f_{\varphi 1} = \varphi f_R \tag{8}$$

3. Gerissener Zustand

3.1 Kurzfristige Lasteinwirkung

Der Fliesspunkt F kennzeichnet im Last-Durchbiegungs-Diagramm (Bild 1) das Ende des gerissenen und den Beginn des Fliesszustandes. Für den Versuchsbalken Nr. A2a von FRANZ und BRENKER /1/ erhalten wir aus der Höhe der Biegedruckzone ($n_F = 2n_o = 15{,}8$)

$$\frac{x}{h} = n\mu\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n\mu}}\right) =$$

$$= 15{,}8 \times 0{,}0147\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{15{,}8 \times 0{,}0147}}\right) = 0{,}488 \tag{9}$$

das Fliessmoment

$$M_F = F_e \sigma_F \left(h - \frac{x}{3}\right) = 10{,}8 \times 4{,}55 \times 0{,}837 \times 0{,}365 = 15{,}0 \text{ Mpm} \tag{10}$$

und die Fliesslast

$$P_F = \frac{M_F}{a} = \frac{15{,}0}{0{,}90} = 16{,}7 \text{ Mp.} \tag{11}$$

Die Biegesteifigkeit im gerissenen Zustand berechnen wir aus der Stabkrümmung

$$\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_b}{x} = \frac{\varepsilon_e}{h - x} = \frac{M}{EI} \tag{12}$$

mit Hilfe der Gl.(10)

$$EI = E_e F_e \left(h - \frac{x}{3}\right)(h - x) =$$

$$= 2100 \times 10{,}8(0{,}837 \times 0{,}365)(0{,}512 \times 0{,}365) = 1294 \text{ Mpm}^2 \tag{13}$$

und die Durchbiegung in Balkenmitte beträgt analog zu Gl.(3)

$$f_F = \frac{1500(3 \times 300^2 - 4 \times 90^2)}{12940000 \times 24} = 1{,}15 \text{ cm.}$$

Durchbiegungen eines Stahlbetonbalkens im gerissenen Zustand können wir für beliebige Lasten zwischen der Risslast (R) und der Fliesslast (F) mit der Interpolationsformel

$$f = f_R + (f_F - f_R)\frac{P - P_R}{P_F - P_R} \tag{14}$$

ermitteln.

3.2 Schwinden des Betons

Nach BRANSON /3/ liefern die Formeln

$$\frac{1}{R_{S2}} = 0{,}7\frac{\varepsilon_S}{d}(\mu-\mu')^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\mu-\mu'}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

gültig für $(\mu - \mu') \leqq 3{,}0$ % und

$$\frac{1}{R_{S2}} = \frac{\varepsilon_S}{d} \tag{16}$$

gültig für $(\mu - \mu') > 3{,}0$ %
die beste Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Für $\mu' = 0$ vereinfacht sich die Gl.(15) zu

$$\frac{1}{R_{S2}} = 0{,}7\frac{\varepsilon_S}{d}\mu^{\frac{1}{3}} \tag{15a}$$

Für die Versuchsbalken Nr. E3 und E6 von WASHA und FLUCK /4/ (Bild 5)

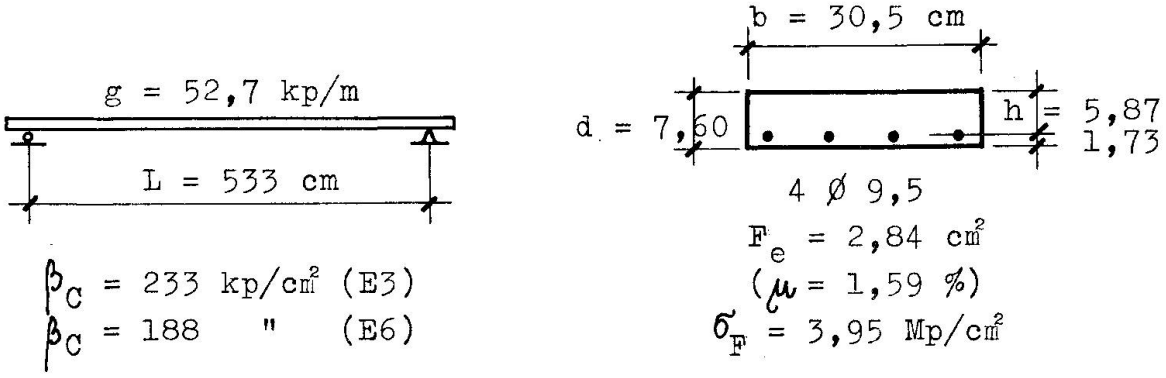

Bild 5

relative Luftfeuchtigkeit	20 bis 80 % (im Mittel 40 %)
Vergleichsdicke	$d = \frac{30{,}5 \times 7{,}6}{30{,}5 + 7{,}6} = 6{,}1$ cm
Wasserzementfaktor	$\frac{W}{Z} = \frac{176}{279} = 0{,}63$
Schwinddauer	T_S = 30 Monate plus 9 Tage
Kriechdauer	T_K = 30 Monate

betrüge das Schwindmass nach Gl.(4)

$\varepsilon_S = 40 \times 10^{-5} \times 0{,}95 \times 1{,}10 \times 0{,}84 \times 0{,}70 = 24{,}6 \times 10^{-5}$.

Für den gemessenen Wert $\varepsilon_S = 75 \times 10^{-5}$ beträgt die Stabkrümmung nach Gl.(15a)

$$\frac{1}{R_{S2}} = 0{,}7 \times \frac{75 \times 10^{-5}}{7{,}60} \times 1{,}59^{\frac{1}{3}} = 8{,}28 \times 10^{-5}\ \text{cm}^{-1}$$

und die Durchbiegung in Balkenmitte nach Gl.(6)

$$f_{S2} = 8{,}28 \times 10^{-5} \times \frac{533^2}{8} = 2{,}9\ \text{cm (gemessen 3,1 cm).}$$

3.3 Kriechen des Betons

Mit der Verhältniszahl ($E_b = 0{,}87\ E_{bo} = 203\ \text{Mp/cm}^2$)

$$n = \frac{E_e}{E_b} = \frac{2100}{203} = 10{,}3$$

erhalten wir für die Versuchsbalken Nr. E3 und E6 von WASHA und FLUCK /4/ (Bild 5) gemäss Gl.(9) die Höhe der Biegedruckzone

$$\frac{x}{h} = 10{,}3 \times 0{,}0159\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{10{,}3 \times 0{,}0159}}\right) = 0{,}431$$

und gemäss Gl.(13) die Biegesteifigkeit des gerissenen Querschnittes

$$EI = 2100 \times 2{,}84(0{,}856 \times 0{,}0587)(0{,}569 \times 0{,}0587) = 10{,}01\ \text{Mpm}^2.$$

Aus dem äusseren Biegemoment (Bild 5)

$$M = 0{,}0527 \times \frac{5{,}33^2}{8} = 0{,}188\ \text{Mpm}$$

folgt analog zu Gl.(3) die Durchbiegung in Balkenmitte bei der Erstbelastung im Alter von 14 Tagen

$$f_{o2} = \frac{18{,}8}{10{,}01} \times \frac{5{,}33^2}{9{,}6} = 5{,}6\ \text{cm (gemessen 6,3 cm).}$$

Das Kriechmass ergibt sich nach Gl.(7) zu

$$\varphi = 3{,}25 \times 0{,}95 \times 1{,}20 \times 1{,}20 \times 0{,}90 = 4{,}00.$$

Die Stahldehnung

$$\varepsilon_e = \frac{M}{E_e F_e (h - \frac{x}{3})} = \frac{18{,}8}{2100 \times 2{,}84(0{,}856 \times 5{,}87)} = 0{,}628\ ‰$$

wird durch das Kriechen des Betons nicht wesentlich beeinflusst (Bild 4a). Da die Betonstauchung

$$\varepsilon_b = \varepsilon_e \frac{x}{h - x} = 0{,}628 \times 10^{-3} \times \frac{0{,}431}{1 - 0{,}431} = 0{,}476\ ‰$$

aber auf den Wert

$$\varepsilon_{b\varphi} = (1 + \varphi)\varepsilon_b = (1 + 4{,}00)0{,}476 \times 10^{-3} = 2{,}380\ ‰$$

anwächst, folgt aus Bild 4a die Durchbiegung in Balkenmitte nach 30 Monaten

$$f_{\varphi 2} = f_{o2}\frac{\varepsilon_e + \varepsilon_b(1+\varphi)}{\varepsilon_e + \varepsilon_b} = 5{,}6 \times \frac{0{,}628 + 2{,}380}{0{,}628 + 0{,}476} = 15{,}2 \text{ cm}$$

(gemessen 15,4 cm).

4. Bruchzustand

Nach CEB /5/ kann die Bruchspannung kaltgereckter Bewehrungen

$$\sigma_B = \sigma_{0,2}\left(1{,}28 - \frac{\sigma_{0,2}}{50000} - 0{,}45\frac{\sigma_{0,2}}{\beta_C}\mu\right) \tag{17}$$

gesetzt werden. Für den Versuchsbalken Nr. A2a von FRANZ und BRENKER /1/ (Bild 2) erhalten wir

$$\sigma_B = 4{,}55\left(1{,}28 - \frac{4550}{50000} - 0{,}45 \times \frac{4550}{234} \times 0{,}0147\right) = 4{,}82 \text{ Mp/cm}^2.$$

Damit beträgt die Höhe des rechteckigen Druckspannungsblocks /6/

$$\frac{y}{h} = \mu\frac{\sigma_B}{\beta_C} = 0{,}0147 \times \frac{4820}{234} = 0{,}303 \tag{18}$$

das Bruchmoment des Querschnitts

$$M_B = F_e\sigma_B\left(h - \frac{y}{2}\right) = 10{,}8 \times 4{,}82 \times 0{,}848 \times 0{,}365 = 16{,}1 \text{ Mpm} \tag{19}$$

und die Bruchlast

$$P_B = \frac{16{,}1}{0{,}90} = 17{,}9 \text{ Mp (gemessen 18,0 Mp)}.$$

Nach CEB /2/ beträgt die Bruchdehnung der Bewehrung für σ_B = 4,82 Mp/cm²

$$\varepsilon_e^* = 2{,}00 + 3{,}00 \times \frac{270}{240} = 5{,}37 \text{ ‰}.$$

Aus der Höhe der Biegedruckzone

$$x = \frac{4}{3}y = \frac{4}{3} \times 0{,}303 \times 36{,}5 = 14{,}74 \text{ cm}$$

folgt die Bruchstauchung des Betons

$$\varepsilon_b^* = \varepsilon_e^*\frac{x}{h - x} = 5{,}37 \times 10^{-3} \times \frac{0{,}404}{0{,}596} = 3{,}64 \text{ ‰}$$

und die Stabkrümmung beim Bruch

$$\frac{1}{R_B} = \frac{\varepsilon_b^*}{x} = \frac{\varepsilon_e^*}{h - x} = \frac{0{,}00364}{0{,}1474} = 0{,}0247 \text{ m}^{-1}.$$

Setzen wir den Auflagerdrehwinkel beim Bruch in erster Näherung

$$\alpha_B = \frac{c}{R_B} = 1{,}20 \times 0{,}0247 = 0{,}0296 \tag{20}$$

so beträgt die Durchbiegung in Balkenmitte beim Bruch (Bild 6)

$$f_B = \alpha_B\left(a + \frac{c}{4}\right) = 0{,}0296\left(90 + \frac{120}{4}\right) = 3{,}55 \text{ cm} \tag{21}$$

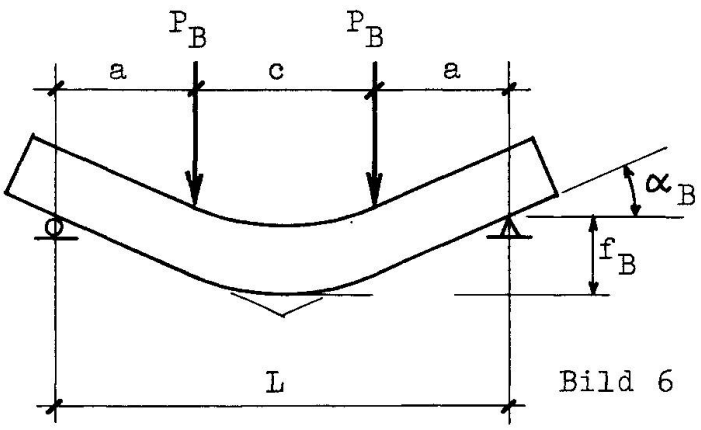

Bild 6

Wenn auch die Durchbiegung beim Bruch nicht gemessen werden kann, so ist der errechnete Wert doch plausibel.

Literatur

/1/ Franz, G. und Brenker, H.: Verformungsversuche an Stahlbetonbalken mit hochfestem Bewehrungsstahl. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 188. Verlag Ernst, Berlin 1967.

/2/ Comité Européen du Béton: Recommendations pratiques unifiées pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton armé. Paris 1964.

/3/ Branson, D.E.: Deflections of Reinforced Concrete Flexural Members. ACI Manual of Concrete Practice, Part 2, S. 435-1, Detroit 1968.

/4/ Washa, G.W. und Fluck, P.G.: The Effect of Compressive Reinforcement on the Plastic Flow of Reinforced Concrete Beams. ACI Journal (Detroit) Oct. 1952, S. 89.

/5/ Levi, F.: Work of the European Concrete Committee. ACI Journal (Detroit) March 1961, S. 1041.

/6/ Herzog, M.: Die Eisenbetondimensionierung mit dem Bruchlastverfahren des Comité Européen du Béton. Schweizerische Bauzeitung (Zürich) 1962, S. 115.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird gezeigt, wie die Durchbiegungen von Stahlbetonbalken unter kurz- und langfristiger Belastung mit einfachen Formeln für den ganzen Formänderungsbereich vom ungerissenen bis zum Bruch-Zustand berechnet werden können. Die Uebereinstimmung von Rechnung und Messung ist für praktische Zwecke völlig ausreichend.

SUMMARY

It is shown that the deflections of reinforced concrete beams under short- and long-term loads can be predicted with simple formulae for any state of deformation from the uncracked stage up to rupture. The agreement of calculated and measured values is completely satisfactory for design purposes.

RESUME

On présente le calcul des flèches pour les poutres en béton armé sous des charges instantanées et de longue durée avec des formules simples pour tous les états de déformation du stade non-fissuré jusqu'à la rupture. La comparaison des calculs avec les mesures est complètement satisfaisante pour les besoins de la pratique.

Leere Seite
Blank page
Page vide