

**Zeitschrift:** IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

**Band:** 6 (1970)

**Rubrik:** Prepared discussion

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### Durchbiegung von Stahlbetonbalken unter kurz- und langfristiger Belastung nach Rechnung und Versuch

Calculated and Measured Deflections of Reinforced Concrete Beams under  
Short- and Long-Term Loads

Calcul et mesures de flèches des poutres en béton armé sous des charges  
instantanées et de longue durée

**MAX HERZOG**  
Beratender Ingenieur  
Aarau, Schweiz

#### 1. Einleitung

Die Anwendung der plastischen bzw. Bruchlastverfahren zur Bemessung von Stahlbetonbalken setzt voraus, dass die Formänderungen für alle Beanspruchungsarten berechnet werden können. Auf Grund ausgeführter Versuche unterscheiden wir deutlich drei Be-

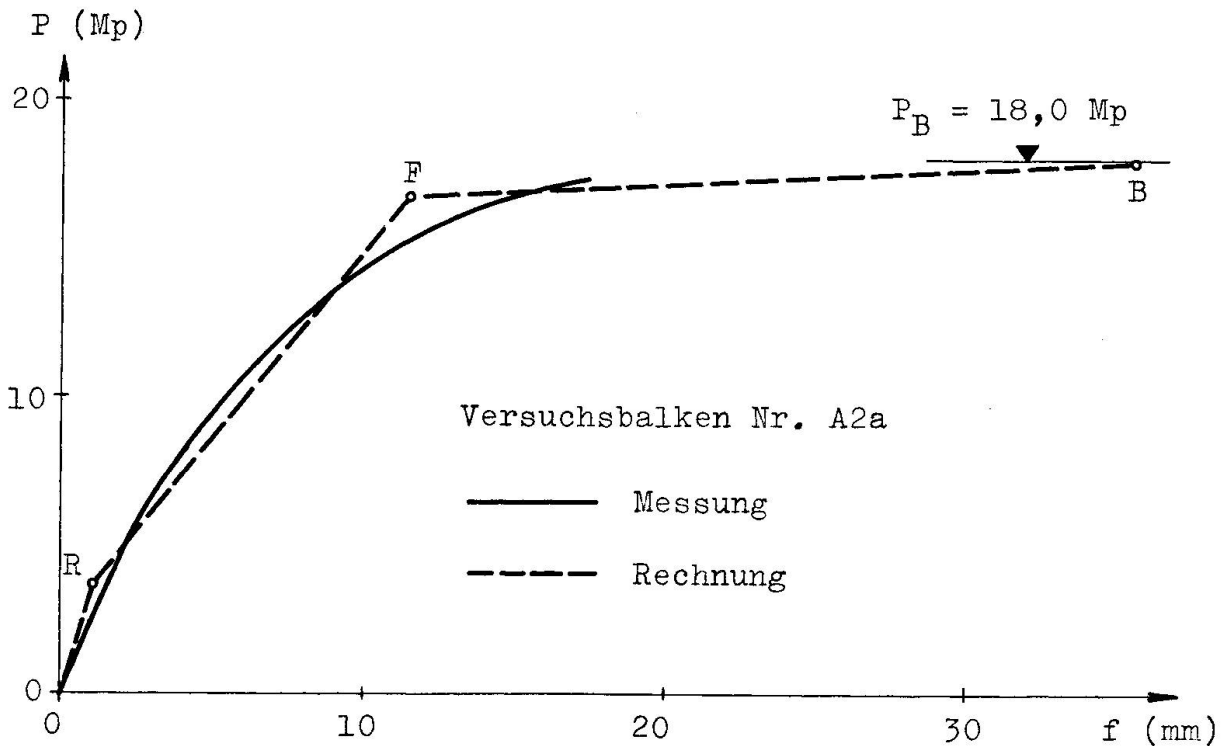


Bild 1

- reiche (Bild 1): a) ungerissener (0 - R)  
b) gerissener (R - F)  
c) Fließbereich (F - B).

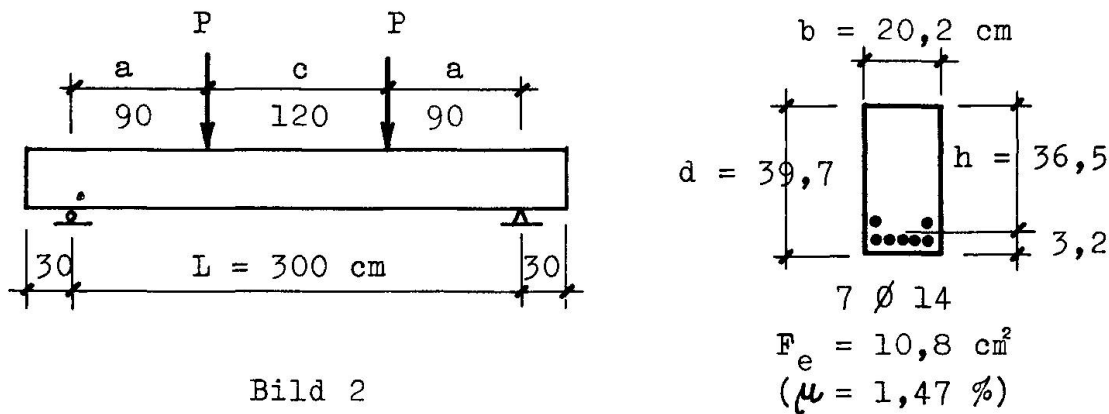


Die wirkliche Last-Durchbiegungs-Linie kann näherungsweise durch drei gerade Teilstücke ersetzt werden. Diese Eigenschaft der Trilinearität erleichtert die wirklichkeitsnahe Berechnung der Durchbiegungen von Stahlbetonbalken erheblich.

## 2. Ungerissener Zustand

### 2.1 Kurzfristige Lasteinwirkung

Die Durchbiegungen von Stahlbetonbalken im ungerissenen Zustand und unter kurzfristiger Lasteinwirkung können mit der Elastizitätstheorie einigermaßen zutreffend erfasst werden.



Für den Versuchsbalken Nr. A2a von FRANZ und BRENNER /1/ (Bild 2) mit den gemessenen Werten für die

Stahl-Fließgrenze	$\sigma_F = \sigma_{0,2} = 4,55 \text{ Mp/cm}^2$
Beton-Würfeldruckfestigkeit	$\beta_{W29} = 283 \text{ kp/cm}^2$
-Zylinderdruckfestigkeit	$\beta_{C29} = 234 \text{ "}$
-Spaltzugfestigkeit	$\beta_{Z29} = 25,9 \text{ "}$
-Elastizitätsmodul	$E_{bo} = 265 \text{ Mp/cm}^2$

und den aus ihnen nach CEB /2/ abgeleiteten Werten für die

Beton-Biegezugfestigkeit	$\beta_{BZ} = \frac{25,9}{0,55} = 47,1 \text{ kp/cm}^2$
Verhältniszahl	$n_o = \frac{E_e}{E_{bo}} = \frac{2100}{265} = 7,9$

sowie dem Trägheitsmoment  $I = 127100 \text{ cm}^4$  ( $105800 \text{ cm}^4$  ohne  $F_e$ ) und dem Widerstandsmoment

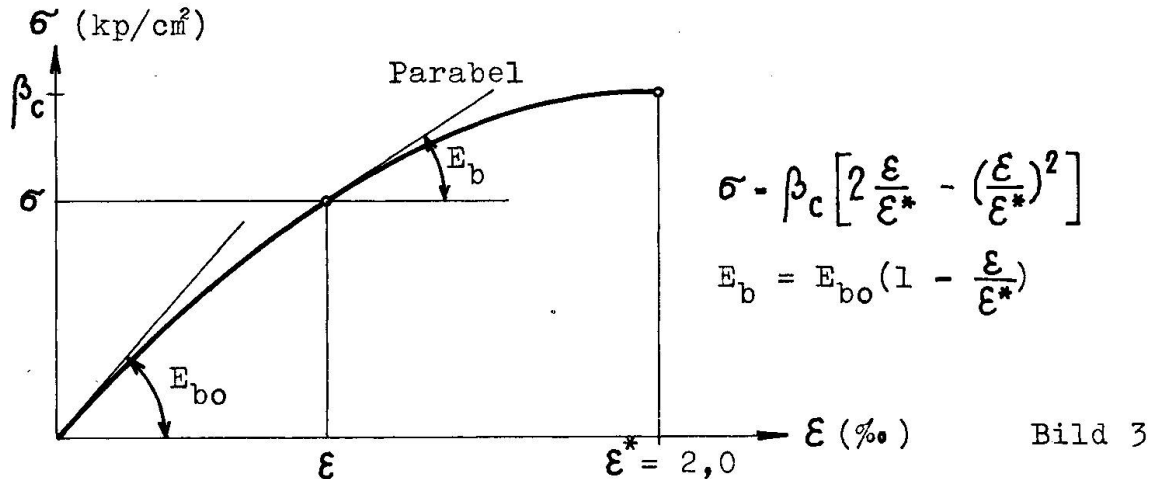
$$W = \frac{I}{s_u} = \frac{127100}{18,23} = 6970 \text{ cm}^3 \text{ (5330 cm}^3 \text{ ohne } F_e)$$

erhalten wir das Rissmoment

$$M_R = \beta_{BZ} W = 47,1 \times 6970 = 3,28 \text{ Mpm} \quad (1)$$

und daraus die Risslast

$$P_R = \frac{M_R}{a} = \frac{3,28}{0,90} = 3,65 \text{ Mp (gemessen 3,70 Mp)} \quad (2)$$



Die Durchbiegung in Balkenmitte beträgt ( $E_b = 0,89 E_{bo} = 237 \text{ Mp/cm}^2$  gemäss Bild 3)

$$f_R = \frac{M_R}{E_b I} \frac{3L^2 - 4a^2}{24} = \frac{328(3 \times 300^2 - 4 \times 90^2)}{237 \times 127100 \times 24} = 0,11 \text{ cm} \quad (3)$$

(gemessen 0,16 cm).

## 2.2 Schwinden des Betons

Nach CEB /2/ kann das Schwindmass mit der Formel

$$\epsilon_s = \psi \alpha_r \beta_r (1 - 0,1 \mu \%) \varrho \quad (4)$$

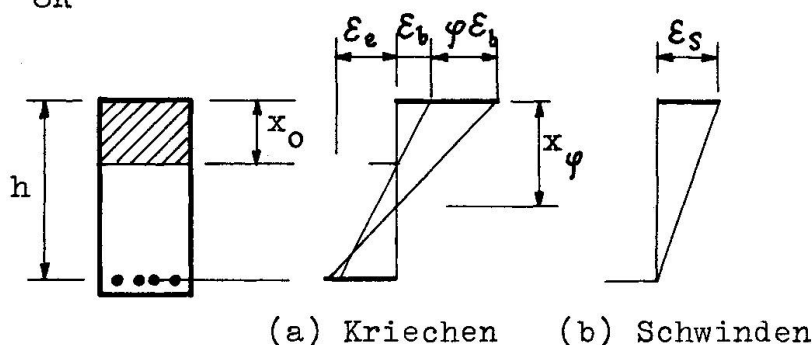
berechnet werden. Aus der Definition des Biegemoments mit Hilfe der Stabkrümmung (Bild 4b)

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} = \frac{\epsilon_s}{h} \quad (5)$$

folgt die Durchbiegung in Balkenmitte

$$f_{S1} = \frac{\epsilon_s L^2}{8h} = \frac{L^2}{8R} \quad (6)$$

Bild 4



### 2.3 Kriechen des Betons

Nach CEB /2/ kann das Kriechmass mit der Formel

$$\varphi = \varphi_0 \alpha_f \beta_f \xi \xi \quad (7)$$

berechnet werden. Damit erhalten wir die Durchbiegung in Balkenmitte

$$f_{\varphi 1} = \varphi f_R \quad (8)$$

### 3. Gerissener Zustand

#### 3.1 Kurzfristige Lasteinwirkung

Der Fließpunkt F kennzeichnet im Last-Durchbiegungs-Diagramm (Bild 1) das Ende des gerissenen und den Beginn des Fließzustandes. Für den Versuchsbalken Nr. A2a von FRANZ und BRENNER /1/ erhalten wir aus der Höhe der Biegedruckzone ( $n_F = 2n_0 = 15,8$ )

$$\begin{aligned} \frac{x}{h} &= n \mu (-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n \mu}}) = \\ &= 15,8 \times 0,0147 (-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{15,8 \times 0,0147}}) = 0,488 \end{aligned} \quad (9)$$

das Fließmoment

$$M_F = F_e \sigma_F (h - \frac{x}{3}) = 10,8 \times 4,55 \times 0,837 \times 0,365 = 15,0 \text{ Mpm} \quad (10)$$

und die Fließlast

$$P_F = \frac{M_F}{a} = \frac{15,0}{0,90} = 16,7 \text{ Mp.} \quad (11)$$

Die Biegesteifigkeit im gerissenen Zustand berechnen wir aus der Stabkrümmung

$$\frac{1}{R} = \frac{\epsilon_b}{x} = \frac{\epsilon_e}{h - x} = \frac{M}{EI} \quad (12)$$

mit Hilfe der Gl.(10)

$$\begin{aligned} EI &= E_e F_e (h - \frac{x}{3})(h - x) = \\ &= 2100 \times 10,8 (0,837 \times 0,365) (0,512 \times 0,365) = 1294 \text{ Mpm}^2 \end{aligned} \quad (13)$$

und die Durchbiegung in Balkenmitte beträgt analog zu Gl.(3)

$$f_F = \frac{1500(3 \times 300^2 - 4 \times 90^2)}{12940000 \times 24} = 1,15 \text{ cm.}$$

Durchbiegungen eines Stahlbetonbalkens im gerissenen Zustand können wir für beliebige Lasten zwischen der Risslast (R) und der Fließlast (F) mit der Interpolationsformel

$$f = f_R + (f_F - f_R) \frac{P - P_R}{P_F - P_R} \quad (14)$$

ermitteln.

### 3.2 Schwinden des Betons

Nach BRANSON /3/ liefern die Formeln

$$\frac{1}{R_{S2}} = 0,7 \frac{\epsilon_S}{d} (\mu - \mu')^{\frac{1}{3}} \left( \frac{\mu - \mu'}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

gültig für  $(\mu - \mu') \leq 3,0 \%$  und

$$\frac{1}{R_{S2}} = \frac{\epsilon_S}{d} \quad (16)$$

gültig für  $(\mu - \mu') > 3,0 \%$

die beste Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Für  $\mu' = 0$  vereinfacht sich die Gl.(15) zu

$$\frac{1}{R_{S2}} = 0,7 \frac{\epsilon_S}{d} \mu^{\frac{1}{3}} \quad (15a)$$

Für die Versuchsbalken Nr. E3 und E6 von WASHA und FLUCK /4/ (Bild 5)

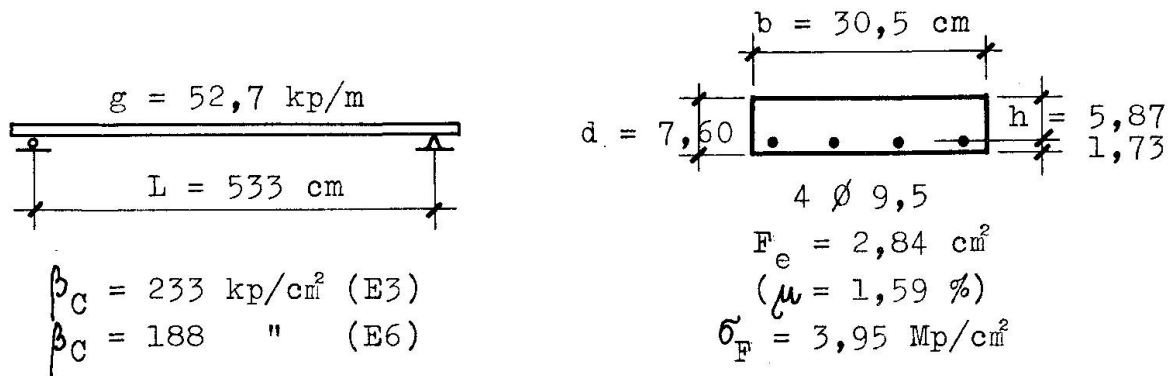


Bild 5

relative Luftfeuchtigkeit 20 bis 80 % (im Mittel 40 %)

Vergleichsdicke  $d = \frac{30,5 \times 7,6}{30,5 + 7,6} = 6,1 \text{ cm}$

Wasserzementfaktor  $\frac{W}{Z} = \frac{176}{279} = 0,63$

Schwinddauer  $T_S = 30 \text{ Monate plus 9 Tage}$

Kriechdauer  $T_K = 30 \text{ Monate}$

betrüge das Schwindmass nach Gl.(4)

$$\epsilon_S = 40 \times 10^{-5} \times 0,95 \times 1,10 \times 0,84 \times 0,70 = 24,6 \times 10^{-5}.$$

Für den gemessenen Wert  $\varepsilon_S = 75 \times 10^{-5}$  beträgt die Stabkrümmung nach Gl.(15a)

$$\frac{1}{R_{S2}} = 0,7 \times \frac{75 \times 10^{-5}}{7,60} \times 1,59^{\frac{1}{3}} = 8,28 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

und die Durchbiegung in Balkenmitte nach Gl.(6)

$$f_{S2} = 8,28 \times 10^{-5} \times \frac{533^2}{8} = 2,9 \text{ cm (gemessen 3,1 cm)}.$$

### 3.3 Kriechen des Betons

Mit der Verhältniszahl ( $E_b = 0,87 E_{bo} = 203 \text{ Mp/cm}^2$ )

$$n = \frac{E_e}{E_b} = \frac{2100}{203} = 10,3$$

erhalten wir für die Versuchsbalken Nr. E3 und E6 von WASHA und FLUCK /4/ (Bild 5) gemäss Gl.(9) die Höhe der Biegedruckzone

$$\frac{x}{h} = 10,3 \times 0,0159(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{10,3 \times 0,0159}}) = 0,431$$

und gemäss Gl.(13) die Biegesteifigkeit des gerissenen Querschnittes

$$EI = 2100 \times 2,84(0,856 \times 0,0587)(0,569 \times 0,0587) = 10,01 \text{ Mpm}^2.$$

Aus dem äusseren Biegemoment (Bild 5)

$$M = 0,0527 \times \frac{5,33^2}{8} = 0,188 \text{ Mpm}$$

folgt analog zu Gl.(3) die Durchbiegung in Balkenmitte bei der Erstbelastung im Alter von 14 Tagen

$$f_{o2} = \frac{18,8}{10,01} \times \frac{5,33^2}{9,6} = 5,6 \text{ cm (gemessen 6,3 cm)}.$$

Das Kriechmass ergibt sich nach Gl.(7) zu

$$\varphi = 3,25 \times 0,95 \times 1,20 \times 1,20 \times 0,90 = 4,00.$$

Die Stahldehnung

$$\varepsilon_e = \frac{M}{E_e F_e (h - \frac{x}{3})} = \frac{18,8}{2100 \times 2,84(0,856 \times 5,87)} = 0,628 \text{ ‰}$$

wird durch das Kriechen des Betons nicht wesentlich beeinflusst (Bild 4a). Da die Betonstauchung

$$\varepsilon_b = \varepsilon_e \frac{x}{h - x} = 0,628 \times 10^{-3} \times \frac{0,431}{1 - 0,431} = 0,476 \text{ ‰}$$

aber auf den Wert

$$\varepsilon_{b\varphi} = (1 + \varphi)\varepsilon_b = (1 + 4,00)0,476 \times 10^{-3} = 2,380 \text{ ‰}$$

anwächst, folgt aus Bild 4a die Durchbiegung in Balkenmitte nach 30 Monaten

$$f_{\varphi 2} = f_{o2} \frac{\varepsilon_e + \varepsilon_b(1 + \varphi)}{\varepsilon_e + \varepsilon_b} = 5,6 \times \frac{0,628 + 2,380}{0,628 + 0,476} = 15,2 \text{ cm}$$

(gemessen 15,4 cm).

#### 4. Bruchzustand

Nach CEB /5/ kann die Bruchspannung kaltgereckter Bewehrungen

$$\sigma_B = \sigma_{0,2} \left( 1,28 - \frac{\sigma_{0,2}}{50000} - 0,45 \frac{\sigma_{0,2}}{\beta_C} \mu \right) \quad (17)$$

gesetzt werden. Für den Versuchsbalken Nr. A2a von FRANZ und BRENNER /1/ (Bild 2) erhalten wir

$$\sigma_B = 4,55 \left( 1,28 - \frac{4550}{50000} - 0,45 \times \frac{4550}{234} \times 0,0147 \right) = 4,82 \text{ Mp/cm}^2.$$

Damit beträgt die Höhe des rechteckigen Druckspannungsblocks /6/

$$\frac{y}{h} = \mu \frac{\sigma_B}{\beta_C} = 0,0147 \times \frac{4820}{234} = 0,303 \quad (18)$$

das Bruchmoment des Querschnitts

$$M_B = F_e \sigma_B \left( h - \frac{y}{2} \right) = 10,8 \times 4,82 \times 0,848 \times 0,365 = 16,1 \text{ Mpm} \quad (19)$$

und die Bruchlast

$$P_B = \frac{16,1}{0,90} = 17,9 \text{ Mp (gemessen 18,0 Mp)}.$$

Nach CEB /2/ beträgt die Bruchdehnung der Bewehrung für  $\sigma_B = 4,82 \text{ Mp/cm}^2$

$$\varepsilon_e^* = 2,00 + 3,00 \times \frac{270}{240} = 5,37 \text{ ‰}.$$

Aus der Höhe der Biegedruckzone

$$x = \frac{4}{3}y = \frac{4}{3} \times 0,303 \times 36,5 = 14,74 \text{ cm}$$

folgt die Bruchstauchung des Betons

$$\varepsilon_b^* = \varepsilon_e^* \frac{x}{h - x} = 5,37 \times 10^{-3} \times \frac{0,404}{0,596} = 3,64 \text{ ‰}$$

und die Stabkrümmung beim Bruch

$$\frac{1}{R_B} = \frac{\varepsilon_b^*}{x} = \frac{\varepsilon_e^*}{h - x} = \frac{0,00364}{0,1474} = 0,0247 \text{ m}^{-1}.$$

Setzen wir den Auflagerdrehwinkel beim Bruch in erster Näherung

$$\alpha_B = \frac{c}{R_B} = 1,20 \times 0,0247 = 0,0296 \quad (20)$$

so beträgt die Durchbiegung in Balkenmitte beim Bruch (Bild 6)

$$f_B = \alpha_B \left( a + \frac{c}{4} \right) = 0,0296 \left( 90 + \frac{120}{4} \right) = 3,55 \text{ cm} \quad (21)$$

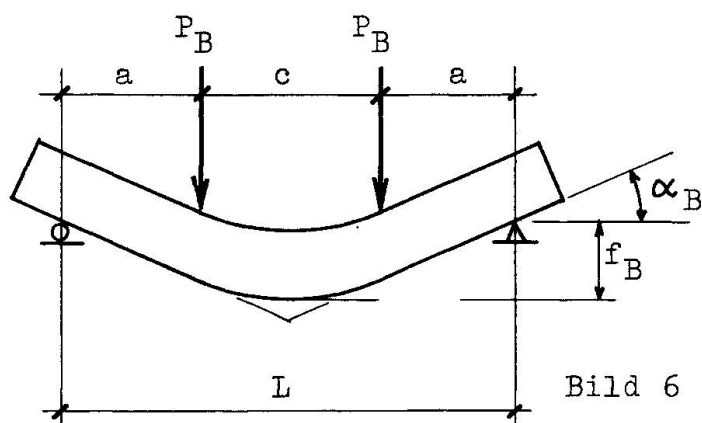


Bild 6

Wenn auch die Durchbiegung beim Bruch nicht gemessen werden kann, so ist der errechnete Wert doch plausibel.

### Literatur

- /1/ Franz, G. und Brenker, H.: Verformungsversuche an Stahlbetonbalken mit hochfestem Bewehrungsstahl. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 188. Verlag Ernst, Berlin 1967.
- /2/ Comité Européen du Béton: Recommendations pratiques unifiées pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton armé. Paris 1964.
- /3/ Branson, D.E.: Deflections of Reinforced Concrete Flexural Members. ACI Manual of Concrete Practice, Part 2, S. 435-1, Detroit 1968.
- /4/ Washa, G.W. und Fluck, P.G.: The Effect of Compressive Reinforcement on the Plastic Flow of Reinforced Concrete Beams. ACI Journal (Detroit) Oct. 1952, S. 89.
- /5/ Levi, F.: Work of the European Concrete Committee. ACI Journal (Detroit) March 1961, S. 1041.
- /6/ Herzog, M.: Die Eisenbetondimensionierung mit dem Bruchlastverfahren des Comité Européen du Béton. Schweizerische Bauzeitung (Zürich) 1962, S. 115.

### ZUSAMMENFASSUNG

Es wird gezeigt, wie die Durchbiegungen von Stahlbetonbalken unter kurz- und langfristiger Belastung mit einfachen Formeln für den ganzen Formänderungsbereich vom ungerissenen bis zum Bruch-Zustand berechnet werden können. Die Übereinstimmung von Rechnung und Messung ist für praktische Zwecke völlig ausreichend.

## SUMMARY

It is shown that the deflections of reinforced concrete beams under short- and long-term loads can be predicted with simple formulae for any state of deformation from the uncracked stage up to rupture. The agreement of calculated and measured values is completely satisfactory for design purposes.

## RESUME

On présente le calcul des flèches pour les poutres en béton armé sous des charges instantanées et de longue durée avec des formules simples pour tous les états de déformation du stade non-fissuré jusqu'à la rupture. La comparaison des calculs avec les mesures est complètement satisfaisante pour les besoins de la pratique.



Leere Seite  
Blank page  
Page vide

### Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Verbund- und vorgespannten Konstruktionen

An Approximate Method for Calculation of Composite and Prestressed Structures

Une méthode approchée pour le calcul des constructions mixtes acier-béton et en béton précontraint

MILAN DJURIĆ

Prof., Dr. sc. techn.  
Universität Beograd  
Jugoslawien

#### 1. Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen des Betons

Bei der Berechnung der vorgespannten und der Verbundkonstruktionen wird noch immer die von Dischinger vorgeschlagene Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen des Betons angenommen. Diese Beziehung wird zumeist in Form einer Differentialgleichung geschrieben, kann aber auch in Form einer Integralgleichung angeschrieben werden, und zwar:

$$/1/ \quad \varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b} + \frac{1}{E_b} \int_0^{\varphi} \sigma_b d\varphi + \varepsilon_s,$$

wo durch  $\varphi = \varphi(t)$  das Kriechmass und durch  $\varepsilon_s = \varepsilon_s(t)$  das Schwindmass des Betons bezeichnet wird. Dabei wird gewöhnlich vorausgesetzt, dass

$$/2/ \quad \varepsilon_s = - \frac{\varepsilon_{sk}}{\varphi_K} \varphi(t)$$

ist, wo durch  $\varphi_K$  das Endkriechmass und durch  $\varepsilon_{sk}$  das Endschwindmass des Betons bezeichnet ist.

Es hat sich leider gezeigt, dass zahlreiche Probleme der vorgespannten und der Verbundkonstruktionen mit einer solchen Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen nicht gelöst werden können. Deshalb ist man gezwungen, sich mit angenäherten Lösungen zu begnügen.

In dem hier vorgeschlagenen Näherungsverfahren wird die Integralgleichung /1/ durch eine gewöhnliche algebraische Gleichung ersetzt, die sich ergibt, wenn der Wert des Integrals in der Gleichung /1/ bestimmt wird unter Voraussetzung, dass die Spannung im Beton von Werte  $\sigma_{b0}$  im Zeitpunkt  $t=0$  bis zum Wert  $\sigma_b$  im Zeitpunkt  $t$ , eine lineare Funktion der Veränderlichen  $\varphi$  ist, d.h. wenn in die Gleichung /1/ eingetragen wird:

$$/3/ \quad \int_0^{\varphi} \sigma_b d\varphi = \frac{\sigma_{b0} + \sigma_b}{2} \varphi.$$

Mit den Bezeichnungen

$$/4/, /5/ \quad E_{b\varphi} = \frac{2}{2+\varphi} E_b, \quad \varphi = \frac{\varphi}{2+\varphi},$$

kann die Gleichung /1/ in folgender Form geschrieben werden:

$$/6/ \quad \sigma_b + \varphi \sigma_{bo} = E_{b\varphi} (\varepsilon - \varepsilon_s).$$

Die Lösungen, die sich ergeben, indem man von der obigen Gleichung ausgeht, sind einfach und stets ausreichend genau, in bezug auf die Genauigkeit, mit der die Materialkonstanten bestimmt werden können und die Genauigkeit, mit der die Gleichung /1/ das reelle Verhalten des Betons darstellt.

## 2. Grundlegende Bezeichnungen

- $E_s$  - Elastizitätsmodul des Stahls,
- $E_b$  - Elastizitätsmodul des Betons,
- $E_{b\varphi}$  - fiktiver Elastizitätsmodul des Betons, Gleichung /4/,
- $E_c$  - Vergleichs-Elastizitätsmodul. Für Verbundkonstruktionen ist  $E_c = E_s$ , für vorgespannte Konstruktionen ist  $E_c = E_{b\varphi}$ ,
- $\nu_s = E_s/E_c$ ,  $\nu_b = E_{b\varphi}/E_c$  - Verhältnisse der Elastizitätsmoduli,
- $F_s$  - Querschnittsfläche des Stahls mit dem Schwerpunkt  $T_s$ ,
- $C$  - Abstand der Schwerpunkte  $T_s$  und  $T_b$ , positiv wenn der Schwerpunkt  $T_s$  unter dem Schwerpunkt  $T_b$  liegt,
- $F_{sr} = \nu_s F_s$ ,  $F_{br} = \nu_b F_b$  - reduzierte Querschnittsfläche des Stahls bzw. des Betons,
- $F_i = F_{sr} + F_{br}$  - ideelle Querschnittsfläche,
- $y$  - Abstand der Querschnittspunkte von der zur Biegungsebene senkrechten Achse durch den Schwerpunkt des ideellen Querschnittes  $T_i$ . Die Abstände des Schwerpunktes  $T_i$  von den Schwerpunkten  $T_s$  und  $T_b$  sind:  $y_s = F_{br} C / F_i$  und  $y_b = F_{sr} C / F_i$ ,
- $I_s, I_b$  - Trägheitsmomente des Stahl- bzw. Betonteiles des Querschnittes in bezug auf die Schwerpunkrachsen durch  $T_s$  und  $T_b$ ,
- $I_{sr} = \nu_s I_s$ ,  $I_{br} = \nu_b I_b$  - reduziertes Trägheitsmoment des Stahls bzw. des Betons,
- $I_i = I_{sr} + F_{sr} y_s^2 + I_{br} + F_{br} y_b^2$  - Trägheitsmoment des ideellen Querschnittes.

Die eingeführten Bezeichnungen unterscheiden sich von den in der Theorie der vorgespannten und der Verbundkonstruktionen üblichen Bezeichnungen nur dadurch, dass die Betonfläche nicht nach dem reellen Elastizitätsmodul des Betons  $E_b$ , sondern nach dem fiktiven Modul  $E_{b\varphi}$  reduziert wird. Da der Modul  $E_{b\varphi}$  eine Funktion von  $\varphi$  bzw. von  $t$  ist, so sind auch die Grössen  $\nu_b$ ,  $F_{br}$ ,  $I_{br}$ ,  $F_i$ ,  $I_i$ , sowie die Grössen  $y_s$ ,  $y_b$  Funktionen von  $\varphi$  bzw. von  $t$ .

## 3. Spannungen und Verformungsgrössen

Der Bernoullischen Voraussetzung über ebenbleibende Querschnitte gemäss können, im Falle ebener Biegung, die Dehnungen in der Richtung der Stabachse in folgender Form dargestellt werden:

$$/7/ \quad \varepsilon = \varepsilon_T + \alpha y,$$

wo  $\varepsilon_T$  die Dehnung im Schwerpunkt des ideellen Querschnittes  $T_i$  ist, und  $\alpha$  die Krümmungsänderung der Stabachse. Die Spannungen im Stahl werden, laut Hooke-schem Gesetz, durch den Ausdruck:

$$/8/ \quad \sigma_s = E_s (\varepsilon_T + \alpha y)$$

gegeben, während die Spannungen im Beton, gemäss der Gleichung /6/, durch den Ausdruck:

$$/9/ \quad \sigma_b = E_{bp} (\varepsilon_T + \alpha y) - \rho \sigma_{bo} - E_{bp} \varepsilon_s,$$

gegeben werden. Die Verformungsgrössen  $\varepsilon_T$  und  $\alpha$  in dem Querschnitt mit den Querschnittskräften  $N$  und  $M$  ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen:

$$/10/ \quad \int_s \sigma_s dF + \int_b \sigma_b dF = N,$$

$$\int_s y \sigma_s dF + \int_b y \sigma_b dF = M,$$

wo der Index  $s$  bzw.  $b$  unterhalb des Integralzeichens bezeichnet, dass das Integrationsgebiet der Stahl- bzw. der Betonteil des Querschnittes ist. Wenn die Gleichungen /8/ und /9/ in die Gleichungen /10/ eingetragen werden, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varepsilon_T (E_s \int_s dF + E_{bp} \int_b dF) + \alpha (E_s \int_s y dF + E_{bp} \int_b y dF) = \\ = N + \rho \int_b \sigma_{bo} dF + E_{bp} \varepsilon_s \int_b dF, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} /11/ \quad \varepsilon_T (E_s \int_s y dF + E_{bp} \int_b y dF) + \alpha (E_s \int_s y^2 dF + E_{bp} \int_b y^2 dF) = \\ = M + \rho \int_b y \sigma_{bo} dF + E_{bp} \varepsilon_s \int_b y dF. \end{aligned}$$

Nach den Bezeichnungen im vorangehenden Abschnitt ist:

$$E_s \int_s dF + E_{bp} \int_b dF = E_s F_s + E_{bp} F_b = E_c F_i,$$

$$/12/ \quad E_s \int_s y dF + E_{bp} \int_b y dF = E_s F_s y_s + E_{bp} F_b y_b = 0,$$

$$E_s \int_s y^2 dF + E_{bp} \int_b y^2 dF = E_s (I_s + F_s y_s^2) + E_{bp} (I_b + F_b y_b^2) = E_c I_i.$$

Die Integrale:

$$\int_b \sigma_{bo} dF \quad \text{und} \quad \int_b y \sigma_{bo} dF,$$

an der rechten Seite der Gleichung /11/ haben einfache Bedeutungen. Das erste stellt die Resultierende der inneren Kräfte die von Beton im Zeitpunkt  $t=0$  aufgenommen werden dar, während das zweite das Moment in bezug auf den Schwerpunkt des ideellen Querschnittes

$T_i$  derselben Kräfte darstellt. Die Resultierende wird mit  $N_{b0}$  und das Moment wird mit  $M_{b0} + N_{b0} y_{b0}$  bezeichnet, wo  $M_{b0}$  das Moment der vom Beton im Zeitpunkt  $t=0$  aufgenommenen inneren Kräfte in bezug auf den Schwerpunkt des Betons  $T_b$  ist. Damit wird:

$$/13/ \quad \int_b \sigma_{b0} dF = N_{b0}, \quad \int_b y \sigma_{b0} dF = M_{b0} + N_{b0} y_{b0}.$$

Wenn man nebst den bisher eingeführten Bezeichnungen noch die Bezeichnung:

$$/14/ \quad N_{sk} = E_{b\varphi} F_b \varepsilon_s = -E_{b\varphi} F_b \frac{\varepsilon_{sk}}{\varphi_k} \varphi,$$

einführt, so können die Gleichungen /11/ auch in folgender Form angeschrieben werden:

$$/15/ \quad \begin{aligned} E_c F_i \varepsilon_T &= N + \rho N_{b0} + N_{sk}, \\ E_c I_i \varrho e &= M + \rho (M_{b0} + N_{b0} y_{b0}) + N_{sk} y_{b0}. \end{aligned}$$

Wird die Summe der Kräfte an der rechten Seite der ersten von diesen Gleichungen als eine fiktive Normalkraft  $N_\varphi$  und die Summe der Momente an der rechten Seite der zweiten von diesen Gleichungen als ein fiktives Biegemoment  $M_\varphi$  aufgefasst:

$$/16/ \quad \begin{aligned} N_\varphi &= N + \rho N_{b0} + N_{sk}, \\ M_\varphi &= M + \rho (M_{b0} + N_{b0} y_{b0}) + N_{sk} y_{b0}, \end{aligned}$$

so sind die Verformungsgrössen  $\varrho e$  und  $\varepsilon_T$  durch folgende Ausdrücke angegeben:

$$/17/ \quad \varepsilon_T = \frac{N_\varphi}{E_c F_i}, \quad \varrho e = \frac{M_\varphi}{E_c I_i}$$

Wenn man diese Werte für  $\varepsilon_T$  und  $\varrho e$  in die Gleichungen /8/ und /9/ einführt, so ergibt sich:

$$/18/ \quad \begin{aligned} \sigma_a &= \nu_a \left( \frac{N_\varphi}{F_i} + \frac{M_\varphi}{I_i} y \right), \\ \sigma_b &= \nu_b \left( \frac{N_\varphi}{F_i} + \frac{M_\varphi}{I_i} y \right) - \rho \sigma_{b0} - E_{b\varphi} \varepsilon_s. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen /17/ und /18/ wir folgern, dass in einem Verbund- oder vorgespannten Träger im Zeitpunkt  $t$  die Verformungsgrössen  $\varepsilon_T$  und  $\varrho e$  gleich sind und die Spannungen  $\sigma_a$  und  $\sigma_b + \rho \sigma_{b0} + E_{b\varphi} \varepsilon_s$  proportionell sind den entsprechenden Einflüssen in einem Träger von gleichartigem Material, mit einheitlichem Elastizitätsmodul  $E_c$ , mit den Querschnittsbeiwerten  $F_i$  und  $I_i$  und mit den fiktiven Querschnittskräften  $N_\varphi$  und  $M_\varphi$ , die durch die Gleichungen /16/ angegeben sind.

Um aus den Gleichungen /16/, /17/ und /18/ die Verformungsgrössen und die Spannungen im Zeitpunkt  $t$  zu berechnen, ist es erforderlich, die Grössen  $\sigma_{b0}$ ,  $N_{b0}$  und  $M_{b0}$  zu kennen. Die erwähnten Grössen ergeben sich aus den vorangehenden Gleichungen, wenn man für  $t=0$ :  $\varphi=0$ ,  $E_{b\varphi}=E_b$ ,  $\rho=0$ ,  $N_{sk}=0$  stellt, sowie dass

$N=N_0$  und  $M=M_0$  ist:

$$/19/ \quad \bar{\sigma}_{a0} = \nu_a \left( \frac{N_0}{F_{i0}} + \frac{M_0}{I_{i0}} y_0 \right), \quad \bar{\sigma}_{b0} = \nu_b \left( \frac{N_0}{F_{i0}} + \frac{M_0}{I_{i0}} y_0 \right),$$

$$/20/ \quad N_{b0} = N_0 \frac{F_{bro}}{F_{i0}} + M_0 \frac{F_{bro} y_{b0}}{I_{i0}}, \quad M_{b0} = M_0 \frac{I_{bro}}{I_{i0}}.$$

In den obigen Gleichungen sind  $F_{bro}$  und  $I_{bro}$  Querschnittswerte des Betons, reduziert nach dem reellen Elastizitätsmodul des Betons  $E_b$  und  $F_{i0}$ ,  $I_{i0}$  die Querschnittswerte des entsprechenden ideellen Querschnittes.

#### 4. Statisch unbestimmte Träger

Infolge des Schwindens und des Kriechens des Betons, unter Einwirkung einer ständigen Belastung, ändern sich im Laufe der Zeit die Verformungen der Verbund- oder vorgespannten Konstruktionen. Deshalb ändern sich in den statisch unbestimmten Verbund- oder vorgespannten Trägern auch die statisch unbestimmten Grössen  $X_K$ ,  $K=1,2,\dots,n$ , und damit auch die Querschnittskräfte:

$$/21/ \quad N = N_0 + \sum_{K=1}^n X_K N_K, \quad M = M_0 + \sum_{K=1}^n X_K M_K,$$

wo  $N_0, M_0$  Querschnittskräfte des Gleichgewichtszustandes  $X_K=0$ , und  $N_K, M_K$  Querschnittskräfte des Selbstspannungszustandes  $X_K=1$ , sind.

Die statisch unbestimmten Grössen  $X_K$ ,  $K=1,2,\dots,n$ , werden aus  $n$  Gleichungen des Prinzips der virtuellen Kräfte:

$$/22/ \quad \int (N_i \varepsilon_T + M_i \partial e) ds = \sum_j C_{ji} c_j, \quad i=1,2,\dots,n,$$

berechnet, in denen  $C_{ji}$  Reaktionen, und  $N_i, M_i$  Querschnittskräfte des Selbstspannungszustandes  $X_i=1$  bezeichnen, während  $\varepsilon_T$  und  $\partial e$  die wirklichen Verformungsgrössen und  $c_j$  die wirklichen Stützenverschiebungen des Trägers sind.

In den Gleichungen /17/ und /18/ wurde nichts von den Querschnittskräften vorausgesetzt so dass dieselben auch dann gültig sind, wenn die Kräfte  $N$  und  $M$  mit der Zeit sich ändern, d.h. sowohl für statisch bestimmte als auch für statisch unbestimmte Träger. Laut Gleichungen /21/, Gleichungen /16/ und Gleichungen /17/ sind die Verformungsgrössen  $\varepsilon_T$  und  $\partial e$  in einem statisch unbestimmten Träger durch folgende Ausdrücke angegeben:

$$/23/ \quad \varepsilon_T = \frac{1}{E_c F_i} \left( N_0' + \sum_{K=1}^n X_K N_K \right), \quad \partial e = \frac{1}{E_c I_i} \left( M_0' + \sum_{K=1}^n X_K M_K \right),$$

worin

$$/24/ \quad \begin{aligned} N_0' &= N_0 + \rho N_{b0} + N_{sk}, \\ M_0' &= M_0 + \rho (M_{b0} + N_{b0} y_{b0}) + N_{sk} y_{b0}, \end{aligned}$$

ist.

Wenn die Gleichungen /23/ in die Gleichungen /22/ eingetragen werden ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n \chi_k \left( \int \frac{M_i M_k}{E_c I_i} ds + \int \frac{N_i N_k}{E_c F_i} ds \right) + \\
 & + \int \frac{M_i M_{\phi}'}{E_c I_i} ds + \int \frac{N_i N_{\phi}'}{E_c F_i} ds - \sum_j C_{ji} c_j = 0, \quad i=1,2,\dots,n
 \end{aligned}
 \quad /25/$$

Mit den Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
 \delta_{ik} &= \int \frac{M_i M_k}{E_c I_i} ds + \int \frac{N_i N_k}{E_c F_i} ds, \\
 \delta_{i\phi} &= \int \frac{M_i M_{\phi}'}{E_c I_i} ds + \int \frac{N_i N_{\phi}'}{E_c F_i} ds - \sum_j C_{ji} c_j,
 \end{aligned}
 \quad /26/$$

können die Gleichungen /25/ in folgender Form geschrieben werden:

$$\sum_{k=1}^n \chi_k \delta_{ik} + \delta_{i\phi} = 0, \quad i=1,2,\dots,n.
 \quad /27/$$

Daraus wir folgern, dass die statisch unbestimmten Größen in einem Verbund- oder vorgespannten Träger im Zeitpunkte  $t$  gleich sind den statisch unbestimmten Größen eines statisch unbestimmten Trägers aus gleichartigem Material, mit einheitlichem Elastizitätsmodul  $E_c$ , mit den Querschnittswerten  $F_i$  und  $I_i$ , sowie mit den Einflüssen im Hauptsystem  $N_{\phi}'$  und  $M_{\phi}'$ , die durch die Gleichungen /24/ angegeben sind.

### 5. Träger mit zusammengesetztem Stahlquerschnitt

Der Stahlquerschnitt des Verbundträgers wird oft aus mehreren Teilen zusammengesetzt: Blech oder Walzträger, schlaaffe Bewehrung und Drähte bzw. Vorspannstähle, mit den Querschnittsflächen  $F_n$ ,  $F_m$ ,  $F_p$ , mit den Trägheitsmomenten  $I_n$ ,  $I_m$ ,  $I_p$  in bezug auf die Achse durch den Schwerpunkt  $T_n$ , bzw.  $T_m$  und  $T_p$ , und mit den Elastizitätsmoduli  $E_n$ ,  $E_m$  und  $E_p$ .

Es ist leicht zu beweisen, dass auch für diesen Fall sämtliche bisher abgeleiteten Gleichungen gelten, wobei darin  $F_{ar}$  die ideelle Stahlfläche bezeichnet, und zwar:

$$/28/ \quad F_{ar} = F_{nr} + F_{mr} + F_{pr},$$

$$/29/ \quad F_{nr} = \nu_n F_n, \quad F_{mr} = \nu_m F_m, \quad F_{pr} = \nu_p F_p,$$

$$/30/ \quad \nu_n = \frac{E_n}{E_c}, \quad \nu_m = \frac{E_m}{E_c}, \quad \nu_p = \frac{E_p}{E_c},$$

und  $I_{ar}$  das Trägheitsmoment der ideellen Stahlfläche in bezug auf den Schwerpunkt  $T_a$ :

$$/31/ \quad I_{ar} = I_{nr} + I_{mr} + I_{pr} + F_{nr}(e_n - e_a)^2 + F_{mr}(e_m - e_a)^2 + F_{pr}(e_p - e_a)^2,$$

$$/32/ \quad I_{nr} = \nu_n I_n, \quad I_{mr} = \nu_m I_m, \quad I_{pr} = \nu_p I_p.$$

Der abstand  $e_a$  des Schwerpunktes  $T_a$  von der Achse, die in den Abständen  $e_n$ ,  $e_m$ ,  $e_p$  von den Schwerpunkten  $T_n$ ,  $T_m$ ,  $T_p$  verläuft, wird aus der Gleichung:

$$/33/ \quad F_{nr}(e_n - e_a) + F_{mr}(e_m - e_a) + F_{pr}(e_p - e_a) = 0.$$



bestimmt.

Mit der ideellen Stahlfläche  $F_{ar}$ , dem Trägheitsmoment derselben Fläche  $I_{ar}$  in bezug auf die durch den Schwerpunkt  $T_a$  verlaufende Achse, wird die Schwerpunktslage des ideellen Verbundquerschnittes  $T_i$  berechnet, die Beiwerte  $F_i$  und  $I_i$ , ferner die fiktiven Kräfte  $N_\varphi$  und  $M_\varphi$ , die Verformungsgrößen  $\varepsilon_T$  und  $\varepsilon_e$ , sowie die Spannungen im Beton  $\sigma_b$  aus den vorhin abgeleiteten Gleichungen, während die Spannungen in den Stahlteilen des Trägers durch die Gleichungen:

$$/34/ \quad \left. \begin{matrix} \sigma_n \\ \sigma_m \\ \sigma_p \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} v_n \\ v_m \\ v_p \end{matrix} \right\} \left( \frac{N_\varphi}{F_i} + \frac{M_\varphi}{I_i} y \right),$$

gegeben sind.

## 6. Einfluss der Vorspannungskräfte

Die Vorspannung von Trägern wird gewöhnlich mittels Spanndrähte durchgeführt die sich in Röhren befinden, welche eine von den übrigen Teilen des Trägers unabhängige Drahtverformung sichern. Bei einer derartigen Vorspannungsweise im Moment der Vorspannung, d.h. im Zeitpunkt  $t=0$  ist die Spannkraft  $P$  eine äussere auf den spannstahllosen Querschnitt einwirkende Kraft. Der Spannstahl ist in diesem Augenblick bloss ein dem Träger die Kraft  $P$  vermittelndes Element. Dementsprechend ergeben sich die Spannungen im Zeitpunkt  $t=0$  infolge der Vorspannung, wenn in die Gleichung /19/  $N_0 = -P$  und  $M_0 = -P y_{p0}$  eingetragen wird:

$$/35/ \quad \sigma_{a0} = -v_a P \left( \frac{1}{F_{i0}} + \frac{y_{p0} y_0}{I_{i0}} \right), \quad \sigma_{b0} = -v_{b0} P \left( \frac{1}{F_{i0}} + \frac{y_{p0} y_0}{I_{i0}} \right),$$

wo  $F_{i0}$  und  $I_{i0}$  Querschnittswerte des ideellen spannstahllosen Querschnittes sind.

Nachdem die Drähte gespannt und verankert sind, werden die Röhre mit Zementmörtel injiziert. Der Spannstahl wird zu einem Teil des Trägers, der ihren weiteren Verformungen Folge leistet, und damit die ursprüngliche Spannung  $P/F_p$  im Laufe der Zeit stetig ändert. Die Änderung dieser Spannung ist dem Dehnungsunterschied  $\varepsilon - \varepsilon_0$  in den Zeitpunkten  $t$  und  $t=0$  proportionell, so dass die Spannung im Spannstahl im Zeitpunkt  $t$  gleich wird:

$$/36/ \quad \sigma_p = \frac{P}{F_p} + E_p (\varepsilon - \varepsilon_0).$$

Wenn man diese Gleichung sowie die Gleichungen:

$$/37/ \quad \sigma_n = E_n \varepsilon, \quad \sigma_m = E_m \varepsilon, \quad \sigma_b = E_{bp} \varepsilon - P \sigma_{b0},$$

in Bedingungen:

$$\begin{aligned} \int_n \sigma_n dF + \int_m \sigma_m dF + \int_p \sigma_p dF + \int_b \sigma_b dF &= 0, \\ \int_n \sigma_n y dF + \int_m \sigma_m y dF + \int_p \sigma_p y dF + \int_b \sigma_b y dF &= 0, \end{aligned}$$

eingführt, schliesst man daraus, dass auch für die durch die Vorspannungskraft hervorgerufenen Verformungsgrößen  $\varepsilon_T$  und  $\varepsilon_e$  die Gleichungen /17/ gelten, damit



$$\begin{aligned}
 /38/ \quad N_{\varphi} &= -P + \int_p E_p \varepsilon_0 dF + \varrho \int_b \sigma_{b0} dF, \\
 M_{\varphi} &= -P y_{p0} + \int_p E_p \varepsilon_0 y dF + \varrho \int_b \sigma_{b0} y dF,
 \end{aligned}$$

ist. Die Grösse  $E_p \varepsilon_0$  ist die Spannung, die von dem Spannstahl aufgenommen werden würde, wenn derselbe im Zeitpunkt  $t=0$  der Verformung des Trägers folgen würde. Das Integral dieser Spannungen im Ausdruck für  $N_{\varphi}$  ist die Resultierende  $N_{p0}$ , und das Integral der statischen Momente dieser Spannungen in bezug auf den Schwerpunkt des ideellen Querschnittes im Ausdrucke für  $M_{\varphi}$  ist das Moment  $M_{p0} + N_{p0} y_{p0}$ :

$$\begin{aligned}
 /39/ \quad \int_p E_p \varepsilon_0 dF &= N_{p0} = -P \nu_p \left( \frac{F_p}{F_{i0}} + \frac{F_p y_{p0}^2}{I_{i0}} \right), \\
 \int_p E_p \varepsilon_0 y dF &= M_{p0} + N_{p0} y_{p0} = -P y_{p0} \frac{I_{pr}}{I_{i0}} + N_{p0} y_{p0}.
 \end{aligned}$$

Wenn die Gleichungen /39/ und die Gleichungen /13/ in die Gleichungen /38/ eingetragen werden, erhält man:

$$\begin{aligned}
 /40/ \quad N_{\varphi} &= -P + N_{p0} + \varrho N_{b0}, \\
 M_{\varphi} &= -P y_p + M_{p0} + N_{p0} y_{p0} + \varrho (M_{b0} + N_{b0} y_{b0}).
 \end{aligned}$$

Die statisch unbestimmten Grössen infolge Vorspannung des Trägers bekommt man aus den Gleichungen /27/, wenn man, in die Gleichung /26/ für die fiktiven Querschnittskräfte  $N_{\varphi}$  und  $M_{\varphi}$  die Grössen  $N_{\varphi}$  und  $M_{\varphi}$ , die durch die Gleichungen /40/ gegeben sind, einführt.

## ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Beitrag wird eine Methode zur Berechnung der Verbund- und vorgespannten Konstruktionen, unter Berücksichtigung der Einflüsse des Schwindens und Kriechens des Betons, vorgeschlagen. Dabei wird die Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons in Form einer algebraischen Gleichung angenommen.

## SUMMARY

The paper deals with a method for the calculation of composite and prestressed structures, taking into consideration the influences of shrinkage and creep. The stress-strain relationship used for the concrete is in the form of an algebraic equation.

## RESUME

Dans cet article, on présente une méthode pour le calcul des constructions mixtes acier-béton et en béton précontraint, en prenant en considération les effets du fluage et du retrait du béton. La relation entre les contraintes et les déformations est admise sous la forme d'une équation algébrique.

### III

#### **Prediction of the Behaviour of Concrete Frames**

Prédiction du comportement des cadres en béton

Die Voraussage des Verhaltens von Betonrahmen

**R.G. DRYSDALE**

Assistant Professor

Department of Civil Engineering

& Engineering Mechanics

McMaster University

Hamilton, Ontario, Canada

#### INTRODUCTION

A great deal of attention has been devoted to the effects of creep and shrinkage on columns having determinate end conditions. However, because of the very nature of the problem, very little direct information has been obtained on the behaviour and interaction of columns as part of indeterminant frames. This research paper describes a method for predicting the behaviour of reinforced concrete frames.

The method of analysis includes the non linear response of reinforced concrete sections under short term loading as well as the time dependent effects of creep, shrinkage and changes in concrete strength. Utilizing the digital computer this analysis could be used directly as a check for special structural cases. However, the main purpose of this study was to provide a means of assessing and perhaps altering the various Building Code design provisions for column design and moment distributions in frames. With this objective an analysis was derived to predict the behaviour and failure for short term loading to the behaviour for predetermined load versus time history including either prediction of the time of sustained load failure or the remaining capacity after a period of sustained loading.

In order to provide data to verify the numerical method a limited experimental program was implemented.

#### EXPERIMENTAL PROGRAM

Test Specimen: The test specimen chosen was a single bay fixed base frame. While being a relatively simple specimen to fabricate this choice, with three degrees of indeterminacy, provided ample opportunity for redistribution of bending moments due to inelastic behaviour. Therefore, the test data would provide a good check for the accuracy of the analytical predictions. Also additional information on the formation of collapse mechanisms in reinforced concrete frames would be obtained. To reduce the effects of scale and to

minimize the relative magnitude of fabrication and experimental tolerances a fairly large model was used.

As shown in Figure 1, the outside dimensions were 274.32 cm high by 294.64 cm wide. The cross-section was 20.32 cm square with a 1.91 cm diameter deformed reinforcing bars in each corner under 2.54 cm of concrete cover. The reinforcement had a sharply defined yield stress of  $4150 \pm 35$  kg/cm<sup>2</sup>. The bottom of each column was composed of a 20.32 cm by 20.32 cm by 20.32 cm H section. The reinforcing bars were welded to the web of the H section prior to pouring the concrete and the bottom of the H section was welded to a base plate when the frame was placed in the test position. The base plate was stiffened and prestressed to the laboratory floor to provide the fixed end condition. Square ties made from 0.64 cm diameter plain bars were spaced at 15.24 cm and 7.62 cm respectively in the columns and beam. To avoid discontinuities the reinforcement was continuous throughout the frame. Because of difficulties encountered in a preliminary test, Frame R1, the corners of the frame were made quite stiff by the addition of diagonal ties. The length within the top portion of the H section was similarly stiffened.

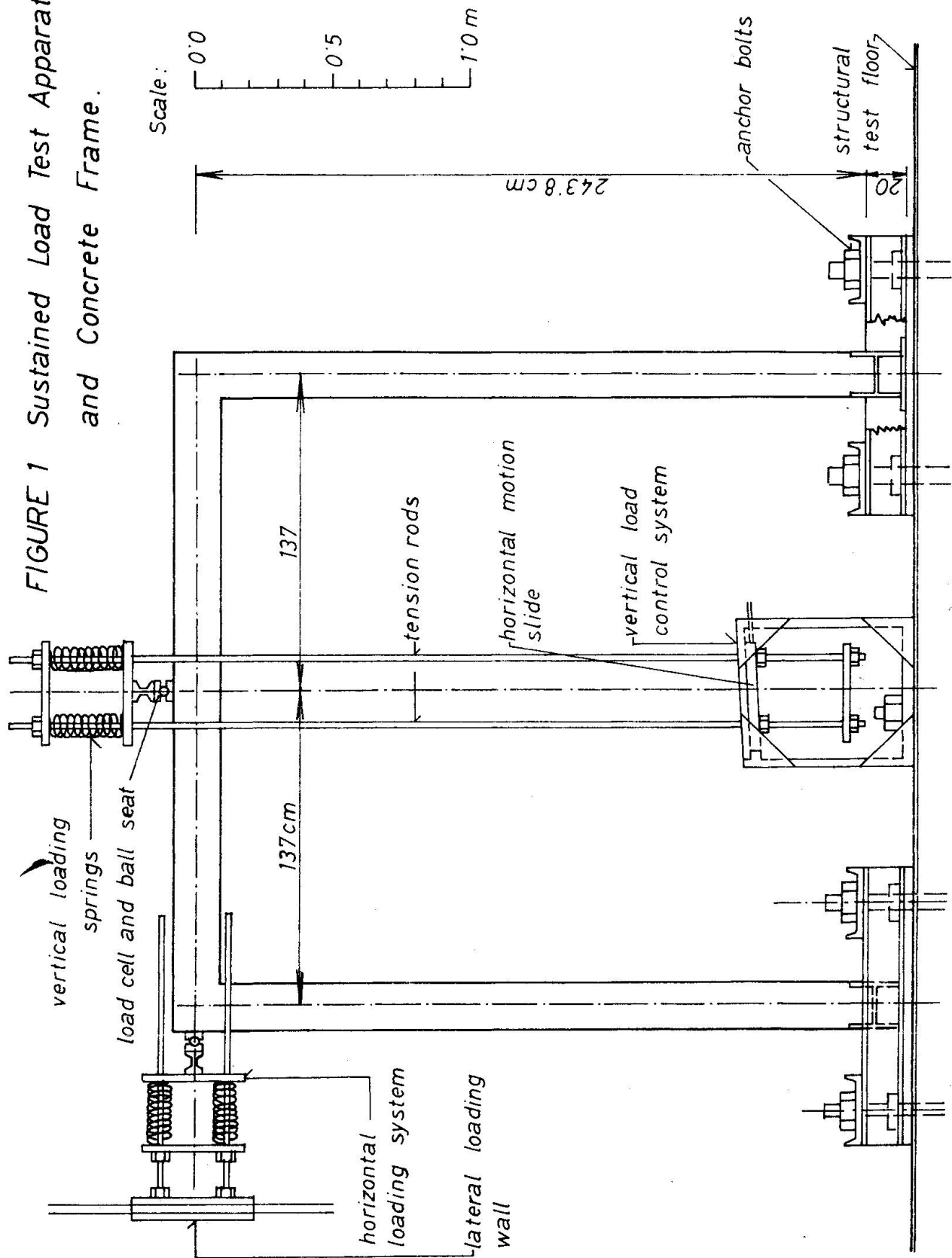
A concrete mix design having predetermined creep, shrinkage and stress-strain properties was used. The following proportions by weight were used to obtain a 28 day cylinder strength of 316 kg/cm<sup>2</sup>: Portland Cement Type 1 -- 14.0%; Water -- 9.1%; Fine Aggregate (washed sand) -- 46.6%; Coarse Aggregate (0.95 cm maximum size crushed limestone) -- 30.3%. The frame was cast in a steel form and moist cured for 7 days before being placed in the test position. Companion cylinders and prisms with and without reinforcement were also poured.

Test Apparatus: Separate sets of apparatus were set up for short term loading and for sustained loading. In both cases loads were controlled using load cells employing electric resistance foil strain gauges. Dial gauges were mounted to provide deflection and base rotation data. Strains on the concrete were obtained using a demountable mechanical dial indicator with a 20.32 cm gauge length. Equipment to provide a horizontal load, H, on the left column at mid-height of the beam and a vertical load, V, at the centre of the span was required for both set ups. In each case the load was transferred to the test frame through a spherical seat.

Short Term Tests: Steel Wide Flange columns, prestressed to the floor, were fitted with cross beams to jack against. The jacks were mounted on gear driven mechanical slides to maintain the positions of the loads as the frame deflected.

Sustained Load Tests: The apparatus for the sustained load tests was located in a polyethylene covered frame inside which the temperature and relative humidity were maintained at  $24^{\circ}\text{C} \pm 1^{\circ}\text{C}$  and  $50\% \pm 2\%$  respectively. Instead of using jacks, loads were maintained by the use of springs and rods as shown in Figure 1. The coil springs reduced the decrease in load due to the long term deflection of the frame. As the loads did decrease they were adjusted to keep within 2% of the specified values. The vertical load followed the deflection of the frame by adjustment of the horizontal mechanical slide incorporated into the spring and rod assembly.

FIGURE 1 Sustained Load Test Apparatus and Concrete Frame.



### ANALYTICAL METHOD

The basis for the analytical method was intended to be generally applicable to the prediction of behaviour of beam and column combinations. However, it was necessary to evaluate the acceptability of these fundamental processes in terms of the accuracy with which they would be utilized to predict the actual behaviour of an indeterminate framework. Therefore, the mathematical model was specifically tailored to provide theoretical predictions for comparison with data from the experimental program. Comparison with these tests provided a meaningful evaluation because the following influencing factors were included: indeterminacy - permitting redistribution of bending moments; secondary bending moments - due to deflection and axial deformations; large variations in bending moment - thereby emphasizing the non linear moment-curvature characteristic; different axial loads in each member - thereby including the effect of axial loads on member stiffness; the time dependent effects of creep, shrinkage and change in concrete strength.

The mathematical model relied on the speed and storage capacity of a digital computer to permit the frame to be divided into elements. The clear span portion of the concrete frame was divided into equal segment lengths with the cross section at the end of each length further subdivided into element strips. (Use of 25.4 segment lengths and 16 element strips per cross section yielded sufficiently accurate results). The numerical procedure employed was as follows:

1. Based on an elastic analysis an estimate of the reactions and moments at the left base was made for the specified loads.
2. From the test results the rotation and displacements of the left base was recorded.
3. For the assumed load and moment the compatible strain distribution at the bottom of the steel base was computed. Using this curvature and the slope of the base the deformed position of the top of the H section was calculated. From equilibrium considerations the moment at the top of the H section was calculated. The strain distribution and curvature were then calculated. Using the average curvature over the length of the H section the deformed position of the top was recalculated. The iterative process was repeated until the change in curvature at the top was less than 1% or less than  $1 \times 10^{-6}$  radians.
4. Through an iterative process (described later) the strains in the reinforced concrete section were calculated for the load and bending moment at the top of the H section. The displaced position of the second cross section was calculated assuming the curvature to be constant over the first segment length. Using an equilibrium calculation incorporating the displacement of the second cross section the bending moment and resulting curvature were calculated for the second cross section. Then using the average curvature between section 1 and 2 the process was repeated until the change in curvature was less than 1% or  $1 \times 10^{-6}$  radians.
5. Starting with the moment at the upper end of the preceding element, step 4 was performed successively through all segments of the frame. At the corners and load points the appropriate changes in shears and axial forces were made.
6. Upon completion of the last segment the deformations in the H section at the right base were included in the calculation of the slope and linear displacements of the right base.



In most cases the slope and displacements of the right base were not compatible with the corresponding measured values. Therefore it was necessary to adjust the estimate of the reactions and bending moment on the left base in such a manner as to produce compatibility at the right base.

7. Based on the errors in the displacements at the right base, slope-deflection equations were used to systematically alter the estimates of the reactions and bending moment at the left base.
8. Steps 3 to 6 were repeated until the geometric errors at the right base were within acceptable limits.

The above process was repeated to obtain new values after each load increment and after selected intervals of time under sustained load. Using the method of numerical integration described above it was possible to predict the behaviour of the frame up to formation of the first plastic hinge. The time dependent effects were included in the calculation of strains at each cross section.

Distribution Of Strain On A Reinforced Concrete Section: For a specified combination of axial load and bending moment on a cross section, an iterative technique was used to vary the planar strain distribution until the calculated resisting axial force and bending moment agreed with those specified. The following steps were used:

1. Prior to applying the initial loads the tensile stress in the concrete and the compressive stress in the reinforcement were calculated using shrinkage strains from companion reinforced prisms.
2. The cross section was divided into 16 element slices perpendicular to the plane of loading.
3. For the specified load and bending moment a trial strain distribution across the section was chosen. From this strain distribution the strains at the centroids of the reinforcement and of each element strip were calculated.
4. Using the strains at the centroids of each element the total force and bending moment were calculated by summing the contribution of each element slice and the reinforcement. The effects of the shrinkage stress were included. A fourth order polynomial equation based on a least squares fit of experimental data was used to represent the concrete compression stress-strain relationship. The concrete was assumed to crack at a tensile strain of  $150 \times 10^{-6}$ .
5. The calculated internal force and bending moment were compared to the corresponding external values. If either differed by more than 1% the strain distribution was altered in a manner designed to reduce the discrepancy.

Steps 3 to 5 were repeated until the internal and external forces and bending moments differed by less than 1%.

6. The calculations for creep were formulated as non linear functions of the portion of the total strain which contributed to stress. (Herein called "elastic" strain). The total strain and the "elastic" strain were stored for each element strip.
7. For sustained loading the loads and stress conditions were considered to remain constant for short increments of time. For a specified time interval the creep strain which would occur on each element was calculated and stored. (The creep calculation is described later). Additional shrinkage was computed

- from equations derived from experimental shrinkage data.
8. A new total planar strain distribution was estimated in order to attempt to account for the effects of creep and shrinkage. The calculations described in steps 3 to 5 were performed with the only difference being that the strain contributing to stress on each strip element was calculated by subtracting the creep and shrinkage strains for that element from the total strain at the centroid of the element. The concrete stress-strain relationship was also adjusted to account for the increased age of the concrete.
- For the next time interval the stresses on the strip elements could be different from the previous values. These changes could result from a change in load on the structure or from the redistribution of load caused by the sustained load deformations. The non-linearity of creep versus stress also could cause a redistribution of stresses on a cross-section.
9. For the new set of "elastic" strains and taking into account the stress history, steps 6 to 8 were repeated for each time interval.
  10. At any time the loading could be increased in increments up to the ultimate capacity of the cross-sections.

Creep Calculations: A modified superposition method for calculating creep has been derived. From creep tests it was found that creep strain for a constant stress could be accurately represented by an equation of the form:  $\text{Creep} = A + B \log (\text{time})$  the constants A and B were expressed as functions of "elastic" strain by third order equations. Use of "elastic" strain as the basis for creep calculation was convenient for programming. In addition, because the concrete stress-strain curve was altered with increase in time, the effect of maturing of the concrete was reflected in the creep calculations. The creep calculation is described below.

If an element is loaded so that the elastic strain is EL.1 and maintained at that load for a period of time  $t_0$  to  $t_1$ , the amount of creep which would occur would be CR. 1. This corresponds to experimental data for creep under constant stress as shown in Figure 2 (a). If at time  $t_1$ , the load is increased so that the elastic strain is increased to EL.2 the calculation of creep for the time interval  $t_1$  to  $t_2$  should take into account the previous stress history. The uppermost curve in Figure 2 (a) represents creep under a constant "elastic" strain EL.2. If EL.2 had existed during the time  $t_0$  to  $t_1$ , the additional creep during time  $t_1$  to  $t_2$  would be CR.2'. However a lower "elastic" strain had been sustained during time  $t_0$  to  $t_1$ . Therefore it was expected that the effect of increasing the "elastic" strain would cause a creep strain larger than CR.2' during  $t_1$  to  $t_2$ . The effect of this change in elastic strain was accounted for by adding the amount of creep which would occur for an "elastic" strain (EL.2 - EL.1) for a period of time from  $t_0$  to  $(t_2 - t_1)$ . This added creep, CR.2' was shown in Figure 2(a). The total strain excluding shrinkage was shown in Figure 2(b).

#### COMPARISON OF PREDICTED AND TEST BEHAVIOUR

Three concrete frames have been tested. The preliminary frame, Frame R1, was subjected to short term loading to failure. Difficulties with the corners of the frames and the bases led to stiffening of the corners and redesign of the base for subsequent tests. The results of this test were difficult to interpret and were not included.

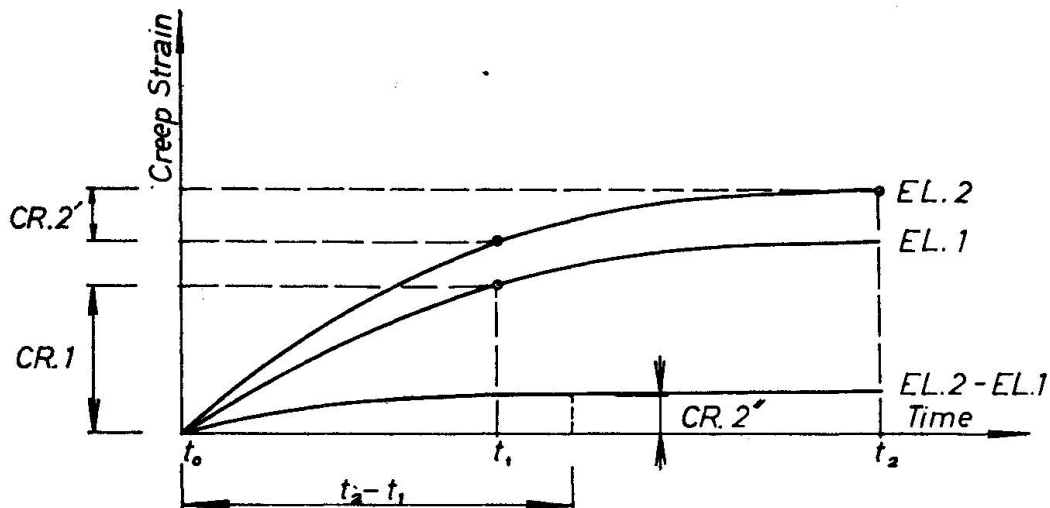


FIGURE 2(a) Creep Strain for Constant Stress.

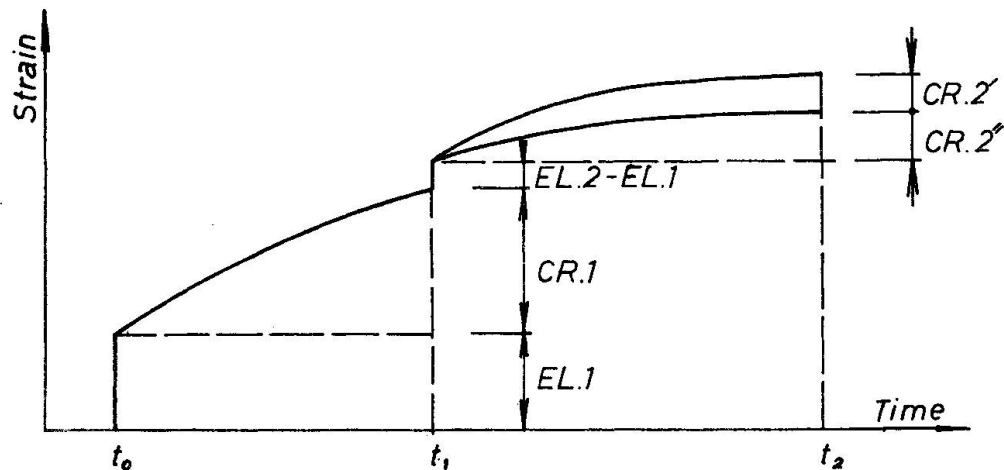


FIGURE 2(b) Total Strain Using Modified Superposition Method.

Short Term Test: Frame R2 was loaded proportionally to failure. Deflection and strain readings were taken at regular increments of load. Although it was not possible to determine accurately when the first plastic hinge had formed, an estimate was made on the basis of strain readings and observations of the opening up of cracks. It was decided that the first plastic hinge formed at the upper right hand corner at a proportional loading slightly higher than the predicted values of  $H = 4082$  kg.  $V = 8164$  kg. Formation of plastic hinges at the centre of the beam, the right base and then the left base resulted in an ultimate loading of  $H = 5220$  kg. and  $V = 10440$  kg. The concrete strength was  $316 \text{ kg/cm}^2$ .

Figure 3 contains the predicted and test deflections for Frame R2. Two sets of horizontal deflections were compared on each column and the vertical deflections were recorded at the mid span of the beam. The length of the lines representing the members of the frame were maintained to scale but the deformed shape of the frame was



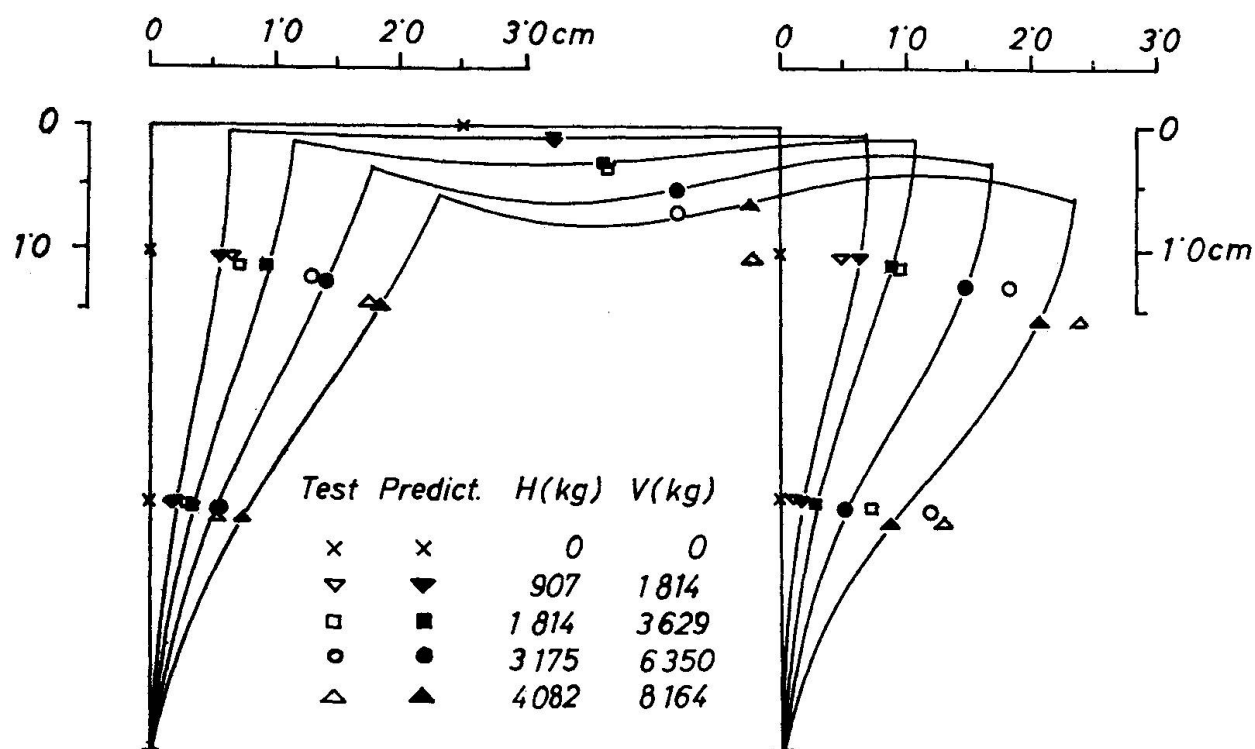


FIGURE 3 Predicted and Test Deflection for Frame R2.

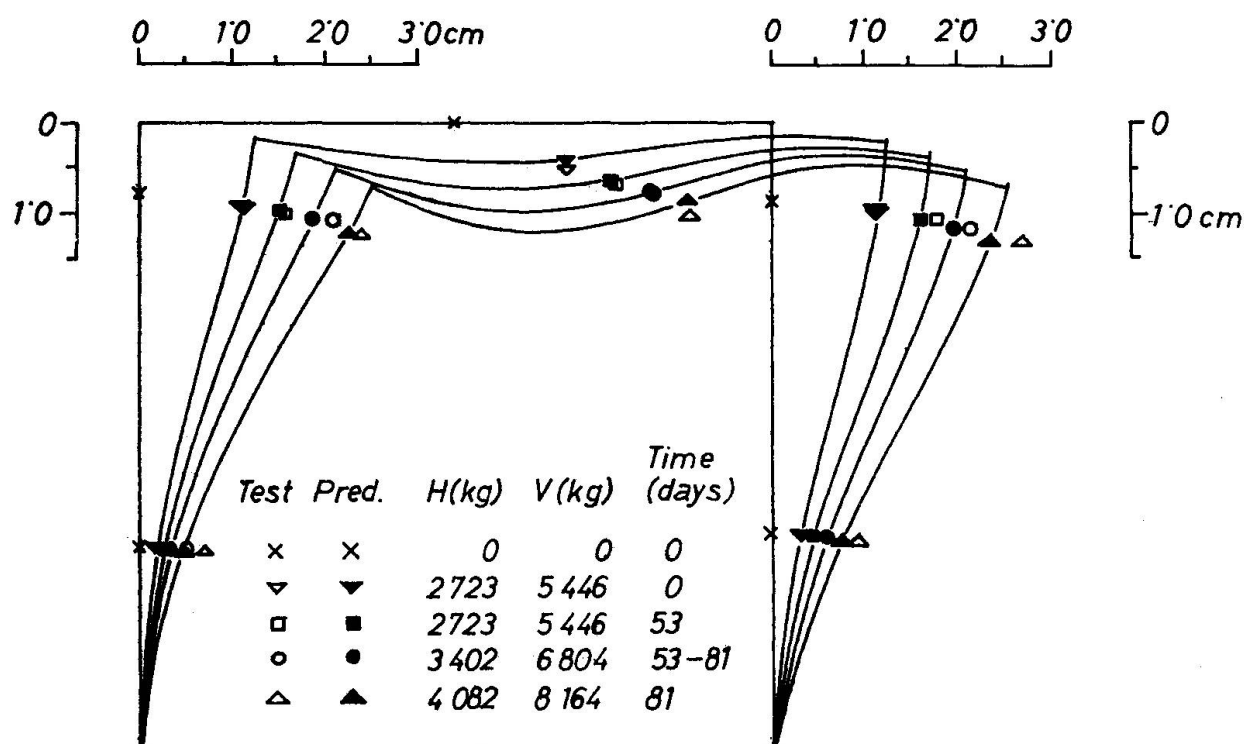
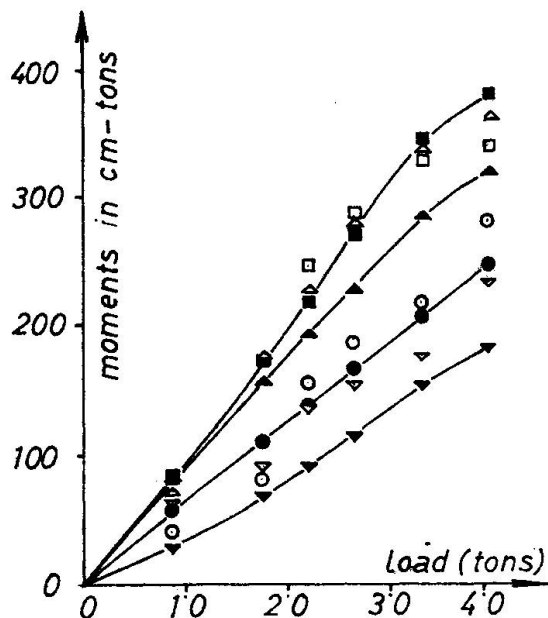


FIGURE 4 Predicted and Test Deflection for Frame L1.

distorted in order to more easily compare the results. The predicted deflected shape of the frame is quite close to the experimental values up to formation of the first plastic hinge.

FIGURE 5 Data from Strain Measurements and Predicted Values.

(a) Frame R2



(b) Frame L1

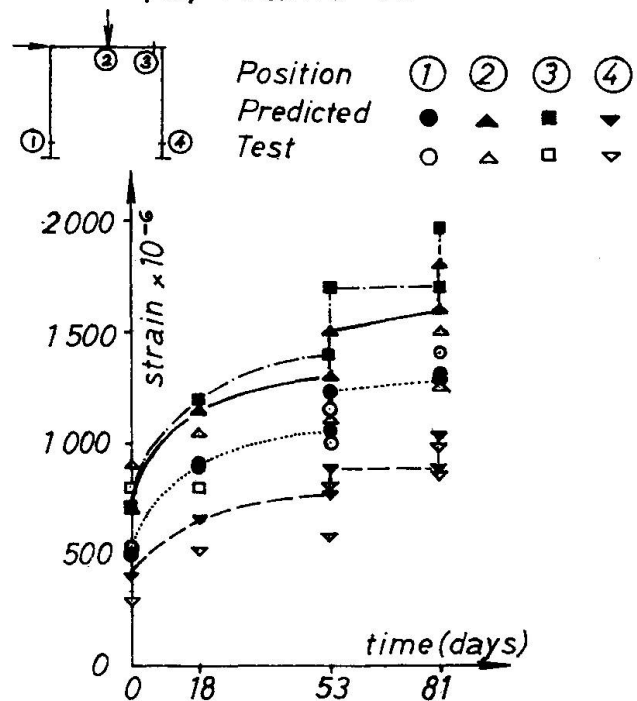


Figure 5(a) was plotted to illustrate the correlation between test and predicted bending moment calculations. The bending moments corresponding to test values were calculated from two sets of strains measured in the compression zone of the indicated regions of high bending moment. The calculated moments from experimental strains measurements were subject to fairly large errors and fluctuations because the effect of measurement errors was magnified by the fact that the compression zone was quite shallow. However the general trend of predicted and calculated bending moment were consistent and the discrepancies were acceptable when interpreted with regard to possible measurement error.

**Sustained Load Test:** Frame L1 was initially loaded to values of  $H = 2723$  kg. and  $V = 5446$  kg. At the time of loading and concrete strength was  $354 \text{ kg/cm}^2$ . The initial load was sustained for 53 days. In the early stages the deflections increased quite rapidly but were increasing very slowly at 53 days under load. At this stage the loads were increased 25% to  $H = 3402$  kg and  $V = 6804$  kg and sustained at this level for an additional 28 days at which time the frame was loaded proportionally to failure. At formation of the collapse mechanism the loads were  $H = 5710$  kg and  $V = 11420$  kg. Because of creep deformations it was extremely difficult to pin point the formation of the first plastic hinge. However a noticeable change in frame behaviour was evident at loads  $H = 4540$  kg and  $V = 9080$  kg. The first plastic hinge was predicted to occur at  $H = 4082$  kg and  $V = 8164$  kg. At the termination of testing the concrete strength was  $386 \text{ kg/cm}^2$ . During the final 28 days under load the deflections increased by only 6% to 13%.

Figure 4 contains the predicted and test deflections for Frame L1. These results were illustrated in the same way as was done in Figure 3. Very good correlations between predicted and tests results was found.

Figure 5(b) was plotted to provide a comparison of predicted and measured strains for Frame L1. Because of creep the measured strains could not be used to compute bending moment. The extreme compression fibre strains were compared for regions of high bending moment. The accuracy of the experimentally derived extreme fibre strains was influenced by the same factors as mentioned in the discussion of Figure 5(a). Although this comparison was not as reliable as the comparison of deflections the same trends were obvious.

For Frame L1 there was not any marked redistribution of bending moment due to creep. This result should be expected because the axial loads were not high enough to contribute significant secondary bending moment. Also the "elastic" strains were generally within the range of strain where creep is nearly directly proportional to "elastic" strain. The bending moment at the left base was predicted to decrease 9% during the first 53 days of sustained load and 4% during the following 28 days under the second level of sustained loading. The other high bending moments changed by only about 1%.

### CONCLUSION

The method of analysis has been evaluated by comparisons of the computed predicted behaviour with the test results. This comparison confirmed the validity of the frame analysis for short term loading and variable sustained loading followed by quick loading to failure. The procedures to predict failure under sustained load have been established. However lack of information about the creep of concrete at stresses near ultimate precluded the accurate predictions of behaviour as sustained stresses approach the ultimate strength of concrete. It was reasoned that in terms of assuring safety it is most important to be able to predict the remaining capacity after a period of sustained loading.

### SUMMARY

The analysis includes the effects of: the non linear time dependent stress versus strain for concrete, the degree of cracking as influenced by the level of load and bending moment, and creep, shrinkage and elastic deformations to predict the behaviour of an indeterminant frame. Comparisons with test data have verified the accuracy of the analysis.

### RESUME

Pour déterminer le comportement des cadres hyperstatiques, l'analyse comprend plusieurs influences:

- la relation non-linéaire (fonction du temps) entre les contraintes et les allongements,
- le degré de fissuration, influencé par la valeur de la charge et du moment, fléchissant,
- le fluage, le retrait et les déformations élastiques.

Des comparaisons avec les résultats d'essais ont confirmé l'exactitude des calculs.

### ZUSAMMENFASSUNG

Diese Untersuchung umfasst die Wirkung der nichtlinearen zeitabhängigen Spannung gegenüber der Dehnung des Betons, des Rissegrades infolge Lasthöhe und Biegemoment sowie des Kriechens, Schwindens und der elastischen Verformung, um das Verhalten eines unbestimmten Rahmens vorauszusagen. Vergleiche mit Prüfdaten haben die Genauigkeit der Berechnung bestätigt.

# Spannungsänderungen infolge Kriechen und Schwinden in beliebig bewehrten Spannbetonträgern bei statisch bestimmter und unbestimmter Auflagerung

Stress Redistribution as a Result of Creep and Shrinkage in Statically Determinate and Indeterminate Prestressed Concrete Girders with arbitrary Arrangements of Reinforcement

Changements de contraintes dûs au fluage et au retrait dans des poutres isostatiques ou hyperstatiques en béton précontraint

<b>H. TROST</b> Professor Dr.-Ing. Technische Universität Hannover Deutschland	<b>H.-J. WOLFF</b> Dipl.-Ing. Technische Universität Hannover Deutschland
---	--

## 1. Problemstellung und Übersicht

In Verbundquerschnitten aus Beton und Stahl ergeben sich durch die unterschiedlichen Verformungseigenschaften dieser Werkstoffe Spannungsänderungen gegenüber den anfänglichen Spannungen aus andauernden Lasten und Vorspannung. Diese sogenannten Spannungsänderungen infolge des Kriechens und Schwindens des Betons sind nach folgendem mechanischen Prinzip zu bestimmen: Beim Lösen des Verbundes würden sich die Kriech- und Schwindverformungen des Betons unbehindert einstellen, wobei die Betonspannungen bei konstanter Dauerbelastung unverändert bleiben. Die im Verbund liegenden Bewehrungsstäbe - und zwar sowohl die vorgespannten als auch die schlaffen Stahleinlagen - behindern jedoch die zeitabhängigen Verformungen des Betons, wodurch gleichzeitig Spannungsänderungen im Stahl und Beton hervorgerufen werden.

Aus den Verträglichkeitsbedingungen des Verbundquerschnittes ergeben sich im statisch bestimmten Grundzustand nur Umlagerungen der inneren Kräfte bei gleichbleibenden äußeren Schnittgrößen. Bei statisch unbestimmt gelagerten Trägern kann dieser Eigenspannungszustand die Kontinuitätsbedingungen des Tragwerks verletzen, wodurch dann zusätzliche Zwängschnittgrößen und damit Änderungen der Auflagerreaktionen hervorgerufen werden.

Die meisten der vorliegenden Arbeiten zu diesem Fragenkomplex benutzen als Ausgangspunkt die differentielle Form der linearen zeitabhängigen  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehung des Betons von Dischinger, die aber die physikalisch unzutreffende Gültigkeit der Idealkriechkurven von Withney voraussetzt (vgl. hierzu [9]). Während damit der sogenannte Spannkraftverlust beim einlagig bewehrten Träger einfach berechnet werden kann, werden die Lösungen der Differentialgleichungssysteme bei zwei- und mehrlagig bewehrten Querschnitten recht umfangreich (vgl. u.a. [1] bis [6]).

Unter Vermeidung dieser Mängel ermöglicht es das im folgenden erläuterte Verfahren, die tatsächlichen Bewehrungsverhältnisse in den vorhandenen Querschnitten zu berücksichtigen und die Auswirkungen verschiedener Grenzzannahmen für die maßgebenden Baustoffkennwerte (Kriech- und Schwindmaße, Elastizitätsmoduli) übersichtlich zu beurteilen.

## 2. Berechnungsgrundlagen

Die bei Aufbringen der Dauerlasten und Vorspannung in stabartigen Tragwerken vorhandenen Spannungen seien in üblicher Weise ermittelt, wobei entweder Vorspannung mit sofortigem Verbund oder Vorspannung mit nachträglichem Verbund vorliegen kann.

Im Bereich der Gebrauchsbeanspruchung wird zur beliebigen Zeit nach Belastung ein linearer Zusammenhang zwischen dem Spannungs- und Verzerrungszustand bei Stahl und Beton angenommen. Während für den Stahl (Index a für acier) das Hookesche Gesetz in der Form

$$(1) \quad \varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E_a}$$

mit  $E_a$  als Elastizitätsmodul des Stahls gültig ist, wird der zeitabhängige lineare Zusammenhang zwischen der Betonspannung  $\sigma_b(t)$  und der Betondehnung  $\varepsilon_b(t)$  in der in [9] erläuterten zweckmäßigen Form

$$(2) \quad \varepsilon_b(t) = \frac{\sigma_{b0}}{E_b} (1 + \varphi) + \frac{\sigma_b(t) - \sigma_{b0}}{E_b} (1 + \xi \varphi) + \varepsilon_s(t)$$

angenommen. In der Spannungs- Dehnungs- Beziehung (2) bedeuten:

$\sigma_{b0}$  Ausgangsspannung bei Eintritt der untersuchten Beanspruchung,

$E_b$  der als konstant angenommene Elastizitätsmodul des Betons,

$\varphi$  die Kriechzahl oder genauer die Kriechfunktion  $\varphi(t, t_0)$  zur Beschreibung von Verlauf und Größe der durch  $\sigma_{b0}$  hervorgerufenen Kriechdehnung, die in der Form  $\varphi(t, t_0) = k_0 \varphi_N f(t)$  mit  $k_0$  den Einfluß des Betonalters  $t_0$  bei der Belastung, mit dem Normkriechmaß  $\varphi_N = \frac{\varphi}{k_0}$  die Auswirkung der Bauwerksbedingungen und mit der Zeitfunktion  $0 < f(t) < 1$  den Verlauf der Kriechdehnung erfassen läßt [7],

$\sigma_b(t) - \sigma_{b0}$  die durch eine Dehnungsbedingung erzwungene zeitliche Änderung der Ausgangsspannung,

$\xi$  der Relaxationskennwert für die infolge der Betonalterung abgeminderte Kriechfähigkeit, auf die die erzwungene Spannungsänderung trifft,

$\varepsilon_s(t)$  die Schwinddehnung, die das Endschwindmaß  $\varepsilon_{s\infty}$  erreicht und üblicherweise affin zum Kriechverlauf angenommen werden kann.

Da bei Spannbetonträgern die Spannungsänderung praktisch zeitgleich mit dem Kriechen erfolgt, kann der Relaxationskennwert hier

mit  $\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{4k_0}$  unabhängig von  $\varphi_N$  angenommen werden. [9]

Weiterhin wird für die Ermittlung der Spannungsänderungen vorausgesetzt, daß ein voller Verbund zwischen Stahl und Beton besteht und das Ebenbleiben der Verbundquerschnitte gewährleistet ist.

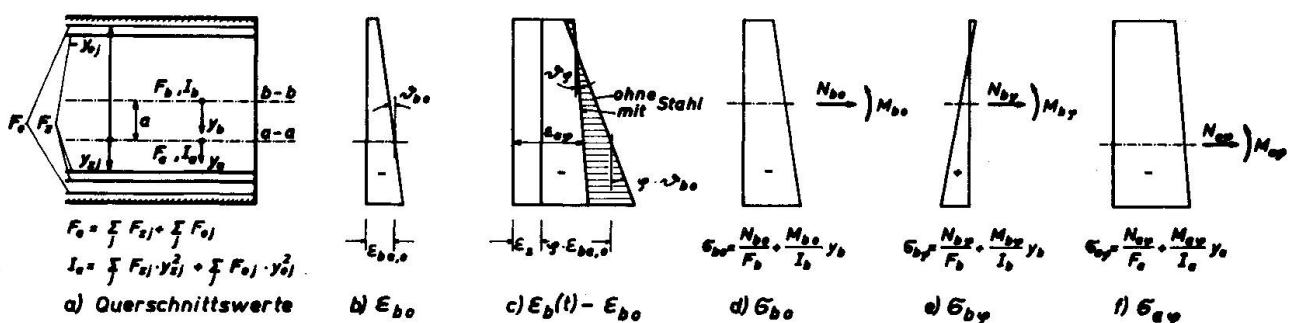


Fig.1 Verformungen und Spannungen im Querschnitt

### 3. Spannungsumlagerungen im beliebig bewehrten Querschnitt.

Alle Bewehrungslagen, d.h. die Spannbewehrung und die schlaffe Bewehrung, werden in der gemeinsamen Stahlachse a-a zusammengefaßt, so daß man die gesamte Stahlfläche  $F_a$  und das gemeinsame Stahlträgheitsmoment  $I_a$  erhält (Fig. 1a). Die Vorspannung kann in verschiedenen Lagen mit unterschiedlichen Spannkraften  $Z_i$  aufgebracht sein.

Zur Bestimmung der Spannungsänderungen wird zunächst der Verbund zwischen den Stahleinlagen und dem Beton nach Eintritt der elastischen Verformungen (Fig. 1b) gelöst. Dadurch könnten sich im Beton die Kriechverformungen  $\varphi \cdot \epsilon_{b0}$  und  $\varphi \cdot \eta_{b0}$  und die Schwindverformung  $\epsilon_s$  unbehindert einstellen (Fig. 1c). Die infolge der Verbundwirkung entstehenden Umlagerungsgrößen werden für den Beton bezeichnet mit  $M_{b\varphi}$  und  $N_{b\varphi}$  und für den Stahl mit  $M_{a\varphi}$  und  $N_{a\varphi}$ .

Die nachträglichen Formänderungen im Stahl ergeben sich dann

$$(3) \quad \epsilon_{a\varphi} = \frac{N_{a\varphi}}{E_a F_a} + \frac{M_{a\varphi}}{E_a I_a} y_a .$$

Entsprechend läßt sich die zeitabhängige Betondehnung in der Faser  $y_b$  nach der  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehung (2) angeben

$$(4) \quad \epsilon_{b\varphi} = \epsilon_{b0} \cdot \varphi + \left( \frac{N_{b\varphi}}{E_b F_b} + \frac{M_{b\varphi}}{E_b I_b} y_b \right) \cdot (1 + \rho \varphi) + \epsilon_s .$$

Die Stahleinlagen befinden sich mit dem Beton in Verbund, so daß für den gesamten Querschnitt die Verträglichkeitsbedingungen gelten

$$(5) \quad \epsilon_{a\varphi} = \epsilon_{b\varphi} \quad \text{und}$$

$$(6) \quad \eta_{a\varphi} = \eta_{b\varphi} .$$

So läßt sich z.B. für die Faser a-a in Höhe der Schwerlinie der Stahleinlagen die Dehnungsbedingung angeben mit

$$(7) \quad \frac{N_{a\varphi}}{E_a F_a} = \frac{\sigma_{ba,0}}{E_b} \cdot \varphi + \left( \frac{N_{b\varphi}}{E_b F_b} + \frac{M_{b\varphi}}{E_b I_b} a \right) (1 + \rho \varphi) + \epsilon_s ,$$

wenn

$$(8) \quad \sigma_{ba,0} = \frac{N_{b0}}{F_b} + \frac{M_{b0}}{I_b} a ,$$

die Betonspannung in Höhe der Stahlschwerlinie infolge äußerer Dauerlast und infolge Vorspannung bedeutet (Fig. 1d).

Es sei vermerkt, daß in  $\sigma_{ba,0}$  sowohl die Vorspannung mit sofortigem Verbund (Spannbettvorspannung) als auch Vorspannung mit nachträglichem Verbund berücksichtigt werden kann. Der Unterschied besteht nur in der Art der Berechnung von  $\sigma_{ba,0}$ , auf die hier nicht eingegangen werden soll.

Als weitere Bedingung soll die Verträglichkeit der Verdrehungen nach (6) dargestellt werden mit

$$(9) \quad \frac{M_{a\varphi}}{E_a I_a} = \frac{M_{b0}}{E_b I_b} \cdot \varphi + \frac{M_{b\varphi}}{E_b I_b} (1 + \rho \varphi) .$$

Da die Umlagerungsgrößen einen Eigenspannungszustand bilden, gelten die Gleichgewichtsbedingungen

$$(10) \quad \begin{aligned} N_{b\varphi} &= -N_{a\varphi} \\ M_{b\varphi} &= -N_{a\varphi} \cdot a - M_{a\varphi} . \end{aligned}$$



Mit den Gleichungen (7), (9) und (10) läßt sich jetzt das Gleichungssystem zur Bestimmung der zeitabhängigen Schnittgrößen angeben zu

$$(11) \quad N_{a\varphi} \left[ \frac{1}{E_a F_a} + \left( \frac{1}{E_b F_b} + \frac{a^2}{E_b y_b^2} \right) (1 + \varphi) \right] + M_{a\varphi} \frac{a}{E_b y_b} (1 + \varphi) = \frac{\bar{\sigma}_{ba,0}}{E_b} \cdot \varphi + \varepsilon_s$$

$$N_{a\varphi} \frac{a}{E_b y_b} (1 + \varphi) + M_{a\varphi} \left[ \frac{1}{E_a y_a} + \frac{1}{E_b y_b} (1 + \varphi) \right] = \frac{M_{b0}}{E_b y_b} \cdot \varphi.$$

Wird mit  $n = E_a : E_b$  zur Abkürzung der dimensionslose Umlagerungswert

$$(12) \quad \frac{1}{\lambda} = 1 + \frac{n F_a}{F_b} \left( 1 + \frac{F_b a^2}{y_b^2} \right) (1 + \varphi) + \frac{n y_a}{y_b} (1 + \varphi) \left( 1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \varphi) \right)$$

eingeführt, der durch die Querschnittsverhältnisse und die Stahlanordnung festgelegt ist, so bildet dieser charakteristische Wert  $\lambda$  eine Maßzahl für die Verformung des Verbundquerschnittes im Vergleich zur unbehinderten Betonverformung. Wenn die kriecherzeugende Spannung  $\sigma_{ba,0}$  durch die Teilschnittgrößen entsprechend (8) ausgedrückt wird, so erhält man durch Auflösung des Gleichungssystems (11) die Umlagerungsgrößen des Eigenspannungszustandes unter Beachtung der Gleichgewichtsbedingungen (10)

$$(13) \quad N_{a\varphi} = -N_{b\varphi} = \lambda \cdot F_a \left[ (E_a \varepsilon_s + n \varphi \frac{N_{b0}}{F_b}) \left( 1 + \frac{n y_a}{y_b} (1 + \varphi) \right) + n \varphi \frac{M_{b0}}{y_b} a \right]$$

$$(14) \quad M_{a\varphi} = \lambda \cdot \frac{n y_a}{y_b} \left[ - (E_a \varepsilon_s + n \varphi \frac{N_{b0}}{F_b}) F_a a (1 + \varphi) + \varphi M_{b0} \left( 1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \varphi) \right) \right]$$

$$(15) \quad M_{b\varphi} = \lambda \cdot F_a a \left[ - (E_a \varepsilon_s + n \varphi \frac{N_{b0}}{F_b}) - n \varphi \frac{M_{b0}}{y_b} a \left( 1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \varphi) \right) \right].$$

Aus diesen geschlossenen Lösungen läßt sich der Einfluß von Momentenbeanspruchung, Normalkraftbeanspruchung und Schwinden auf die Größe der Kräfteumlagerungen unmittelbar ablesen. Die Spannungsänderungen im Beton und im Stahl ergeben sich entsprechend Fig. 1e und 1f.

Für den Sonderfall der einlagigen Bewehrung, die im Abstand  $a = y_b$  von der Betonschwerlinie liegt, ergibt sich aus Gleichung (13) unmittelbar die Lösung mit  $I_a = 0$  zu (siehe [9])

$$(16) \quad N_{a\varphi} = \frac{1}{1 + \frac{n F_a}{F_b} \left( 1 + \frac{F_b a^2}{y_b^2} \right) (1 + \varphi)} \cdot F_a \left[ E_a \varepsilon_s + n \varphi \left( \frac{N_{b0}}{F_b} + \frac{M_{b0}}{y_b} a \right) \right].$$

Für diesen einlagig bewehrten Träger ist in Fig. 2 die Stahlspannungsänderung, die durch den Umlagerungskennwert  $\lambda$  gekennzeichnet ist, als Verhältnis der Stahldehnung zur unbehinderten Betondehnung in der Stahlschwerlinie aufgetragen.

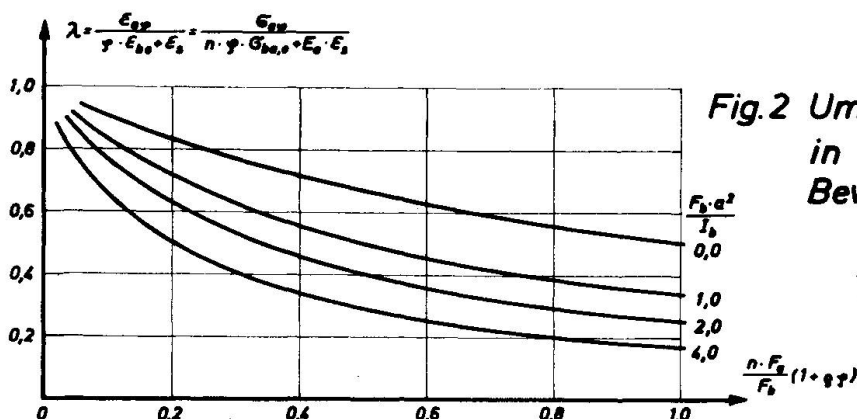


Fig. 2 Umlagerungskennwert  $\lambda$  in Abhängigkeit von der Bewehrungsanordnung ( $I_a = 0$ )

$$\frac{1}{\lambda} = 1 + \frac{n F_a}{F_b} \left( 1 + \frac{F_b a^2}{I_b} \right) (1 + \varphi)$$

Für den Fall der zweilagigen Bewehrung läßt sich die Größe der Spannungumlagerung für die beiden Stränge unmittelbar aus (13) und (14) errechnen. Man könnte auch statt der beiden Verträglichkeitsbedingungen (7) und (9) von der Gleichheit der Dehnungen in Höhe der beiden Stahlstränge ausgehen. Dies führt zu dem Gleichungssystem für die beiden Umlagerungskräfte

$$(17) \quad \frac{z_{\varphi 1}}{F_{z1}} [1 + \bar{\alpha}_{11} (1 + \varphi)] + \frac{z_{\varphi 2}}{F_{z2}} \bar{\alpha}_{12} (1 + \varphi) = n \varphi \bar{\sigma}_{b1,0} + E_s \varepsilon_s$$

$$\frac{z_{\varphi 1}}{F_{z1}} \bar{\alpha}_{21} (1 + \varphi) + \frac{z_{\varphi 2}}{F_{z2}} [1 + \bar{\alpha}_{22} (1 + \varphi)] = n \varphi \bar{\sigma}_{b2,0} + E_s \varepsilon_s$$

mit den Steifigkeitswerten des Betonquerschnittes

$$\bar{\alpha}_{11} = \frac{n F_{z1}}{F_b} \left( 1 + \frac{F_b y_{b1}^2}{J_b} \right) \quad \bar{\alpha}_{12} = \frac{n F_{z2}}{F_b} \left( 1 + \frac{F_b y_{b1} y_{b2}}{J_b} \right)$$

$$\bar{\alpha}_{21} = \frac{n F_{z1}}{F_b} \left( 1 + \frac{F_b y_{b1} y_{b2}}{J_b} \right) \quad \bar{\alpha}_{22} = \frac{n F_{z2}}{F_b} \left( 1 + \frac{F_b y_{b2}^2}{J_b} \right)$$

Werden aus (17) die Stahlspannungsänderungen  $\sigma_{z1,\varphi}$  und  $\sigma_{z2,\varphi}$  errechnet, erhält man das in [10] dargestellte Ergebnis.

#### 4. Spannungsänderungen am statisch unbestimmten Träger

Zweckmäßig bestimmt man bei statisch unbestimmten Trägern zunächst die Umlagerungen des statisch bestimmten Grundzustandes (im folgenden Kopfzeiger  $^0$ ) mit den kriecherzeugenden Spannungen oder Schnittgrößen des unbestimmten Systems nach den Gleichungen (11) bis (15). Wenn man sich mit der Bestimmung dieses inneren Eigenspannungszustandes begnügt, vernachlässigt man eine eventuelle Änderung der Auflagerkräfte, die durch die Verletzung der Kontinuitätsbedingungen entstehen kann.

Im folgenden soll jedoch ein Verfahren zur Ermittlung der Zwängschnittgrößen infolge Kriechen und Schwinden angegeben werden.

Dazu bestimmt man die eintretenden Umlagerungsgrößen als Summe des am statisch bestimmten Grundsystem ermittelten Anteiles und des Anteiles aus der Zwängung. Die aus den Gleichungen (11) bis (15) mit den Schnittgrößen des unbestimmten Systems ermittelten Umlagerungsgrößen am statisch bestimmten Grundsystem  $M_{b\varphi}^0$ ,  $N_{b\varphi}^0$  und  $M_{a\varphi}^0$ ,  $N_{a\varphi}^0$  bilden nach Gleichung (10) einen inneren Eigenspannungszustand (Fig. 3b). Wenn dieser Zustand jetzt mit den Verformungsbedingungen des Gesamtsystems unverträglich ist, stellen die zusätzlichen Zwänggrößen (Kopfzeiger  $'$ )  $N_{\varphi}'$  und  $M_{\varphi}'$  als äußere Schnittgrößen die Verträglichkeit her. Die anteiligen Schnittkräfte dieser Zwänggrößen werden bezeichnet mit  $N_{b\varphi}'$ ,  $M_{b\varphi}'$  und  $N_{a\varphi}'$ ,  $M_{a\varphi}'$ . Damit ergeben sich die anteiligen Umlagerungsgrößen für den Beton und den Stahl zu

$$(18) \quad M_{b\varphi} = M_{b\varphi}^0 + M_{b\varphi}' \quad N_{b\varphi} = N_{b\varphi}^0 + N_{b\varphi}'$$

$$M_{a\varphi} = M_{a\varphi}^0 + M_{a\varphi}' \quad N_{a\varphi} = N_{a\varphi}^0 + N_{a\varphi}'$$

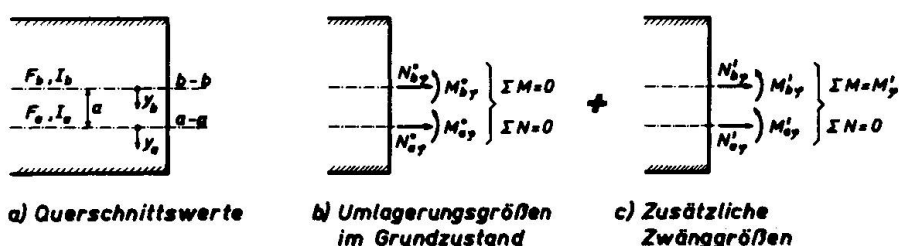


Fig. 3 Umlagerungsgrößen beim Durchlaufträger



Für die Zwängschnittgrößen erhält man aus den Verträglichkeitsbedingungen (7) und (9) nach Abzug des Grundzustandes

$$(19) \quad \frac{N_{a\varphi}}{E_a F_a} = \left( \frac{N_{b\varphi}}{E_b F_b} + \frac{M_{b\varphi}}{E_b J_b} a \right) (1 + \varphi)$$

$$\frac{M_{a\varphi}}{E_a J_a} = \frac{M_{b\varphi}}{E_b J_b} (1 + \varphi) .$$

Um den Zusammenhang zwischen den anteiligen Zwängschnittgrößen und der Gesamtzwängung herzustellen, benötigt man weiterhin die Gleichgewichtsbedingungen (vgl. Fig. 3c)

$$(20) \quad N_{\varphi}' = N_{b\varphi}' + N_{a\varphi}'$$

$$M_{\varphi}' = M_{b\varphi}' + M_{a\varphi}' + N_{a\varphi}' \cdot a ,$$

wobei für ein in Normalkraftrichtung zwängungsfrei gelagertes Tragsystem  $N_{\varphi}' = 0$  ist, was für die weiteren Ableitungen angenommen werden soll.

Mit (20) erhält man aus (19) das Gleichungssystem

$$(21) \quad N_{a\varphi}' \left[ \frac{1}{E_a F_a} + \left( \frac{1}{E_b F_b} + \frac{a^2}{E_b J_b} \right) (1 + \varphi) \right] + M_{a\varphi}' \frac{a}{E_b J_b} (1 + \varphi) = \frac{M_{\varphi}'}{E_b J_b} a (1 + \varphi)$$

$$N_{a\varphi}' \frac{a}{E_b J_b} (1 + \varphi) + M_{a\varphi}' \left[ \frac{1}{E_a J_a} + \frac{1}{E_b J_b} (1 + \varphi) \right] = \frac{M_{\varphi}'}{E_b J_b} (1 + \varphi) ,$$

das in den Koeffizienten genau dem System (11) für die Umlagerungsgrößen am statisch bestimmten Grundsystem entspricht. Nach einem Vergleich der rechten Seiten von (21) und (11) ergibt sich der Zusammenhang zwischen den anteiligen Zwängschnittgrößen des Stahles und der Gesamtzwängung  $M_{\varphi}'$  entsprechend (13) und (14) zu

$$(22) \quad N_{a\varphi}' = -N_{b\varphi}' = M_{\varphi}' \cdot \lambda \cdot n F_a \frac{a}{J_b} (1 + \varphi)$$

$$M_{a\varphi}' = M_{\varphi}' \cdot \lambda \cdot \frac{n J_a}{J_b} (1 + \varphi) \left( 1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \varphi) \right) .$$

$M_{b\varphi}'$  erhält man jetzt nicht entsprechend Gleichung (15), sondern mit der maßgebenden Gleichgewichtsbedingung (20) zu

$$(23) \quad M_{b\varphi}' = M_{\varphi}' \cdot \lambda \cdot \left( 1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \varphi) \right) .$$

Man ermittelt die noch unbekannte Zwänggröße  $M_{\varphi}'$  aus den Kontinuitätsbedingungen des zusammenhängenden Tragwerks. Die folgenden Überlegungen werden an einem einfach unbestimmten System erläutert, sie gelten jedoch allgemein.

Da aus dem auf das statisch bestimmte Hauptsystem einwirkenden Eigenspannungszustand keine äußere Schnittgröße resultiert, kann die Gesamtverdrehung des Querschnittes nur über die Betonverdrehung bestimmt werden, die gleich der Verdrehung des Gesamtquerschnittes sein muß. An der Wirkungsstelle der statisch Überzähligen  $X_{1\varphi}'$  erhält man dann die Verdrehung im Grundzustand infolge des Eigenspannungszustandes der Spannungumlagerungen mit

$$(24) \quad \delta_{1\varphi} = \delta_{1b,\varphi} = \int \frac{M_{b\varphi}}{E_b J_b} (1 + \varphi) M_1 dx .$$

Die zeitabhängige Verdrehung infolge der Überzähligen  $X_{1\varphi}' = "1"$  ergibt sich aus entsprechenden Überlegungen mit (23) zu

$$(25) \quad \delta_{11,\varphi} = \int \frac{M_{b\varphi}("1")}{E_b J_b} M_1 (1 + \varphi) dx = \int \lambda \cdot \left( 1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \varphi) \right) \frac{M_1 M_1 (1 + \varphi)}{E_b J_b} dx ,$$

Die zeitabhängige Überzählige  $X_{1\psi}$  folgt aus der bekannten Verträglichkeitsbedingung

$$(26) \quad X'_{1\psi} = - \frac{\mathcal{S}_{1\psi}}{\mathcal{S}_{11,\psi}}.$$

Da der Zahlenwert dieser Zwänggröße für Beanspruchungen aus Biegung und in Normalkraftrichtung sehr verschieden sein kann, sollen beide Einflüsse getrennt verfolgt werden.

Für die Momenteneinwirkung  $M_{b0}$  am statisch unbestimmten System läßt sich die Verdrehung  $\delta_{1\psi}$  nach (24) mit dem Wert für  $M_{b\psi}$  aus (15) angeben mit

$$(27) \quad \mathcal{S}_{1\psi} = - \int \lambda \frac{F_a a^2}{\eta_b} n \psi \left[ 1 + \frac{\eta_a}{F_a a^2} \left( 1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \varphi) \right) \right] \frac{M_{b0} M_1 (1 + \varphi) dx}{E_b \eta_b}.$$

Bei gleichbleibenden Bewehrungsverhältnissen und geraden Spanngliedern kann man (27) zusammenfassen zu

$$(28) \quad \mathcal{S}_{1\psi} = -K \cdot \int \frac{M_{b0} M_1}{E_b \eta_b} dx,$$

worin K eine Konstante darstellt. Nach dem Reduktionssatz ist  $\delta_{1\psi}$  in diesem Fall Null, da der Momentenzustand  $M_{b0}$  bereits mit dem Gesamtsystem verträglich ist. Auch für veränderliche Stahlschwerlinie, d.h.  $a = a(x)$ , ist der Einfluß auf die Integration in (27) für Spannbetonquerschnitte so gering, daß mit guter Näherung  $\delta_{1\psi} = 0$  gesetzt werden kann. Das bedeutet, daß für Momentenbeanspruchung aus Dauerlast und Vorspannung praktisch keine Zwängung und damit keine Auflagerreaktionen infolge Kriechen entstehen.

Für die Beanspruchung aus mittiger Normalkraft auf den Betonquerschnitt und Schwinden ergibt sich mit (15) für  $\delta_{1\psi}$

$$(29) \quad \mathcal{S}_{1\psi} = - \int \lambda F_a a \left[ E_a \varepsilon_s + n \psi \frac{N_{b0}}{F_b} \right] \frac{M_1}{E_b \eta_b} (1 + \varphi) dx.$$

Für gleichbleibenden Bewehrungsgehalt und konstante Normalkraft kann für die Zwänggröße  $X_{1\psi}$  der Ausdruck

$$(30) \quad X'_{1\psi} = \frac{F_a}{1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \varphi)} \left[ E_a \varepsilon_s + n \psi \frac{N_{b0}}{F_b} \right] \cdot \frac{\int \lambda a \frac{M_1}{E_b \eta_b} dx}{\int \lambda \frac{M_1 M_1}{E_b \eta_b} dx}$$

angegeben werden.

Um den Quotienten der Integrale in (30) weiter zu verfolgen, werden zwei Vereinfachungen getroffen. Als erstes wird für die Ausführung der Integrationen angenommen, daß der Ausdruck  $\lambda$  konstant für  $x$  ist, so daß er vor die Integrale gezogen und gekürzt werden kann. Dies gilt streng für konstantes  $a$ , bei veränderlichem  $a$  zeigen Vergleichsrechnungen, daß diese Vereinfachung für übliche Spannbetonquerschnitte berechtigt ist. Als weitere Vereinfachung wird angenommen, daß  $a$  in (30) dem Abstand der resultierenden Spannstahlschwerlinie von der Betonschwerlinie entsprechen soll. Wird jetzt berücksichtigt, daß sich das Zwängmoment infolge Vorspannung aus

$$(31) \quad X'_v = - \frac{\int a N_{b,v} \frac{M_1}{E_b \eta_b} dx}{\int \frac{M_1 M_1}{E_b \eta_b} dx}$$

ergibt, läßt sich (30) umformen in

$$(32) \quad X'_{\psi} = - X'_v \frac{F_a}{N_{b,v}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \varphi)} \left( E_a \varepsilon_s + n \psi \frac{N_{b0}}{F_b} \right),$$

wenn  $N_{b,v}$  als konstant über die Länge angenommen wird.

Für den beliebig statisch unbestimmt gelagerten Träger läßt sich die Zwängung infolge Kriechen und Schwinden angeben

$$(33) \quad M'_{\varphi} = -M'_v \frac{F_a}{N_{b,v}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{n F_a}{F_b} (1 + \varphi)} \left( E_a \varepsilon_s + n \varphi \frac{N_{b0}}{F_b} \right).$$

Der Verlauf von  $M'_{\varphi}$  über die Trägerlänge ist entsprechend dem Verlauf von  $M'_v$  geradlinig. Die anteiligen Zwängschnittgrößen können dann aus den Gleichungen (22) und (23) bestimmt werden. So ergibt sich z.B. für die anteilige Betonzwängung

$$(34) \quad M'_{b\varphi} = -\frac{M'_v}{N_{b,v}} \cdot \lambda \cdot F_a \left( E_a \varepsilon_s + n \varphi \frac{N_{b0}}{F_b} \right).$$

Es ist unmittelbar zu erkennen, daß der Verlauf von  $M'_{b\varphi}$  bei veränderlicher Spanngliedlage mit der Änderung von  $\lambda$  nicht mehr geradlinig ist. Das Ergebnis (34) ermöglicht bei einem Vergleich mit  $M_{b\varphi}^0$  aus Gleichung (15) für Normalbeanspruchung und Schwinden die folgende Aussage:

$$(35) \quad M'_{b\varphi} = -\frac{e'}{a} M_{b\varphi}^0 \quad \text{mit} \quad e' = \frac{M'_v}{N_{b,v}}.$$

Dabei stellt  $e'$  bekanntlich bei unbestimmten Systemen den Abstand zwischen der Wirkungslinie der Vorspannkraft auf den Betonquerschnitt und der Stahlschwerlinie oder kurz den Abstand der Betondrucklinie von der Stahlzuglinie dar.

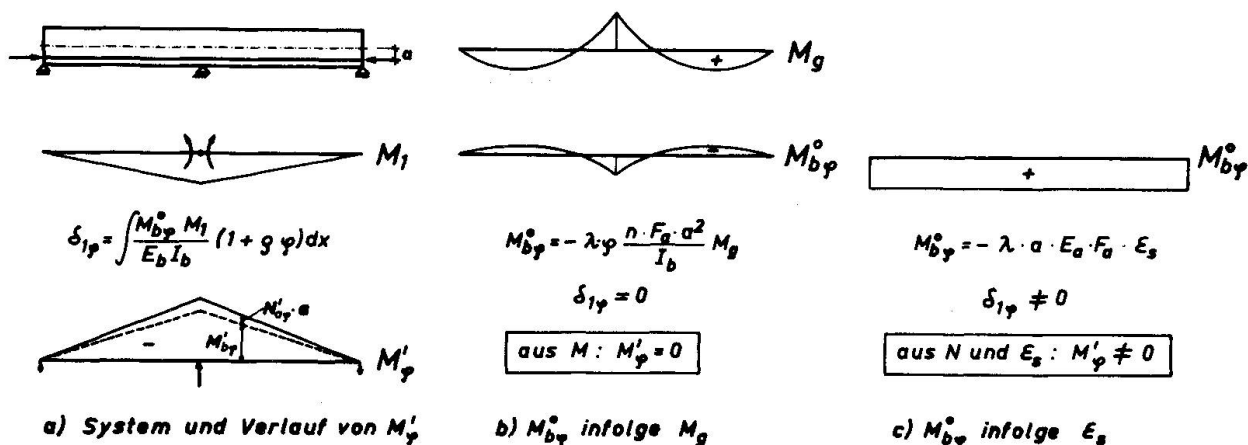
Das Ergebnis (33) für die Zwängung aus Normalkraftbeanspruchung und Schwinden und die Aussage, daß  $M'_{\varphi}$  für Biegebeanspruchung zu Null wird, läßt sich anschaulich an Fig. 4 erläutern. Für das Beispiel eines einfach unbestimmten Trägers mit einem geraden Spannglied ist in Fig. 4a das System und der Verlauf von  $M'_v$  aufgetragen worden. Aufgrund der Gleichgewichtsaussage (20) läßt sich der dargestellte Zusammenhang zwischen der Gesamtwängung  $M'_{\varphi}$  und den anteiligen Zwängungen  $M'_{b\varphi}$  und  $N'_{a\varphi}$  unmittelbar ablesen. In Fig. 4b ist als Beispiel einer Momentenbeanspruchung die Momentenlinie  $M_g$  für das Eigengewicht gezeigt worden. Gleichung (15) ergibt mit  $I_a = 0$  und konstantem Umlagerungskennwert  $\lambda$  den Verlauf von  $M_{b\varphi}^0$ , der affin zu  $M_g$  ist. Da  $M_g$  als Momentenzustand am Gesamtsystem mit diesem auch verträglich ist, ist sofort zu erkennen, daß auch  $M_{b\varphi}^0$  keine zusätzlichen Zwänggrößen und damit keine Auflagerkräfte erzeugt. Das entsprechende Ergebnis erhält man für das Moment aus Vorspannung, so daß also  $M'_{\varphi}$  für Momentenbeanspruchung an dem betrachteten Träger Null wird.

In Fig. 4c ist als Beispiel einer Beanspruchung in Längsrichtung das Schwinden des Betons betrachtet worden. Wieder aus Gleichung (15) ergibt sich, daß  $M_{b\varphi}^0$  infolge Schwinden den dargestellten Wert und Verlauf annimmt. Es ist unmittelbar zu erkennen, daß diese Momentenfläche am Grundsystem unverträglich mit dem Gesamtsystem ist. Für die Beanspruchung infolge der mittigen Normalkraft auf den Beton aus Vorspannung ergibt sich eine entsprechende Aussage. Die Größe der Zwängung wird nach Gleichung (33) bestimmt.

Durchgeführte Vergleichsrechnungen für die zusätzlichen Zwänggrößen zeigen, daß auch bei üblichen Spannbetonträgern mit geschwungener Spanngliedführung obige Aussagen qualitativ gültig bleiben. Da die Momente aus ständiger Last und Vorspannung praktisch immer entgegengesetzt wirken, können die nur bei veränderlicher Spanngliedführung entstehenden geringen Zwänggrößen aus Momentenbeanspruchung in jedem Fall vernachlässigt werden.

Die Ergebnisse des Abschnittes 4 seien wie folgt zusammengefaßt:

Die Berechnung der Zwängung wird getrennt durchgeführt für Beanspruchung durch Biegung und durch mittige Normalkraft auf den Beton; die Wirkung der Vorspannung ist aufzuteilen in  $M_{b,v}$  und  $N_{b,v}$ .

Fig.4 Zwängung  $M'_{\varphi}$  am Durchlaufträger

Aus Biegebeanspruchung treten bei den üblichen Durchlaufträgern keine zusätzlichen Zwänggrößen aus Kriechen auf; deshalb ist es also unzutreffend, die Änderung der Auflagerkräfte mit dem sogenannten Spannkraftverlust zu berechnen.

Aus Normalkraftbeanspruchung und Schwinden erhält man dagegen bei ausmittiger Anordnung der Bewehrung zusätzliche Zwänggrößen, auch wenn die Durchlaufträger in Längsrichtung zwängungsfrei gelagert sind. Man kann diese zusätzliche Zwängung infolge der behinderten Verdrehung innerhalb des Querschnitts, die bei ausmittiger Bewehrung und mittlerer Normalbeanspruchung entsteht, als Bruchteil der Gesamtzwängung aus Vorspannung angeben. Dieser Bruchteil wird beeinflusst von dem Bewehrungsgehalt des Querschnitts, der Größe der einwirkenden Normalkraft und dem Schwindmaß. Da die Ausmittigkeit der Bewehrung denselben Einfluß auf die zusätzliche Zwängung wie auf die Zwängung aus Vorspannung hat, treten bei konkordanter Spanngliedführung keine Änderung der Auflagerkräfte auf.

Diese Ergebnisse lassen sich auch mechanisch ausdeuten:

Für Momentenbeanspruchung fällt die Drucklinie der Umlagerungsgrößen des Betons mit der Stahlzuglinie zusammen.

Für Normalkraftbeanspruchung und Schwinden ist die Drucklinie der Umlagerungsgrößen des Betons identisch mit der Drucklinie der Vorspannung. Deshalb sind diese Zwänggrößen unmittelbar proportional der Zwängung aus Vorspannung.

Für die Berechnung der Umlagerungsgrößen von Stahlverbundträgern mit großem Stahlträgheitsmoment sei auf [8] verwiesen.

Literaturverzeichnis:

- [1] Knittel: Der Einfluß des Kriechens und Schwindens auf den Spannungszustand in Tragwerken aus vorgespanntem Beton. Der Bauingenieur 29 (1954) H. 1
- [2] Habel: Berechnung von Querschnitten mit mehrlagiger Spannbewehrung nach dem Verfahren von Busemann Beton- und Stahlbetonbau 49 (1954) H. 2
- [3] Sattler: Theorie der Verbundkonstruktionen. 2. Aufl. Berlin 1959
- [4] Wippel: Berechnung von Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton. Berlin 1962
- [5] Mehmel: Vorgespannter Beton. 2. Aufl. Berlin 1963

- [6] Hampe: Vorgespannte Konstruktionen. Berlin 1964
- [7] C.E.B.- Empfehlungen zur Berechnung und Ausführung von Spannbetonbauwerken. 1966
- [8] Trost: Zur Berechnung von Stahlverbundträgern im Gebrauchszustand auf Grund neuerer Erkenntnisse des viskoelastischen Verhaltens des Betons. Der Stahlbau 37 (1968) H. 11
- [9] Trost: Folgerungen aus Theorien und Versuchen für die baupraktische Untersuchung von Kriech- und Relaxationsproblemen in Spannbetontragwerken. Vorbericht Symposium 1970 IVBH
- [10] Dilger/Neville: Verification and Application of a New Method of Creep Analysis to Structural Members. Vorbericht Symposium 1970 IVBH

## ZUSAMMENFASSUNG

Mit der linearen zeitabhängigen  $\sigma$ - $\epsilon$ - Beziehung des Betons aus (9) werden die Umlagerungsgrößen und damit die Spannungsänderungen infolge Kriechen und Schwinden für beliebig bewehrte Spannbetonquerschnitte explizit angegeben. Bei statisch unbestimmten Spannbetonträgern können zusätzliche Zwängungen nur aus Normalkraft und Schwinden entstehen, während sie aus Biegung vernachlässigbar sind. Mit der kurzen Formel (33) sind die zeitabhängigen Änderungen der Auflagerkräfte und Schnittgrößen zu bestimmen.

## SUMMARY

The linear, time-dependent  $\sigma$ - $\epsilon$  relation for concrete presented in Ref. 9 is used to determine the redistribution of internal actions and stresses as a result of creep and shrinkage in prestressed concrete sections with an arbitrary arrangement of reinforcement. Additional restraint forces in statically indeterminate prestressed concrete girders can only be produced by axial forces and shrinkage; those produced by bending action are negligible. Equation 33 allows the time-varying support forces and the internal actions to be determined.

## RESUME

A l'aide de la relation  $\sigma$ - $\epsilon$  linéaire du béton, en fonction du temps, voir (9), on calcule explicitement les efforts de redistribution et les changements de contraintes dus au fluage et au retrait pour des sections de béton précontraint. Dans les poutres hyperstatiques en béton précontraint, des efforts supplémentaires ne peuvent être provoqués que par un effort normal ou par le retrait, tandis que ceux venant de la flexion sont négligeables. On détermine aisément les variations dans le temps des réactions d'appuis et des efforts à l'aide de la formule (33).

### III

#### **A Computer Approach to the Analysis of a Free Cantilever Prestressed Concrete Bridge**

Calcul électronique d'un pont en béton précontraint avec un cantilever sans support

Ein Computerverfahren zur Berechnung von vorgespannten Freivorbaubrücken

**G. DAVIES**

Ph.D., M.I.C.E., C.Eng.  
Lecturer in Civil Engineering  
University of Nottingham  
Great Britain

#### **1. INTRODUCTION**

The construction of large pre-stressed concrete bridges built by the free cantilever technique is normally carried out in a series of repetitive operations. The travelling carriages move the shutters forward at each end of the cantilever, the formwork positioned, and the concrete poured. As soon as the concrete has gained sufficient strength these units are pre-stressed, the cycle completed, and the carriages moved forward again. This cycle is repeated for most of the bridge, and is controlled in time by the construction program. The repetitive nature of the construction readily lends itself to analysis by computer methods.

The extent of the bridge constructed, and the nature of its support will change during building - a temporary prop being used in various positions to take the out of balance moment. During construction the internal forces are statically determinate, while for final conditions they may well be indeterminate.

The behaviour of concrete is affected by shrinkage, creep and Young's Modulus, and is therefore age and time dependent as well as being affected by the previous stress history. These effects are taken into account.

The program is designed in such a way as to evaluate loss of pre-stress at each program stage and print the cumulated stresses and vertical deflections at any section and any stage, both during construction and after completion.



**Fig 1**

The computer program described was developed, for symmetrical three span bridges as shown in Fig. 1, and has been used on the Aire Bridge<sup>1</sup> - England, and the Kingston Bridge<sup>2</sup> - Scotland. Because of symmetry only half the bridge is analysed.



## 2. GENERAL PRINCIPLES

The program is built up from a series of routines. This is helpful not only for the purpose of the organisation of the program itself but also enables the program to be easily modified to take into account the peculiarities of a particular bridge.

In dealing with the problem of creep the Principle of Superposition of Strains<sup>3</sup> is adopted, creep being assumed to be linearly proportional to stress. All forces and deflexions are therefore dealt with on an incremental basis.

The cycle of construction is split into two parts:

- (a) Pre-stressing and moving the carriages - always the even program stage.
- (b) Pouring of the two extreme concrete units, diaphragms or ballast - normally the odd program stage.

There are several ways of solving this problem. In this program it was decided to operate on each bridge section (i) through all its stages (n) for  $1 \leq n \leq nt$ , rather than all sections through each stage. The method is perfectly valid while the structure remains statically determinate, however when this is no longer so, the pre-stress losses together with the creep deflexions have to be modified to conform with the new indeterminate boundary conditions.

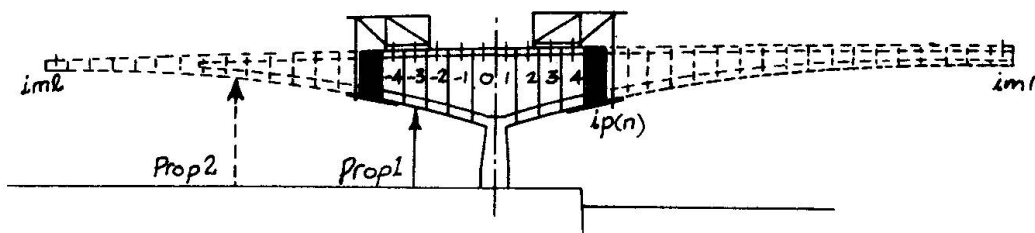


Fig 2.

## 3. PROGRAM CONTROLS

**3.1 Sections** The bridge is split up into a series of concrete pours, the mid point of which is called a section (i) at which bending moments and stresses are evaluated - see Fig. 2, the extent of the completed half structure being defined in the data by section limits *iml* and *imr*.

**3.2 Extent of construction** The extent of construction at stage (n) is defined by routine LIMCON, *ipl(n)* and *ipr(n)* define the section limits poured, and conversely *np(i)* defines the stage at which section (i) is poured. The routine LIMCON is important as it defines CYCLE LIMITS for other parts of the program.

**3.3 Boundary conditions** The stage and place of boundary condition changes due to prop movement or the indeterminate nature of the completed bridge, are defined early in the program, as they affect the distribution of moments.

**3.4 Concrete age** Young's Modulus, shrinkage and creep are all time dependent properties. Time is defined by the age of the concrete-age (i,n). Routine AGECON generates this information from data read in for age (0,n) and age (i,nt). An example of part of the generated data is shown in Table 1.

**3.5 Section properties** Values of area, section moduli, second moment of area, position of centroid and eccentricity are generated by routine SECPR from the vertical profile and cross section data of the bridge.



#### 4. LOADING

External loading is in two forms: (a) that due to the self weight of the concrete, ballast or surfacing, and (b) due to

stage(n)	Age of Concrete (days)												
	Section (i) No												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	82	82	82	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	84	84	84	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	112	112	112	32	2	0	0	0	0	0	0	0	0
4	114	114	114	34	4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	129	129	129	49	19	2	0	0	0	0	0	0	0
6	131	131	131	51	21	4	0	0	0	0	0	0	0
7	141	141	141	61	31	14	2	0	0	0	0	0	0
8	143	143	143	63	33	16	4	0	0	0	0	0	0
9	151	151	151	71	41	24	12	2	0	0	0	0	0
10	153	153	153	73	43	26	14	4	0	0	0	0	0
11	162	162	162	82	52	35	23	13	2	0	0	0	0
12	164	164	164	84	54	37	25	15	4	0	0	0	0
13	173	173	173	93	63	46	34	24	13	2	0	0	0
14	175	175	175	95	65	48	36	26	15	4	0	0	0

Table I

the movement of the carriages. In case (a) the loads are applied once in a given position while for (b) the same load is moved along the superstructure. The bending moments in the statically determinate condition is evaluated by routine CONCMTS, typical input for which is shown in Table II.

stage(n)	Concrete self weight loading data			
	$W_r$ (tonf)	$x_r$ (ft)	$W_l$ (tonf)	$x_l$ (ft)
1	275.1	15	261.1	-25
1	265.5	25	251.7	-35
3	256.9	35	240.7	-45

Table II

The bending moments due to loads applied in the indeterminate state e.g. for surfacing and finishes, are dealt with as above but modified for continuity by routine CONMTS, using the flexibility method of analysis. The moments due to the carriage movements could have been evaluated using alternate loading and unloading in one position followed by loading in the next position - tedious. A special routine CARRMTS was therefore written. The incremental bending moment due to external loading  $dmc(i,n)$  is derived from either one or a combination of the above routines.

## 5. PRE-STRESSING

There are various ways of inputting this information depending on the layout of the pre-stress. In Kingston Bridge most of the tendons are in the top flange of the box section, with rather smaller numbers in the soffit slab at midspan and near the abutments, none changing position from top to bottom or vice versa. The cables lie close together and so an average eccentricity could be assumed for evaluating the losses. Two routines are used, MAINBAR for the top and SOFBAR for the soffit bars. The data is input for MAINBAR as shown in Table III.

Prestress bar data				
stage(n)	Jacking Section	No. of Bars	Anchorage Section	Position of Bars (in)
4	4	5	-4	10
6	5	4	-5	10
6	5	2	4	10

Table III

The data is first used to generate and accumulate the number of bars  $dnpt(i,n)$ . The pre-stress moment  $dmpt(i,n)$  and  $dmps(i,n)$  are then evaluated from a centroid distance generated by SECPR and its position within the slab given by Column 5 in Table III. The midspan soffit tendons are stressed while the structure is statically indeterminate, the continuity moments being then obtained by CONMTS. It is assumed in all cases that the tendons are grouted immediately after pre-stressing, so that there is no need to average the losses over the length of the tendon.

## 6. MATERIAL PROPERTIES

As for most bridges of this kind the time dependent properties of the concrete were examined at the early stages of the contract. Uniaxial compression tests on cylinders were carried out at various stress levels and concrete ages, under controlled temperature and humidity conditions. The results were used as a guide to form the theoretical expressions used in the program.

### 6.1 Young's Modulus

$$ym(t) = mk(1) / (\log_{10}(1 + \log_{10}(t+1))) \text{ where } t = \text{age}(i,n)$$

6.2 Shrinkage For shrinkage and creep two relationships were used: (a) a logarithmic expression, giving rather high long term values -

$$\text{shrinkage strain}(t) = (-mk(2) + mk(3) \cdot \log_{10}(t+1)) \text{ where } t = \text{age}(i,n)$$

(b) an expression after Ross<sup>4</sup>

$$\text{shrinkage strain}(t) = mk(4) \cdot t / (mk(5) + mk(6) \cdot t)$$

The increment of shrinkage strain in the interval (n-1) to (n) is given by

$$dshs = \frac{mk(4) \cdot \text{age}(i,n)}{mk(5) + mk(6) \cdot \text{age}(i,n)} - \frac{mk(4) \cdot \text{age}(i,n-1)}{mk(5) + mk(6) \cdot \text{age}(i,n-1)}$$

The corresponding loss in steel stress =  $est \cdot dshs$ . The loss of

pre-stress moment for top tendons =  $mpt(n-1).est.dshts/po.$  - since the increment of shrinkage effects all previously stressed tendons by the same amount.

**6.3 Creep of concrete** The creep strain is assumed to be linearly proportional to stress. At each stage the principle of superposition of strains is used in conjunction with the stress history to evaluate the incremental creep strain. Two separate functions are used to define the creep behaviour.

(a) The ultimate specific creep, based on the age ( $t = age(i, m)$ ) of the concrete when stressed, and shown in Fig. 3a.

(b) The proportion of this creep which has taken place since stressing, and shown in Fig. 3b.

The increment of specific creep in interval  $(n-1)$  to  $(n)$  is therefore given by

$$ddc = \left\{ \frac{age(i, n) - age(i, m)}{mk(8) + age(i, n) - age(i, m)} - \frac{age(i, n-1) - age(i, m)}{mk(8) + age(i, n-1) - age(i, m)} \right\} eult$$

and the increment in creep strain at the level of the top tendons due to the stress applied at stage  $(m)$  is  $ddc.dftt(m)$ . The total increment of creep strain due to the previous loading history is

$$dctt = \sum_{m=np(i)+1}^{n-1} ddc.dftt(m) \quad ; \quad dcts = \sum_{m=np(i)+1}^{n-1} ddc.dfts(m)$$

for top and soffit tendons respectively. The incremental loss in pre-stress moment for top tendons at stage  $(n)$  due to creep is given by

$$dmlcrt = \frac{est.dctt.mpt(n-1)}{po}$$

Apart from its effect on loss of pre-stress, creep also produces a change of curvature which is independent of the direct stress. This is taken into account by postulating an equivalent elastic creep moment  $decm(i, n)$ .

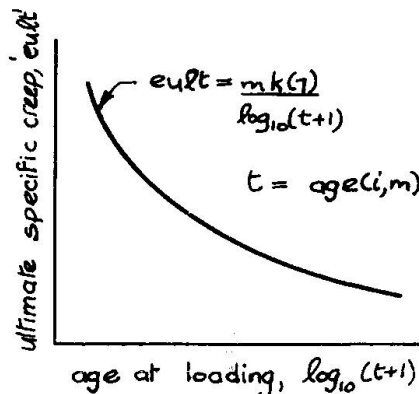


Fig 3a

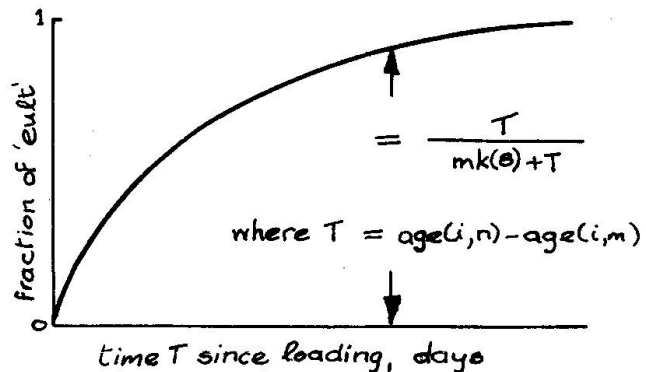


Fig 3b

**6.4 Relaxation in steel tendons** An expression such as

$$dpr(n, m) = .01 \cdot \log_{10}(mk(9) \cdot t + 1)$$

is used to define fractional loss of pre-stress due to relaxation, where  $t = age(i, n) - age(i, m)$ . The fractional loss in the interval  $(n-1)$  to  $(n)$  is  $dpr(n, m) - dpr(n-1, m)$ , due to pre-stressing carried out at stage  $(m)$ . The incremental loss at stage  $(n)$  due to all previous top pre-stressing bar is given by

$$dmlrt = \sum_{m=np(i)+1}^{m=n-1} dmpt(i,m) \cdot (dpr(n,m) - dpr(n-1,m))$$

**6.3 Friction losses** The majority of tendons in the two bridges examined followed the curvature of the top and bottom slabs, consequently the main source of friction was wobble of the ducts. The expression for the tendon stress is

$$px = po \cdot e^{-(mk(10) \cdot x)}$$

The loss of pre-stress moment due to friction is given by

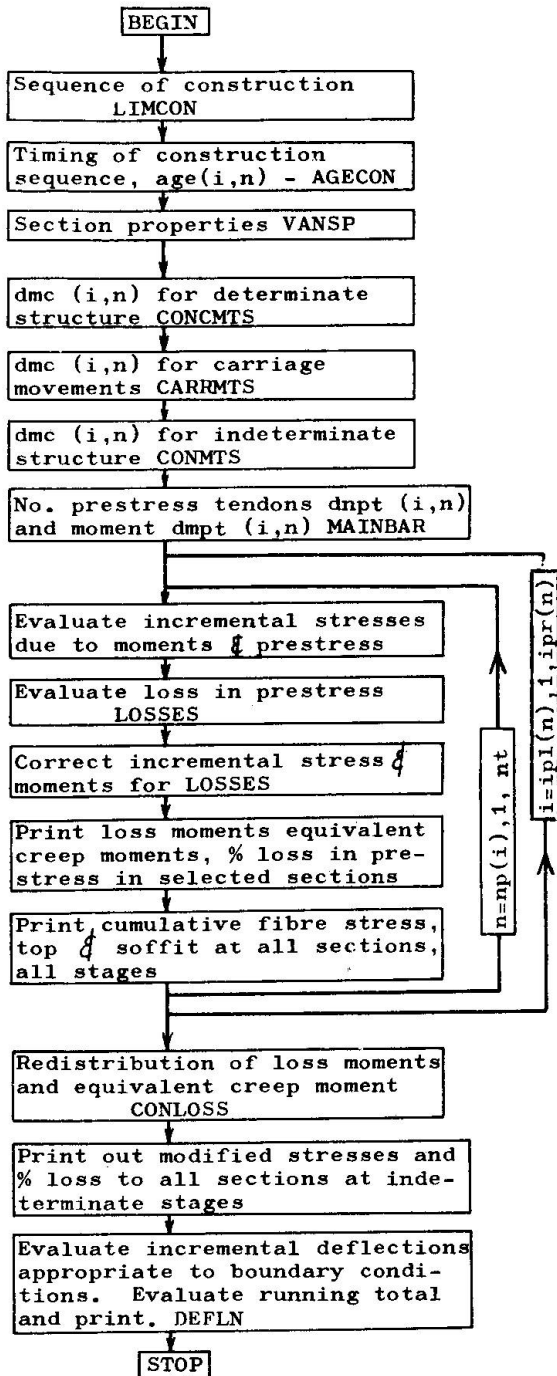
$$dmlft = dmpt(i,m) \cdot (1 - e^{-mk(10) \cdot x})$$

**6.6 Losses** The losses described above are evaluated in routine LOSSES, and individual loss moments and cumulative values for top and soffit tendons may be printed on call if required. The effect of losses taking place during the interval (n-1) to (n) are applied to the structure with the loading at stage (n).

## 7. PROGRAMMING

A flow chart of the program is shown in Fig. 4. It is split into four major sections. Part 1 deals with the preparation of program controls, incremental bending moments, pre-stressing forces and moments as previously described. Part 2 contains the routine LOSSES and deals with the incremental stresses due to moments and forces in Part 1, at a given section for each advancing stage. Pre-stress losses are evaluated, and stresses corrected and accumulated. The equivalent creep moment is stored. Losses and equivalent creep moments are evaluated assuming no interaction between sections. A bending moment  $dm(i,n)$ , is calculated which is the sum of all the moments, losses and equivalent creep moment to serve Part 4 in evaluating the deflexions. This bending moment will also be modified in Part 3.

Where the structure finally becomes statically indeterminate the results of Part 2 are not valid. Part 3, which contains the routine CONLOSS resolves this problem, dealing with the re-distribution of loss moments and equivalent creep moments. A flow diagram of this



FLOW CHART OF COMPUTER PROGRAM

Fig 4 moments. A flow diagram of this

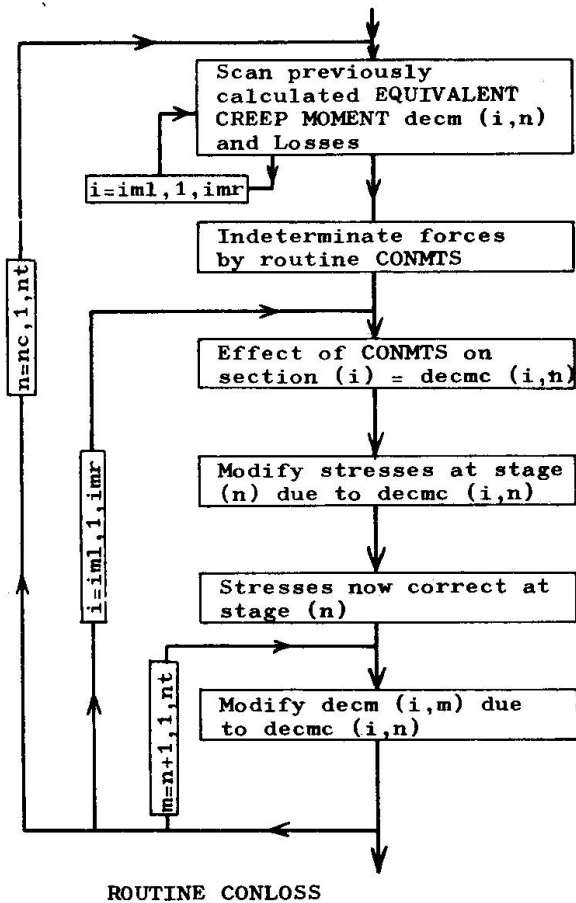


Fig 5

part of the program is shown in Fig. 5. It becomes effective at stage (nc) when the structure becomes continuous. At stage (n) the loss at each section is scanned and routine CONMTS is applied to obtain the corresponding continuity forces. The consequential stresses are evaluated at each section and added to those previously obtained. However the presence of these consequential stresses will affect creep strains at subsequent stages ( $m > n$ ), so that the loss of pre-stress due to creep and the equivalent creep moments previously calculated will be modified, assuming again that there is no interaction between section.

It should be clearly understood that the previously calculated equivalent creep moments  $decm(i,n)$  themselves are only to be used to determine creep deflection. However the equivalent creep moment distribution along the length of the bridge will (using CONMTS) produce real continuity forces  $decmc(i,n)$  at each stage (n), which will affect the stresses at that stage. When these stresses are added to those previously obtained - the stresses are then correct at stage (n). These

additional stresses will also affect the creep strains at later stages. The process described in this paragraph is known as creep re-distribution.

The program will have stored and will now have available a total incremental moment  $dm(i,n)$  from which Part 4, (which includes the routine DEFLN) evaluates the incremental deflections at all sections, and prints out the accumulated deflections at each stage. The deflections are available as absolute vertical values, and also as relative to the 'attitude' of the superstructure.

The program was written in Atlas Autocode, and for the Kingston bridge 44 sections and 47 stages were considered. The program took some 9 minutes to run on the KDF 9 computer. The program now is being rewritten in Fortran.

## 8. CONCLUSIONS

The program described has been successfully used on two major bridges. It provides a useful tool for the designer who wishes to examine the effect of various shapes of superstructure and different layouts and stages of pre-stress. For the contractor precambering details are easily obtained from the calculated deflection. Since the deflections are printed at each section and each computer stage the deformation of the real structure may be compared with that of the computer program model at each construction stage.

## BIBLIOGRAPHY

1. Davies, G., Pell, P.S., and McCallion, H., 'River Aire Bridge, Report on Deflexion of Superstructure' Report to Messrs Martin Cowley, Ltd., and subsequently to Messrs Christiani Nielson Ltd. 1966.

2. Davies, G., 'Kingston Bridge, Glasgow, Report on Deflexion of the Superstructure'. Report to Messrs Logan-Marples Ridgeway Ltd. 1968.
3. McHenry, D., 'A New Aspect of Creep in Concrete and its Application to Design', Proceedings, A.S.T.M, V.5., No. 43, 1943
4. Ross, A.D., Concrete creep data. The Struct.E., V.15 pp314-26 (London 1937).

## NOTATION

age(i,n)	age of concrete at section (i) and stage (n)
ddc	increment of specific creep due to stress at given age of concrete
dctt,dcts	increment of creep strain at level of top and soffit bars due to previous stress history
dshs	increment of shrinkage strain
dpr	fraction of tendon stress due to relaxation
dftt(m)	increment of concrete stress at level of top tendon at stage (m) due to direct and bending action
dmlcrt,dmlrt,dmlft,	incremental loss of top pre-stress moment due to creep, relaxation and friction respectively
decn(i,n)	equivalent creep moment
decnc(i,n)	the continuity moment resulting from a distribution of decn(i,n) to conform with new boundary conditions
dmc(i,n)	incremental bending moment due to external loading
dnpt(i,n),dmpt(i,n)	incremental number of top bars and corresponding pre-stress moment
dm(i,n)	an incremental moment taking account of all factors producing deflexion
mpt(n)	total of top pre-stress moment up to stage (n)
est	Young's Modulus for steel bars
i	section number, iml and imr defining the extreme sections of completed bridge
ipl(n),ipr(n)	section members defining extent of bridge constructed at stage (n)
mk(1)...(10)	constants defining material behaviour
m,n,nc,nt	construction stages, including continuity and final stages
np(i)	the stage at which the concrete for section (i) is poured
po	initial pre-stress on jacking
t	time in days
ym(t)	Young's Modulus of concrete at age (t) days
x	distance along tendon from jacking end

## SUMMARY

The paper describes a method of calculating the prestress losses, stresses, and deflexions of large concrete bridges subject to creep re-distribution.

## RESUME

La communication décrit une méthode pour calculer les pertes de précontrainte, ainsi que les contraintes et les déformations de grands ponts en béton sujets à la redistribution par le fluage des moments fléchissants.

## ZUSAMMENFASSUNG

Diese Arbeit behandelt ein Berechnungsverfahren zur Bestimmung der Vorspannverluste, Spannungen und Biegungen von grossen Betonbrücken, die der Kriechumteilung ausgesetzt sind.



## **Der Einfluß des Kriechens und Schwindens des Betons in dünnwandigen Trägern mit gekrümmter Achse**

Influence of Creep and Shrinkage of Concrete in Thin-Walled Curved Beams

Influence du fluage et du retrait du béton sur une barre courbe à parois minces

**NIKOLA HAJDIN**  
Prof., Dr.sc.techn.  
Universität Beograd  
Jugoslawien

### **Einleitung**

Vorgespannte und Verbundkonstruktionen werden heute in Bauwesen in zahlreicher Formen angewendet. Die Erscheinungen des Kriechens und Schwindens des Betons spielen bei diesen Konstruktionsarten eine besondere Rolle.

Im letztem Dezennium hat das Interesse für die Berechnung von Trägern mit, in der Horizontalebene gelegener, gekrümmter Achse zugenommen. Einer der Gründe dafür ist die immer häufigere Ausführung von Brücken mit gekrümmter Achse welche eine Folge der Anpassung der modernen Strassen an die Erfordernisse des Schnellverkehrs ist.

In konstruktiver Hinsicht gehören diese Brücken öfter in den Bereich der dünnwandigen Träger.

Die Einflüsse des Kriechens und Schwindens haben bei Stäben mit gekrümmter Achse eine besondere Bedeutung, da neben der Beanspruchung auf Biegung, die Torsionsbeanspruchung eine wesentliche Rolle spielt.

Der Einfluss des Eigengewichtes des Trägers sowie die Wirkung der Vorspannung rufen bei dem Träger mit gekrümmter Achse ungünstigere Beanspruchung hervor als bei dem Träger mit gerader Achse.

In diesem Beitrag werden die Einflüsse des Kriechens und Schwindens des Betons auf den dünnwandigen Stab mit offenem Querschnitt und mit in einer Ebene gelegener, gekrümmter Achse, behandelt.

Der Querschnitt des Trägers setzt sich aus einem Beton- und aus einem Stahlanteil zusammen. Der letztere kann die Bewehrung oder, im Falle des Verbundträgers, der Querschnitt des Stahlanteiles sein.

Der hier vorgeschlagene Berechnungsvorgang kann als Näherungslösung auch für den dünnwandigen Träger mit geschlossenem Querschnittsprofil angewendet werden, sofern die entsprechenden Unterschiede im Verhalten gegenüber der Torsionsbeanspruchung Berücksichtigung finden.



## 2. Verformung des Stabes

Die beliebig geformte Profilmittellinie ersetzen wir durch einen Polygonzug, dessen Seitenlängen wir je nach der gewünschten Genauigkeit den krummlinigen Teilen derselben anpassen.

In den Stabquerschnitt legen wir ein Kartesisches Koordinatensystem  $x, y$ . Den Koordinatenursprung  $C$  verlegen wir so damit die folgenden Bedingungen befriedigt werden:

$$\int x t_p ds = 0 \quad (1)$$

und

$$\int y t_p ds = 0 \quad (2)$$

wo  $t_p$  durch den Ausdruck (21) bestimmt ist.

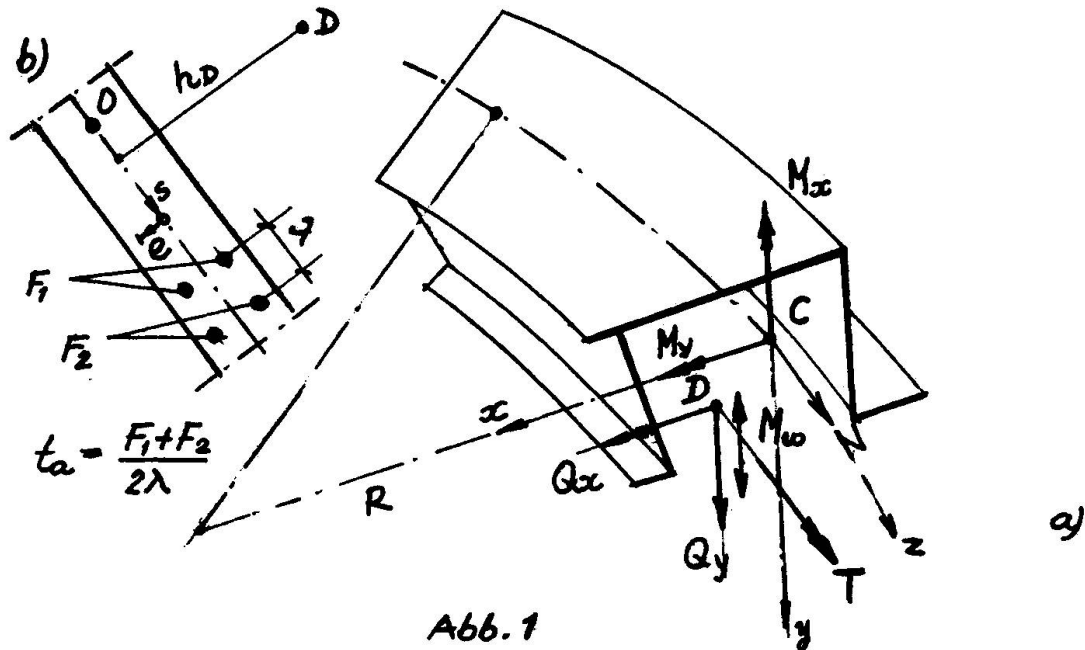


Abb. 1

Die Achse  $x$  und die Stabachse (Abb. 1a) mit dem Halbmesser  $R$ , welche die Punkte  $C$  der Stabquerschnitte verbindet, liegen in einer Ebene. Die längs der Stabachse gemessene Bogenlänge von einem vorhergenommenen Querschnitt aus ist durch die Koordinate  $z$  bestimmt.

Ausser den Koordinaten  $x, y, z$  wählen wir auf der Mittelfläche des Stabes ein System orthogonaler, krummliniger Koordinaten  $s, z$ , wo  $s$  die Länge der Profilmittellinie des Querschnitts ist und  $z$ , die Länge des kreisförmigen, mit der Stabachse konzentrischen Bogens auf der Mittelfläche des Stabes.

Den Abstand von der Mittelfläche in der Richtung der Normalen bezeichnen wir mit  $e$ .

Nach der Theorie des dünnwandigen Stabes mit offenem Profil, führen wir die folgenden Voraussetzungen über die Verformung ein:

a/ Die Querschnittsform des Stabes bleibt während der Verformung unverändert, und

b/ die Gleitverzerrung  $\gamma_x$  in der Mittelfläche des Stabes wird vernachlässigt.

Die verschiebungskomponenten  $\xi$  und  $\eta$  des beliebigen Punktes der Mittelfläche in Richtungen  $x$  und  $y$  sind unter Berücksichtigung der Voraussetzung a/ durch die folgenden Ausdrücke bestimmt:

$$\xi = \xi_D - (y - y_D) \varphi \quad (3)$$

$$\eta = \eta_D + (x - x_D) \varphi \quad (4)$$

wo  $\xi_D$  und  $\eta_D$  die Verschiebungen des Punktes  $D$  mit den Koordinaten  $x_D$  und  $y_D$ , und  $\varphi$  die Verdrehung des Querschnitts um diesen Punkt.

Die Verschiebungskomponente  $w$  in Richtung der Tangente auf der Stabachse wird auf Grund der Voraussetzung b/ nach [1] wie folgt ausgedrückt:

$$w = \xi'_D x + \eta'_D \left[ y \left( 1 - \frac{x_D}{R} \right) - \frac{y_D}{R} x \right] + \left( 1 - \frac{x}{R} \right) (\theta' \omega - w_0), \quad (5)$$

wo

$$\theta' = \varphi' + \frac{\eta'_D}{R}, \quad \omega = \int_0^s \frac{h_D}{\left( 1 - \frac{x}{R} \right)^2} ds \quad (6), (7)$$

und  $w_0 = w_0(x)$  die Verschiebung des Punktes  $C$  ist

Der Ausdruck (6) wird oft als spezifische Verwindung bezeichnet. Die Grösse  $\omega$  stellt die sektorielle Koordinate oder Einheitsverwölbung des Stabes mit gekrümmter Achse dar, wobei  $h_D$  der Abstand der Tangente an der Profilmittellinie vom Pol  $D$  ist.

Für einen Stab mit schwach gekrümmter Achse können wir schreiben:

$$\omega = \int_0^s h_D ds \quad (8)$$

überführt werden, wo

$$\begin{aligned} E_{b\phi} &= \frac{E_b}{1 + \frac{\phi}{2}} \\ G_{b\phi} &= \frac{G_b}{1 + \frac{\phi}{2}} \\ \mu &= \frac{\phi}{1 + \frac{\phi}{2}} \end{aligned} \quad (17a-d)$$

und

$$E_{s_1} = \frac{E_{sch}}{\phi_n} \phi$$

Die Werte  $\bar{\sigma}_0$  und  $\bar{\tau}_{s0}$  stellen die Normalspannung und Schubspannung für  $t=0$  dar.

Wenn man die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung des Betons nach Trost [3] annimmt, ergeben sich die folgenden Werte für  $E_b$ ,  $G_b$  und  $\mu$ :

$$\begin{aligned} E_{b\phi} &= \frac{E_b}{1 + \rho\phi}, \quad G_{b\phi} = \frac{G_b}{1 + \rho\phi} \\ \mu &= \frac{(1-\rho)\phi}{1 + \rho\phi} \end{aligned} \quad (18, a-c)$$

wo, (vgl. [3], Gl. 4),

$$\rho = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Delta\sigma(t_i)}{\bar{\sigma}_0 - \bar{\sigma}_0} \cdot \frac{t_i}{t_0}$$

ist.

Für den Stahlanteil gelten die Beziehungen auf Grund des Hooke-schen Gesetzes:

$$\bar{\sigma}_a = E_a \varepsilon \quad (19)$$

$$\bar{\tau}_{sa} = G_a \gamma_s \quad (20)$$

### 5. Torsion des Stabes

Die Schnittkräfte können wir, unter Benutzung der Gleichungen (13), (14), (19) und (20), und der Ausdrücke (9) und (10) durch die Verschiebungsparameter  $w_0, \xi, \eta, \varphi$  ausdrücken.

Durch Einsetzen dieser Werte in das Gleichungssystem (12) können wir die Differentialgleichungen des Stabes erhalten

Der Einfachheit halber setzen wir voraus dass der Stahl über die Wandstärke  $t$  symmetrisch angeordnet ist. Der Anteil der Stärke welchen wir mit  $\alpha$  bezeichnen wollen, stellt die, auf Einheit der Profilmittellinie bezogene Fläche der Bewehrung (siehe Abb. 46) oder, im

$$\begin{aligned}
N' - \frac{N_{x0}'}{R} + p_z - \frac{m_x}{R} &= 0 \\
M_x'' - \frac{N}{R} + p_x + m_x' &= 0 \\
M_y''(1 + \frac{x_0}{R}) - M_x'' \frac{y_0}{R} + \frac{1}{R} (M_\omega'' + T_s') + p_y & \\
+ m_y'(1 + \frac{x_0}{R}) - m_x' \frac{y_0}{R} + \frac{1}{R} m_\omega' &= 0 \quad (12a-d) \\
M_\omega'' + T_s' - \frac{1}{R} (M_y - N y_0) + m_\omega + m_\omega' &= 0
\end{aligned}$$

wo  $p_x, p_y$  und  $p_z$  die Linienbelastungen in den Richtungen  $x, y$  und  $z$ , und  $m_\omega, m_x, m_y, m_\omega$  das äussere verteilte Torsionsmoment, die Biegemomente und das Bimoment sind.

#### 4. Beziehungen zwischen den Schnittkräften und Formänderungen

Das visko-elastische Verhalten des Betons wird in der Weise dargestellt, wie es von M. Djurić vorgeschlagen wird [2].

Die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung wird auf folgender Art ausgedrückt:

$$\epsilon = \frac{1}{E_b} (\sigma_b + \int_0^\phi \sigma_b d\phi) - \frac{E_{sch}}{\phi_n} \phi \quad (13)$$

$$\tau_s = \frac{1}{G_b} (\tau_{sb} + \int_0^\phi \tau_{sb} d\phi) \quad (14)$$

wo -  $\sigma_b$  Normalspannung für den Betonanteil des Querschnitts  
 $\tau_{sb}$  St. Venantsche Schubspannung für den Betonanteil des Querschnitts

$\phi = \phi(t)$  Kriechzahl

$\phi_n$  Grenzwert der Kriechzahl für  $t = t_n$

$E_{sch}$  Endschwindmass des Betons

$E_b$  Elastizitätsmodul

$G_b$  Schubmodul

bedeuten.

Unter der Voraussetzung linearen Veränderlichkeit der Spannungen mit der Zeit, können die bestimmten Integrale auf den Rechten Seiten der Gleichungen auf folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\int_0^\phi \sigma_b d\phi = \frac{\sigma_b + \sigma_{b0}}{2} \phi$$

$$\int_0^\phi \tau_{sb} d\phi = \frac{\tau_{sb} + \tau_{sb0}}{2} \phi$$

und die Ausdrücke (13) und (14) in die Gleichungen

$$\sigma_b = E_{bp} (\epsilon - \epsilon_s) - \mu \sigma_{b0} \quad (15)$$

$$\tau_{bs} = G_{bp} \tau_s - \mu \tau_{sb0} \quad (16)$$

Für die Dehnung in  $z$ -Richtung ergibt sich nach [1]:

$$\varepsilon = \frac{1}{1-\frac{z}{R}} \left\{ \xi_D'' x + \eta_D'' y + \frac{1}{R} [\xi - (y - y_D)] \varphi - \theta'' \omega - \frac{\eta_D''}{R} (x_D y - y_D x) + w_0' \right\} \quad (9)$$

Wenn wir von der Kirchhoff-Loveschen Hypothese, welche charakteristisch für die Theorie der dünnwandigen Schalen ist, ausgehen, erhalten wir nach [1] für die Gleitverzerrung  $\gamma_s$  ausserhalb der Mittelfläche den folgenden Ausdruck:

$$\gamma_s = 2\theta' e \quad (10)$$

### 3. Schnittkräfte und Gleichgewichtsbedingungen

Die Schnittkräfte des Stabes definieren wir wie folgt:

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma dF \\ Q_x &= \int_F (\tau_{zn} \cos \alpha - \tau_{zs} \sin \alpha) dF \\ Q_y &= \int_F (\tau_{zn} \sin \alpha + \tau_{zs} \cos \alpha) dF \\ M_x &= \int_F \sigma x dF \\ M_y &= \int_F \sigma y dF \\ T &= \int_F [\tau_{zn} h_{nD} + \tau_{zs} (h_D + e)] dF \\ M_\omega &= \int_F \sigma \left(1 - \frac{z}{R}\right) \omega dF \\ T_s &= 2 \int_F \tau_s e dF \end{aligned} \quad (11a-h)$$

wo  $\sigma$  Normalspannung und  $\tau_{zs}$  und  $\tau_{zn}$  die Schubspannungen sind.

Die ersten drei Ausdrücke stellen Reihe nach die Normalkraft und die Querkräfte des Querschnitts dar. Durch die Ausdrücke (11d-f) sind die Biegemomente in bezug auf die Achsen  $y$  und  $x$ , sowie das Torsionsmoment in bezug auf den Punkt  $D$  bestimmt. Durch den Ausdruck (11g) ist das Bimoment  $M_\omega$  gegeben, und die Grösse  $T_s$  stellt das sog. St. Venantsche Torsionsmoment dar.

Wenn wir die Gleichgewichtsbedingungen der, auf ein Element des Stabes wirkenden Kräfte aufstellen, erhalten wir nach [1] die folgenden Gleichungen:

Fälle des Verbundträgers, des Stahlanteiles dar

Setzen wir

$$t_{\phi} = \frac{E_{b\phi}}{E_c} t_b + \frac{E_a}{E_c} t_a; \quad dF_{\phi} = t_{\phi} ds; \quad F_{\phi} = \int dF_{\phi}, \quad (21)$$

wo  $E_c$  ein beliebiger konstanter Elastizitätsmodul ist.

Die Punkte  $D$  und  $O$  wählen wir in der Weise damit die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

$$\begin{aligned} \int x \omega dF_{\phi} &= 0 \\ \int y \omega dF_{\phi} &= 0 \\ \int \omega dF_{\phi} &= 0 \end{aligned}$$

Der Punkt  $D$  stellt den Schubmittelpunkt des Querschnitts aus homogenen Material mit der Wandstärke  $t_{\phi}$ ,

Die Ausdrücke für das Bimoment  $M_{\omega}$  und das St. Venantsche Torsionsmoment  $T_s$  können wir jetzt in der folgenden Form anschreiben:

$$M_{\omega} = -E_c J_{\omega\omega} \theta'' - \mu M_{b\omega 0} - M_{\omega, sch} \quad (22)$$

und

$$T_s = G_c K_{\phi} \theta' - \mu T_{bso} \quad (23)$$

wo

$$J_{\omega\omega} = \int \omega^2 dF_{\phi}, \quad M_{\omega, sch} = -E_{b\phi} \epsilon_s \int \omega dF_{\phi}$$

und

$$K_{\phi} = 4 \int_s \left( \int_b \frac{G_{b\phi}}{G_c} e^2 de + \int_a \frac{G_a}{G_c} e^2 de \right) ds$$

ist.

Die, mit  $b$  bzw.  $a$  bezeichnete Integrale beziehen sich auf Beton- bzw. Stahlteil der Wandstärke.

Die Werte

$$M_{b\omega 0} = \int_b \bar{G}_{b0} \omega dF, \quad T_{bso} = 2 \int_s ds \int_b \bar{\tau}_{bso} e de,$$

betrachten wir als bekannt und durch die Berechnung des elastischen Stabes mit der Wandstärke  $t_f$

$$t_f = \int_b \frac{E_b}{E_c} de + \int_a \frac{E_a}{E_c} de$$

und Torsionskonstante

$$K_f = 4 \int_s \left( \int_b \frac{G_b}{G_c} e^2 de + \int_a \frac{G_a}{G_c} e^2 de \right) ds$$

erhalten.

Durch Einsetzen der Ausdrücke (22) und (23) in die Gleichung (12d) erhalten wir die Differentialgleichung der Torsion:

$$\begin{aligned} E_c J_{\omega\omega} \theta'''' - G_c K_{\phi} \theta'' &= m_D + m_{\omega}' - \\ &- \frac{1}{R} (M_y - N y_D) - \mu (M_{b\omega 0}'' + T_{bso}') \end{aligned} \quad (24)$$

Die Gleichung (24) hat dieselbe Form wie die klassische Gleichung der Wölbkrafttorsion. Die Grössen

$$N = \int \sigma dF, \quad M_y = \int \sigma y dF$$

sind für den statisch bestimmten Träger bekannt. Ist dies nicht der Fall, so erhalten wir die Lösung der Aufgabe durch parallele Behandlung der Biegungs- und Axialbeanspruchung des Stabes. Bei den Trägern mit grösserem Krümmungsradius können die Grössen  $N$  und  $M_y$  wie für den geraden Träger in Rechnung gesetzt werden.

### Schrifttum

C.F. Kollbrunner und N. Hajdin: Beitrag zur Theorie dünnwandiger Stäbe mit gekrümmter Achse. Inst. f. bauwissenschaftliche Forschung, H. 8., Verl. Leemann, Zürich 1969.

M. Djurić: Theorie der Verbund- und vorgespannten Konstruktionen /serbo-kroatisch/. Serbische Akademie der Wissenschaften und Künste, Monographien, Band CCCLXIV, Beograd 1963.

H. Trost: Folgerungen aus Theorien und Versuche für die baupraktische Untersuchung von Kriech-Relaxationsprobleme in Spannbetontragwerken. Symposium "Der Einfluss des Kriechens, Schwindens und der Temperaturänderungen in Stahlbetonkonstruktionen", Madrid, 1970, Vorbericht.

### ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Beitrag werden die Grundlagen für die praktische Berechnung dünnwandiger Stäbe mit gekrümmter Achse, unter Berücksichtigung der Einflüsse des Kriechens und Schwindens des Betons, gegeben. Diese Einflüsse haben bei Stäben mit gekrümmter Achse eine besondere Bedeutung, da neben der Beanspruchung auf Biegung, die Torsionsbeanspruchung eine wesentliche Rolle spielt.

### SUMMARY

The paper deals with the analysis of thin-walled members curved in the horizontal plane, taking into account the effects of concrete creep and shrinkage. These effects are of particular importance in curved members, which are subjected to torsion in addition to moment.

### RESUME

Dans cet article, on présente une méthode pour le calcul des poutres à parois minces avec axe courbe en tenant compte des effets du fluage et du retrait du béton. Ces effets ont une influence particulière pour les poutres à axe courbe, car, en plus des contraintes de flexion, les contraintes de torsion jouent un rôle considérable.



### III

#### Tensions et déformations différées dans les ponts en encorbellement

Spannungen und Verformungen in Freivorbaubrücken

Differential Stresses and Deformations in a Cantilever Built Bridge

GIORGIO CROCI

Istituto di Scienza delle Costruzioni  
Università di Roma  
Italia

#### 1) Aspects généraux du problème

Nous allons examiner l'évolution dans le temps de la distribution des tensions et des déformations par effet de l'élasticité, du retrait, de la relaxation et de la température, d'abord dans le cas plus général d'une structure hyperstatique composée d'éléments de matériaux divers rendus adhérents par stades successifs, ensuite dans le cas particulier de ponts bâtis en encorbellement.

Etant donné le peu d'espace à disposition, nous sommes forcés d'omettre tout passage analytique, le programme pour le computer et nombreux diagrammes. Nous restons à la disposition de quiconque voudra nous demander de plus amples renseignements.

Dans l'exposé général nous allons considérer comme variables dans le temps soit la géométrie d'une seule section (soudure d'éléments divers) (fig. 1 a), soit la géométrie de la structure dans son ensemble (soudure de voussoirs divers) (fig. 1 b), soit la configuration statique (introduction ou abolition de liens nouveaux)

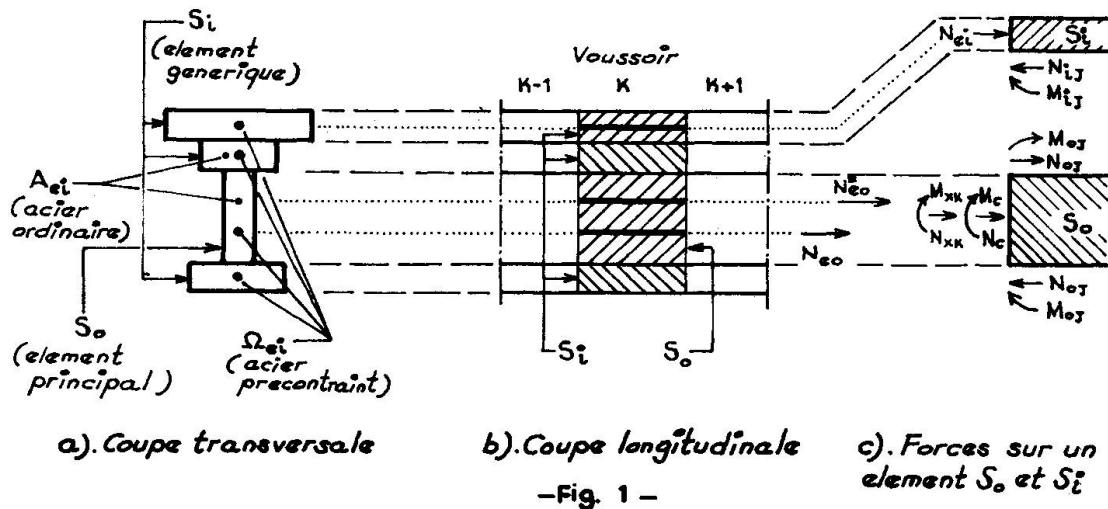
#### 2) Hypothèses et symboles

Bien que la théorie suivante soit valable en cas plus général, nous allons traiter le cas d'une structure en béton armé précontraint à câbles injectés après mise en tension.

##### 2.1) Géométrie de la section ( fig. 1 )

Une section générique  $S$  sera constituée dans le cas général de l'union d'un certain nombre d'éléments "rigides à la flexion" en béton ( $S_i$ ) et d'éléments qui "n'ont pas de rigidité à la flexion", voir les câbles de précontrainte ( $\Omega_{ei}$ ) et l'acier ordinaire ( $A_{e,i}$ ) (en indiquant par  $ei$  l'excentricité de l'élément  $\Omega$  ou  $A$  à partir de l'axe de barycentre de l'élément  $S_1$  qui les contient ).

Nous allons indiquer en outre :



$S_o$  : aire de la section transversale du premier élément mis en oeuvre (élément principal)

$y_i$  : ordonnée d'une fibre générique à partir du barycentre de l'élément  $S_i$

$x$  : abscisse d'une section  $S$

$g_i(x, y, e)$ ;  $g_i(x, y)$ ;  $g_i(x)$  : rapport entre la tension dans la fibre et la sollicitation qui la produit (respectivement pression-flexion, flexion, effort normal).

## 2.2) Forces agissant sur l'élément principal $S_o$ (fig. 1 c)

Forces connues (moments  $M$ , effort normal  $N$ ) (1) :

$\dot{N}_c$ ,  $\dot{M}_c$  : dues aux charges extérieures

$[\dot{N}_{eo}]$  (2) : dues à la mise en tension d'un câble

Forces inconnues :

$\dot{N}_{xk}$ ,  $\dot{M}_{xk}$  : dues aux réactions hyperstatiques  $X_k$  aux liens extérieurs

$\dot{N}_{oj}$ ,  $\dot{M}_{oj}$  : dues à l'action mutuelle entre les éléments  $S_o$  et  $S_j$

$\dot{N}_{eo}$  : due à l'action mutuelle entre les éléments  $S_o$  et  $\Omega_{ei}$

$\dot{N}_{eo}^*$  : due à l'action mutuelle entre les éléments  $S_o$  et  $A_{ei}$

## 2.3) Forces agissant sur les autres éléments

Il s'agit uniquement d'actions mutuelles transmises entre éléments contigus (par ex.  $[\dot{N}_{ei}]$ ,  $\dot{N}_{ij}$ ,  $\dot{M}_{ij}$ ,  $\dot{N}_{ei}$ ,  $\dot{N}_{ei}^*$  agissent sur  $S_i$ ; dans  $\Omega_{ei}$  on a  $[\dot{N}_{ei}]$ ,  $\dot{N}_{ei}$ ; dans  $A_{ei}$  on a  $\dot{N}_{ei}^*$ ).

## 2.4) Caractéristiques des temps

$t$  : instant générique pendant lequel on examine le phénomène

$t_i$  : instant de coulée d'un élément  $S_i$  ou de mise en tension de l'élément  $\Omega_{ei}$

$\tau$  : instant d'application d'une variation de sollicitation.

## 2.5) Déformations

Les déformations sont dues à :

(1) Nous allons indiquer par un point les dérivées par rapport au temps.

(2) Imaginons que la mise en tension  $\dot{N}_{eo}$  soit faite dans un temps très limité mais fini afin qu'il y soit la dérivée  $\dot{N}_{eo}$ . Les parenthèses indiquent que ce terme existe seulement au moment de la mise en tension.

- l'élasticité: nous allons adopter le module d'élasticité constant  $E_a$  pour l'acier, et variables dans le temps  $E(\tau, t_i)$  pour le béton -
- le fluage : nous allons considérer le "fluage linéaire" pour le béton sur la base des dernières "Recommandations du Comité Euroéen du Béton" en adoptant une expression :

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{E(28)} \dot{\phi}(t, t_i, \tau) d\tau$$

étant  $E(28)$  le module d'élasticité à 28 jours et  $\phi(t, t_i, \tau)$  une fonction du temps qui dépend des conditions climatiques, âge du béton lors de la mise en charge, épaisseur fictive de la pièce, température, composition du béton. Pour l'acier de précontrainte les phénomènes de viscosité sont représentés dans le cas de "déformation libre" suivant l'expression  $\dot{\epsilon}(t) = \bar{\sigma}/E_a \cdot R(\bar{\sigma}) \cdot \dot{r}(t, t_i)$ , en indiquant par  $r(t, t_i)$  la fonction de relaxation dans le temps,  $\bar{\sigma}$  la tension initiale du câble,  $R(\bar{\sigma})$  une fonction de la tension initiale prise égale à zero pour  $\bar{\sigma} \neq 0,5 \sigma_{0,2}$

- retrait dans le béton: toujours suivant les Recommandations du C.E.B. on prend  $\dot{\epsilon}_w = \epsilon_\infty \dot{g}(t, t_i)$ , où  $\epsilon_\infty$  représente la déformation à temps infini et  $g(t, t_i)$  une fonction du temps dépendant des paramètres analogues à ceux du fluage
- température: tout en étant presque égaux les coefficients de dilatation du béton et de l'acier - si la loi de distribution des températures dans la section n'est pas linéaire - on a, outre que des réactions hyperstatiques aux liens extérieurs, même des actions mutuelles inconnues entre fibre et fibre, telles à assurer la conservation des sections planes. Si la section est partagée en éléments  $S_i$  de hauteur suffisamment petite (1) ou pourra considérer dans chaque élément une température moyenne: on considère donc une déformation  $\dot{\epsilon}(t) = \alpha \dot{T}(t)$

### 3) Expressions générales des déformations

Comme nous avons déjà dit la déformation dépend des forces indiquées dans les paragraphes 2.2), 2.3) et des phénomènes indiqués au paragraphe 2.5).

En cas général on parvient aux expressions suivantes :

3.1) Variation de déformation longitudinale, à l'instant  $t$ , dans une fibre en position  $y$  de l'élément  $S_0$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(x, y, t) = & \epsilon_\infty \dot{g}(t, t_0) + \frac{\dot{N}_c(t, x)}{E_0(t, t_0)} \cdot g_0(x, y, e) + \int_{t_0}^t \frac{\dot{N}_c(\tau, x)}{E(28)} \cdot g_0(x, y, e) \cdot \dot{\phi}(t, t_0, \tau) d\tau + \sum_e \frac{\dot{N}_e(t, x) + \dot{N}_e^*(t, x)}{E_0(t, t_0)} \cdot g_{L2}(x, y, e) + \\ & + \int_{t_0}^t \sum_e \frac{\dot{N}_e(\tau, x) + \dot{N}_e^*(\tau, x)}{E(28)} \cdot g_0(x, y, e) \cdot \dot{\phi}(t, t_0, \tau) d\tau + \left[ \sum_e \frac{\dot{N}(t, x)}{E_0(t, t_0)} \cdot g_0(x, y, e) \right] + \int_{t_0}^t \sum_e \frac{\dot{N}(\tau, x)}{E(28)} \cdot g_0(x, y, e) \cdot \\ & \cdot \dot{\phi}(t, t_0, \tau) d\tau + \sum_i \frac{\dot{N}_{oi}(t, x)}{E_0(t, t_0)} \cdot g_0(x, y, e) + \int_{t_0}^t \sum_i \frac{\dot{N}_{oi}(\tau, x)}{E(28)} \cdot g_0(x, y, e) \cdot \dot{\phi}(t, t_0, \tau) d\tau + \sum_i \frac{\dot{N}_{oi}(t, x)}{E_0(t, t_0)} \cdot \\ & \cdot g_0(x, y) + \int_{t_0}^t \sum_i \frac{\dot{N}_{oi}(\tau, x)}{E(28)} \cdot g_0(x, y) \cdot \dot{\phi}(t, t_0, \tau) d\tau + \sum_k \frac{\dot{N}_{x,k}(t, x)}{E_0(t, t_0)} \cdot g_0(x, y, e) + \int_{t_0}^t \sum_k \frac{\dot{N}_{x,k}(\tau, x)}{E(28)} \cdot \\ & \cdot g_0(x, y, e) \cdot \dot{\phi}(t, t_0, \tau) d\tau + \alpha \dot{T}(x, y, t) \end{aligned}$$

3.2) Variation de déformation longitudinale, à l'instant  $t$ , dans un câble  $\Omega_{ei}$

$$\dot{\epsilon}(x, t) = - \frac{\dot{N}_{ei}(t, x)}{E_a \cdot \Omega_{e,i}} - \left[ \frac{\dot{N}_{ei}(t, x)}{E_a \cdot \Omega_{e,i}} \right] - \frac{\bar{N}_{ei}(t, x)}{E_a \cdot \Omega_{e,i}} \cdot R(\bar{N}_{e,i}) \cdot \dot{r}(t, t_{e,i}) + \alpha \dot{T}(x, t)$$

(1) : On tient compte seulement de la variation de température dans la hauteur de la section et non dans la largeur.

3.3) Les variations de déformations dans les éléments  $S_i$  et  $A_{ei}$  sont respectivement analogue à la surnommée (3.1) sans les valeurs relatives aux forces extérieures et aux réactions hyperstatiques et à la (3.2) sans la valeur relative à la relaxation.

3.4) Les expressions des variations de courbure d'un élément  $S_i$  peuvent être obtenues directement suivant l'hypothèse de conservation des sections planes selon l'expression

$$\dot{\chi}(x,t) = \frac{\partial \dot{\epsilon}(x,y,t)}{\partial y} = \frac{\dot{\epsilon}(x,y_{i1},t) - \dot{\epsilon}(x,y_{i2},t)}{y_{i1} - y_{i2}}$$

#### 4) Solution du problème

Le problème a été résolu suivant la méthode des forces qui exige deux types d'équations de congruance:

a) Equations de congruance "locale" qui expriment, section par section, l'égalité des variations des déformations unitaires  $\dot{\epsilon}$  entre toutes les fibres contigues qui font partie de deux éléments divers, aussi que l'égalité des variations de courbure  $\dot{\chi}$ . Au cas où l'un ou bien les éléments voisins les deux soient dépourvus de rigidité à la flexion (par ex. les câbles de précontrainte et les aciers ordinaires) il faut imposer seulement l'égalité des  $\dot{\epsilon}$  correspondants.

Il en résulte un système du type:

$$(4.1) \begin{cases} \dot{\epsilon}_i(x, y_{ij}, t) = \dot{\epsilon}_j(x, y_{ji}, t) & \rightarrow i \neq j \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \text{ congruence des déformations entre les éléments } S_i \text{ et } S_j \\ \dot{\epsilon}_i(x, e_i, t) = \dot{\epsilon}_{ei}(x, t) & \rightarrow \text{congruence des déformations entre les éléments } S_i \text{ et les } \Omega_{ei}, A_{ei} \text{ correspondantes.} \\ \dot{\chi}_i(x, t) = \dot{\chi}_j(x, t) & \rightarrow \text{congruence des courbures entre les éléments } S_i, S_j \end{cases}$$

b) Equations de congruance "globale" exprimant la compatibilité avec les liens extérieurs et qui fournissent, dans le cas où ces derniers ne présentent aucune déformation, un système du type :

$$(4.2) \begin{cases} \dot{\delta}_K(x_K, t) = \int_e \dot{\chi}(x, t) M'_K(x) dx = 0 \\ \dot{\gamma}_K(x_K, t) = \int_e \dot{\chi}(x, t) M''_K(x) dx = 0 \end{cases}$$

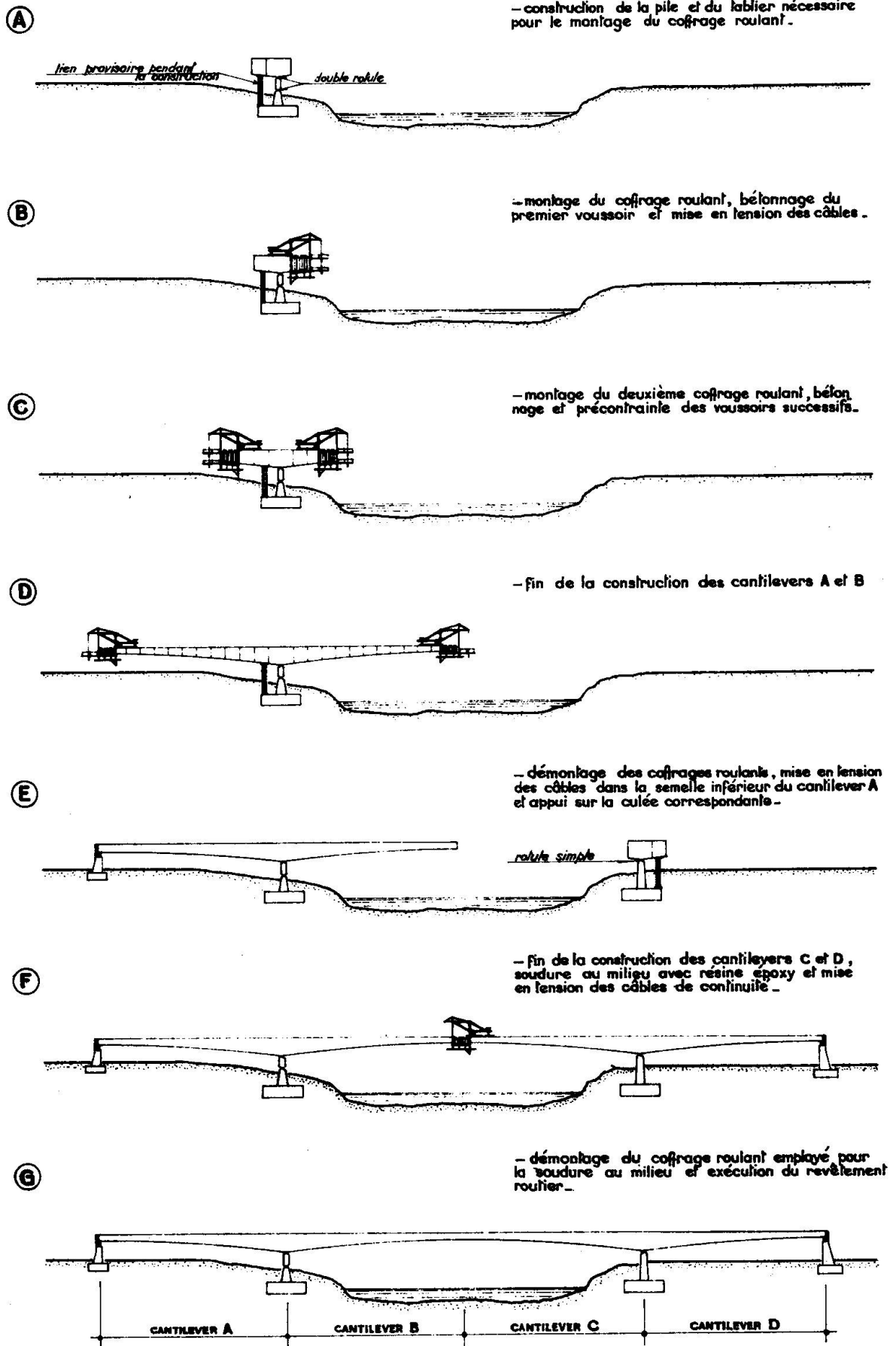
étant  $M'_K$ ,  $M''_K$  les moments dus respectivement à une force et à une couple unitaires appliqués au lien K, sur la structure rendue isostatique.

4.1) Le système constitué des équations (4.1) plus (4.2) permettrait de résoudre, dans certaines conditions, "d'un point de vue théorique", le problème fournissant pour chaque valeur de l'abscisse  $x$  et de temps  $t$ , les valeurs des variations des efforts dans les câbles ( $N_{ei}$ ) et dans l'acier ordinaire ( $N_{ei}^*$ ), des réactions mutuelles ( $N_{ij}$ ,  $M_{ij}$ ) et des réactions hyperstatiques ( $X_K$ ). La solution effective du système d'équations intégral-différentielles (4.1) plus (4.2) est pour tant pratiquement impossible; ainsi le système a été rapporté aux différences finies et résolu par l'emploi d'un computer (1)

#### 5) Ponts en encorbellement

Le système de construction est assez connu pour en souligner les moyen d'exécution. La fig.2 montre les phases d'exécution d'un pont, actuellement en construction, auquel on a appliqué la méthode ci-dessus exposée; naturellement dans ce cas-ci on a un seul élément de béton  $S$  et plusieurs éléments  $\Omega_e$ ,  $A_e$  (fig.1); (1) Le programme a été préparé avec la collaboration de l'ing. Giuseppe Pedretti

## PHASES DE CONSTRUCTION



- Fig. 2 -

la "congruance locale" se réduit donc seulement à des équations d'égalité des déformations ( $t$ ), et la "congruance globale" à des équations d'égalité des flèches et des rotations relatives dans la clé du pont. Le programme réalisé en langage Fortran pour le computer UNIVAC du Centre de calcul de l'Université de Rome fournit directement, outre que les valeurs des actions mutuelles, des chûtes de tension dans les câbles et des réactions hyperstatiques, les valeurs des tensions et des flèches aussi. La valeur des flèches à temps infini représente les modifications à faire à l'instant de la construction de chaque voussoir pour aboutir au niveau prévu dans le projet; pourtant le coffrage roulant supporte en effet des déformations produites par le bétonnage du voussoir pris en considération. Il faut donc tenir compte même de ce terme.

#### 6) Résultats numériques

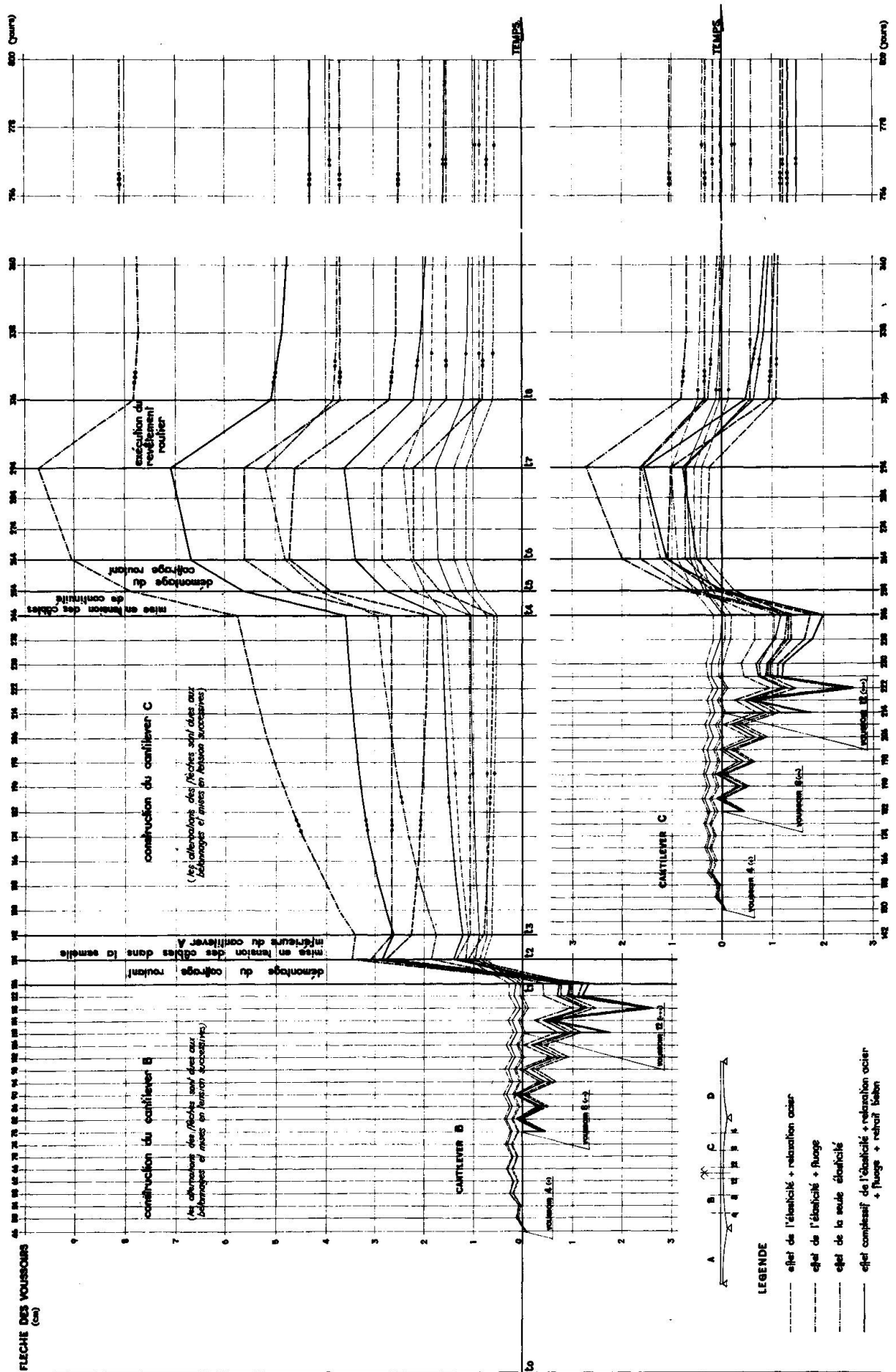
Quelques résultats numériques sont illustrés dans les figures suivantes:

- figure 3 : montre les déformations des voussoirs n°4,8,12, concernant les cantilevers centraux B et C. Il faut se rappeler que la construction du cantilever C est successive à la construction du cantilever B (cfr. fig.2). Pour chaque voussoir on a calculé quatre déformées différentes comme est-il indiqué dans la figure n.3 elle même.
- figure 4 : on montre la déformée de la structure dans son ensemble dans les instants plus significatifs, depuis fin construction des cantilevers jusqu'au temps théorique infini; ce dernier représente à moins de la déformation du coffrage roulant, les contre-flèches à donner au moment du bétonnage.
- figure 5 : montre les diagrammes des moments dûs aux différentes conditions de charge et les diagrammes résultants, en tenant compte du seul effet élastique et de l'effet total.

#### 7) C o n c l u s i o n s

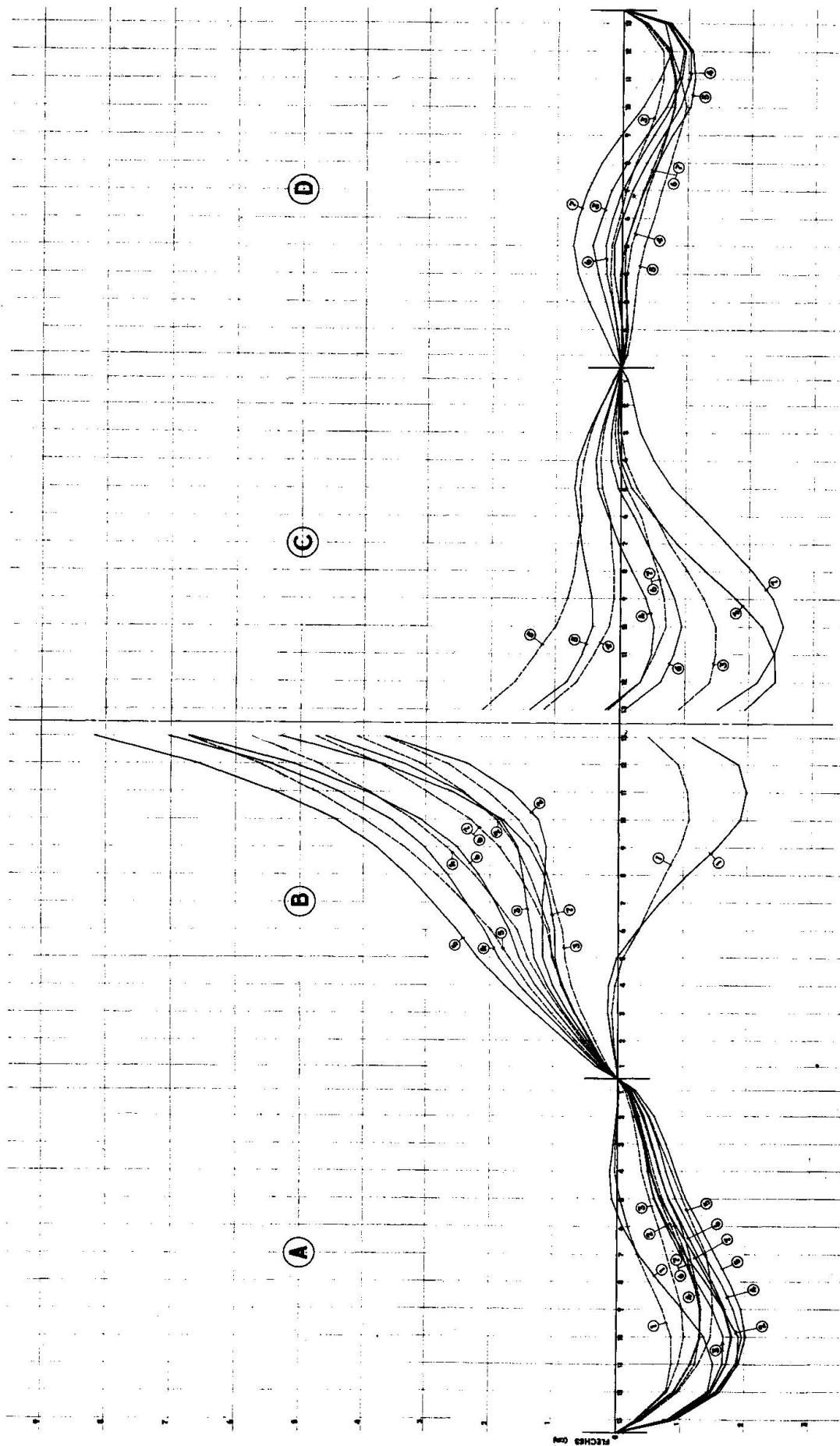
Dans le pont en objet les moments de précontrainte sont supérieures à ceux du poids propre: ceci comporte que tandis que la relaxation et le retrait provoquent des flèches tournées vers le bas, le fluage comporte des flèches vers le haut. On ne peut pas donc établir à l'avance, en général, si les déformations différées seront positives ou négatives, sauf savoir: dans les petites portées le moment de précontrainte est plus grand que le poids propre (donc les flèches de fluage seront vers le haut) tandis que dans les grandes portées vaut le contraire (les déformations compressives différées seront donc sûrement vers le bas et beaucoup plus grandes). Dans la prévision des contre-flèches est très important l'effet des déformations vers le haut dues au démontage des coffrages roulants et à la mise en tension des câbles de continuité (figg.3,4); il faut donc tenir compte que souvent, comme il arrive dans le cas en examen, est-il nécessaire d'imposer, à l'instant du bétonnage, des contre-flèches tournées vers le bas et non vers le haut, comme pourrait-il paraître plus logique.

Pour ce qui concerne les moments valent des considérations pareilles: n'est-il pas toujours vrai que les phénomènes différés comportent un rehaussement de la fondamentale des diagrammes des moments résultants. Pour avoir des renseignements plus adhérents à la réalité à l'égard des coefficients et des fonctions du fluage, du retrait, de la relaxation et de l'influence de la température, on est en train d'effectuer des essais sur le pont en question illustré dans la fig.2,





## DIAGRAMMES DES FLECHES



## LEGENDE

— SITUATION COMPLÈTE :  $\Delta_{\text{total}} = \Delta_{\text{stat}} + \Delta_{\text{dyn}} + \Delta_{\text{therm}} + \Delta_{\text{set}} + \Delta_{\text{shrink}} + \Delta_{\text{creep}} + \Delta_{\text{relax}} + \Delta_{\text{other}}$

— SITUATION ELASTIQUE

- ① — avant le démarrage du collage réalisé sur les couillures A et B
- ② — après le démarrage du collage réalisé
- ③ — avant l'essai en statique à la fin de l'installation des couillures C et D
- ④ — après l'essai en statique des câbles inférieurs dans les broches A et D
- ⑤ — après l'essai en statique et la mise en tension des câbles de couillures

- ⑥ — après le démarrage du collage réalisé sur la structure entière
- ⑦ — après la mise en tension du revêtement final
- ⑧ — à temps égal



et sur des éléments isolés en béton et acier.

Rome - Istituto di Scienza delle Costruzioni - Cattedra di Costruzione di Ponti.

## RESUME

On a examiné l'évolution dans le temps de la distribution des tensions et des déformations dans les structures composées d'éléments rendus adhérents par stades successifs.

Le problème a été résolu à l'aide d'un computer selon la méthode des forces. Quelques diagrammes illustrent des résultats numériques relatifs à un pont bâti en encorbellement.

## ZUSAMMENFASSUNG

Es wird die Entwicklung der Spannungs- und Verformungsverteilung im Verlaufe der Zeit an Bauwerken geprüft, die aus hintereinander angehafteten Teilen zusammengesetzt sind.

Das Problem wurde mit der Kräftemethode durch einen Elektronenrechner gelöst; einige Diagramme zeigen die numerischen Ergebnisse bei einer Freivorbaubrücke aus vorgespanntem Beton.

## SUMMARY

A study was made of the time-varying distributions of stress and strain in structures built from successively assembled prestressed elements. An analysis was carried out using a computer program based on the force method.

Some of the results, obtained from a worked example for a cantilever built bridge, are presented in diagrammatic form.

### III

#### **Zur Frage der näherungsweisen Ermittlung von Zwangsschnittgrößen**

Approximated Computation Method of Restraint Forces

Calcul approximatif des hyperstatiques dues aux déplacements d'appuis

KARL KORDINA

Braunschweig  
Deutschland

#### **1. Einleitung und Aufgabenstellung**

Im modernen Spannbetonbrückenbau ist die Berücksichtigung von Zwangswirkungen selbstverständlich. Die Auswirkungen von behinderten Temperatur-oder Schwindverformungen und von Setzungsdifferenzen benachbarter Widerlager werden rechnerisch verfolgt und bei Bemessung und Bewehrungsführung berücksichtigt. Im Hoch-und Industriebau hingegen wurden bisher Zwangswirkungen vielfach vernachlässigt, obwohl in einer Vielzahl von Schadensfällen vor allem der Gebrauchswert dieser Bauwerke beeinträchtigt wurde. Der Grund hierfür scheint darin zu liegen, daß die wirklichkeitsnahe Ermittlung der Zwangsschnittgrößen bei Stahlbetonbauten infolge der ungleichmäßigen Steifigkeitsänderungen durch die Rißbildung langwierig ist und über die Berücksichtigung von Zwangsschnittgrößen bei der Bemessung vielfach Unklarheit besteht: Zwangswirkungen werden ja bei Annäherung an den Erschöpfungszustand abgemindert, während Lastschnittgrößen stets voll aufzunehmen sind, - allenfalls umgelagert werden. Die Möglichkeit, Zwangsschnittgrößen wie Lastschnittgrößen mit Querschnittswerten nach Zustand I zu ermitteln und bei der Bemessung in gleicher Weise zu berücksichtigen, führt zu so offensichtlich unwirtschaftlichen Lösungen, daß man das andere Extrem bevorzugte und Zwangswirkungen vielfach vernachlässigte.

In der vorliegenden Studie werden vereinfachte Berechnungsverfahren zur Ermittlung von Zwangsschnittgrößen in Stahlbetonbauwerken des Hoch-und Industriebaus angegeben und wird die Berücksichtigung von Zwangsschnittgrößen bei der Bemessung diskutiert. Veranlaßt wurde diese Arbeit durch die Neufassung von DIN 1045 - Bemessung von Stahlbetonbauteilen - wo für bestimmte Fälle die Erfassung der Zwangsschnittgrößen gefordert wird.

Zwangsschnittgrößen beeinflussen vor allem den Gebrauchszustand von Massivbauwerken, dagegen in geringerem Maße deren Standsicherheit. Die Vernachlässigung von Zwangsschnittgrößen bei der Bemessung macht sich vorzugsweise bemerkbar durch unerwünschte Risse, die zu einer Beeinträchtigung der Nutzung des Bauwerks - z.B. Undichtigkeit

von Behältern - , zu einer Schmälerung der Dauerhaftigkeit infolge erhöhter Korrosionsgefahren und zu Schönheitsfehlern - etwa bei Sichtbetonflächen - führen können. Eine Beeinträchtigung der Stand-sicherheit durch Nichtberücksichtigung von Zwangsschnittgrößen wird dagegen selten beobachtet, weil Zwangsschnittgrößen bei Annäherung an den Erschöpfungszustand im untersuchten Bauteil infolge der dann gegebenen höheren Verformbarkeit in der Regel abgebaut werden. Bei der rechnerischen Behandlung von Zwangsschnittgrößen geht man daher im allgemeinen vom Gebrauchszustand aus; dies ist bei der Bemessung zu beachten, weil neuere Bemessungsverfahren meist auf den Erschöpfungs-zustand abstellen.

## 2. Zwangsschnittgrößen im rissefreien Bauwerk

In diesem Falle erfolgt die Berechnung sämtlicher Schnittgrößen nach Zustand I; um eine hinreichend hohe Sicherheit gegenüber unerwünschter Rißbildung zu erhalten, ist normalerweise Vorspannung erforderlich. Die Veränderung der Zwangsschnittgrößen durch Kriechen ist zu beachten; bei der Bemessung sind die Zwangsschnittgrößen den gleichzeitig wirkenden Lastschnittgrößen zu überlagern. Überlegungen dieser Art sind für den Entwurf von Brückenüberbauten oder Behältern aus Spannbeton kennzeichnend. Die Betonzugfestigkeiten bzw. Biegezugfestigkeiten dürfen nicht überschritten werden; die nach Zustand I ermittelten und für die Analyse des statisch unbestimmten Systems benötigten Biegesteifigkeiten dürfen nicht abgemindert werden.

Die Berechnung der Zwangsschnittgrößen erfolgt somit unter Anwendung der auch für die Ermittlung der Lastschnittgrößen benutzten Grundlagen und bedarf keiner weiteren Erläuterung. Es erscheint aber statthaft, die Zwangsschnittgrößen bei der Bemessung gegenüber den Lastschnittgrößen mit geringerem Gewicht zu berücksichtigen, was bisher vielfach bauaufsichtlich nicht zugestanden wird.

Wird von einer Aufspaltung der gebräuchlichen globalen Sicherheitsbeiwerte Gebrauch gemacht, wurden folgende Ansätze empfohlen [1,2,3,4]:

	Lastschnitt- größen	Zwangsschnitt- größen
Unsicherheit der Last	1,15	1,00
" der Lastermittlung	1,15	1,15
Unsicherheit der Baustoffgüte	1,10	1,10
" " Bauausführung	1,20	1,20
Gesamt-Sicherheitsbeiwert	1,75	1,50

### 3. Zwangsschnittgrößen bei mäßiger Rißbildung - Normalfall für Stahlbetonbauwerke

#### 3.1 Umfang der Untersuchungen

In diesem Falle sollte das für die Ermittlung der Lastschnittgrößen benutzte Rechenverfahren möglichst auch für die Bestimmung der Zwangsschnittgrößen angewendet werden können, trotzdem aber den steifigkeitsmindernden Einfluß der Rißbildung berücksichtigen. Dies wird ermöglicht, wenn es gelingt, jeweils für einzelne Tragwerksteile Abminderungsbeiwerte der Steifigkeiten anzugeben. Dieser Versuch scheint aussichtsreich zu sein, weil sich die hier maßgebende Verdrehung der Endquerschnitte aus einer Integration über die gesamte Bauteillänge ergibt, wobei die stark unterschiedlichen Verkrümmungen der Einzelquerschnitte ausgeglichen werden.

Um die Möglichkeit dieser Lösung zu überprüfen, wurden einige typische Beanspruchungszustände und Bauteile ausgewählt und im Hinblick auf die Auswirkungen eines Zwanges studiert. Als Zwangswirkungen wurden Temperaturgradienten eingesetzt, wobei in getrennten Untersuchungen von einer Erwärmung der Bauteilunter- bzw. -oberseite ausgegangen wurde. Außerdem wurden die Auswirkungen von Setzungsdifferenzen studiert. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen können auch dazu herangezogen werden, den Einfluß von Schwindverformungen großer Flachdecken auf die Biegemomente in den zugehörigen Stützen abzuschätzen, wobei der Lastfall Biegung mit Achsdruck zugrunde zu legen wäre.

Die vorliegende Untersuchung erstreckt sich auf Rechteckbalken und Plattenbalken mit konstantem Querschnitt, wobei überwiegend beidseitige starre Einspannung vorausgesetzt wurde. Weil das Superpositionsgesetz nicht gilt, mußte eine gleichzeitig wirkende äußere Last vorgegeben werden; als Lastschnittgröße wurde jeweils ein Moment aus gleichmäßig verteilter Last und - in einer ausgewählten Anzahl von Fällen - eine zusätzliche Längsdruck- oder Längszugkraft eingeführt.

#### 3.2 Rechengrundlagen und Rechengang

Als Rechengrundlagen dienten eine parabelförmige, nichtlineare Spannungsdehnungslinie des Betons für Kurzzeitbelastung sowie eine bilineare Spannungsdehnungslinie für Betonstahl (Bild 1). Es wurde Beton mit einem Mittelwert der Würfeldruckfestigkeit von  $300 \text{ kp/cm}^2$  sowie Betonstahl mit einer Fließgrenze von  $4200 \text{ kp/cm}^2$  vorausgesetzt. Die Mitwirkung des Betons auf Zug wurde nur bis zum Erreichen einer von der Art der Beanspruchung abhängigen Randspannung angenommen; nach Eintritt einer Rißbildung wurde der Beton zwischen den Rissen als nicht mitwirkend angesehen.

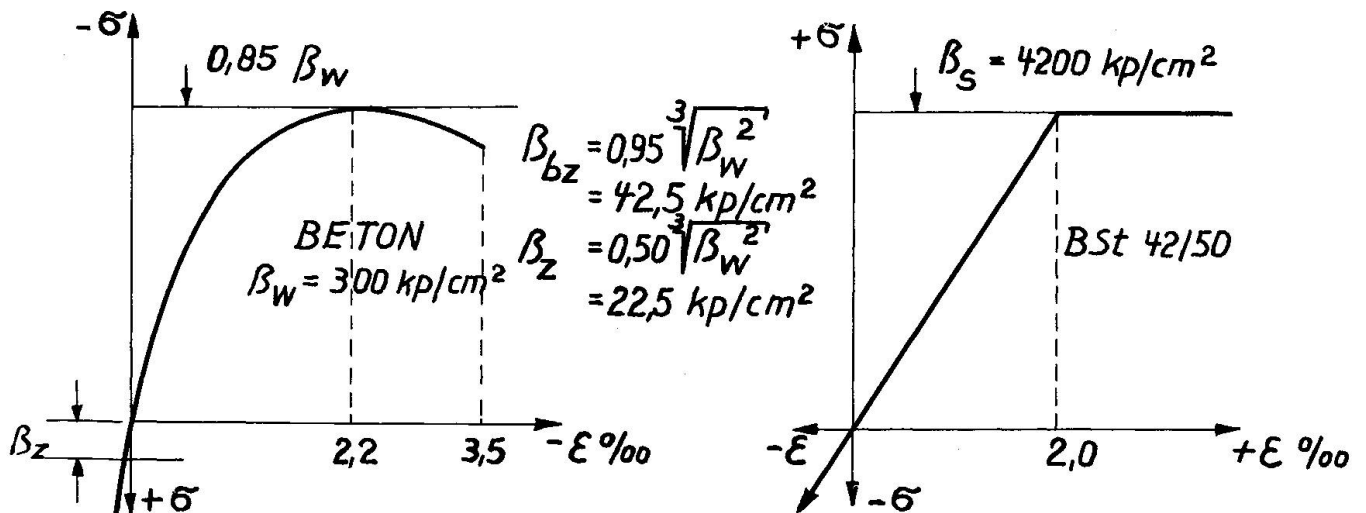


Bild 1

Die untersuchten Querschnittsformen sind in Bild 2 wiedergegeben. Die Bewehrung der Ober- bzw. Unterseite der Balken wurde zwischen den Einspannquerschnitten und den Momentennullpunkten jeweils als konstant vorausgesetzt. Dies dürfte eine gegenüber der gebräuchlichen Bewehrungsführung (Staffelung der Stütz- und Feldbewehrung, aber Weiterführen eines Bewehrungsteiles über die Momentennullpunkte hinaus) vertretbare Näherung darstellen. Das Verhältnis zwischen Stütz- und Feldbewehrung wurde variiert. In einigen Sonderfällen und bei Biegung mit Längskraft wurde auf beiden Balkenseiten eine durchgehende oder gestaffelte Bewehrung vorausgesetzt.

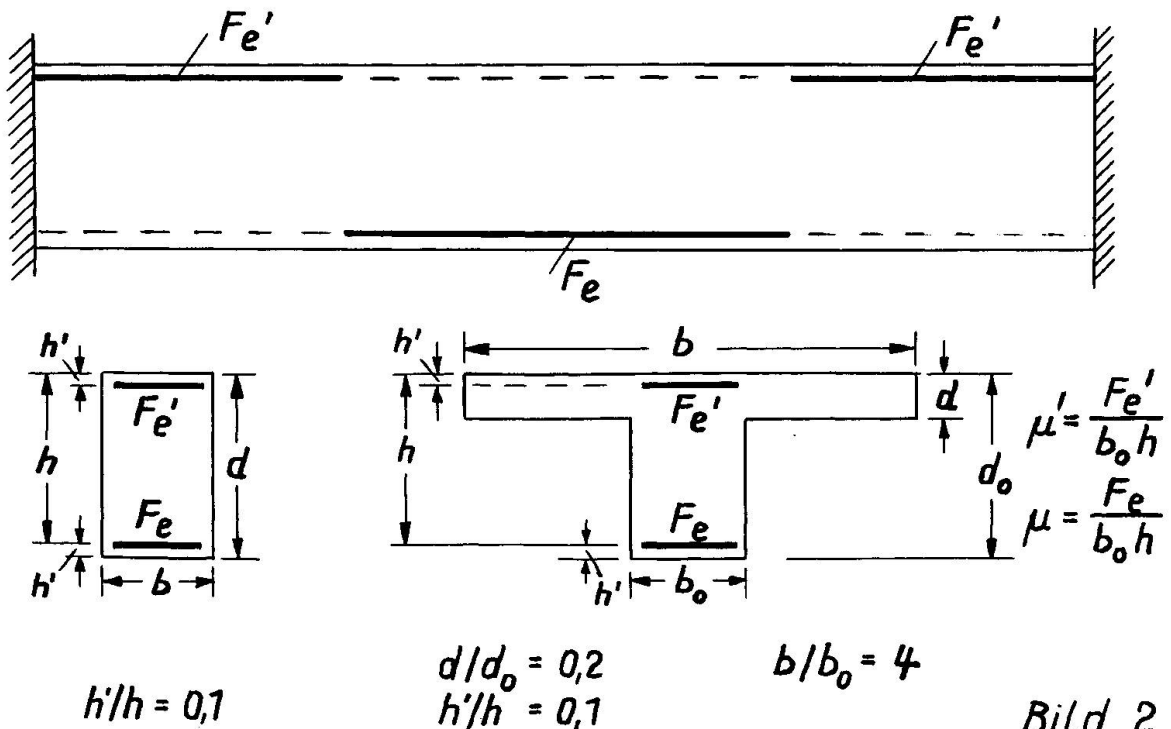
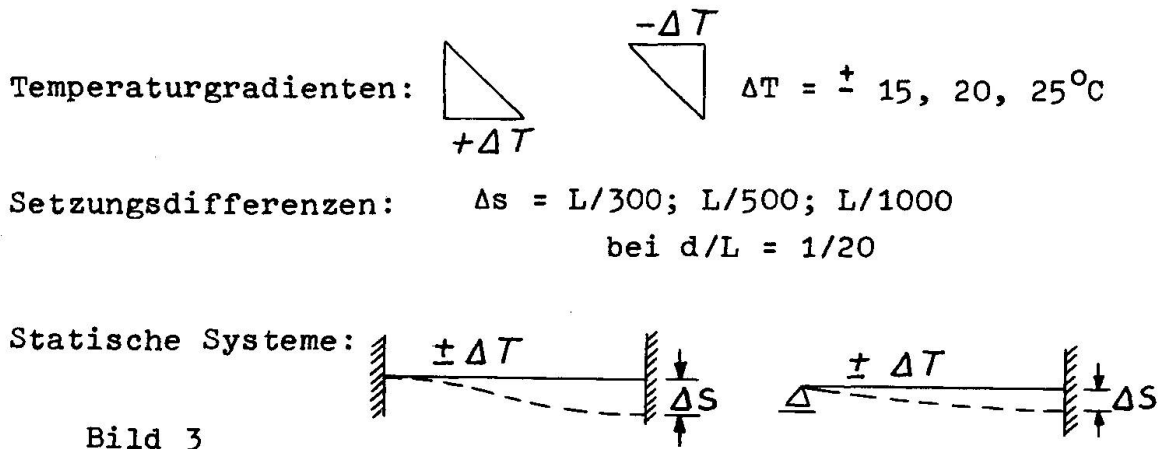


Bild 2



Bild 3 zeigt schematisch die untersuchten Zwangwirkungen und Lagerungsbedingungen:



Das Ziel der vorliegenden Studie ist, Beiwerte zu ermitteln, die in Verfahren der Elastizitätstheorie zur Ermittlung von Zwangsschnittgrößen eingeführt werden können, um wirklichkeitsnahe Ergebnisse herbeizuführen. Lösungen auf der Grundlage der Elastizitätstheorie legen i.d.R. Zustand I zugrunde, weswegen die gesuchten Beiwerte als Verhältnis  $c = (E \cdot J)_w / (E_b \cdot J_b)$  ausgedrückt wurden, wobei der Index w "wirksam" bedeuten soll. Ein Beispiel soll dies erläutern:

Berechnung eines Zwangsmomentes  $M_z$  infolge eines Temperaturgradienten nach E-Theorie:

$$M_z^I = \gamma \cdot \frac{\alpha_T \cdot \Delta T \cdot E_b \cdot J_b}{d}$$

Hierin ist  $\gamma$  ein von den Lagerungsbedingungen der Stabenden abhängiger Wert, der beispielsweise beim beiderseits starr eingespannten Balken zu 1,0 wird.

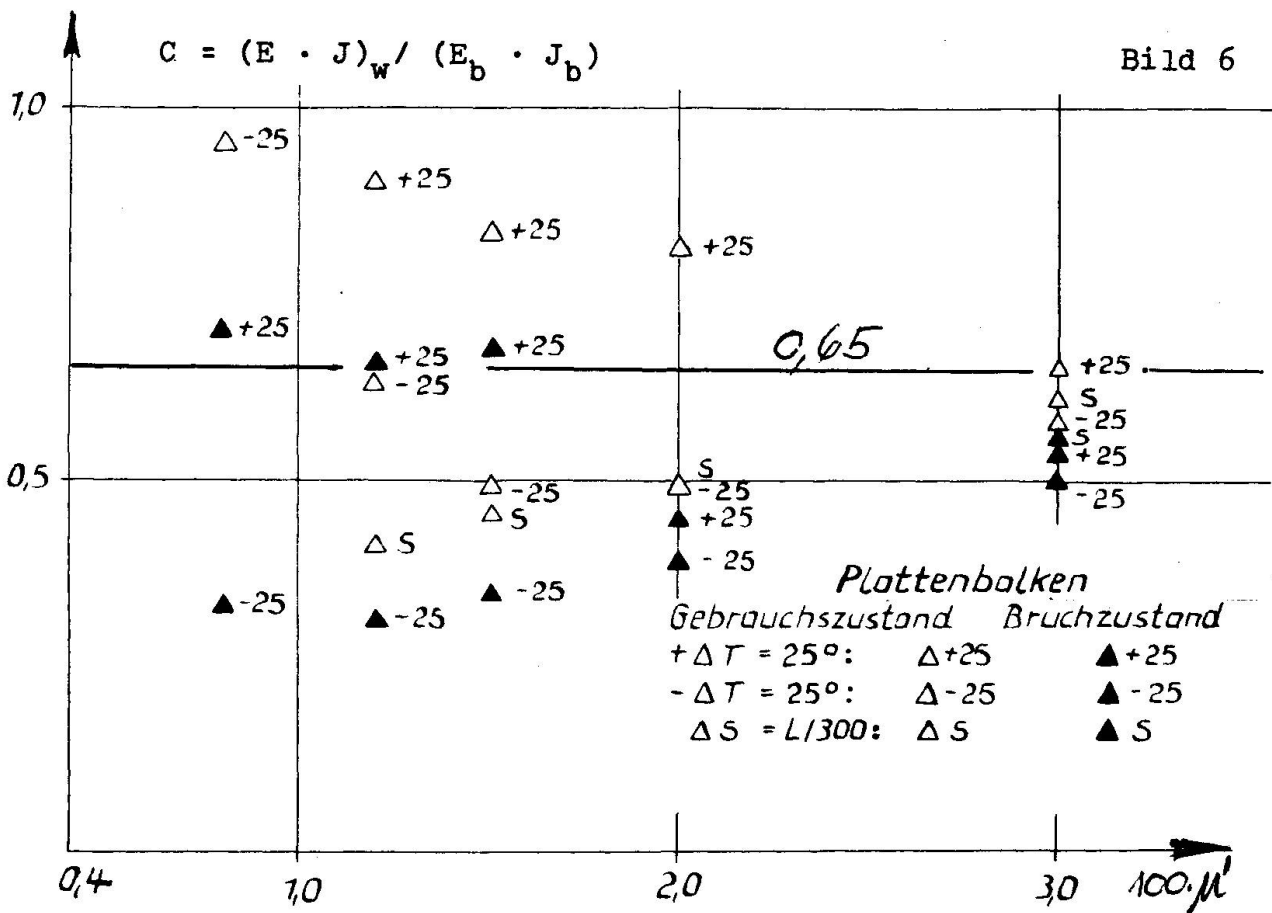
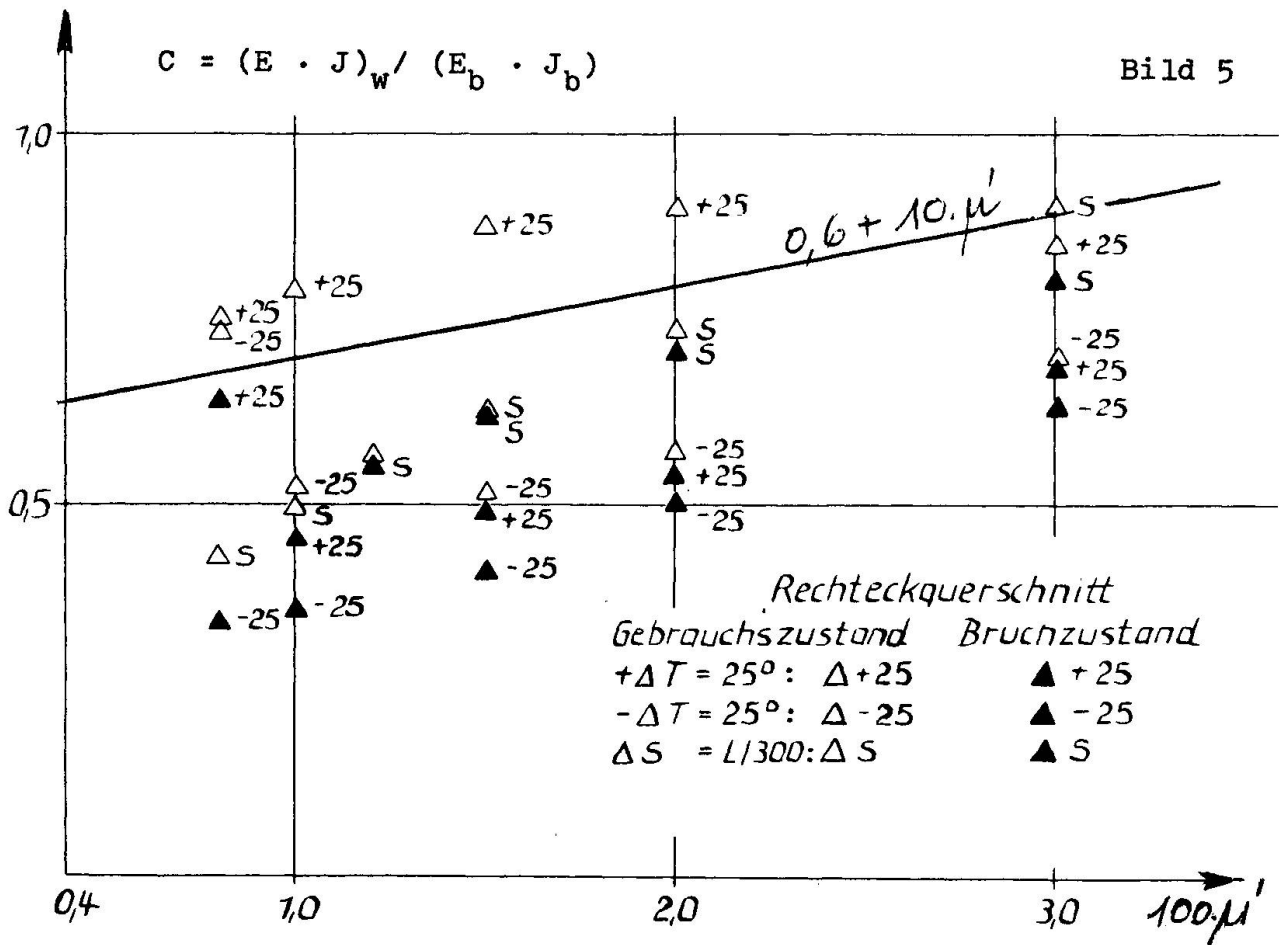
Mit Hilfe der zu ermittelnden Beiwerte  $c$  ergibt sich hingegen für Zustand II:

$$M_z^{II} = \gamma \cdot \frac{\alpha_T \cdot \Delta T \cdot (E \cdot J)_w}{d} = M_z^I \cdot c$$

Der Beiwert  $c$  reduziert somit die Biegesteifigkeit des ungerissenen Betonquerschnitts  $(E_b \cdot J_b)$  auf den für den betrachteten Lastfall bzw. Zwang maßgebenden Wert  $(E \cdot J)_w$ .

In Bild 4 sind die wichtigsten Ergebnisse für einen der untersuchten Bewehrungsgehalte dargestellt. Das bezogene Moment  $m_{st,q} = M/b \cdot h^2 \cdot B_n$  entspricht dem Stützmoment aus äußerer Last  $q$ , nach Elastizitätstheorie für Zustand I ermittelt (vergl. Bild 3, beiderseitige Einspannung). Als Betongüte wurde die 5%-Fraktile der Würfel Festigkeit  $B_n$  eingeführt, hier  $250 \text{ kp/cm}^2$ . Die Ordinatenwerte  $c$  entsprechen jedoch den Steifigkeitsverhältnissen im oben angedeuteten Sinne, die sich bei zusätzlicher Wirkung des untersuchten





### 3.3 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die rechnerischen Untersuchungen sind begreiflicherweise sehr umfangreich und noch nicht abgeschlossen. Schon jetzt läßt sich aber sagen, daß für die überwiegende Zahl üblicher Fälle des Hoch- und Industriebaues die Angabe einheitlicher Abminderungsbeiwerte, gültig für einen ganzen Tragwerksabschnitt, bei gegenüber den Zwangsschnittgrößen überwiegenden Lastschnittgrößen möglich ist.

Für die Ermittlung der Zwangsschnittgrößen können auf Grund der vorliegenden Untersuchungen vorläufig die nachfolgend angegebenen Abminderungsbeiwerte  $c$  empfohlen werden:

	Beiwerte $c = (E \cdot J)_w / (E_b \cdot J_b)$ für Gebrauchszustand	
	Rechteck- querschnitt	Platten- balken
Biegung mit Achsdruck (annähernd konstante, symmetr. Bewehrung)	$0,6 + 15(\mu + \mu')$	-
Biegung (einseitige Bewehrung, $\mu' = F_e' / b_0 \cdot h$ Bewehrungsgehalt der Zugseite im Einspannquerschnitt)	$0,6 + 10 \cdot \mu'$	0,65
Biegung mit Achszug (annähernd konstante, symmetr. Bewehrung)	$0,2 + 15(\mu + \mu')$	-

Die vorstehend genannten Beiwerte  $c$  sind auf mittlere Betongüten und normale Bewehrungsgehalte aus BSt 42/50 abgestellt. Ist bei den Lastfällen Biegung mit Längskraft die Bewehrung der Querschnittsseiten nicht konstant oder nicht symmetrisch, ist ein Mittelwert für  $(\mu + \mu')$  unter Berücksichtigung der Verteilung der Bewehrung über die Bauteillänge zu bilden.

Unterschiede innerhalb des Berechnungsverfahrens danach, ob die Zwangwirkungen den Lastwirkungen entgegengesetzt gerichtet sind oder die Lastwirkungen erhöhen, wurden – im Gegensatz zu DIN 1045 – nicht gemacht, weil in der Mehrzahl aller Fälle innerhalb eines Bauteils beides eintritt und der Konstrukteur überfordert wäre, wenn er gesonderte Überlegungen zu dieser Frage anstellen müßte. Die für den Gebrauchszustand genannten Ansätze führen innerhalb der durch den Sicherheitsbeiwert gedeckten Schwankungsbreite zu brauchbaren Werten für die Zwangsschnittgrößen.

An die Beschränkung der Rißbreite durch Beachtung der zulässigen Größtdurchmesser der Bewehrungsstäbe wird erinnert!

Auch bei Stahlbetonbauteilen wird man bei der Bemessung von der Vorstellung ausgehen, daß die Zwangsschnittgrößen mit geringerem Gewicht berücksichtigt werden dürfen wie die Lastschnittgrößen. Wird eine Aufspaltung des globalen Sicherheitsbeiwertes zugrundegelegt, ist eine Herabsetzung des Gesamtsicherheitsbeiwertes für Zwangsschnittgrößen auf 1,3 – gegenüber einem Gesamtsicherheitsbei-

wert für Lastschnittgrößen von 1,75 - vertretbar. Als Begründung für den gegenüber Abschnitt 2 niedrigeren Wert mag gelten, daß die Versagenswahrscheinlichkeit im vorliegenden Fall geringer veranschlagt werden darf als bei einem Bauwerk, das rissefrei bleiben soll [5]. Die Abminderung der Zwangschnittgrößen durch Kriechen kann zwar in Ansatz gebracht werden, doch ist dies rechnerisch etwas beschwerlich, weil gerissene Querschnitte vorliegen; wirtschaftlich ist durch die Berücksichtigung des Kriechens wohl nur in Ausnahmefällen ein fühlbarer Gewinn zu erzielen.

Zwangwirkungen, die den Lastschnittgrößen entgegengerichtet sind, wird man bei der Bemessung i.a. unberücksichtigt lassen, - es sei denn, die Zwangwirkung ist größer als die Lastschnittgröße infolge  $\min q$ .

Die Untersuchungen werden fortgesetzt.

#### Literaturverzeichnis:

- [1] Rüsch, H.: "Der Einfluß des Sicherheitsbegriffs"  
Schweizer Archiv, H.3, 1954
- [2] Kordina, K.: "Sicherheitsbetrachtungen bei Spannbeton-  
konstruktionen"  
Schweizer Archiv, H.9, 1959
- [3] Rüsch, H. und Kupfer, H.: "Bemessung von Spannbetonbauteilen"  
Betonkalender
- [4] Kordina, K.: "Zur Anwendung der Sicherheitstheorie  
bei Stabilitätsuntersuchungen im  
Stahlbetonbau"  
Aus Theorie und Praxis des Stahlbeton-  
baues, W. Ernst u. Sohn
- [5] Kordina, K.: "Temperaturbeanspruchungen in kreis-  
zylindrischen Stahlbetonbehältern"  
Revue C-Tijdschrift III-No.6-1964

#### ZUSAMMENFASSUNG

Zwangwirkungen in statisch unbestimmten Systemen des Hoch- und Industrie-  
baues wurden bisher selten berücksichtigt, weil einfache Berechnungsverfahren fehlen,  
die auch den Einfluss der Rissbildung erfassen. Mit der vorliegenden Studie wird  
versucht, solch ein vereinfachtes Verfahren anzugeben, wobei Abminderungsbeiwerte  
für die Biegesteifigkeit der einzelnen Tragwerksteile Verwendung finden. Ausser-  
dem werden Angaben gemacht, wie Zwangschnittgrößen zusammen mit Lastschnitt-  
größen bei der Bemessung zu berücksichtigen sind.

## SUMMARY

Restraint forces in hyperstatic systems of structural buildings are rarely calculated, because of the lack of simple computational methods, which take into account the influence of cracking. In this paper a simple method of calculation is proposed, in which reduction factors are used to evaluate the effective bending stiffness of individual members. In addition, the dimensioning of cross sections is discussed with respect to both restraint and load effects.

## RESUME

On tient rarement compte aujourd'hui des efforts hyperstatiques dûs aux déplacements d'appuis dans les structures des bâtiments et des constructions industrielles statiquement indéterminées, parce qu'on ne dispose pas d'une méthode de calcul simple comprenant l'influence de la fissuration.

On a essayé dans la présente étude de donner une méthode simplifiée qui emploie des coefficients de réduction pour la rigidité flexionnelle de chaque élément. En outre, on indique la manière de combiner pour le dimensionnement les efforts dûs aux déplacements d'appuis avec les autres efforts.

### III

#### **Die Auswirkungen von Temperaturänderungen auf die Verformung stabförmiger Tragwerke**

Temperature Effects in Framed Structures

Les effets des changements de température sur les déformations des cadres

**IGOR UHERKOVICH**  
Schweiz

Das klassische Ingenieurdenken, das sich hauptsächlich auf den Endzustand konzentriert, nämlich die Dauerstandsicherheit des Bauwerkes zu beurteilen, und den vorübergehenden Zuständen nicht allzu viele Aufmerksamkeit schenkt, ist noch sehr ausgeprägt. Von drei, auch von diesem Symposium behandelten Einflüssen : Schwinden, Kriechen und Temperatur, kommt letztere weitaus zu kurz. Die meisten Theoretiker wie auch Praktiker tragen der Tatsache zu wenig Rechnung, dass die im Freien sich befindlichen Bauten einer ständig sich ändernden Temperatur der Umgebung ausgesetzt sind, dass sie von der Sonneneinstrahlung oder anderen Wärmequellen direkt beeinflusst werden, dass sie aber diesen unregelmässigen Wärmewellen, wegen der verhältnismässig geringen Wärmeleitzahl des Betons, nicht ganz folgen können. Jeder Punkt eines Baukörpers erhält innerhalb einer gewissen Zeit eine von anderen Punkten verschiedene Temperaturänderung. Als Folge dessen treten am Baukörper Formänderungen und Spannungen auf. Es nützt wenig, Ratschläge für Massnahmen zur Verringerung des Temperatureinflusses zu geben, wenn der überwiegenden Zahl der Ingenieure der ganze Temperaturmechanismus in Baukörpern nicht ganz klar ist. Hinzu kommt ein weiteres. Es gibt heute eine Reihe von Bauverfahren, bei denen die Beherrschung des Deformationsmechanismus der im Bau sich befindenden Konstruktion für die Endform ausschlaggebend ist. So muss man zum Beispiel beim Freivorbau von Brücken den jeweiligen Bauabschnitt so einstellen, dass die Konstruktion nach Aufbringen der ständigen Last und nach Abklingen von Schwinden und Kriechen die vorgesehene Höhenlage einnimmt. Die verlangte Genauigkeit ist dabei ziemlich gross. Ein späterer Ausgleich fordert als Preis meist eine erhöhte ständige Last, die man kaum noch als Nutzlast betrachten kann, die ferner eine Reduktion der Spannungsreserven bewirkt und die häufig ein grösseres Kriechen verursacht. Die durch die sich ständig ändernden Temperatureinflüsse bewirkte Forminstabilität der Konstruktion erschwert aber diese Aufgabe derart, dass sie nicht mehr mit einfachen Mitteln zu bewältigen ist. Es wird daher notwendig, dem Problem eine grössere Aufmerksamkeit zu widmen und zu versuchen, auf Grund einer Analyse den ganzen Vorgang besser kennenzulernen und zu beherrschen.

Als Ausgangspunkt muss man sich der physikalischen Kenntnisse über die Wärmetechnik bedienen und erst nachher die daraus ermit-



telten Wärmeeinflüsse von unserem bautechnischen Standpunkt aus prüfen. Die Wärme als Energie ist hier einer Last gleichzustellen. Zuerst ist daher die Grösse und Verteilung dieser "Last" zu bestimmen.

Die mit der Zeit veränderliche Temperaturerhöhung  $T$  eines dreidimensionalen Körpers an der Stelle  $m(x,y,z)$  ist allgemein durch die Fourierische partielle Differential-Gleichung definiert :

$$\frac{\delta T}{\delta t} = a^2 \left( \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta z^2} \right) \quad [1]$$

wobei  $a^2 = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma}$

eine physikalische, ausschliesslich durch die Materialeigenschaften gegebene Konstante darstellt ( $\lambda$  = Wärmeleitzahl,  $c$  = spezifische Wärme,  $\gamma$  = Rohdichte). Man muss dabei berücksichtigen, dass die Wärmezufuhr in den Körper nicht nur durch Wärmeströmung von der umschliessenden Umgebung, die durch die Wärmeübergangsformel definiert ist, sondern auch durch die Absorbierung der Wärmestrahlung erfolgt.

Auch wenn die Lösung dieser Aufgabe für komplizierte Baukörper nicht eben als einfach angesehen werden kann, ist sie dank der heutigen Mittel der Rechentechnik doch meist möglich. Um die Randbedingungen zu erfassen und zu formulieren, muss sich aber der Ingenieur bereits auch mit meteorologischen Messungen befassen. Es ist also möglich, das Temperaturfeld eines bestimmten Baukörpers, genauer gesagt die Änderungen dieses Temperaturfeldes, aus vorgegebenen Temperatureinflüssen rechnerisch herzuleiten.

Die weitere Lösung des Problems ist schon einfacher, wenn auch mit rechnerischem Aufwand verbunden. Die elastische Dehnung des stabförmigen Tragwerkes in Richtung seiner Längsachse  $x$  ist zum Zeitpunkt  $t$  definiert (wenn  $y, z$  die Querschnittskoordinanten sind) :

$$\epsilon_x = \frac{dx}{ds} = \alpha \frac{1}{F_x} \int_{F_x} \Delta T_{(y,z)} \cdot dF_{(y,z)} \quad [2]$$

Die Krümmung der Längeneinheit des Stabes ist :

$$\varphi'_{(y)} = \frac{d\varphi_{(y)}}{ds} = \alpha \frac{1}{I_y} \int \Delta T_{(y,z)} \cdot y \cdot dF_{(y,z)} \quad [3]$$

$$\varphi'_{(z)} = \frac{d\varphi_{(z)}}{ds} = \alpha \frac{1}{I_z} \int \Delta T_{(y,z)} \cdot z \cdot dF_{(y,z)} \quad [4]$$

An der Stelle  $m(y, z)$  des Querschnittes bleiben daher Restspannungen, die wegen des Ebenbleibens der Querschnitte in keine Verformung transformiert werden können :

$$\sigma_{T(m)} = E \cdot \alpha \left[ \Delta T_{(m)}^t - \frac{1}{F} \int \Delta T^t dF - \frac{y_m}{I_y} \int \Delta T y^t dF - \frac{z_m}{I_z} \int \Delta T z^t dF \right] \quad [5]$$

Selbstverständlich haben diese Formel nur Gültigkeit bei unbehinderter Verformung des Baukörpers. Trifft das nicht zu, so treten Zwängungsspannungen auf, die dem behinderten Teil der Verformung entsprechen. Bei veränderlichem Querschnitt oder ungleichem Wärmeinfluss längs der  $x$ -Koordinate sind die Ausdrücke der zu integrierenden Glieder um die veränderliche  $x$  noch zu erweitern.

Die Grössenordnung der von Temperaturänderungen verursachten Verformungen und Spannungen will ich an einem Beispiel veranschaulichen. Der durch einen Temperaturunterschied in der Luft von  $+10^\circ \text{C}$  innert 5 Stunden und eine kurzzeitige intensive Sonneneinstrahlung verursachte Temperaturanstieg verschiedener Messpunkte eines vereinfachten Brückenquerschnittes ist aus Bild 1 ersichtlich.

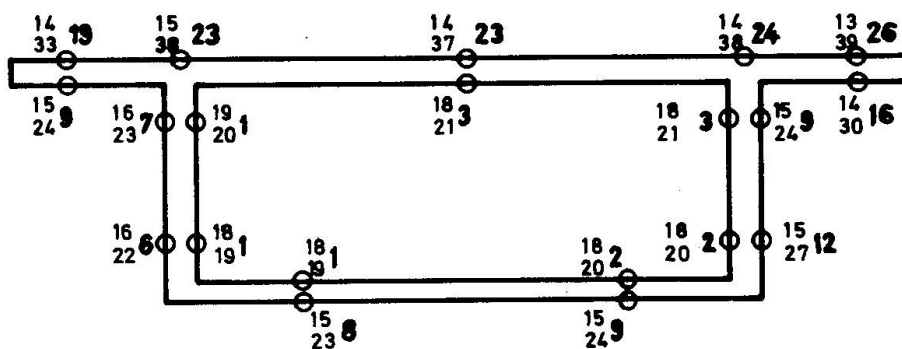


Bild 1 Zwei nacheinander folgende Temperaturmessungen und die Differenzen in  $^\circ\text{C}$  an einem Brückenquerschnitt

1m 1m

Unter der Annahme, dass sich dieses Bild in allen (immer gleichen) Querschnitten eines 40 m langen Kragarmes wiederholt, ergibt sich aus Gl.[3] für die Durchbiegung am Ende des Kragarmes ein Wert von 23 mm, was einer elastischen Durchbiegung unter einer am Kragarmende angreifenden Einzellast von 55 Mp oder einer gleichmässig über die ganze Brückenplatte verteilten Last von  $300 \text{ kp/m}^2$  entspricht. Wie ersichtlich, können die Verformungen die rein auf im Laufe eines Vormittags sich veränderten klimatischen Verhältnissen zurückzuführen sind gleich gross sein, wie etwa die vom Gewicht eines 3 m langen Betonierabschnittes! Diese berechneten Werte stimmen mit auf der Baustelle gemessenen gut überein.

Zu den Verformungen kommen noch Restspannungen (Gl.[5]), wie sie in Bild 2 dargestellt sind. Sie wurden an verschiedenen Punkten des Querschnittes ermittelt. Die Grösse dieser Spannungen ist so beträchtlich, dass man sie nicht vernachlässigen sollte.

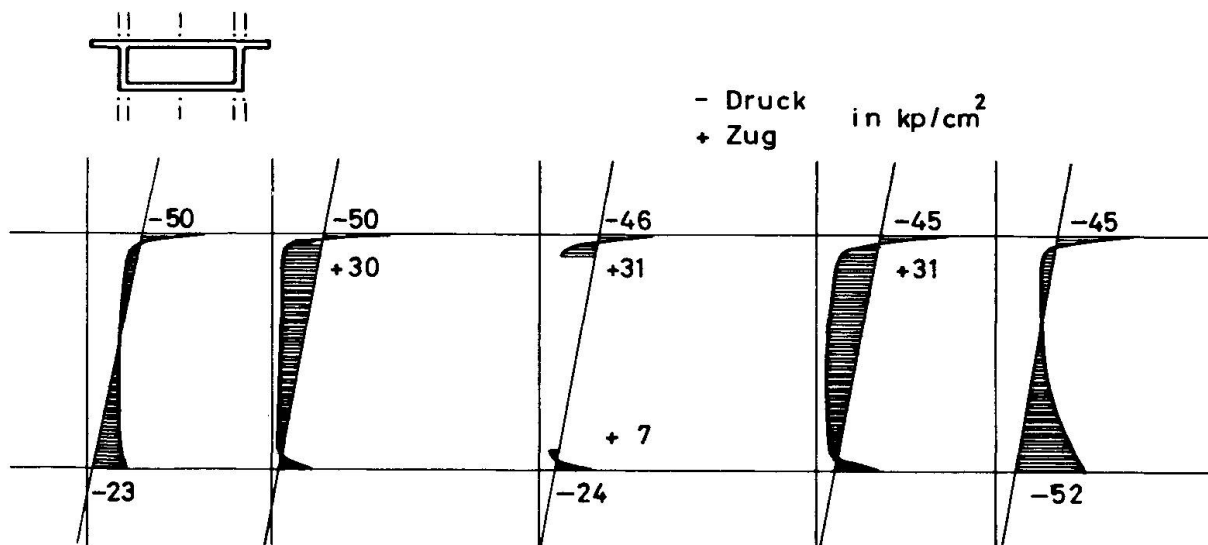


Bild 2 Temperaturspannungen in Folge einer Erwärmung nach Bild 1 an frei verformbarem Stab, bei Annahme  $E=400'000\text{kp/cm}^2$

Die praktische Ermittlung der Auswirkungen von Temperatureinflüssen ist auf drei Wegen möglich :

1. Eine rein theoretische, rechnerische Lösung, welche wie erwähnt die Aufstellung eines klimatischen Modells erfordert und zu komplizierten, mathematischen Ausdrücken (Gl. [1]) führt. Dieser Weg ist nur mit entsprechenden Computern zu bewältigen, ist aber allein imstande, schon bei der Projektierung ein Bild über diese Einflüsse zu schaffen.
2. Durch die Temperaturmessung an schon ausgeführten Bauabschnitten einer im Bau befindlichen Konstruktion. Mit diesen gemessenen Werten führt man gemäss Gl. [2] - [5] die Verformungs- und Spannungsberechnung durch. Bei Trägern mit veränderlichem Querschnitt wird dabei ein Tischcomputer von höchstem Nutzen sein.
3. Die direkte Verformungsmessung. Da man bei normalen Nivelliermethoden wegen des grossen Zeitaufwandes zu spät Resultate erhält, möchte ich dazu eine feste Installation vorschlagen, bei der eine Polaroid-Camera montiert an einem selbstjustierenden Nivelliergerät von einer festen Messtelle aus Messlineale fotografiert, die am Bauwerk unverrückbar befestigt sind. Dies ermöglicht in wenigen Minuten Resultate vorliegen zu haben, mit denen Höhenkorrekturen vorgenommen werden können.

Am besten wäre es, an ausgewählten Bauobjekten alle drei Methoden zu erproben, um vergleichen zu können.

Ueber das Thema Temperatureinflüsse auf Betonbauten liegen viele wertvolle Resultate vor, Messungen und theoretische Arbeiten auf

den Gebieten Bautenbrandschutz, Kaminbau, Betonfahrbahnen, Talsperren. Es ist eine unserer Aufgaben, auf diesen Erkenntnissen weiterzubauen, um auch dem Ingenieur, der auf anderen Gebieten des Bauwesens tätig ist und sich mit diesem Problem noch nicht beschäftigt hat, den Blick dafür zu öffnen.

## ZUSAMMENFASSUNG

Bei im Freien stehenden Beton-Konstruktionen können unter Einwirkung von Aussentemperatur und Sonneneinstrahlung Formänderungen und Eigenspannungen beträchtlicher Grösse auftreten. Die Temperaturverteilung in der Konstruktion ist durch Lösung der Fourierschen Differentialgleichung erfassbar. Bei bekannten Temperaturfeldern sind dann die Verformungen und Spannungen leicht zu ermitteln.

## SUMMARY

The influence of external temperature and solar irradiation on open-air concrete structures can create large internal deformations and stresses. The temperature distribution in a structure can be determined by solving the Fourier differential equation. With the temperature fields known, it is a simple matter to determine the resulting deformations and stresses.

## RESUME

L'influence de la température extérieure et du rayonnement solaire direct sur les constructions en béton peut donner des déformations et des contraintes internes très grandes. En résolvant l'équation différentielle de Fourier, on obtiendra la distribution de la température dans la construction; ensuite, on calculera facilement les déformations et les contraintes.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide

### III

#### **Creep in Reinforced Concrete Slabs Subjected to Repeated Loads**

Le fluage des dalles en béton armé soumises à des charges répétées

Kriechen in Stahlbetonplatten infolge Wechsellast

**TOKUYA YAMASAKI**

Professor  
Kyushu University  
Japan

**TAKESHI CHISYAKI**

Assistant Professor  
Kyushu University  
Japan

**HIROSHI HIKOSAKA**

Lecturer  
Kyushu University  
Japan

#### **1. Introduction**

It is well-known that the creep of concrete causes the gradual change with time of deformations and stresses in concrete structures subjected to sustained loads. Both experimental and theoretical studies with respect to this phenomenon have been carried out in the past by many investigators, but most of them have dealt with the cases under the action of sustained loads of constant magnitude.

Since main purpose of these works is satisfactory prediction of maximum deflection under constant sustained loads, it is difficult to obtain analytically deflections and stresses at an arbitrary time after loading. In addition, most of these analytical methods are incapable of yielding reliable results for the creep of concrete structures subjected to repeated or varying loads. Although the creep-behavior of concrete under variable stress and repeated loads has been studied by A.D.Ross<sup>1)</sup>, C.A.Miller and S.A.Guralnick<sup>2)</sup>, the subjects of their studies are restricted to such uni-axial members as plain concrete specimens and singly reinforced concrete beams, and numerical results for response of stresses are not obtained yet.

The authors published the paper<sup>3)</sup> in 1969 with respect to the analysis of creep in flexed reinforced concrete slabs subjected to constant sustained loads.

In the present paper, the previous theory is extended to the case subjected to any load, the intensity of which varies with an arbitrary time-interval, and the creep responses of deflections and stresses in reinforced concrete slabs obtained from numerical calculations are illustrated.

In order to simplify the procedure, the following assumptions are made in the subsequent development of our theory.

1) Plane sections normal to the neutral surface of the slab before bending remain plane and normal to the neutral surface after bending even though creep occurs in concrete.

2) The reinforcement behaves elastically under all conditions.

3) Modulus of elasticity in concrete is invariable with time.

4) The creep function of Arutyunyan<sup>4)</sup>-type is used as the time-dependent law connecting stresses and strains in plain concrete.

5) The effect of shrinkage in concrete is neglected.

## 2. Stress-Strain Relation of Concrete Considering the Effect of Creep under Repeated Loads

Let us consider that a structure made of concrete of age  $\tau_0$  is subjected to load  $q_i$  ( $i=0,1,2,\dots,n$ ) which varies with time-interval as shown in Fig.1.

Denoting the normal stresses of concrete at an instant  $t$  ( $\tau_0 \leq t \leq \tau_i$ ) with respect to any cartesian coordinate system  $o-xy$  by  $\sigma_{xo}(t)$  and  $\sigma_{yo}(t)$ , the total normal strain  $\epsilon_{xo}(t)$  of concrete at an instant  $t$  ( $\tau_0 \leq t \leq \tau_i$ ) is expressed as follows:

$$\epsilon_{xo}(t) = \frac{\sigma_{xo}(t) - \nu \sigma_{yo}(t)}{E_c} - \int_{\tau_0}^t [\sigma_{xo}(\tau) - \nu \sigma_{yo}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau \quad (1)$$

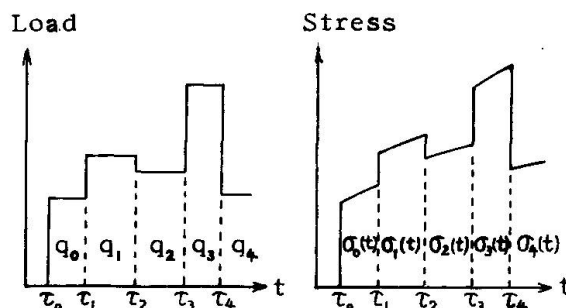


Fig. 1

where  $E_c$  and  $\nu$  are modulus of elasticity and Poisson's ratio of concrete, respectively, and  $C(t, \tau)$  is creep function.

The form of function  $C(t, \tau)$  is determined on the basis of creep tests in plain concrete, and an expression of Arutyunyan-type is used in this paper.

$$\left. \begin{aligned} \text{That is,} \quad C(t, \tau) &= \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \\ \varphi(\tau) &= \alpha/\tau + \beta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

where  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  are constants.

To obtain the total strain  $\epsilon_{xn}(t)$  of concrete at any time  $t$  ( $\tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}$ ), Eq.(1) is easily extended as follows:

$$\epsilon_{xn}(t) = \frac{\sigma_{xn}(t) - \nu \sigma_{yn}(t)}{E_c} - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} [\sigma_{xi}(\tau) - \nu \sigma_{yi}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau - \int_{\tau_n}^t [\sigma_{xn}(\tau) - \nu \sigma_{yn}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau. \quad (3)$$

Substituting Eq.(2) into Eq.(3) and differentiating the obtained equation with respect to  $t$ , we get, after some transformations, the following equation:

$$\dot{\epsilon}_{xn}(t) = \frac{\dot{\sigma}_{xn}(t) - \nu \dot{\sigma}_{yn}(t)}{E_c} + \gamma \varphi(t) [\sigma_{xn}(t) - \nu \sigma_{yn}(t)] - \gamma \int_{\tau_n}^t [\sigma_{xn}(\tau) - \nu \sigma_{yn}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \{\varphi(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)}\} d\tau - \gamma \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} [\sigma_{xi}(\tau) - \nu \sigma_{yi}(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \{\varphi(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)}\} d\tau. \quad (4)$$

Eliminating the integral terms in Eq.(4) by using Eq.(3), we obtain the following equation:

$$\dot{\epsilon}_{xn}(t) + \gamma \epsilon_{xn}(t) = \frac{\dot{\sigma}_{xn}(t) - \nu \dot{\sigma}_{yn}(t)}{E_c} + \frac{\gamma}{E_c} \{1 + E_c \varphi(t)\} [\sigma_{xn}(t) - \nu \sigma_{yn}(t)] - \gamma \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} [\sigma_{xi}(\tau) - \nu \sigma_{yi}(\tau)] \dot{\varphi}(\tau) d\tau - \gamma \int_{\tau_n}^t [\sigma_{xn}(\tau) - \nu \sigma_{yn}(\tau)] \dot{\varphi}(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Differentiating Eq.(5) with respect to  $t$ , we can derive the following differential equation:

$$\ddot{\sigma}_{xn}(t) - \nu \ddot{\sigma}_{yn}(t) + \gamma \{1 + E_c \varphi(t)\} [\dot{\sigma}_{xn}(t) - \nu \dot{\sigma}_{yn}(t)] = E_c \{\ddot{\epsilon}_{xn}(t) + \gamma \dot{\epsilon}_{xn}(t)\}. \quad (6)$$

For determination of  $\sigma_{xn}(t)$  and  $\sigma_{yn}(t)$ , another differential equation is necessary and it is easily derived as follows:

$$\ddot{\sigma}_{yn}(t) - \nu \ddot{\sigma}_{xn}(t) + \gamma \{1 + E_c \varphi(t)\} [\dot{\sigma}_{yn}(t) - \nu \dot{\sigma}_{xn}(t)] = E_c \{\ddot{\epsilon}_{yn}(t) + \gamma \dot{\epsilon}_{yn}(t)\}. \quad (7)$$

On the other hand, by considering the total shearing strain  $\gamma_{xyn}(t)$  of concrete subjected to shearing stress  $\tau_{xyn}(t)$ , the differential equation for determination of  $\tau_{xyn}(t)$  is obtained as

$$\ddot{\tau}_{xyn}(t) + \gamma \{1 + E_c \varphi(t)\} \dot{\tau}_{xyn}(t) = \frac{E_c}{2(1+\nu)} \{\ddot{\gamma}_{xyn}(t) + \gamma \dot{\gamma}_{xyn}(t)\}. \quad (8)$$



The initial conditions are

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xn}(t_n) &= \frac{E_c}{1-\nu^2} \{ \epsilon_{xn}(t_n) + \nu \epsilon_{yn}(t_n) \} + E_c \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sigma_{xi}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(\tau_n, \tau) d\tau, \\ \sigma_{yn}(t_n) &= \frac{E_c}{1-\nu^2} \{ \epsilon_{yn}(t_n) + \nu \epsilon_{xn}(t_n) \} + E_c \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sigma_{yi}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(\tau_n, \tau) d\tau, \\ \tau_{xyn}(t_n) &= \frac{E_c}{2(1+\nu)} \gamma_{xyn}(t_n) + E_c \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \tau_{xyi}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(\tau_n, \tau) d\tau, \\ \dot{\sigma}_{xn}(t_n) &= \frac{E_c}{1-\nu^2} \{ \dot{\epsilon}_{xn}(t_n) + \nu \dot{\epsilon}_{yn}(t_n) \} + \gamma E_c \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sigma_{xi}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \varphi(\tau) e^{-\gamma(\tau_n-\tau)} \} d\tau - \gamma E_c \varphi(t_n) \sigma_{xn}(t_n), \\ \dot{\sigma}_{yn}(t_n) &= \frac{E_c}{1-\nu^2} \{ \dot{\epsilon}_{yn}(t_n) + \nu \dot{\epsilon}_{xn}(t_n) \} + \gamma E_c \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sigma_{yi}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \varphi(\tau) e^{-\gamma(\tau_n-\tau)} \} d\tau - \gamma E_c \varphi(t_n) \sigma_{yn}(t_n), \\ \dot{\tau}_{xyn}(t_n) &= \frac{E_c}{2(1+\nu)} \dot{\gamma}_{xyn}(t_n) + \gamma E_c \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \tau_{xyi}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \varphi(\tau) e^{-\gamma(\tau_n-\tau)} \} d\tau - \gamma E_c \varphi(t_n) \tau_{xyn}(t_n). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Solving the differential equations (6), (7) and (8) under the initial conditions of Eq. (9), we find the required stress-strain relations of concrete considering the effect of creep in the following form:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xn}(t) &= \sigma_{xn}(t_n) + \int_{t_n}^t e^{-\eta(\tau)} \left[ \dot{\sigma}_{xn}(t_n) + \frac{E_c}{1-\nu^2} \int_{t_n}^{\tau} \{ \ddot{\epsilon}_{xn}(\tau) + \gamma \dot{\epsilon}_{xn}(\tau) + \nu (\ddot{\epsilon}_{yn}(\tau) + \gamma \dot{\epsilon}_{yn}(\tau)) \} e^{\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau, \\ \sigma_{yn}(t) &= \sigma_{yn}(t_n) + \int_{t_n}^t e^{-\eta(\tau)} \left[ \dot{\sigma}_{yn}(t_n) + \frac{E_c}{1-\nu^2} \int_{t_n}^{\tau} \{ \ddot{\epsilon}_{yn}(\tau) + \gamma \dot{\epsilon}_{yn}(\tau) + \nu (\ddot{\epsilon}_{xn}(\tau) + \gamma \dot{\epsilon}_{xn}(\tau)) \} e^{\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau, \\ \tau_{xyn}(t) &= \tau_{xyn}(t_n) + \int_{t_n}^t e^{-\eta(\tau)} \left[ \dot{\tau}_{xyn}(t_n) + \frac{E_c}{2(1+\nu)} \int_{t_n}^{\tau} \{ \ddot{\gamma}_{xyn}(\tau) + \gamma \dot{\gamma}_{xyn}(\tau) \} e^{\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

where  $\eta(t) = \gamma \int_{t_n}^t \{ 1 + E_c \varphi(\tau) \} d\tau$ .

### 3. Basic Equation of Flexed Reinforced Concrete Slab

Take a cartesian coordinate system o-xy in the neutral plane of a rectangular reinforced concrete slab as shown in Fig. 2, where z-axis is perpendicular to x-y plane, and assume that reinforcements are set parallel to x and y axes.

As the reinforcement is assumed to behave elastically under all conditions, its normal stresses  $\sigma_{sxn}(t)$ ,  $\sigma_{syn}(t)$  and shearing stress  $\tau_{sxy}(t)$  are expressed as

$$\begin{aligned} \sigma_{sxn}(t) &= E_s \epsilon_{sxn}(t), \quad \sigma_{syn}(t) = E_s \epsilon_{syn}(t), \\ \tau_{sxy}(t) &= \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} \gamma_{sxy}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

where  $\epsilon_{sxn}(t)$ ,  $\epsilon_{syn}(t)$  and  $\gamma_{sxy}(t)$  are normal strains and shearing strain of reinforcement, and  $E_s$ ,  $\nu_s$  are modulus of elasticity and Poisson's ratio of reinforcement, respectively.

Denoting the bending moments and the twisting moments of a slab per unit width by  $M_{xn}(t)$ ,  $M_{yn}(t)$  and  $M_{xyn}(t)$ ,  $M_{yxn}(t)$ , respectively, we can express them by using Eqs. (10), (11) and the deflection  $w(t)$  of a slab as follows:

$$\begin{aligned} M_{xn}(t) &= M_{c xn}(t_n) + \dot{M}_{c xn}(t_n) \int_{t_n}^t e^{-\eta(\tau)} d\tau + M_{s xn}(t) - D_c \int_{t_n}^t e^{-\eta(\tau)} \left[ \int_{t_n}^{\tau} \left\{ \frac{\partial^2 \ddot{w}(\tau)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \ddot{w}(\tau)}{\partial y^2} + \gamma \left( \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial y^2} \right) \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau, \\ M_{yn}(t) &= M_{c yn}(t_n) + \dot{M}_{c yn}(t_n) \int_{t_n}^t e^{-\eta(\tau)} d\tau + M_{s yn}(t) - D_c \int_{t_n}^t e^{-\eta(\tau)} \left[ \int_{t_n}^{\tau} \left\{ \frac{\partial^2 \ddot{w}(\tau)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \ddot{w}(\tau)}{\partial x^2} + \gamma \left( \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2} \right) \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau, \\ M_{xyn}(t) &= M_{c xyn}(t_n) + \dot{M}_{c xyn}(t_n) \int_{t_n}^t e^{-\eta(\tau)} d\tau + M_{s xyn}(t) + (1-\nu) D_c \int_{t_n}^t e^{-\eta(\tau)} \left[ \int_{t_n}^{\tau} \left\{ \frac{\partial^2 \ddot{w}(\tau)}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x \partial y} \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau, \\ M_{yxn}(t) &= M_{c yxn}(t_n) + \dot{M}_{c yxn}(t_n) \int_{t_n}^t e^{-\eta(\tau)} d\tau + M_{s yxn}(t) - (1-\nu) D_c \int_{t_n}^t e^{-\eta(\tau)} \left[ \int_{t_n}^{\tau} \left\{ \frac{\partial^2 \ddot{w}(\tau)}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x \partial y} \right\} e^{\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

where

$$\begin{aligned} M_{c xn}(t_n) &= \int \sigma_{xn}(t_n) z dz, & M_{c yn}(t_n) &= \int \sigma_{yn}(t_n) z dz, & -M_{c xyn}(t_n) &= M_{c yxn}(t_n) = \int \tau_{xyn}(t_n) z dz, \\ \dot{M}_{c xn}(t_n) &= \int \dot{\sigma}_{xn}(t_n) z dz, & \dot{M}_{c yn}(t_n) &= \int \dot{\sigma}_{yn}(t_n) z dz, & -\dot{M}_{c xyn}(t_n) &= \dot{M}_{c yxn}(t_n) = \int \dot{\tau}_{xyn}(t_n) z dz, \end{aligned}$$

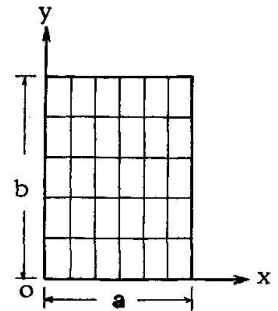


Fig. 2

$$M_{sx}(t) = -D_{sx} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2}, \quad M_{sy}(t) = -D_{sy} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2}, \quad M_{sxy}(t) = \frac{D_{sx}}{1+\nu_s} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x \partial y}, \quad M_{syx}(t) = -\frac{D_{sy}}{1+\nu_s} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x \partial y},$$

$D_c$  : Flexural rigidity of concrete section per unit width with respect to neutral axis,

$D_{sx}, D_{sy}$  : Flexural rigidity of reinforcement per unit width about y and x-axis, respectively.

Denoting the intensity of the load acting on a slab at an instant  $t$  ( $\tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}$ ) by  $q_n(x, y)$ , we represent the equation of equilibrium in the following form:

$$\frac{\partial^2 M_{xn}(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yn}(t)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}(t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}(t)}{\partial x \partial y} = -q_n(x, y). \quad (13)$$

Substituting Eq.(12) into Eq.(13), we can obtain the basic equation of a flexed reinforced concrete slab subjected to repeated loads as follows:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_{cxn}(\tau_n)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{cyn}(\tau_n)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{cxy}(\tau_n)}{\partial x \partial y} + \left\{ \frac{\partial^2 \dot{M}_{cxn}(\tau_n)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{M}_{cyn}(\tau_n)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \dot{M}_{cxy}(\tau_n)}{\partial x \partial y} \right\} \int_{\tau_n}^t e^{-\eta(\tau)} d\tau \\ & - D_c \int_{\tau_n}^t e^{-\eta(\tau)} \left[ \int_{\tau_n}^{\tau} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \{ \ddot{w}(\tau) + \gamma \dot{w}(\tau) \} e^{\eta(\tau)} d\tau \right] d\tau = -q_n(x, y). \end{aligned} \quad (14)$$

Putting  $t = \tau_n$  in Eq.(14), we have the initial condition as

$$\beta_1 \frac{\partial^4 w(\tau_n)}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 w(\tau_n)}{\partial y^4} + 2\beta_3 \frac{\partial^4 w(\tau_n)}{\partial x^2 \partial y^2} = \bar{q}_n(x, y) \quad (15)$$

where  $\beta_1 = D_c + D_{sx}$ ,  $\beta_2 = D_c + D_{sy}$ ,  $2\beta_3 = 2D_c + \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s}$ ,

$$\begin{aligned} \bar{q}_n(x, y) = & q_n(x, y) + E_c \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left[ -q_i(x, y) + D_{sx} \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_i)}{\partial x^4} + D_{sy} \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_i)}{\partial y^4} + \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_i)}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \{ C(\tau_n, \tau_{i+1}) - C(\tau_n, \tau_i) \} \right. \\ & \left. + \int_{\tau_i}^{\tau_n} \{ C(\tau_n, \tau_{i+1}) - C(\tau_n, \tau) \} e^{-\eta(\tau)} \left\{ D_{sx} \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_i)}{\partial x^4} + D_{sy} \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_i)}{\partial y^4} + \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_i)}{\partial x^2 \partial y^2} - D_c \int_{\tau_i}^{\tau} \nabla^4 (\ddot{w}(\tau) + \gamma \dot{w}(\tau)) e^{\eta(\tau)} d\tau \right\} d\tau \right\} \end{aligned}$$

Differentiating Eq.(14) with respect to  $t$  and putting  $t = \tau_n$  in the obtained equation, we can get a differential equation, which gives an initial condition of  $w(t)$  as well as Eq.(15), as follows:

$$\beta_1 \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_n)}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_n)}{\partial y^4} + 2\beta_3 \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_n)}{\partial x^2 \partial y^2} = \gamma E_c \varphi(\tau_n) \left[ q_n(x, y) - \left\{ D_{sx} \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_n)}{\partial x^4} + D_{sy} \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_n)}{\partial y^4} + \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_n)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} \right] + \bar{q}_n(x, y), \quad (16)$$

where

$$\begin{aligned} \bar{q}_n(x, y) = & \gamma E_c \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left[ -q_i(x, y) + D_{sx} \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_i)}{\partial x^4} + D_{sy} \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_i)}{\partial y^4} + \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_i)}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \{ \varphi(\tau_{i+1}) e^{-\gamma(\tau_n - \tau_{i+1})} - \varphi(\tau_i) e^{-\gamma(\tau_n - \tau_i)} \} \right. \\ & \left. + \int_{\tau_i}^{\tau_n} \{ \varphi(\tau_{i+1}) e^{-\gamma(\tau_n - \tau_{i+1})} - \varphi(\tau) e^{-\gamma(\tau_n - \tau)} \} e^{-\eta(\tau)} \left\{ D_{sx} \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_i)}{\partial x^4} + D_{sy} \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_i)}{\partial y^4} + \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_i)}{\partial x^2 \partial y^2} - D_c \int_{\tau_i}^{\tau} \nabla^4 (\ddot{w}(\tau) + \gamma \dot{w}(\tau)) e^{\eta(\tau)} d\tau \right\} d\tau \right\} \end{aligned}$$

Differentiating Eq.(14) twice with respect to  $t$ , we derive, after some transformations, the following differential equation for determination of  $w(t)$ :

$$\beta_1 \frac{\partial^4 \ddot{w}(t)}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 \ddot{w}(t)}{\partial y^4} + 2\beta_3 \frac{\partial^4 \ddot{w}(t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \{ \gamma D_c + D_{sx} \dot{\eta}(t) \} \frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial x^4} + \{ \gamma D_c + D_{sy} \dot{\eta}(t) \} \frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial y^4} + \left\{ 2\gamma D_c + \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \dot{\eta}(t) \right\} \frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \quad (17)$$

The solution of the basic equation (14) is equivalent to that of a linear differential equation (17) under the initial conditions given by Eqs.(15) and (16).

#### 4. Solution by Double Trigonometric Series

In this study we deal with only simply supported rectangular slabs, and then analysis by double trigonometric series is quite suitable. By taking the coordinate axes  $x$  and  $y$  as shown in Fig.2, boundary conditions for simple support are represented in the following forms:

$$w(t) = 0, \quad M_{xn}(t) = 0 \quad \text{for } x = 0, a \quad \text{and } w(t) = 0, \quad M_{yn}(t) = 0 \quad \text{for } y = 0, b \quad (18)$$

where general expressions of  $M_{xn}(t)$  and  $M_{yn}(t)$  are given by Eq.(12).

Now assume that the solution of differential equation (17) takes the following form of series satisfying boundary conditions of Eq.(18):

$$w(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{jk}(t) \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \quad (19)$$

where  $A_{jk}(t)$  is a function of  $t$  only.

Substituting Eq.(19) into Eq.(17), we obtain the following differential equation for determination of  $A_{jk}(t)$ :

$$\ddot{A}_{jk}(t) + Q_{jk}(t) \dot{A}_{jk}(t) = 0 \quad (20)$$

where 
$$Q_{jk}(t) = \gamma \left[ 1 + \frac{\frac{j^4}{a^4} D_{sx} + \frac{k^4}{b^4} D_{sy} + \frac{j^2 k^2}{a^2 b^2} \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s}}{\frac{j^4}{a^4} \beta_1 + \frac{k^4}{b^4} \beta_2 + 2 \frac{j^2 k^2}{a^2 b^2} \beta_3} E_c \varphi(t) \right]$$

The solution of Eq.(20) can be expressed in the following form:

$$A_{jk}(t) = A_{jk}(\tau_n) + \dot{A}_{jk}(\tau_n) \int_{\tau_n}^t e^{-\int_{\tau_n}^{\tau} Q_{jk}(\tau) d\tau} d\tau \quad (21)$$

$A_{jk}(\tau_n)$  and  $\dot{A}_{jk}(\tau_n)$  in Eq.(21) are determined by the initial conditions of Eqs. (15) and (16) as follows:

$$A_{jk}(\tau_n) = \frac{\bar{q}_{njk}}{\pi^4 \left( \frac{j^4}{a^4} \beta_1 + \frac{k^4}{b^4} \beta_2 + 2 \frac{j^2 k^2}{a^2 b^2} \beta_3 \right)},$$

$$\dot{A}_{jk}(\tau_n) = \frac{\gamma E_c \varphi(\tau_n) \left[ q_{njk} - \pi^4 \left( \frac{j^4}{a^4} D_{sx} + \frac{k^4}{b^4} D_{sy} + \frac{j^2 k^2}{a^2 b^2} \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \right) A_{jk}(\tau_n) \right] + \bar{q}_{njk}}{\pi^4 \left( \frac{j^4}{a^4} \beta_1 + \frac{k^4}{b^4} \beta_2 + 2 \frac{j^2 k^2}{a^2 b^2} \beta_3 \right)}$$

where  $q_{njk}$  is a coefficient of load  $q_n(x, y)$  in double Fourier series, namely,

$$q_{njk} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_n(x, y) \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy,$$

and 
$$\bar{q}_{njk} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \bar{q}_n(x, y) \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy, \quad \bar{q}_{njk} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \bar{q}_n(x, y) \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy.$$

Substituting thus obtained results of Eq.(21) into Eq.(19), we finally find the deflection  $w(t)$  in a slab at any time  $t$ .

By using Eqs.(11) and (19), normal stresses of reinforcements are obtained as follows:

$$\sigma_{sn}(t) = E_s z_s \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j^2 \pi^2}{a^2} A_{jk}(t) \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}$$

$$\sigma_{sy}(t) = E_s z_s \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \pi^2}{b^2} A_{jk}(t) \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}$$

where  $z_s$  is a distance between neutral plane and reinforcement.

Stresses of concrete are also obtained from Eq.(10), but numerical calculation for them has to make use of an iteration procedure.

## 5. Numerical Examples

To illustrate some practical applications of our theory, we consider singly reinforced square slabs with various percentage of reinforcements. The following characteristics are assumed for elastic constants and the creep function:

$$E_c = 2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, \quad \nu = 0.15, \quad E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad \nu_s = 0.3,$$

$$\alpha = 4.82 \times 10^{-5}, \quad \beta = 0.9 \times 10^{-5}, \quad \gamma = 0.026.$$

Numerical calculations are performed for the following two purposes:

- (1) Pursuit of creep response of deflections and stresses in slabs for cyclic sustained loads.
- (2) Calculation of creep recovery of deflections and stresses after the applied load is removed at any time.

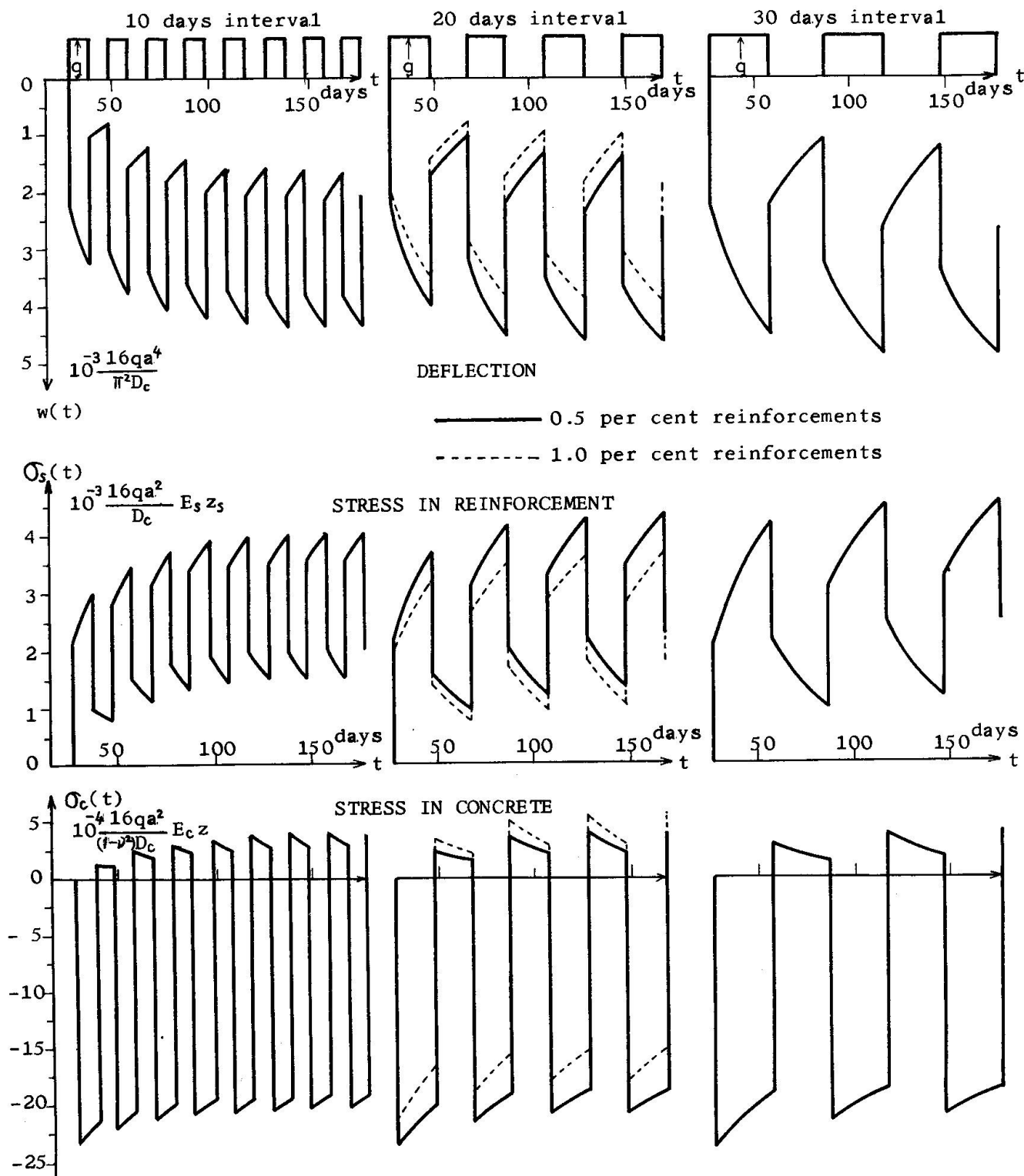


Fig. 3

### Response for Cyclic Loads

Fig.3 shows the calculated responses of deflections, stresses in reinforcement and stresses in concrete at the center of square slabs, when a uniformly distributed load  $q_n(x,y) = q$  is applied at the age of concrete  $t_0 = 28$  days and thereafter unloading and reloading are repeated cyclically with time-intervals of 10 days, 20 days and 30 days, respectively. Here, solid lines are results for 0.5 per cent reinforcements in both x and y directions and dashed lines are those for 1.0 per cent. Deflections and tensile stresses in reinforcements illustrate analogous curves and it is noticed that stresses in reinforcements due to creep in concrete remain after complete removal of applied load. Stresses in concrete decrease during a period of constant sustained loading, and immediately upon removal of applied load, compressive stress changes to tensile one.

In the slab with high percentage of reinforcement, both deflections and stresses in reinforcements naturally decrease but residual stresses in concrete somewhat increase.

When a cyclic load, with a period of full loading and half loading, is applied, the calculated responses are as illustrated in Fig.4, where response of stress in reinforcement is omitted because of its similarity to that of deflection. It is interesting that during early periods of half loading deflection increases and stress in concrete decreases, namely, creep is in progress, but during later periods of half loading creep is in recovery.

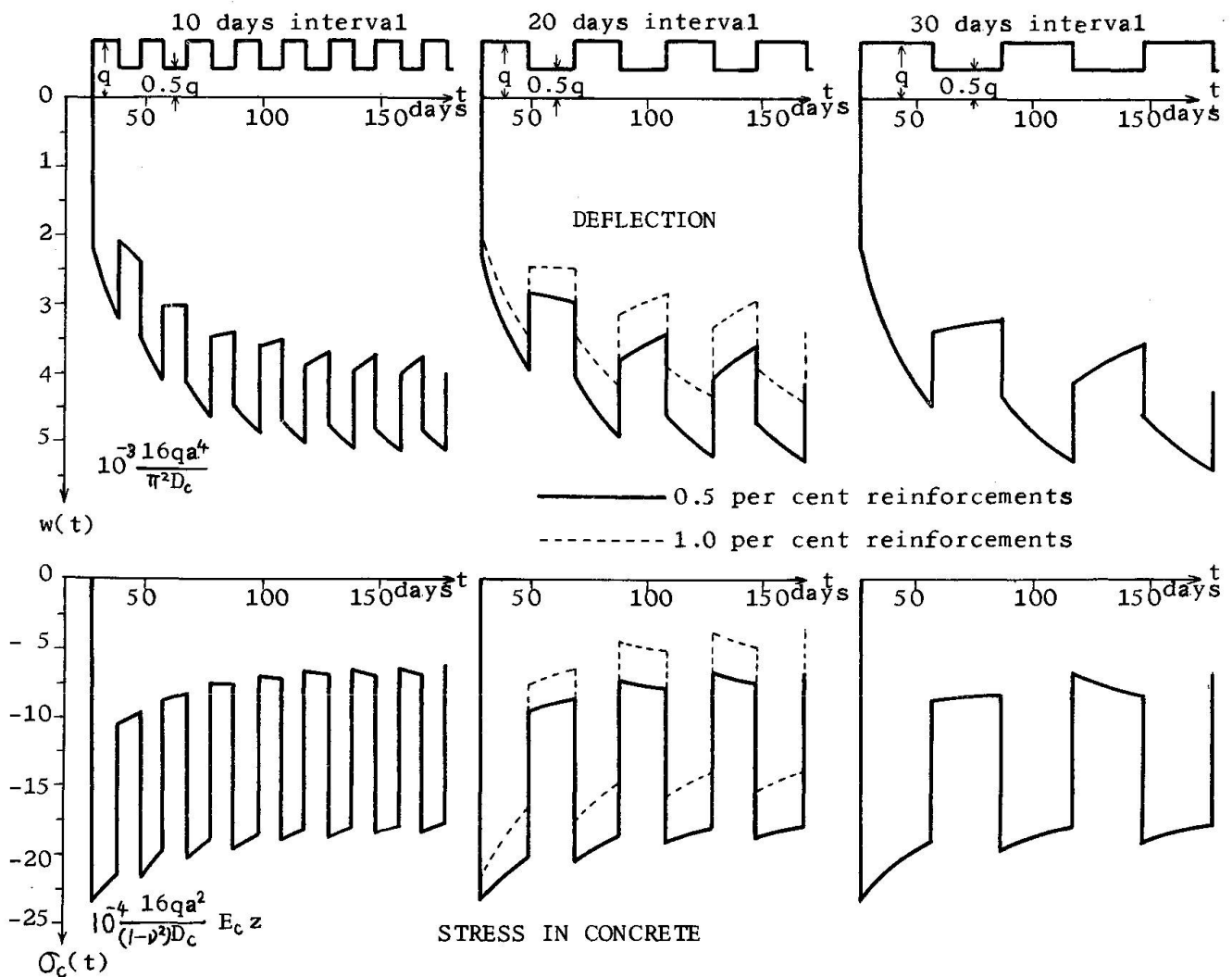


Fig. 4

### Creep Recovery

Immediately upon complete removal of applied load, deflections and stresses in concrete structures do not recover to zero, but a certain deflection and stress due to creep in concrete remain. Although these residual deflection and stress are gradually reduced to zero, i.e. it is called creep recovery, some quantities remain permanently. In reinforced concrete structures this phenomenon of creep recovery becomes especially complicated, because creep recovery of concrete and elastic recovery of reinforcement are mixed in them.

By using the theory in this paper, creep recovery of reinforced concrete slabs is easily calculated, that is, we only have to set  $q_n(x,y)$  equal to zero during the period of unloading.

The solid lines plotted in Fig. 5 show creep and recovery curves of deflections, stresses in reinforcements and stresses in concrete at the center of square slab of 0.5 per cent reinforcements in both x and y directions, when a uniformly distributed load  $q_n(x,y) = q$  is applied at the age of concrete  $\tau_0 = 28$  days and the load is removed after a period of 10, 20, 30, 40 and 60 days, respectively. Dashed lines in Fig. 5 are results for the cases when the load is not removed completely, but left by half. It is noticed that recovery of stress in concrete is almost independent to the length of loaded period.

### References

- 1) A.D.Ross: Creep of Concrete under Variable Stress. Journal of ACI, Vol. 29, No. 9, March 1958.
- 2) C.A. Miller and S.A. Guralnick: Reinforced Concrete Beams Subjected to Repeated loads.. Proceedings of ASCE, Vol. 93, No. ST 5, October 1967.
- 3) T. Yamasaki and H. Hikosaka: Analysis of Creep in Flexed Reinforced Concrete Slabs. Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, No. 179, July 1969.
- 4) N. Kh. Arutyunyan: Some Problems in the Theory of creep in Concrete Structures. Pergamon Press, 1966.

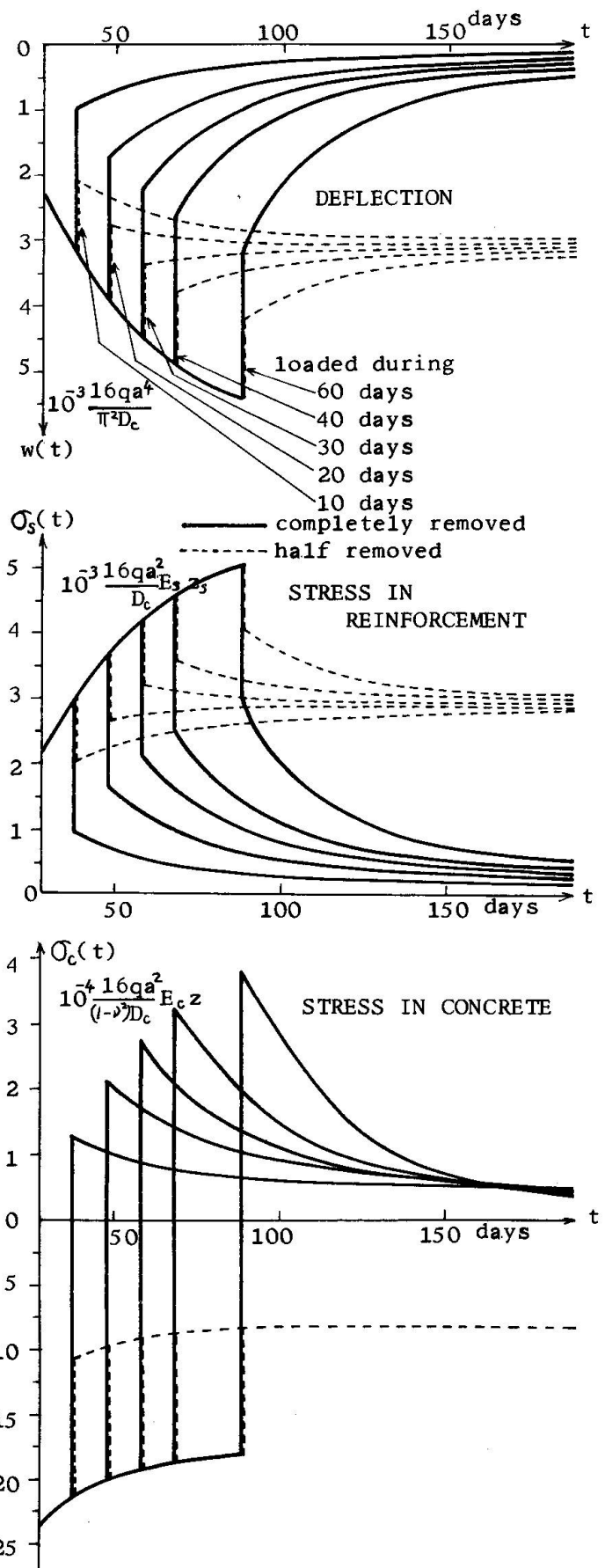


Fig. 5

## SUMMARY

Deflections and stresses in simply supported reinforced concrete slabs subjected to repeated sustained loads have been treated in this paper. A theory for calculating slab deflections and stresses in reinforcement and concrete has been developed which uses the creep function of Arutyunyan-type for plain concrete. By using electronic digital computer for the numerical work, creep response of flexed reinforced concrete slabs under the action of an arbitrary varying load can be easily calculated. Creep recovery curve of deflections and stresses at an arbitrary time after unloading can be also obtained without adding any serious complications in the procedure.

## RESUME

On étudie dans le présent article les flèches et les contraintes des dalles en béton armé simplement appuyées et soumises à des charges répétées. On développe une théorie pour calculer les flèches de la dalle et les contraintes dans l'armature et dans le béton, en utilisant la fonction de fluage d'Arutyunyan. A l'aide de l'ordinateur, on peut alors facilement calculer le comportement au fluage des dalles en béton armé soumises à une charge variable quelconque. En outre, on peut obtenir sans difficulté la courbe de recouvrement du fluage pour les flèches et les contraintes à un moment quelconque après la suppression ou la diminution de la charge.

## ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Beitrag werden die Durchbiegungen und Spannungen von frei aufliegenden Stahlbetonplatten unter Wechsellast behandelt. Es wurde eine Theorie zur Berechnung der Plattendurchbiegungen und -spannungen in der Bewehrung und im Beton entwickelt, welche auf der Kriechfunktion von Arutyunyan (4) für Vollbeton fusst. Mittels digitaler Elektronenrechner kann das Kriechverhalten biegebeanspruchter Stahlbetonplatten unter beliebiger Wechsellast leicht ermittelt werden. Ebenso kann man die Kriecherholungskurve (creep recovery curve) der Durchbiegung und der Spannungen zu beliebigem Zeitpunkt nach Entlasten ohne zusätzliche Schwierigkeiten erhalten.



Leere Seite  
Blank page  
Page vide