Zeitschrift: IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

Band: 6 (1970)

Rubrik: General report

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

RAPPORT GÉNÉRAL / ARBEITSBERICHT / GENERAL REPORT

L'influence du fluage et du retrait, l'effet des changements de température sur les constructions en béton

JEAN COURBON JACQUES FAUCHART
France

0 - PRESENTATION

0,1 - Préliminaire.

Le présent rapport comporte 2 parties :
- la première, constituant l'introduction, reproduit l'exposé oral que nous avons prononcé, le 18 septembre 1970, à MADRID, pour présenter les principales communications au symposium et dans lequel nous avons volontairement banni toute expression mathématique.

- la seconde (chapitres 1, 2 et 3) présente les principaux résultats que permet d'obtenir la théorie de la visco-élasticité linéaire et qui ont été annoncés dans cette première partie.

0,2 - Introduction.

Les déformations naturelles du béton jeune, dues à son fluage et à son retrait, ou celles que provoquent les variations thermiques, n'avaient que peu d'influence sur le comportement des ouvrages en béton armé construits au cours de la première moitié du siècle, car ces ouvrages n'avaient généralement que des dimensions réduites. Néanmoins, FREYSSINET avait déjà attiré l'attention sur l'importance qu'elles pouvaient prendre pour des ouvrages plus importants, tels que les arcs du Veurdre et de Plougastel, qu'il avait projetés puis exécutés et enfin soigneusement observés.

Le béton précontraint a permis ensuite de réaliser des ouvrages en béton de très grande portée, pour lesquels la prise en compte des déformations différées du béton est devenue primordiale pour le bâtisseur.

De très nombreuses travées indépendantes de ponts en béton précontraint

de portée égale ou supérieure à 40 mètres, et dont la fibre inférieure est comprimée, en zone médiane, et sous la seule action des efforts permanents (poids propre, précontrainte et superstructures), à plus de 100 bars, ont présenté, au bout de quelques années, des flèches permanentes, vers le haut, de l'ordre d'une dizaine de centimètres.

Plus spectaculaires encore sont les premiers ponts construits en encorbellement, comportant des articulations à la clé des travées centrales, et donc isostatiques sous les efforts permanents. Pour des portées comprises entre 60 et 120 mètres, les flèches différées observées à la clé peuvent atteindre de 10 à 20 cm, comme il a malheureusement été constaté dans de nombreuses interventions relatives au thème I du présent colloque. (cf : Keijer, Kokubu, etc... et Oberti).

Ces déformations sont dues à ce que, pour plus de 60 mètres d'ouverture, la fibre inférieure de ces tabliers est nettement plus comprimée que la fibre supérieure, sous l'action des efforts permanents, et qu'elle subit par conséquent un raccourcissement par fluage beaucoup plus élevé.

On a constaté, en revanche, que les déformations différées des ouvrages hyperstatiques, tels que les poutres continues, peuvent être considérablement plus faibles (soit de 5 à 20 fois !) que celles des ouvrages isostatiques de même caractéristiques. De telles observations sont très favorables pour les usagers de ces ouvrages, mais elles doivent mettre en alerte les ingénieurs-projeteurs ; en effet, la réduction considérable de ces déformations différées ne peut être due qu'à l'apparition progressive d'efforts internes dans la structure, provoqués par la lente modification des réactions d'appui, et dont la résultante générale est nulle, puisque ces efforts sont provoqués exclusivement par la gêne apportée à des déformations que tend naturellement à effectuer le béton, et non par des charges extérieures.

Il est donc désormais indispensable à l'Ingénieur d'étudier l'influence des déformations différées du béton sur le comportement des structures qu'il projette, de façon à :

a – prévoir les déformations de ces structures, qu'elles soient iso- ou hyper statiques, notamment lors des phases d'exécution, et de façon à bien réaliser les ouvrages dans les formes désirées.

b – pour les structures hyperstatiques, où l'on empêche le béton de se déformer librement, de connaître les efforts internes supplémentaires qu'une telle gêne y engendrera progressivement.

Une telle étude se révèle aujourd'hui d'autant plus indispensable que sont récemment apparus de nouveaux modes de construction pour réaliser les grands ouvrages (notamment les ponts) et en particulier :

a - l'exécution de poutres continues au moyen de poutres préfabriquées posées sur appuis simples, puis rendues continues (exemple de la piste de l'aérotrain (véhicule se mouvant sur un coussin d'air) longue de 18 km, et réalisée près d'Orléans - France) (1).

b - la construction de ponts en encorbellement, par tronçons ("voussoirs") coulés en place ou préfabriqués (exemple du pont d'Oléron (2)) donc d'âges et de taux de chargement très différents, et dont le béton est sollicité dès son plus jeune âge (couramment à 3 jours dans le cas où les voussoirs sont bétonnés en place).

c - la construction de poutres continues par travées successives, sur un cintre partiel, autoporteur et autolanceur (ex. des viaducs de l'autoroute Roquebrune-Menton (3).

d - la réalisation de ponts par poussage, de part et d'autre de la travée à franchir, de parties de tablier rendues ensuite continues (ex. du pont de Champigny sur Yonne (4).

Il est nécessaire, dès le stade de la construction, de calculer de façon très précise, les contreflèches à donner à chacune des parties constitutives de ces structures.

De plus, ces ouvrages ont un schéma statique qui varie au cours de leur construction. Par conséquent, la dernière partie de leur déformations différées ne peut s'effectuer proportionnellement aux déformations instantanées élastiques. D'où naissent progressivement des réactions d'appui supplémentaires (dont l'ensemble constitue forcément un système nul) chargées d'assurer les

---

(1) Bulletin de l'AFPC - décembre 1965

(2) "Construction d'une voie expérimentale de l'aérotrain en vraie grandeur" TRAVAUX - 9.1970.

(3) Duhau - Annales de l'ITBTP - 5. 1970

(4) "Le poussage" (Lemmey,etc.) - Annales de l'ITBTP - 5. 1970

liaisons imposées, et provoquant une transformation progressive dans la répartition des efforts qui sollicitent les structures. De telles constructions sont d'autant plus délicates que les joints qui séparent leurs différents tronçons constitutifs sont, en général, dépourvus de toute résistance propre à la traction. MM. CROCI, DAVIES et HOFMEISTER ont traité du projet de tels ouvrages en béton précontraint.

Une situation analogue se retrouve dans les ouvrages de section "composite", c'est-à-dire constituée par des matériaux de caractéristiques différentes, par exemple :

a - divers bétons, mis en oeuvre à des époques différentes, comme dans les sections comportant des poutrelles préfabriquées en béton précontraint, complétées par une membrure supérieure coulée en place (cas étudié par MM. OKADA, etc...).

b - béton et acier, comme en béton armé (cas envisagé par MM. HAMPE-KÖPPLER, KRÜGER, MILLER et WAGNER) éventuellement précontraint (cas traité par MM. DILGER-NEVILLE et KENNEDY-SAEDD)

0,3 - Modèles de calcul.

0,31 - Quels sont les modèles de calcul que les Ingénieurs ont envisagé pour, d'une part, rendre compte des déformations différées du béton, et d'autre part en prévoir les conséquences ?

Nous traitons essentiellement ci-après de l'influence du fluage, qui constitue le phénomène de loin le plus complexe.

0,32 - La méthode la plus ancienne a été de continuer à effectuer des calculs élastiques classiques, mais en utilisant un module d'Young fictif (dit "module d'élasticité différé"). Ainsi certains règlements relatifs aux constructions mixtes acier-béton, ou au béton armé, considèrent-ils 2 valeurs du coefficient d'équivalence acier-béton, $\left(E_a/E_b\right)$ = l'une (voisine de 5 ou 6) pour les charges instantanées ; l'autre (voisine de 15 à 20) pour les charges permanentes. Cette méthode a donné des résultats convenables pour l'étude de certaines constructions

isostatiques, notamment pour l'analyse de leur déformations, ou bien des "pertes de précontrainte" causées par le raccourcissement des câbles égal à celui du béton et que provoque son fluage et son retrait.

Mais elle s'avère totalement inadéquate pour témoigner du comportement des ouvrages hyperstatiques, et notamment pour rendre compte de la modification de la répartition des efforts internes que peut provoquer la gêne apportée à la libre déformation naturelle du béton.

Cette méthode de l'"élasticité différée" indiquerait notamment que, sous sollicitation constante, la déformation différée par fluage reste en tout cas proportionnelle à la déformation élastique, ce que dément absolument l'observation des ouvrages réels.

0,33 - Une meilleure approche de la réalité a été tentée par DISCHINGER, [Réf. 6] et, à sa suite, par M. FRANCO LEVI [Réf. 7]. Elle est basée sur l'équation différentielle :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E}\left(\frac{d\sigma}{dt} + \sigma\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

que de trop nombreux participants au présent colloque ont admise sans discussion. Cette équation conduit à la conséquence, manifestement erronée suivante : Considérons un béton chargé au temps t_o, et fluant suivant la loi $\varphi(t-t_o)$ Faisons varier, au temps t_1 (supérieur à t_o), sa contrainte. Le fluage spécifique provoqué par cette variation serait égal, d'après cette théorie, à la part de fluage spécifique provoqué par le premier chargement initial restant à effectuer après t_1 [soit : $\varphi(t-t_o) - \varphi(t_1-t_o)$] . Or, il est bien évident que c'est la durée de chargement qui est le facteur essentiel, et donc le terme : $\varphi(t-t_1)$

Cette théorie conduit à supposer que le fluage du béton s'effectue beaucoup plus rapidement qu'en réalité, et par conséquent à en sous-estimer les conséquences. Elle a d'ailleurs été critiquée par M. FAESSEL, d'une part et M. LOSBERG, etc..., d'autre part.

0,34 - A l'heure actuelle, la méthode qui parait donner la meilleure approximation, tout en permettant des calculs relativement simples, comme on le verra dans les chapitres suivants, est la théorie de la visco-élasticité-linéaire, présentée par M. AROUTOUNIAN [réf. 5] puis développée par M. COURBON [réf. 4]. Les recommandations du Comité mixte F.I.P.-C.E.B. sont en conformité avec cette théorie [Réf. 1].

Elle introduit un module de déformation du béton qui dépend des 2 paramètres essentiels :

- l'âge du béton, au moment de son chargement : (t_o)
- la durée du chargement : ($t - t_o$).

Elle est basée sur l'hypothèse du fluage linéaire, c'est à dire de la proportionnalité entre la déformation par fluage, d'une part, et la contrainte de compression appliquée, lorsque celle-ci est constante, d'autre part.

Cette hypothèse fondamentale englobe notamment :

a - le principe de superposition présenté par BOLTZMANN puis Mac HENRY [Réf. 2 et 3],

b - l'hypothèse de réversibilité de la déformation par fluage, qu'il s'agisse d'un chargement ou d'un déchargement,

c - l'hypothèse de conservation des sections planes, lorsqu'elles sont soumises à la flexion.

Cette théorie a l'avantage de permettre de bien mettre en évidence :

a - la loi de fluage, (variation de la déformation du béton soumis à une compression constante).

b - la loi de relaxation, (variation de la contrainte du béton maintenu à longueur constante).

c - la différence fondamentale entre ces 2 phénomènes.

d - l'interdépendance de ces 2 lois, dont l'une quelconque se déduit de l'autre, que cette loi soit représentée par une fonction algébrique ou qu'elle soit connue sous forme numérique (par exemple sous forme de tables donnant les résultats d'observations expérimentales).

Comme le montre le rapport écrit, constitué par les chapitres suivants, cette théorie permet d'obtenir des résultats de façon extrêmement simple lorsqu'on est en droit de négliger l'influence de l'âge du béton au moment de son chargement, ce qui est le cas des bétons qui sont alors suffisamment âgés. En ce cas,

le calcul peut être valablement mené en supposant que la loi de fluage est représentée par une fonction, ou une série de fonctions exponentielles du temps.
A noter que M. TROST a proposé une méthode simplifiée qui tente de tenir compte, dans une certaine mesure, de l'influence de l'âge du béton au moment de son chargement, grâce à l'introduction d'un "coefficient de relaxation". Cette méthode a été reprise par MM. DILGER et NEVILLE pour interpréter certains résultats d'essais de poteaux en béton [réf. 9,1 et 9,2].

Nous indiquons ci-après certains des principaux résultats que permet d'obtenir la théorie de la visco-élasticité linéaire :

a - Les efforts internes développés dans une structure isostatique par des charges permanentes ou variables dans le temps sont les mêmes que si la structure était élastique. En revanche, les déformations obéissent aux lois du fluage (et du retrait).

b - Cette théorie permet de calculer à tout instant les contraintes développées dans une structure hyperstatique (ou dans une section composite) par l'imposition de déformations qui peuvent être exercées dans un temps très court (ex : réglage ou "compensation" des ouvrages, transformation du schéma statique d'une construction durant son exécution) ou dépendre du temps (ex : tassement d'appuis, gêne apportée au retrait ou aux variations thermiques). En général, ces contraintes varient suivant la loi de la relaxation. Par exemple :

- les efforts provoquées par une compensation diminuent très vite dans le temps, et leur valeur finale peut atteindre le tiers ou le quart de leur valeur initiale.
- la répartition des efforts internes dans un ouvrage hyperstatique réalisé suivant des schémas statiques successivement variables (ou celle des contraintes dans une section composite) tend progressivement à se rapprocher de la distribution élastique.
- dans un arc, les effets d'un retrait très lent peuvent être insignifiants.
- en revanche, les effets de la température, même pour des variations annuelles, peuvent être plus importants que ce qui était communément admis.

c - Cette théorie permet de prévoir les déformations différées des ouvrages hyperstatiques réalisés en plusieurs phases, et conduit à des résultats en bon accord avec l'expérience.

0,35 – Certes, cette théorie prête à critique, car ses hypothèses de base sont des approximations simplificatrices. Elle ne peut donc prétendre à une parfaite exactitude quantitative. Mais elle donne, assez facilement, des indications qualitatives précieuses, et constitue pour l'Ingénieur une arme extrêmement utile pour dégager clairement le sens, et l'ordre de grandeur des effets des déformations différées du béton.

Les principales critiques que l'on peut lui apporter sont les suivantes :

a – Elle suppose l'homogénéité du béton constitutif de la structure, c'est-à-dire que le module de déformation de ce béton (dépendant de son âge et du temps de chargement) est supposé le même en tout point de la structure. Cette hypothèse se vérifie d'autant moins que la construction est réalisée par parties plus fragmentaires, dont le béton est sollicité à son tout jeune âge (cas des ponts en encorbellement à voussoirs bétonnés sur place par exemple).

b – Les hypothèses du fluage linéaire ne sont valables que lorsque les contraintes de compression du béton restent modérées (inférieures au tiers de la contrainte de rupture, environ) et qu'il n'y a pas de déchargement.

Ces deux derniers points nous paraissent extrêmement importants. Concernant le premier, l'hypothèse de la proportionnalité du fluage à la contrainte ne permet guère d'expliquer des phénomènes d'adaptation qui existent indubitablement (et heureusement pour les constructeurs !). Des recherches restent à effectuer vis à vis du comportement du béton soumis à la flexion composée, de façon notamment, à déterminer les courbes représentant la loi : déformation-contrainte lorsque celle-ci a une longue durée d'application et à vérifier si l'hypothèse de la conservation des sections planes peut alors être maintenue. Certaines sont en cours, en particulier au Centre d'Essai des Structures de Saint-Rémy-lès-Chevreuse (France).

Concernant le second des deux points précédents, on sait qu'en réalité le fluage n'est pas un phénomène reversible. La déformation à long terme due à un déchargement reste très inférieure à celle provoquée par un chargement préalable de longue durée. MM. DILGER, GHALI, KOUNTOURIS, et M. GAMBLE ont tenté d'en tenir compte [Réf. 9,3 et 9,4].

c - De même, l'indécision persiste quant à l'évolution dans le temps de la déformabilité des poutres en béton armé, due principalement à leur fissuration.

0,36 - Les méthodes qui permettraient de triompher de ces critiques se heurtent actuellement à 3 obstacles :

a - la complexité des phénomènes, et le nombre de paramètres intervenant sont tels que seules des méthodes de calcul numériques, par des procédés "pas à pas", à partir des lois non plus littérales, mais numériques, peuvent permettre de calculer les effets du fluage. L'emploi de telles méthodes est rendu possible, aujourd'hui, grâce aux ordinateurs. Plusieurs communications ont été présentées en ce sens (MM. COHN et GOSH, LOSBERG et autres) ou le seront (MM. CROCI, DAVIES, DRYSDALE).

b - l'insuffisance de notre connaissance actuelle des phénomènes réels constitue un obstacle plus grave. Elle doit inciter les laboratoires de recherche à développer leurs efforts en ce sens, mais aussi les constructeurs à effectuer des mesures plus nombreuses sur les ouvrages réels, de façon notamment à permettre de tenir compte de l'effet d'échelle.

c - néanmoins l'Ingénieur doit se garder du souci excessif d'une précision illusoire. Il serait bien vain, en particulier d'affiner à l'excès (tout en les compliquant de façon byzantine) les calculs relatifs à l'influence d'un seul facteur, parce qu'on prétend savoir les mener, tout en négligeant totalement, par ailleurs, l'effet d'autres facteurs, qui peuvent pourtant importer, parce qu'on ne sait guère comment les appréhender par le calcul.

Mais plus encore, l'Ingénieur n'est généralement pas maître (et il ne peut prévoir au moment où il établit son projet) des facteurs très importants, tels que les conditions futures thermiques ou hygrométriques qui règneront lors de l'exécution de l'ouvrage qu'il étudie, ou bien de divers aléas de chantier tels que des retards apportés au calendrier théorique de la construction.

0,37 - Le caractère aléatoire de tels facteurs, auxquels on pourrait adjoindre le tassement des appuis des ouvrages, ne doit cependant pas inciter l'Ingénieur au scepticisme. L'essentiel est, pour lui d'avoir une vision claire de l'aspect qualitatif des phénomènes c'est-à-dire, avant tout, de ne pas les ignorer, et,

d'autre part, de ne pas commettre d'erreurs grossières (comme, par exemple, confondre le fluage et la relaxation, c'est-à-dire se tromper de 1 à 3). Par ailleurs, l'absence de perfection dans l'exactitude quantitative des calculs de l'Ingénieur peut n'avoir que de faibles conséquences pourvu qu'il l'ait prévue, et qu'il ait pris la précaution de réserver des possibilités d'intervention au fur et à mesure qu'évoluent ses ouvrages. A titre d'exemple, de telles précautions peuvent consister à réserver des emplacements pour loger des vérins sur appuis, de façon à régler dans le futur la position des ouvrages, ou bien encore, dans le cas de tabliers de ponts construits en encorbellement, à disposer, dans la zone médiane des caissons, des gaines où pourront être éventuellement enfilés des câbles de précontrainte, dans le cas où les effets du fluage dépasseraient ce que le projet avait prévu.

0,38 – Une dernière et importante remarque reste à faire. Les effets des déformations différées ou thermiques du béton n'ont, en général, qu'une importance secondaire vis-à-vis de ceux des charges extérieures. Ces déformations influent essentiellement sur les états limites d'utilisation mais très rarement en pratique, sur les états limites ultimes. Considérons par exemple 2 structures identiques en tout point, hormis leur mode de construction, l'une étant réalisée d'emblée, alors que l'autre est construite par phases successives. En état de service normal, l'état de sollicitation de ces 2 structures différera d'une sollicitation d'autocontrainte due à un système de réactions d'appui engendrées par le fluage et le retrait du béton et dont la résultante générale est nulle. En revanche, ces 2 structures auront pratiquement les mêmes charges de rupture pourvu que les matériaux constitutifs soient assez ductiles, ce qui est le cas du béton et de l'acier. En effet, à rupture, se sera développé un état d'autocontrainte qui sera le même pour les 2 structures, et quel que soit l'état d'autocontrainte initial (1).

Remarquons que ce qui précède ne s'applique pas aux cas d'instabilité élastique, où, toute déformation obtenue en service joue un rôle primordial dans l'état limite ultime. M. FAESSEL a justement insisté sur l'extrême importance que pourrait avoir le fluage sur le flambement des pièces comprimées en béton.

---

(1) cf par exemple les essais de modèles réduits des caissons pour réacteurs nucléaires de Chinon.

0,4 - CONCLUSION - RESUME :

L'ingénieur ne peut plus ignorer que le béton est un matériau vivant même si les problèmes que posent ses déformations différées ou thermiques ne sont pas encore tous élucidés.

Dès à présent, néanmoins, la théorie visco-élastique linéaire dont les principaux points sont exposés dans les chapitres suivants permet d'aboutir assez aisément à une vision claire de leur influence, au moins d'un point de vue qualitatif. Les méthodes d'analyse numérique, dont l'emploi est rendu possible par l'ordinateur, permettent une analyse plus fine et conduisent à une meilleure exactitude quantitative.

L'emploi de ces méthodes doit permettre de refléter les phénomènes réels avec une approximation suffisante pour la majorité de nos constructions.

Les nombreux progrès qui restent à faire ne pourront guère provenir que de l'observation expérimentale pratiquée dans les laboratoires de recherche ou sur les ouvrages réels.

PREMIER CHAPITRE

DEFORMATION DU BETON DANS LE TEMPS (1)

I - FLUAGE DU BETON.

I,1 - Loi du fluage linéaire :

I,11 - Le béton est coulé au temps 0, et laissé libre de se déformer. Sa variation relative de longueur est notée $\varepsilon = \frac{\delta l}{l}$

Ce béton se raccourcit progressivement, en effectuant son retrait, suivant la loi $\varepsilon_r(t)$.

Appliquons-lui, à partir du temps t_0, la compression constante $\sigma(t_0)$.

Le béton effectue instantanément sa déformation élastique $\varepsilon_0(t_0) = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)}$ où $E(t_0)$ est le module de déformation instantanée du béton à l'âge t_0.

Puis, la contrainte étant maintenue constante, cette déformation augmente progressivement (c'est le fluage) d'une valeur égale au temps t à :

$$\varepsilon_f(t_0,t) = \varepsilon_0(t_0)\cdot\varphi(t_0,t) \qquad (\text{avec } \varphi(t_0,t_0) = 0)$$

La déformation totale, au temps t $(> t_0)$ vaut donc (fig. 1) :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)}\left[1 + \varphi(t_0,t)\right] + \varepsilon_r(t) \qquad (1)$$

On pose : $$\boxed{\frac{1}{E(t_0,t)} = \frac{1+\varphi(t_0,t)}{E(t_0)}} \qquad (2)$$

comme $\varphi(t_0,t) = 0$, $E(t_0,t_0) = E(t_0)$

Par la suite, on pose : $E(t,t) = E(t)$

I,12 - On admet généralement que le béton obéit au principe de superposition de BOLTZMANN [Réf. 2 et 3]. C'est à dire que si son taux de compression varie, à partir de t_0, suivant la loi $\sigma(t)$, sa déformation, au temps t vaut :

---

(1) Le présent chapitre, ainsi que le suivant, reproduit en grande partie la théorie de COURBON [Réf. 4]

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0,t)} + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{E(\tau,t)} \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \varepsilon_r(t) \qquad (3)$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^{t} \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{E(\tau,t)}\right) d\tau + \varepsilon_r(t)$$

I,2 - Comparaison avec le comportement réel du béton :

Ce qui précède repose sur les 2 hypothèses suivantes, qui forment la base de la théorie du fluage linéaire,

a - La fonction $\varphi(t_0,t)$ ne dépend pas du taux de compression σ appliqué. En réalité, cette hypothèse ne se vérifie que tant que σ reste assez faible (inférieur au tiers environ de sa contrainte de rupture). Au delà, la déformation de fluage ε_f croît plus vite que σ ; autrement dit, un béton comprimé à 200 kg/cm2 subira un fluage supérieur à 20 fois celui qu'il aurait pris s'il avait été comprimé à 10 kg/cm2.

Cette exacerbation du fluage avec la contrainte appliquée n'a pas été considérée dans les communications relatives au thème III du symposium.

Si l'on considère par ailleurs une section fléchie en permanence, il faut, pour qu'elle reste plane (mais le reste-t-elle ?), que se produise, par cisaillement entre les différentes fibres du béton, une redistribution des contraintes normales agissant sur la section. Le diagramme de ces contraintes sur la hauteur de la section ne peut donc rester linéaire. Il en va de même pour les sections soumises à un moment longtemps appliqué, puis annulé.

b - Les formules précédentes ne font pas intervenir le signe de la contrainte appliquée. Elles supposent donc que le fluage est un phénomène réversible, c'est à dire que : $\varepsilon_f[-\sigma(t_0),t] = -\varepsilon_f[\sigma(t_0),t]$.
Les essais infirment cette hypothèse (fig. 2). Si les déformations instantanées sont comparables, à la charge ou à la décharge, il n'en va pas de même pour les déformations différées. Le fluage provoqué par une décharge est bien plus faible (et négligeable, en première approximation) que celui dû à une compression permanente. Le premier se stabilise par ailleurs beaucoup plus vite que le second.

On pourrait presque admettre d'après GUYON [Réf. 3] que la déformation d'un béton comprimé de t_0 à t_1 au taux constant σ, puis déchargé, vaut au temps t ultérieur : $$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E(t_0)}\left[1+\varphi(t_0,t)\right] - \frac{\sigma}{E(t_1)} + \varepsilon_r(t)$$

DILGER, GHALI et KOUNTOURIS [Réf. 9-3] ont envisagé une expression du type suivant :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E(t_0)}\left[1+\varphi(t_0,t)\right] - \frac{\sigma}{E(t_1)}\left[1+R.\varphi(t_1,t)\right] + \varepsilon_r(t)$$

où le facteur de réduction $R(t-t_1)$ varierait de 0,6 à 0,9 quand $(t-t_1)$ varie de 0 à ∞. De même pour GAMBLE [Réf. 9-4] qui adopte des valeurs variant de 0,76 à 1,0.

I,3 - Expressions courantes de $\varphi(t_0,t)$:

I,31 - Le comité mixte CEB-FIP a admis [Réf. 1] l'expression :

$$\varphi(t_0,t) = \phi(t_0)\ K_t(t-t_0) \qquad (4)$$

où - $\phi(t_0)$ est une fonction décroissante qui traduit l'influence du vieillissement du béton (1).

- $K_t(t-t_0)$ représente l'influence de la durée du chargement, avec $K_t(0) = 0$ et $K_t(\infty) = 1$

$$\boxed{\frac{1}{E(t_0,t)} = \frac{1+\phi(t_0)\ K_t(t-t_0)}{E(t_0,t_0)}} \qquad (2)$$

Quelques expressions proposées pour les fonctions ϕ et K_t sont données en IV.

Remarquons que le comité permet de prendre une valeur constante pour $E(t,t) = \frac{1}{1,10}E$ (t_0 = 28 jours).

---

(1) Suivant la terminologie du comité : $\phi(t_0) = \left[K_b K_c K_e\right] K_d(t_0)$ où les divers coefficients dépendent de la composition du béton (K_b), des conditions climatiques (K_c), de l'épaisseur moyenne de la pièce (K_e) et enfin de l'âge t_0 du béton à sa mise en charge (K_d).
ϕ peut varier de 0,6 (gros éléments en béton confectionné avec peu d'eau conservés en atmosphère saturée) à 6 (éléments minces en béton confectionnés avec beaucoup d'eau et exposés à une atmosphère très sèche). Pour les ponts européens en béton précontraint courants, la valeur de ϕ est voisine de 2.
Pour les bétons de granulats normaux, de résistance R'_{28} à 28 jours $E(t,t) = 19\,000\sqrt{R'_{28}}$, avec pour unité le kg/cm2.

I,32 - L'expression la plus simple et la plus fréquemment proposée pour K_t est la suivante :

$$K_t(t-t_o) = 1 - e^{-\alpha(t-t_o)} \qquad (5)$$

Mais elle ne reflète qu'assez mal la réalité. Une approximation bien meilleure (Cf IV,1) est obtenue par une formule du genre :

$$K_t(t-t_o) = 1 - \sum_i \lambda_i e^{-\alpha_i(t-t_o)} \qquad (6)$$

avec $i=1$ à n , et $\sum_i \lambda_i = 1$; pour chacun des n couples (α_i, λ_i) on peut faire coïncider un point de la fonction (6) avec un point de la fonction réelle.

Dans les 2 cas (5) et (6) , si l'on suppose constantes les valeurs de $\phi(t_o)$ et de $E(t_o)$, la déformation finale due à une compression constante σ vaut :

$$\varepsilon(\infty) = \frac{\sigma(t_o)}{E}(1+\phi) = \varepsilon_o(1+\phi) \qquad (7)$$

II - RELAXATION DU BETON.

II,1 - Loi de la relaxation linéaire.

II,11 - Alors que la fluage, considéré ci-dessus, a trait à la déformation du béton sous l'action d'une contrainte imposée $\sigma(t)$, la relaxation est la variation de la contrainte due à une déformation imposée $\varepsilon(t)$.

II,12 - Bloquons, à partir du temps t_o , la déformation du béton à la valeur $\varepsilon(t_o)$. Négligeons l'effet du retrait (étudié en III,62). La contrainte du béton varie dès lors suivant la loi :

$$\sigma(t) = \varepsilon(t_o)\ \rho(t_o,t) \qquad (8)$$

avec

$$\rho(t_o,t_o) = E(t_o,t_o) = E(t_o) \qquad (9)$$

II,13 - Si, à partir du temps t_o , on impose à la déformation du béton de suivre la loi $\varepsilon(t)$, la contrainte varie, en vertu du principe de superposition de BOLTZMANN, suivant la loi :

$$\boxed{\sigma(t) = \varepsilon(t_o)\,\rho(t_o,t) + \int_{t_o}^{t} \rho(\tau,t)\,\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}\,d\tau} \qquad (10)$$

II,2 - Interdépendance des fonctions de fluage $\varphi(t_0,t)$ et de relaxation $\rho(t_0,t)$.

A partir du temps t_0, imposons à la déformation $\varepsilon(t)$ de conserver la valeur constante $\varepsilon(t_0)$. On déduit, de ③ et de ⑧ :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{E(\tau,t)} \frac{\partial \rho(t_0,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau = 1 - \frac{E(t_0)}{E(t_0,t)} = -\varphi(t_0,t) \qquad (11)$$

équation intégrale qui permet, connaissant la fonction $E(\tau,t)$ de déterminer la fonction de relaxation $\rho(t_0,t)$.

De même ① et ⑩ donnent, pour une contrainte constante $\sigma(t_0)$:

$$\int_{t_0}^{t} \rho(\tau,t) \frac{\partial \varphi(t_0,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau = E(t_0) - \rho(t_0,t)$$

III - REMARQUES CONCERNANT LE CALCUL PRATIQUE DES EFFETS DU FLUAGE ET DE LA RELAXATION DU BETON.

III,1 - On rencontre souvent dans l'étude des effets du fluage et de la relaxation du béton des équations intégrales de la forme

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{E(\tau,t)} \frac{d f(\tau)}{d\tau}\, d\tau = F(t_0,t) \qquad (12)$$

La complexité des fonctions E et F ne permet pas souvent de déterminer de façon littérale la fonction $f(t_0,t)$ qui est l'inconnue.

Cela est néanmoins possible dans certains cas, tels que les 2 suivants.

III,2 - Premier cas : $K_t(t-\tau) = 1 - e^{-\alpha(t-\tau)}$; $F(t_0,t) = a e^{-\alpha t} + b$

(12) s'écrit :

$$J(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{d f(\tau)}{d\tau} \frac{1+\phi(\tau)}{E(\tau)}\, d\tau - \int_{t_0}^{t} \frac{d f(\tau)}{d\tau} \phi(\tau) \frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{E(\tau)}\, d\tau = a e^{-\alpha t} + b$$

$$\alpha \frac{dJ(t)}{dt} + \frac{d^2 J(t)}{dt^2} = 0 \text{ ; d'où l'équation intégrale donnant } f(t) :$$

$$\alpha \frac{1}{E(t)} \frac{df(t)}{dt} [1+\phi(t)] + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{E(t)} \frac{df(t)}{dt}\right] = 0$$

soit en posant $\delta(t) = \int [1+\phi(t)]\, dt$

$$f(t) = f(t_o,t) = A + B \int_{t_o}^{t} E(\tau)\, e^{-\alpha \delta(\tau)}\, d\tau$$

où A et B sont 2 constantes à déterminer en fonction des conditions aux limites :

Pour $t = t_o$ $\qquad f(t_o,t_o) = A$

D'autre part en dérivant (12) par rapport à t, puis en faisant : $t = t_o$, on obtient

$$\frac{df}{dt}(t=t_o) = E(t_o)\, \frac{d}{dt}\, F(t_o, t=t_o)$$

soit $B = e^{\alpha \delta(t_o)}\, \frac{d}{dt}\, F(t_o, t=t_o)$

D'où $$f(t_o,t) = f(t_o,t_o) + \left[\frac{d}{dt} F(t_o, t=t_o)\right] \int_{t_o}^{t} E(\tau)\, e^{-\alpha[\delta(\tau)-\delta(t_o)]}\, d\tau \quad (12\text{ bis})$$

Exemples :

a - KRÜGER [9,5] et LOSBERG, etc [9,6] ont proposé des expressions de la forme : $\phi(t) = a - 1 + \frac{b}{t+c}$

D'où : $$f(t_o,t) = f(t_o,t_o) + B \int E(t)\, e^{-\alpha a t}\, (t+c)^{-\alpha b}\, dt$$

b - Dans le cas où $E(t,t) = E$ et $\phi(t) = \phi$ peuvent être considérés comme constants :

$$f(t_o,t) = f(t_o,t_o) - \frac{E}{\alpha(1+\phi)}\, \frac{dF}{dt}(t_o, t=t_o) \left[e^{-\alpha(1+\phi)(t-t_o)} - 1\right] \quad (13)$$

III,3 - Deuxième cas [réf. 8] :

Quand le béton est assez âgé pour qu'on puisse supposer que $E(t,t) = E$ et $\phi(t) = \phi$ sont constants, l'équation (12) s'écrit :

$$\int_{t_o}^{t} \frac{1+\phi K_t(t-\tau)}{E}\, \frac{df(\tau)}{d\tau}\, d\tau = F(t_o,t)$$

soit, en posant $\theta = t - t_o$: $$\int_{0}^{\theta} \frac{1+\phi K_t(\theta-\tau)}{E}\, \frac{df(\tau)}{d\tau}\, d\tau = F(0,\theta) = F(\theta)$$

Considérons la transformée de LAPLACE de la fonction $y(\theta)$, soit

$$[y]^* = \int_0^{\infty} y(\theta)\, e^{-p\theta}\, d\theta$$

et notons : $y(\theta) = \left\{ [y]^* \right\}^{-*}$. d'où

$$\frac{1}{E}\frac{1}{\uparrow}\left[\frac{df}{d\uparrow}\right]^* + \frac{\Phi}{E}\left[\frac{df}{d\uparrow}\right]^*[K_t]^* = [F]^*$$

soit :

$$\left[\frac{df}{d\uparrow}\right]^* = \uparrow [f]^* - f(0) = \frac{E\,[F]^*}{1/\uparrow + \Phi\,[K_t]^*}$$

En adoptant l'expression ⑥ pour $K_t(\theta)$, on obtient :

$$f(\theta) = f(0) + E\left[\frac{[F]^*}{1+\Phi\sum_i \frac{\lambda_i \alpha_i}{\uparrow+\alpha_i}}\right]^{-*}$$

$$= f(0) + E\,F(\theta) - E\left[[F]^* \sum_j \frac{B_j}{\uparrow+\beta_j}\right]^{-*}$$

où les β_j sont les n racines de l'équation : $\sum_i \frac{\lambda_i \alpha_i}{\alpha_i - \beta} = -\frac{1}{\Phi}$

De là, on tire les valeurs des B_j grâce aux n équations :

$$1 = \sum_j \frac{B_j}{\beta_j - \alpha_i} \qquad (i = 1 \text{ à } n)$$

A noter enfin que :

$$\sum_j \frac{B_j}{\beta_j} = \frac{\Phi}{1+\Phi}$$

Quand le développement en série ⑥ de $K_t(t-\tau)$ est réduit à ses 2 premiers termes $(n=1\ ,\ \lambda=1)$, on obtient : $\beta = \alpha(1+\Phi)$ et $B = \alpha\Phi$

Exemples :

a) $F(t_0,t) = C\left(1 - e^{-\gamma(t-t_0)}\right)$. On trouve, avec $\theta = t - t_0$:

$$f(\theta) = f(0) + EC\left[\frac{1}{1+\Phi} - e^{-\gamma\theta}\left(1 + \sum_j \frac{B_j}{\gamma-\beta_j}\right) + \sum_j B_j\, e^{-\beta_j\theta}\,\frac{\gamma}{\beta_j(\gamma-\beta_j)}\right]$$

Quand t devient infini,

$$f(\infty) = f(0) + \frac{EC}{1+\Phi}$$

Quand le développement en série de K_t est réduit à ses 2 premiers termes,

$$f(\theta) = f(0) + \frac{EC}{1+\Phi}\left[1 + \frac{e^{-\alpha(1+\Phi)\theta}\,\gamma\Phi - e^{-\gamma\theta}(1+\Phi)(\gamma-\alpha)}{\gamma - \alpha(1+\Phi)}\right]$$

soit quand $\gamma = \alpha$:

$$f(\theta) = f(0) + \frac{EC}{1+\Phi}\left(1 - e^{-\alpha(1+\Phi)\theta}\right)$$

b) $F(t_0,t) = C\sum_i \mu_i \left(1 - e^{-\alpha_i (t-t_0)}\right)$. On trouve :

$$f(\theta) = f(0) + EC\left[\frac{1}{1+\phi}\sum_i \mu_i + \sum_j \frac{B_j}{\beta_j} e^{-\beta_j \theta} \sum_i \frac{\alpha_i \mu_i}{\alpha_i - \beta_j}\right]$$

Quand t devient infini,

$$f(\infty) = f(0) + \frac{EC}{1+\phi}\sum_i \mu_i$$

III,4 - Critique de ces méthodes littérales.

Les 2 méthodes littérales précédentes ne sont guère exploitables en pratique que moyennant d'importantes simplifications, en supposant notamment que $E(t)$ et $\phi(t)$ sont constants, quel que soit l'âge t du béton au moment de sa mise en charge.

En réalité, cet âge importe de façon considérable, comme le montre le tableau suivant où sont données les valeurs (rapportées à celles obtenues à 28 jours) des facteurs les plus importants. Ces valeurs sont calculées à partir des Recommandations CEB-FIP [Réf. 1] .

t (jours)	3	7	28	90	365
$R'(t) / R'(28)$	0,40	0,65	1,0	1,20	1,35
$E(t) / E(28)$	0,63	0,81	1,0	1,10	1,16
$\varepsilon_0(t) / \varepsilon_0(28)$	1,58	1,24	1,0	0,91	0,86
$\phi(t,\infty) / \phi(28,\infty)$	1,60	1,40	1,0	0,75	0,50
$\varepsilon_f(t,\infty) / \varepsilon_f(28,\infty)$	2,50	1,70	1,0	0,70	0,44

Les méthodes basées sur l'hypothèse de constance de E et de ϕ (visco-élasticité linéaire) ne peuvent donc prétendre à l'exactitude quantitative. On peut néanmoins être assuré que les résultats qu'elles permettent d'obtenir sont qualitativement nettement plus proches de la réalité que ceux que donnerait la théorie de l'élasticité linéaire.

Mais la prise en compte de tous les facteurs influant sur le retrait et le fluage ne peut guère être faite qu'au moyen de méthodes numériques. Elles requièrent, le plus souvent, l'emploi de calculateurs électroniques.

III,5 - Méthode générale de résolution numérique [réf. 4] :

L'équation (12) s'écrit : $$F(t_0, t_n) = \int_{t_0}^{t_n} \frac{1}{E(\tau, t_n)} \frac{d f(\tau)}{d\tau} d\tau$$

On décompose l'intervalle (t_0, t_n) en n intervalles $(t_i - t_{i-1})$ assez petits pour qu'on puisse à l'intérieur de chacun d'eux, considérer $E(\tau, t)$ constant, égal à E_{in}

d'où $$F(t_0, t_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{E_{in}} \left[f(t_i) - f(t_{i-1}) \right]$$

En écrivant cette équation successivement pour i = 1, 2 etc..., n, on obtient les valeurs des inconnues $f(t_i)$ par la suite d'équations :

$$\frac{1}{E_{11}} f(t_1) = F(t_1)$$
$$\frac{1}{E_{12}} f(t_2) + \frac{1}{E_{22}} \left[f(t_2) - f(t_1) \right] = F(t_2) \quad \text{, etc...}$$

Une méthode analogue a été utilisée par DILGER, GHALI et KOUNTOURIS [Réf. 9,3] pour étudier l'effet des tassements d'appuis.

III,6 - Exemples d'application.

III,61 - Etude de la relaxation :

La formule (11) s'identifie à l'équation (12) en posant :

$$f(\tau) = \rho(t_0, \tau) \quad \text{et} \quad F(t_0, t) = -\varphi(t_0, t) = -\phi(t_0) K_t(t - t_0)$$

a - Appliquons la méthode du § III,2

$$F(t_0, t) = -\phi(t_0) \left[1 - e^{-\alpha(t - t_0)} \right]$$

$$\rho(t_0, t) = \rho(t_0, t_0) - \alpha \phi(t_0) \int_{t_0}^{t} E(\tau)\, e^{-\alpha \int_{t_0}^{\tau} [1 + \phi(\tau)] d\tau}$$

soit, si E et ϕ sont constants

$$\rho(t_0, t) = \frac{E}{1+\phi} \left[1 + \phi\, e^{-\alpha(1+\phi)(t - t_0)} \right] \quad (14)$$

quand t devient infini, $\rho(\infty) = \frac{E}{1+\phi}$, soit $\sigma(\infty) = \frac{\sigma(0)}{1+\phi}$ (15)

b - Appliquons la méthode du § III,3
Adoptons l'expression (6) de $K_t\,(t-t_o)$

$$F(t_o,t) = -\phi\left[1-\sum_i \lambda_i\, e^{-\alpha_i (t-t_o)}\right], \text{ avec } \sum_i \lambda_i = 1$$

$$\rho(t_o,t) = \rho(t_o,t_o) - E\phi\left[\frac{1}{1+\phi} - \frac{1}{\phi}\sum_j \frac{B_j}{\beta_j}\, e^{-\beta_j (t-t_o)}\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{1+\phi} + \sum_j \frac{B_j}{\beta_j}\, e^{-\beta_j (t-t_o)}\right]$$

En limitant le développement (6) à ses premiers termes, on retrouve bien (14) .

c - Conséquences :

Les formules (14) et (15) montrent que :

- la relaxation se produit beaucoup plus vite que le fluage (soit, dans les hypothèses du § a précédent) : $(1+\phi)$ fois plus vite (1).

- la diminution de contrainte due au maintien de la longueur constante du béton est considérable : ici, $\sigma(\infty) / \sigma(0) = 1 / 1+\phi$.
Cela doit rendre prudent vis-à-vis des opérations dites de "compensation" destinées à créer des efforts dans les ouvrages en imposant des déformations permanentes (ex. = arcs, routes et pistes, réglage de poutres continues par dénivellation d'appuis : cf VI,2 d). Pour obtenir une contrainte finale $\sigma(\infty)$, il faudrait exercer instantanément une contrainte $\sigma(0) = (1+\phi)\ \sigma(\infty)$. Il arrive souvent que l'ouvrage ne puisse supporter une telle sollicitation initiale. On est dès lors obligé d'opérer par étapes successives. En particulier on peut, comme l'indique GUYON [réf. 3, fig. 4], accélérer la relaxation de la façon suivante : on exerce la contrainte constante σ_1 durant le temps t_1 , jusqu'à ce que la déformation alors obtenue, $\varepsilon(\sigma_1, t_1)$ soit égale à la déformation finale que l'on obtiendrait en appliquant en permanence la contrainte $\sigma(\infty)$. Au temps t_1 , on peut diminuer la contrainte de σ_1 à $\sigma(\infty)$. Dès lors, la contrainte restera constamment égale à la valeur désirée = $\sigma(\infty)$.

---

(1) Rappelons que pour les ouvrages d'art courants, ϕ est voisin de 2.

III,62 - Effet du retrait ou de la variation de température.

Quant la déformation $\varepsilon(t)$ du béton sous l'action de son retrait ou d'une variation de température est empêchée, on retrouve le cas précédent de la relaxation. La variation de la contrainte qui en résulte est donnée par (3) ou par (10)

Etudions par exemple l'effet du retrait : $\varepsilon_r(t)$ [réf. 4]

(3) s'écrit $$-\varepsilon_r(t) = \int_0^t \frac{1}{E(\tau,t)} \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

qui est une équation de la forme (12).

Si $\varepsilon_r(t) = \varepsilon_r(\infty)\left(1 - e^{-\gamma t}\right)$ et si K_τ a pour expression (5), en supposant ϕ et E constants, le § III,3.a donne :

$$\sigma(t) = -\frac{E}{1+\phi}\,\varepsilon_r(\infty)\left[1 + \frac{e^{-\alpha(1+\phi)t}\,\gamma\phi - e^{-\gamma t}(1+\phi)(\gamma-\alpha)}{\gamma - \alpha(1+\phi)}\right]$$

- quand $\gamma \leq \alpha$, $\sigma(t)$ décroît de 0 à $-\frac{E}{1+\phi}\varepsilon_r(\infty)$

- quand $\alpha < \gamma$, $\sigma(t)$ décroît de 0 à $-\frac{E}{1+\phi}\varepsilon_r(\infty)\left[1 + \phi e^{-\alpha(1+\phi)t_1}\right]$

avec $t_1 = \frac{1}{\gamma - \alpha(1+\phi)} \operatorname{Log}\left(\frac{\gamma-\alpha}{\phi\alpha}\right)$, puis croît jusqu'à $-\frac{E}{1+\phi}\varepsilon_r(\infty)$

- quand $\gamma = \alpha(1+\phi)$, $\sigma(t) = -\frac{E}{1+\phi}\varepsilon_r(\infty)\left[1 - e^{-\gamma t}(1 - \phi\gamma t)\right]$

III,7 - Méthode simplifiée de TROST [réf. 9,1].

TROST suppose qu'il existe un "coefficient de relaxation" ρ constant, tel que :

$$\int_0^\infty \phi(\tau)\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\,d\tau = \rho\,\phi(0)\int_0^\infty \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\,d\tau = \rho\,\phi(0)\left[\sigma(\infty) - \sigma(0)\right]$$

Ecrivons alors l'équation (3), avec $t_0 = 0$, $t = \infty$, en négligeant l'effet du retrait, et en supposant que E (t) = E constant. Compte tenu de ce que $K_\tau(\infty) = 1$, on obtient :

$$E\,\varepsilon(\infty) = \sigma(0)\left[1+\phi(0)\right] + \left[\sigma(\infty) - \sigma(0)\right] + \int_0^\infty \phi(\tau)\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\,d\tau$$

soit : $$E\,\varepsilon(\infty) = \sigma(0)\left[1+\phi(0)\right] + \left[1+\rho\,\phi(0)\right]\left[\sigma(\infty) - \sigma(0)\right]$$

TROST en conclut que l'on pourrait adopter, à tout temps t, l'expression

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_0)\ \frac{1+\varphi(t_0,t)}{E} + \left[\sigma(t) - \sigma(t_0)\right]\ \frac{1+\rho\,\varphi(t_0,t)}{E}$$

qui se substituerait à l'expression générale (3). Un tel raccourci est peut-être hardi. Néanmoins, NEVILLE et DILGER [réf. 9,2] ont trouvé que cette méthode était en bonne concordance avec les résultats d'essais de poteaux en béton armé.

Dans le cas de la relaxation pure $\left(\frac{d\varepsilon}{dt} = 0\right)$, on obtient :

$$\sigma(t) = \sigma(t_0)\left[1 - \frac{\varphi(t_0,t)}{1+\rho\,\varphi(t_0,t)}\right] \qquad (16)$$

III,8 - Formules simplifiées de DISCHINGER [Réf. 6] et de Franco LEVI [Réf. 7].

Ces formules peuvent, en supposant E (t) = E constant, se mettre sous la forme :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E}\int_0^t \sigma(\tau)\,\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\,d\tau + \varepsilon_r(t)$$

Elle est erronée parce qu'y figure, dans l'intégrale du second membre : $\varphi(\tau)$ au lieu de $\varphi(t-\tau)$.

Cette exeprssion s'écrit aussi :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(0)}{E}\left[1+\varphi(t)\right] + \frac{1}{E}\int_0^t \left[1+\varphi(t)-\varphi(\tau)\right]\,\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\,d\tau + \varepsilon_r(t)$$

Cela reviendrait (fig. 3) à supposer que la part de fluage, obtenue au temps t, pour une charge appliquée à τ, ne dépend pas de $\varphi(t-\tau)$ mais de $\left[\varphi(t-0)-\varphi(\tau-0)\right]$, ce qui est évidemment erroné et sous-estime la vitesse du fluage.

Dans le cas de la relaxation pure $(d\varepsilon/dt = 0)$ et en négligeant l'effet du retrait, la formule de DISCHINGER conduit à :

$$\sigma(t) = \sigma(0)\ e^{-\varphi(t)}$$

formule qui tend à surestimer la vitesse de la relaxation du béton.

Comparons en effet les valeurs des contraintes finales $\sigma(\infty)$ obtenues à partir de :

- cette formule de DISCHINGER, soit : $\sigma(\infty) = \sigma(0)\ e^{-\varphi(\infty)} = \sigma(0)\ e^{-\phi}$

- la formule (15) , soit $\sigma(\infty) = \frac{\sigma(o)}{1+\phi}$

pour diverses valeurs de ϕ .

$\sigma(\infty)/\sigma(o)$ \ ϕ	0	1	1,5	2,0	2,5	3	5
DISCHINGER = $e^{-\phi}$	1	0,37	0,22	0,13	0,08	0,05	0,007
formule (15) $\frac{1}{1+\phi}$	1	0,50	0,40	0,33	0,29	0,25	0,17

La formule (16) de TROST conduit à des valeurs intermédiaires qui semblent en bonne concordance avec les résultats d'essais [Réf. 9,1].

IV - EXPRESSIONS LITTERALES PROPOSEES :

IV-1 - Pour $K_t(t-\tau)$:

$\theta = t - \tau$ (en jours)	0	1	3	7	28	90	365	∞
$1 - e^{-\theta/100}$	0	0,01	0,03	0,07	0,24	0,60	0,97	1,0
CAQUOT [3] $1 - e^{-0,1\sqrt{\theta}}$	0	0,09	0,16	0,23	0,41	0,61	0,85	1,0
[9,1] $1 - \sum_i \lambda_i e^{-\alpha_i \theta}$	0	0,10	0,15	0,21	0,42	0,61	0,82	1,0
[9,3] $0,131 \log(\theta+1)$	0	0,09	0,18	0,27	0,44	0,59	0,77	∞
[9,5] $\frac{\theta}{30+\theta}$	0	0,03	0,09	0,19	0,48	0,75	0,92	1,0
[9,7] $0,2 \log \theta - 0,37$	< 0			0,02	0,30	0,53	0,81	∞

A noter que la courbe donnée par le Comité CEB-FIP est bien représentée par la loi de CAQUOT (3ème ligne) et celle de la 4ème ligne (formule (6)).

IV,2 - Pour $K_d(\tau)$.

τ (en jours)		0	1	3	7	28	90	365	∞
CEB-FIP	a*	-	1,8	1,6	1,4	1,0	0,75	0,5	-
	b		1,7	1,4	1,1	0,7	0,50	0,3	
[9,3] $\frac{10,2\,g}{5+\sqrt{\tau}}$		2,1	1,7	1,5	1,35	1,0	0,71	0,43	0
[9,5] $0,36+\frac{37}{30+\tau}$		1,6	1,55	1,5	1,4	1,0	0,67	0,45	0,36
[5] $0,5+\frac{14}{\tau}$		∞	14,5	5,2	2,5	1,0	0 65	0,5	0,5
[3] $1,72-\log_{10}\sqrt{\tau}$		∞	1,7	1,5	1,3	1,0	0,74	0,44	$-\infty$

* a : ciment normal ; b = ciment HRI

DEUXIEME PARTIE

ETUDE DES STRUCTURES

V - STRUCTURES ISOSTATIQUES.

Les conditions d'équilibre donnent un nombre d'équations égal à celui des inconnues, sans qu'intervienne donc la valeur du module E de déformation du béton.

La valeur des efforts sollicitant une structure isostatique ne dépend donc pas de E, même si ce dernier varie avec l'abscisse x le long de la structure, ou avec le temps t. Elle ne dépend donc pas du fluage.

Celui-ci n'influe donc que sur les déformations de la structure et éventuellement sur la répartition des contraintes (de résultante constante sous l'action d'efforts extérieurs constants) dans une section, notamment dans les ouvrages en béton armé.

Ces calculs sont basés sur l'hypothèse de conservation des sections droites planes.

Dans les ouvrages en béton précontraint, il convient de prendre en compte la diminution de l'effort de précontrainte due au raccourcissement des armatures dû au fluage et au retrait du béton.

VI - STRUCTURES HYPERSTATIQUES.

VI,1 - Dans de telles structures, la répartition des efforts dépend de leur déformabilité, donc de $E(x, t)$. Elle peut, par conséquent, dépendre du fluage.

Considérons la structure (Σ) n fois hyperstatique, soumise aux forces extérieures X_i, appliquées aux points A_i. Soient R_j les réactions hyperstatiques inconnues, appliquées aux points B_j ($j = 1$ à n). Associons lui la structure isostatique (Σ_o) obtenue en supprimant dans (Σ) les n liaisons hyperstatiques j.

VI,2 - Cas où le béton a le même âge, c'est à dire où le module de déformation totale, $E(t_o, t)$ est le même sur toute la longueur de la structure.

Cette hypothèse fondamentale n'est vérifiée que dans certains cas tels que la réalisation à une époque donnée d'une poutre continue à partir d'éléments préfabriqués ayant tous le même âge. Mais elle permet d'aboutir aisément à des résultats intéressants, comme on va le voir ci-après.

a - Dans ces conditions, si au temps t_o , nous appliquons à la structure associée (Σ_o) les efforts constants X_i en A_i et R_j en B_j , le déplacement v_k du point B_k vaut au temps t $(> t_o)$:

$$v_k(t_o,t) = \frac{1}{E(t_o,t)} \left[\sum_i a_k^i X_i + \sum_j b_k^j R_j \right] \qquad (17)$$

où a_k^i et b_k^j sont des constantes caractéristiques de la structure étudiée.

Dans le cas où les efforts X_i et R_j varient à partir de t_o (1):

$$v_k(t_o,t) = \frac{1}{E(t_o,t)} \left[\sum_i a_k^i X_i(t_o) + \sum_j b_k^j R_j(t_o) \right] + \int_{t_o}^{t} \frac{1}{E(\tau,t)} \left[\sum_i a_k^i \frac{\partial X_i(\tau)}{\partial \tau} + \sum_j b_k^j \frac{\partial R_j(\tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \qquad (18)$$

soit, en intégrant par parties :

$$v_k(t_o,t) = \frac{1}{E(t,t)} \left[\sum_i a_k^i X_i(t) + \sum_j b_k^j R_j(t) \right] - \int_{t_o}^{t} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{E(\tau,t)} \right) \left[\sum_i a_k^i X_i(\tau) + \sum_j b_k^j R_j(\tau) \right] d\tau \qquad (18')$$

b - Cas où la structure est réalisée d'enblée suivant son schéma statique définitif (par exemple par coulage sur cintre).

Considérons tout d'abord la cas où tous les efforts sont appliqués simultanément, à t_o .

A tout temps t, les déplacements des points B_k sont nuls .

Si donc les efforts extérieurs X_i sont constants, il en va de même pour les réactions R_j qui sont données, d'après (17) par :

$$\sum_i a_k^i X_i + \sum_j b_k^j R_j = 0 \qquad (19)$$

---

(1) Parmi les efforts X_i variables avec le temps figurent notamment ceux dus à la précontrainte, dans les ouvrages en béton précontraint.

Nous appellerons ces réactions R_j^*.

Si les efforts X_i varient dans le temps, il en va de même pour les réactions R_j dont les valeurs à toute époque t sont données, d'après (18') par :

$$\sum_i a_k^i X_i(t) + \sum_j b_k^j R_j(t) = 0 \qquad (20)$$

Cette relation reste valable dans le cas où les efforts X_i sont appliqués à des temps différents :

Au temps t_i est appliqué l'effort $X_i(t_i)$ qui développe des réactions $R_j^i(t_i)$ telles que : $a_k^i X_i + \sum_j b_k^j R_j^i = 0$

(18') sécrit :

$$v_k(t) = \frac{1}{E(t,t)} \sum_i \left[a_k^i X_i(t) + \sum_j b_k^j R_j^i(t) \right] - \sum_i \int_{t_i}^{t} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{E(\tau,t)} \right) \left[a_k^i X_i(\tau) + \sum_j b_k^j R_j^i(\tau) \right] d\tau$$

comme $v_k(t)$ reste constamment nul :

$$\sum_i \left[a_k^i X_i(t) + \sum_j b_k^j R_j^i(t) \right] = 0$$

et, comme $\sum_{i,j} b_k^j R_j^i(t) = \sum_j b_k^j \left(\sum_i R_j^i(t) \right) = \sum_j b_k^j R_j(t)$

on retrouve la relation (20).

Par conséquent :

<u>Quand le module de déformation du béton est le même sur toute la longueur de la structure, l'équilibre d'une structure hyperstatique, réalisée d'emblée, et soumise à des forces extérieures variables ou constantes, est le même, à chaque époque, que l'équilibre élastique, correspondant à un module de déformation constant.</u>

Le fluage et le retrait n'influent que sur les déformations de la structure. Elles sont à calculer en prenant en compte à chaque époque t, le module $E(t_0, t)$.

c – <u>Effet des tassements d'appui</u> :

Supposons que l'appui B_k tasse progressivement à partir du temps t_0 suivant la loi $v_k(t)$. Cela provoque des variations des réactions d'appui $\Delta R_j(t)$.

Si la structure se comporte de façon élastique, ces variations $\Delta R_j^*(t)$ sont connues, et se calculent au moyen des n équations :

$$v_k(t) = \frac{1}{E(t_0)} \sum_j b_k^j \, \Delta R_j^*(t) \qquad (k = 1 \text{ à } n)$$

Comme en réalité, le module de déformation varie avec le temps, les variations réelles $\Delta R_j(t)$ diffèrent de $\Delta R_j^*(t)$ et sont données par :

$$v_k(t) = \frac{1}{E(t_0,t)} \sum_j b_k^j \, \Delta R_j(t_0) + \sum_j b_k^j \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \Delta R_j(\tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{E(\tau,t)}$$

D'où, en égalant les 2 équations précédentes, et comme le déterminant $|b_k^j| \neq 0$:

$$\frac{\Delta R_j^*(t)}{E(t_0)} = \frac{\Delta R_j(t_0)}{E(t_0,t)} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \Delta R_j(\tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{E(\tau,t)}$$

expression de la forme ③ . $\Delta R_j(t)$ peut donc se mettre sous la forme ⑩ , soit en intégrant par parties :

$$\Delta R_j(t) = \frac{1}{E(t_0)} \left[\Delta R_j^*(t) \, \rho(t,t) - \int_{t_0}^{t} \Delta R_j^*(\tau) \frac{\partial \rho(\tau,t)}{\partial \tau} \, d\tau \right]$$

soit, dans le cas où $K_t(t-\tau) = 1 - e^{-\alpha(t-\tau)}$:

$$\Delta R_j(t) = \Delta R_j^*(t) - \alpha\phi \int_{t_0}^{t} \Delta R_j^*(\tau) \, e^{-\alpha(1+\phi)(t-\tau)} \, d\tau$$

d) Compensation des ouvrages hyperstatiques.

Elle consiste à régler la répartition des efforts dans les ouvrages en imposant, au temps t_0 , à leurs appuis B_k des déplacements constants $v_k(t_0)$. On provoque ainsi des variations des réactions d'appui, ΔR_j , qui évoluent au cours du temps.

Reprenons la méthode du § précédent. Les valeurs des ΔR_j^* sont constantes

$$v_k(t_0) = \frac{1}{E(t_0)} \sum_j b_k^j \, \Delta R_j^*$$

D'où : $$\Delta R_j(t) = \frac{\Delta R_j^*}{E(t_0)} \, \rho(t_0,t)$$

soit, avec l'expression ⑤ de $K_t(t-t_0)$:

$$\Delta R_j(t) = \frac{\Delta R_j(t_0)}{1+\phi} \left[1 + \phi \, e^{-\alpha(1+\phi)(t-t_0)} \right]$$

$$\Delta R_j(\infty) = \frac{\Delta R_j(t_0)}{1+\phi}$$

Les efforts de compensation diminuent donc rapidement dans le temps, et de façon considérable.

e - Cas des structures réalisées par phases successives :

De plus en plus, les ponts en béton précontraint sont réalisés par tronçons, assemblés ensuite, sous forme de travées continues, par précontrainte. Il en va ainsi, notamment, des ponts réalisés en encorbellement, ou sur cintre auto-porteur, ou par travées indépendantes préfabriquées puis rendues continues.

Ces modes de construction répondent au double souci :
- d'économiser sur les cintres et échafaudages
- de réduire très fortement les déformations différées que subiraient les tronçons s'ils étaient laissés indépendants.

Dans ces ouvrages la première partie des déformations (instantanées et début de fluage) s'effectue librement. Puis les liaisons hyperstatiques introduites par les clavages empêchent le reste de la déformation différée de le faire. A cet effet se développent progressivement dans les sections de clavage des efforts qui assurent à toute époque les déformations imposées.

Ces efforts sont dus à des variations progressives, ΔR , des réactions d'appuis de l'ouvrage. L'ensemble des ΔR constitue évidemment, à chaque temps, un système nul.

Considérons une structure (Σ) n fois hyperstatique, obtenue par clavage, au temps t_1 , de p liaisons dans une structure (Σ_1) initialement construite, et qui est (n - p) fois hyperstatique . Ces liaisons sont réalisées dans les sections C_j .

Soient R_j (j = 1 à p) les réactions hyperstatiques supplémentaires introduites par ce clavage. Soient X_i les efforts extérieurs appliqués à (Σ_1) au temps $t < t_1$, et restant ensuite appliqués à (Σ).

Soit (Σ_0) la structure isostatique associée, obtenue par suppression de (n - p) liaisons dans la structurre (Σ_1).

Si (Σ) avait été réalisé d'emblée sous sa forme hyperstatique définitive (par bétonnage complet sur cintre, par exemple), les réactions hyperstatiques seraient R_j^* telles que : $0 = \sum_i a_k^i X_i + \sum_j b_k^j R_j^*$

Appliquons, au temps t_0, les forces X_i à (Σ_0). La déformation des sections C_k qui en résulte au temps t_1 vaut :

$$v_k(t_0,t_1) = \frac{1}{E(t_0,t_1)} \sum_i a_k^i X_i$$

A partir du temps t_1, le clavage force cette déformation à rester constante (1) ; il en résulte progressivement les réactions de clavage telles que au temps t :

$$v_k(t_0,t_1) = \frac{1}{E(t_0,t)} \sum_i a_k^i X_i + \sum_j b_k^j \int_{t_1}^{t} \frac{\partial \Delta R_j(\tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{E(\tau,t)}$$

soit en éliminant les X_i et en intégrant par parties :

$$\left[\frac{1}{E(t_0,t)} - \frac{1}{E(t_0,t_1)}\right] \sum_j b_k^j R_j^* = \sum_j b_k^j \int_{t_1}^{t} \frac{\partial \Delta R_j(\tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{E(\tau,t)}$$

équation valable pour tout K $(K = 1 \text{ à } n)$

D'où

$$\left[\frac{1}{E(t_0,t)} - \frac{1}{E(t_0,t_1)}\right] R_j^* = \int_{t_1}^{t} \frac{\partial \Delta R_j(\tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{E(\tau,t)}$$

Avec l'expression (5) de $K_t(t-t_0)$, E et ϕ constants, on obtient :

$$\Delta R_j(t) = \Delta R_j(t_1) + R_j^* \frac{\phi}{1+\phi} e^{-\alpha(t_1-t_0)}\left[1 - e^{-\alpha(1+\phi)(t-t_1)}\right]$$

soit, quant t devient infini :

$$\Delta R_j(\infty) = \Delta R_j(t_1) + R_j^* \frac{\phi}{1+\phi} e^{-\alpha(t_1-t_0)}$$

Le plus souvent, la réalisation des clavages ne modifie pas instantanément (au temps t_1) les réactions d'appui : $\Delta R_j(t_1) = 0$.

Les formules précédentes montrent que la répartition des efforts dans la structure va progressivement se rapprocher de celle qui régnerait dans l'ouvrage si celui-ci avait été initialement réalisé suivant son schéma statique définitif.

---

(1) Il peut, en réalité, s'agir d'une déformation absolue (par ex : imposition d'une flèche constante en un point par mise en place d'un appui fixe en ce point, à t_1) ou d'une déformation relative (par ex : différence des rotations des sections extrêmes en regard de 2 tronçons rendus continus).

Considérons, par exemple, une suite de travées indépendantes préfabriquées au temps t_0 , puis rendues continues au temps t_1 . Les moments sur appuis intermédiaires, tout d'abord nuls vont progressivement croître jusqu'à atteindre la valeur :

$M_j(\infty) = M_j^* \frac{\phi}{1+\phi} e^{-\alpha(t_1-t_0)}$, où M_j^* désigne le moment sur appui j que développeraient dans la poutre continue les charges (appliquées au temps t_0).

Dans le cas où les charges X_i sont appliquées à des temps $\tau_i < t_1$, on obtient, en opérant comme au § b :

$$\Delta R_j(t) = \Delta R_j(t_1) + \frac{\phi}{1+\phi}\left[1 - e^{-\alpha(1+\phi)(t-t_1)}\right] \sum_i R_j^{i*} e^{-\alpha(t_1-\tau_i)}$$

Considérons par exemple le cas d'un pont à une travée réalisé au moyen de 2 consoles encastrées sur culées, et construites symétriquement en encorbellement, puis rendues continues à la clé, au temps t_1 .

Le moment dans cette section, nul au temps t_1 , vaudra au temps $t > t_1$:

$$M(t) = \frac{\phi}{1+\phi}\left[1 - e^{-\alpha(1+\phi)(t-t_1)}\right] \sum_i M_i^* e^{-\alpha(t_1-\tau_i)}$$

où M_i^* désigne le moment à la clé que développeraient dans la poutre bi-encastrée les charges X_i réellement appliquées au temps τ_i $(< t_1)$.

Le moment final à la clé : $M(\infty) = \frac{\phi}{1+\phi} \sum_i M_i^* e^{-\alpha(t_1-\tau_i)}$ est donc égal au moment que développeraient dans l'ouvrage définitif les charges fictives : $X_i^* = X_i e^{-\alpha(t_1-\tau_i)}$

Nous n'avons considéré ci-dessus que les efforts X_i appliqués à la structure avant clavage. Les efforts appliqués après la réalisation de la structure définitive ne sont pas en effet modifiés par le fluage. Dans les ouvrages en béton précontraint, il faut néanmoins prendre garde à ce que, pour les armatures de précontrainte mises en action à $t < t_1$, les pertes restant à effectuer après t_1 agissent sur un schéma statique différent du schéma initial, et ne sont donc pas en affinité des efforts de précontrainte initiaux.

VI,3 - Cas où le module de déformation totale varie sur la longueur de la longueur de la structure (1).

Ce module $E(x, t_0, t)$ est alors fonction :

- non seulement des temps t_0 , de chargement, et t d'observation
- mais aussi de l'âge du béton, c'est à dire de son abscisse x dans la structure.

On ne peut plus alors séparer x et le couple (t_0, t). En particulier, l'équation (17) qui constituait la base de la partie VI,2, doit être remplacée par

$$v_k(t_0, t) = \sum_i A_k^i(t_0, t)\, X_i + \sum_j B_k^j(t_0, t)\, R_j$$

et (dans le cas où les efforts sont variables) (18) par :

$$v_k(t_0, t) = \sum_i A_k^i(t_0, t)\, X_i(t_0) + \sum_j B_k^j(t_0, t)\, R_j(t_0) + \sum_i \int_{t_0}^{t} A_k^i(\tau, t)\, \frac{\partial X_i(\tau)}{\partial \tau}\, d\tau + \sum_j \int_{t_0}^{t} B_k^j(\tau, t)\, \frac{\partial R_j(\tau)}{\partial \tau}\, d\tau$$

En ce cas, seules des méthodes de résolution numérique (analogues à celle présentée en III,5) peuvent être utilisées.

On remarquera que la répartition des efforts dans toute structure hyperstatique, même de schéma statique invariable, est variable avec le temps.

Quant aux structures réalisées par phases successives, les efforts induits par les clavages successifs se calculent en écrivant le respect des déformations imposées, à chaque temps.

---

1) C'est notamment le cas des ponts construits en encorbellement (avec voussoirs coulés en place) ou à l'avancement, travée par travée. C'est encore le cas des sections composites, formées de deux bétons d'âges différents.

TROISIEME CHAPITRE

ETUDE DES SECTIONS COMPOSITES (dans le béton est supposé résiter à la traction).

VII,1 - Généralités.

L'équation (10) donne, en intégrant par parties :

$$\sigma(t) = E(t)\cdot\varepsilon(t) - \int_{t_0}^{t} \varepsilon(\tau)\,\frac{\partial \rho(\tau,t)}{\partial \tau}\,d\tau$$

soit, en supposant que E(t) et ϕ sont constants, et en adoptant l'expression (14) pour ρ :

$$\sigma(t) = E\left[\varepsilon(t) - \alpha\phi\int_{t_0}^{t}\varepsilon(\tau)\,e^{-\alpha(1+\phi)(t-\tau)}\,d\tau\right] \qquad (21)$$

VII,2 - Caractéristiques géométriques des sections.

a) Nous considérons une section constituée par 2 parties dont chacune a même plan moyen Gyz. La partie i (i = 1 ou 2) a pour aire : B_i centre de gravité : G_i , et moment d'inertie propre : I_i . Son module de déformation instantanée supposé constant est E_i . Nous posons : $\overline{G_1G_2} = a$; $\frac{E_2}{E_1} = n$

La section totale, homogénéisée par rapport au matériau de la partie 1 a pour :

- aire : $B = B_1 + nB_2$
- centre de gravité : G, tel que $\overline{G_1G} = b_1 = a\frac{nB_2}{B}$; $\overline{GG_2} = b_2 = a\frac{B_1}{B}$
- moment d'inertie : $I = I_1 + nI_2 + a^2\frac{B_1 nB_2}{B}$

Les ordonnées comptées à partir de G sont notées : y ; à partir de G = $Y = y - b_1$

b) Hypothèses fondamentales :

- Les sections droites restent planes.
- Le béton résiste à la traction et n'est donc pas fissuré.

VII,3 - Sections mixtes acier-béton, ou sections de béton armé.

VII,31 - Le béton constitue la section partielle 1, et l'acier la section partielle 2. Pour plus de clarté, nous remplacerons l'indice 2 par l'indice a (a = acier).

VII,32 - Etude de l'effet du fluage.

a) Supposons que l'on applique, à partir du temps 0, les efforts extérieurs constants : effort normal N et moment fléchissant (d'axe GZ) = M.

Les contraintes normales sollicitant la fibre d'ordonnée Y valent :

- au temps 0 :

$$\begin{cases} \sigma_1(0,Y) = \dfrac{N}{B} + \dfrac{MY}{I} & \text{pour le béton} \\ \sigma_a(0,Y) = n \cdot \sigma_b(0,Y) & \text{pour l'acier} \end{cases} \qquad (22)$$

- au temps t :

$$\begin{cases} \sigma_1(t,Y) = E_1 \left[\varepsilon(t,Y) - \alpha\phi \displaystyle\int_0^t \varepsilon(\tau,Y)\, e^{-\alpha(1+\phi)(t-\tau)}\, d\tau \right] \\ \sigma_a(t,Y) = E_a\, \varepsilon_a(t,Y) = n E_1\, \varepsilon(t,Y) \end{cases}$$

b) L'hypothèse de la conservation des sections planes s'écrit :

$$\varepsilon(t,Y) = Y \cdot \gamma(t) + \delta(t)$$

c) L'équilibre entre les efforts extérieurs (N et M) et les contraintes entraîne :

$$\begin{cases} \dfrac{N}{E_1} = B\cdot\delta(t) - \alpha\phi\, B_1 \displaystyle\int_0^t e^{-\alpha(1+\phi)(t-\tau)}\left[\delta(\tau) - b_1\,\gamma(\tau)\right] d\tau \\ \dfrac{M}{E_1} = \dot{I}\cdot\gamma(t) - \alpha\phi\, B_1 \displaystyle\int_0^t e^{-\alpha(1+\phi)(t-\tau)}\left[\gamma(\tau)\left(\dfrac{I_1}{B_1} + b_1^2\right) - b_1\,\delta(\tau)\right] d\tau \end{cases} \qquad (23)$$

soit, en dérivant par rapport à t et en éliminant l'intégrale :

$$\begin{cases} \dfrac{N(1+\phi)}{B E_1} = \delta(t)\left[1+\phi\left(1-\dfrac{B_1}{B}\right)\right] + \dfrac{1}{\alpha}\,\dfrac{d\delta(t)}{dt} + \phi\,\dfrac{B_1}{B}\,b_1\,\gamma(t) \\ \dfrac{M(1+\phi)}{I E_1} = \gamma(t)\left[1+\phi\left(1-\dfrac{I_1 + B_1 b_1^2}{I}\right)\right] + \dfrac{1}{\alpha}\,\dfrac{d\gamma(t)}{dt} + \phi\,\dfrac{B_1}{I}\,b_1\,\delta(t) \end{cases}$$

D'où, en posant :

$$\nu = N\frac{\alpha(1+\phi)}{B E_1} \quad ; \quad \mu = M\frac{\alpha(1+\phi)}{I E_1} \quad ; \quad f = \alpha\left[1+\phi\left(1-\frac{B_1}{B}\right)\right] \quad ; \quad g = \alpha\left[1+\phi\left(1-\frac{I_1+B_1 b_1^2}{I}\right)\right]$$

$$h = \alpha\phi\,\frac{B_1}{B}\,b_1 \quad ; \quad j = \alpha\phi\, b_1\,\frac{B_1}{I} \quad ; \quad \Delta = fg - hj$$

$$\begin{cases} \delta(t) = \dfrac{\nu g - \mu h}{\Delta} + \left(\dfrac{\beta_1 - g}{j}\right) K_1\, e^{-\beta_1 t} + \left(\dfrac{\beta_2 - g}{j}\right) K_2\, e^{-\beta_2 t} \\ \gamma(t) = \dfrac{\mu f - \nu j}{\Delta} + K_1\, e^{-\beta_1 t} + K_2\, e^{-\beta_2 t} \end{cases}$$

où β_1 et β_2 sont les racines de l'équation : $(f-\beta)(g-\beta) - hj = 0$
et K_1 et K_2 2 constantes à déterminer par les conditions obtenues au chargement (t = 0).

Au bout d'un temps infini :

$$\begin{cases} \delta(\infty) = \dfrac{\nu g - \mu h}{\Delta} = -\dfrac{\alpha^2(1+\phi)}{\Delta E_1}\left[\phi\dfrac{b_1 B_1}{BI}(M+Nb_1) - \dfrac{N}{B}\left\{1+\phi\left(1-\dfrac{I_1}{I}\right)\right\}\right] \\ \gamma(\infty) = \dfrac{\mu f - \nu j}{\Delta} = -\dfrac{\alpha^2(1+\phi)}{\Delta E_1}\left[\phi\dfrac{B_1}{BI}(M+Nb_1) - \dfrac{M}{I}(1+\phi)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1(\infty, Y) = \dfrac{\alpha^2}{\Delta}\left[(1+\phi)\left(\dfrac{MY}{I}+\dfrac{N}{B}\right) - \phi\dfrac{B_1 I_1}{BI}\left\{\dfrac{M+Nb_1}{I_1}(Y+b_1) + \dfrac{N}{B_1}\right\}\right] \\ \sigma_2(\infty, Y) = n(1+\phi)\,\sigma_1(\infty, Y) \end{cases}$$

valeurs à comparer avec les valeurs initiales (22) , en remarquant que le terme : $\left(\dfrac{M+Nb_1}{I_1}(Y+b_1) + \dfrac{N}{B_1}\right)$ **représente la contrainte qui agirait sur le béton s'il n'y avait pas d'acier.**

Les contraintes dans le béton diminuent donc progressivement, au détriment des contraintes dans l'acier. L'axe neutre (fibre où la contrainte développée par la flexion simple est nulle) se rapproche progressivement de G , c'est-à-dire de l'acier, puisqu'il passe de la position Y = 0, au temps 0, à la position :

$$Y = \frac{b_2}{1 + \dfrac{B}{n\phi A}}$$ **au temps infini**

d) Mais il est bien plus intéressant de présenter les résultats précédents sous la forme suivante :

Posons : $n_\infty = n(1+\phi)$ **. Appelons** K_∞ **la valeur de la grandeur quelconque K obtenue en remplaçant n par** n_∞ **; ainsi :**

$$B_\infty = B_1 + n(1+\phi)A \quad ; \quad b_{1\infty} = n(1+\phi)\frac{aA}{B_\infty} \quad ; \quad b_{2\infty} = \frac{aB_1}{B_\infty}$$

$$I_\infty = I_1 + n(1+\phi)I_a + a^2 n(1+\phi)\frac{AB_1}{B_\infty}$$

nous obtenons : $\Delta = \alpha^2 \frac{I_\infty B_\infty}{I B}$, et :

$$\boxed{\sigma_1(\infty, Y) = \frac{N}{B_\infty} + \frac{(M - N\eta_\infty)}{I_\infty}(Y - \eta_\infty) \quad ; \quad \sigma_a(\infty, Y) = n_\infty \sigma_b(\infty, Y)}$$

où : $\eta_\infty = \overline{GG_\infty} = \frac{b_2 n \Phi A}{B_\infty}$, est l'ordonnée de l'axe neutre final.(1)

Nous retrouvons donc bien les résultats classiques, suivant lesquels les caractéristiques géo-mécaniques des sections et des contraintes qui les sollicitent sont à calculer :

- sous l'action d'une charge instantanée :
  avec la valeur instantanée du coefficient d'équivalence : $n = \frac{E_a}{E_1}$

- sous l'action d'une charge constante, après une longue durée d'application :
  avec la valeur du coefficient d'équivalence : $n_\infty = n(1+\phi)$

e) Remarques :

- Si le moment d'inertie propre de l'acier I_a est négligeable par rapport à I, moment d'inertie de la section totale (cas des sections en béton armé), la contrainte normale sollicitant le béton reste constante, malgré le fluage, sur la fibre d'ordonnée: $Y_1 = -\frac{\eta_\infty}{\frac{I_\infty}{I} - 1}$

- Si le moment d'inertie propre du béton, I_1 , qui est relativement négligeable (cas de certaines sections mixtes acier-béton), σ_a reste constant sur la fibre d'ordonnée : $Y_a = \frac{\eta_\infty}{1 - \frac{I_\infty}{I(1+\phi)}}$

VII,33 – Etude de l'effet du retrait du béton :

(1) On peut également repérer la position de G_∞ par la relation suivante :
$G_1 G_\infty = n_\infty \frac{aA}{B_\infty} = b_{100}$

a) En ce cas :

$$\begin{cases} \sigma_a(t) = E_a\ \varepsilon(t) \\ \sigma_1(t) = E_1 \left[\varepsilon(t) - \varepsilon_r(t) - \alpha\phi \int_0^t \left[\varepsilon(\tau) - \varepsilon_r(\tau) \right] e^{-\alpha(1+\phi)(t-\tau)}\, d\tau \right] \end{cases}$$

En désignant par $\varepsilon_r(t)$ la loi du retrait, que nous supposerons ci-après être :

$$\varepsilon_r(t) = \varepsilon_r \left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

De l'hypothèse de la conservation des sections planes, on déduit :

$$\varepsilon(t) - \varepsilon_r(t) = Y \cdot \gamma(t) + \delta(t)$$

Dans les équations (23), les premiers termes sont donc à remplacer :

$\left(\frac{N}{E_1}\right)$ par : $\left[-n A \varepsilon_r(t)\right]$ et $\left(\frac{M}{E_1}\right)$ par : $\left[-n A b_2\, \varepsilon_r(t)\right]$

Ces équations ont pour solution :

$$\begin{cases} \gamma(t) = -\varepsilon_r \dfrac{n_\infty A B_1 a}{B_\infty I_\infty} + K'_1 e^{-\beta_1 t} + K'_2 e^{-\beta_2 t} \\ \delta(t) = -\varepsilon_r \left[\dfrac{n_\infty A}{B_\infty} \left(\dfrac{I + n\phi I_a}{I_\infty} \right) - \dfrac{\phi}{1+\phi} e^{-\beta t} \right] - \left(\dfrac{\beta_1 - g}{g} \right) K'_1 e^{-\beta_1 t} - \left(\dfrac{\beta_2 - g}{g} \right) K'_2 e^{-\beta_2 t} \end{cases}$$

où K'_1 et K'_2 sont 2 constantes à déterminer en fonction des conditions initiales.

Notons que : $\dfrac{I + n\phi I_a}{I_\infty} = 1 - \phi \dfrac{n a^2 A B_1^2}{B B_\infty I_\infty} = 1 - \dfrac{a B_1}{I} \eta_\infty = 1 - \phi b_1 b_{2\infty} \dfrac{B_1}{I_\infty}$

Au bout d'un temps infini, nous obtenons donc :

$$\sigma_a(\infty, Y) = \varepsilon_r E_a \left[1 - \frac{n_\infty a A B_1}{B_\infty I_\infty} Y - \frac{n_\infty A}{B_\infty} \left(\frac{I + n\phi I_a}{I_\infty} \right) \right]$$

$$= -\varepsilon_r E_a n_\infty \frac{A b_{2\infty}}{I_\infty} \left[Y - \left(\phi b_1 \frac{B_1}{B_\infty} + \frac{I_\infty}{n_\infty A a} \right) \right]$$

$$\sigma_1(\infty, Y) = -\varepsilon_r \frac{E}{1+\phi}\left[\frac{n_\infty a A B_1}{B_\infty I_\infty} Y + \frac{n_\infty A}{B_\infty}\left(\frac{I + n\phi I_a}{I_\infty}\right)\right]$$

$$= -\varepsilon_r E_a \frac{A b_{2\infty}}{I_\infty}\left[Y - \left(\eta_\infty - \frac{I_\infty}{a B_1}\right)\right]$$

b) Les diagrammes des contraintes $\sigma_1(\infty)$ et $\frac{1}{n_\infty}\sigma_a(\infty)$ ont donc même pente (égale à : $-E_a \varepsilon_r \frac{n_\infty A b_{2\infty}}{I_\infty}$). Ils sont séparés par l'intervalle :

$$\sigma_1(\infty) - \frac{\sigma_a(\infty)}{n_\infty} = -\varepsilon_r \frac{E_a}{n_\infty}$$

qui représente la différence de variation de longueur, ε_r, qui n'a pû s'effectuer librement (cf. fig. 6).

c) La fibre du béton où l'influence du retrait est nulle a pour ordonnée :

$$Y_r = \eta_\infty - \frac{I_\infty}{a B_1}$$

Dans le cas où l'on peut négliger I_a devant I, cette fibre de retrait nul est confondue avec la fibre de fluage nul ($Y_r = Y_1$; cf. paragraphe VII,32e).

VII,4 – Cas des sections composites composées de deux bétons différents.

VII,41 – Notations :

Considérons une section composée :

– d'une partie de béton B_1 coulée au temps 0, chargée au temps t_o par l'effort normal N et le moment fléchissant M, supposés dès lors constants,

– et d'une partie de béton complémentaire, B_2, coulée au temps t_1 ($> t_o$) au contact de B_1 dont elle est dès lors solidaire.

Nous supposons que les 2 bétons ont même coefficient ϕ (supposé constant) et même loi de variation de retrait dans le temps, mais qu'ils n'ont pas mêmes modules de déformation instantanée ($E_2 / E_1 = n$).

Nous nous proposons d'étudier comment évoluent les contraintes dûes à N et M avec le fluage, et quelle est l'influence de la différence de retrait entre les 2 bétons B_1 et B_2.

VII,42 - L'hypothèse de conservation des sections planes s'écrit, pour toute fibre d'ordonnée y(ouY) :

- pour $0 < t < t_0$: $\varepsilon_1(t,y) = \varepsilon_r(t)$

- pour $t_0 < t < t_1$: $\varepsilon_1(t,y) = \left[1+\phi(1-e^{-\alpha(t-t_0)})\right]\frac{\sigma_1(y)}{E_1} + \varepsilon_r(t) = y\,C_1(t) + D_1(t)$

avec : $\sigma_1(y) = \frac{N}{B_1} + \frac{My}{I_1}$

- pour $t_1 < t$: $\varepsilon_2(t,Y) = \varepsilon_1(t,Y) - \varepsilon_1(t_1,Y) = Y\gamma(t) + \delta(t)$

avec : $\gamma(t_1) = \delta(t_1) = 0$

D'après (21), les contraintes normales agissant au temps $t > t_1$ sont :

- sur B_1 :

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}\sigma_1(t,Y) = E_1 \Bigg[& \varepsilon_1(t_1,Y) + Y\gamma(t) + \delta(t) \\ & - \alpha\phi \left\{ \int_0^{t_0} \varepsilon_r(\tau)\, e^{-\alpha(1+\phi)(t-\tau)}\, d\tau + \int_{t_0}^{t_1} \left[y\,C_1(\tau) + D_1(\tau)\right] e^{-\alpha(1+\phi)(t-\tau)}\, d\tau \right. \\ & \left. + \int_{t_1}^{t} \left[\varepsilon_1(t_1,Y) + Y\gamma(\tau) + \delta(\tau)\right] e^{-\alpha(1+\phi)(t-\tau)}\, d\tau \right\} \Bigg]\end{aligned}\right.$$

- sur B_2 :

$$\sigma_2(t,Y) = E_2 \left[Y\gamma(t) + \delta(t) - \alpha\phi \int_{t_1}^{t} \left[Y\gamma(\tau) + \delta(\tau)\right] e^{-\alpha(1+\phi)(t-\tau)}\, d\tau \right]$$

En utilisant l'expression (24) pour calculer $\sigma(t_1, Y)$ et éliminer les 2 premières intégrales figurant dans le second membre, il vient :

$$\sigma_1(t, Y) = \sigma_1(t_1, Y) + \left[E_1 \varepsilon_r(t_1) - \phi \sigma_1(t_1, Y) e^{-\alpha(t_1 - t_0)}\right] \left[\frac{1 - e^{-\alpha(1+\phi)(t-t_1)}}{1+\phi}\right] + \frac{E_1}{E_2} \sigma_2(t, Y)$$

Ecrivons l'égalité entre les efforts extérieurs appliqués à la section totale (effort normal N et moment fléchissant : $M - Nb_1$) et la résultante des contraintes σ_1 et σ_2. Il vient :

$$\left[N \phi e^{-\alpha(t_1 - t_0)} - E_1 B_1 \varepsilon_r(t_1)\right] \left[\frac{1 - e^{-\alpha(1+\phi)(t-t_1)}}{1+\phi}\right] \frac{1}{E_1 B} = \delta(t) - \alpha\phi \int_{t_1}^{t} \delta(\tau) e^{-\alpha(1+\phi)(t-\tau)} d\tau$$

$$\left[(M - Nb_1) \phi e^{-\alpha(t_1 - t_0)} + b_1 E_1 B_1 \varepsilon_r(t_1)\right] \left[\frac{1 - e^{-\alpha(1+\phi)(t-t_1)}}{1+\phi}\right] \frac{1}{E_1 I} = \gamma(t) - \alpha\phi \int_{t_1}^{t} \gamma(\tau) e^{-\alpha(1+\phi)(t-\tau)} d\tau$$

système d'équations dont la solution est :

$$\begin{cases} \delta(t) = \left(1 - e^{-\alpha(t-t_1)}\right) \left[\dfrac{N}{E_1 B} \phi e^{-\alpha(t_1 - t_0)} - \dfrac{B_1}{B} \varepsilon_r(t_1)\right] \\ \gamma(t) = \left(1 - e^{-\alpha(t-t_1)}\right) \left[\dfrac{M - Nb_1}{E_1 I} \phi e^{-\alpha(t_1 - t_0)} - \dfrac{b_1 B_1}{I} \varepsilon_r(t_1)\right] \end{cases}$$

Si la section totale avait été réalisée d'emblée, elle aurait été soumise, à tout temps $t > t_0$, aux contraintes :

$$\sigma_1^*(Y) = \frac{M - Nb_1}{I} Y + \frac{N}{B} \quad , \text{ et } \quad \sigma_2^*(Y) = n \sigma_1^*(Y)$$

En réalité, elle est soumise, au temps $t > t_1$, aux contraintes :

$$\sigma_1(t,Y) = \sigma_1(t_1,Y) + \left[\frac{\phi}{1+\phi} e^{-\alpha(t_1-t_0)}\left\{\sigma_1^*(Y) - \sigma_1(t_1,Y)\right\} + \sigma_{1r}(Y)\right]\left(1 - e^{-\alpha(1+\phi)(t-t_1)}\right)$$

avec $$\sigma_{1r}(Y) = \frac{E_1}{1+\phi}\,\varepsilon_r(t_1)\,\frac{b_1 B_1}{I}\left(Y + \frac{\dot{I}}{\partial B_1}\right)$$

$$\sigma_2(t,Y) = \left[\frac{\phi}{1+\phi} e^{-\alpha(t_1-t_0)}\,\sigma_2^*(Y) + \sigma_{2r}(Y)\right]\left(1 - e^{-\alpha(1+\phi)(t-t_1)}\right)$$

avec : $$\sigma_{2r}(Y) = \frac{E_2}{1+\phi}\,\varepsilon_r(t_1)\,\frac{b_2 n B_2}{I}\left(Y - \frac{I}{\partial n B_2}\right)$$

Ces formules montrent que :

- Les contraintes émigrent progressivement du béton 1 au béton 2, ce qui soulage donc le béton le plus ancien; les contraintes se rapprochent donc des valeurs qu'elles auraient prises si la section avait été réalisée d'emblée sous sa forme définitive.

- Ce transfert de contraintes est d'autant plus faible que le béton 1 a effectué librement une plus grande part de son fluage, c'est-à-dire que $(t_1 - t_0)$ est plus grand.

Par exemple, pour $\phi = 2$ et $t_1 = t_0$, on obtiendrait :

$$\sigma_{1\infty} = \frac{1}{3}\,\sigma_1(t_1) + \frac{2}{3}\,\sigma_1^* \quad ; \quad \text{et} \quad \sigma_{2\infty} = \frac{2}{3}\,\sigma_2^*$$

REFERENCES.

[1] Recommandations internationales pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton (CEB-FIP) - Rédaction de juin 1970.

[2] Mac-HENRY : A new aspect of creep in concrete and its application to design. Proceedings ASTM, vol. 5, n° 43 - 1943.

[3] GUYON : Constructions en béton précontraint, Eyrolles- Paris - 1966

[4] COURBON : L'influence du fluage linéaire sur l'équilibre des systèmes hyperstatiques en béton précontraint. Annales de l'ITBTP, février 1968.

[5] AROUTOUNIAN : Applications de la théorie du fluage - Moscou - 1952

[6] DISCHINGER : Untersuchung über die Knicksicherheit, die elastiche Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken. Der Bauingenieur août, sept., oct. 1937).

[7] LEVI et PIZETTI : Fluage, plasticité et précontrainte - Dunod Paris - 1951.

[8] BRAULT : Applications de béton précontraint - CHEC - Paris - 1967

[9] Publication préliminaire au présent symposium :
9,1 - TROST
9,2 - DILGER et NEVILLE
9,3 - DILGER, GHALI et KOUNTOURIS
9,4 - GAMBLE
9,5 - KRÜGER
9,6 - CEDERWALL, ELFGREN et LOSBERG
9,7 - KELJER

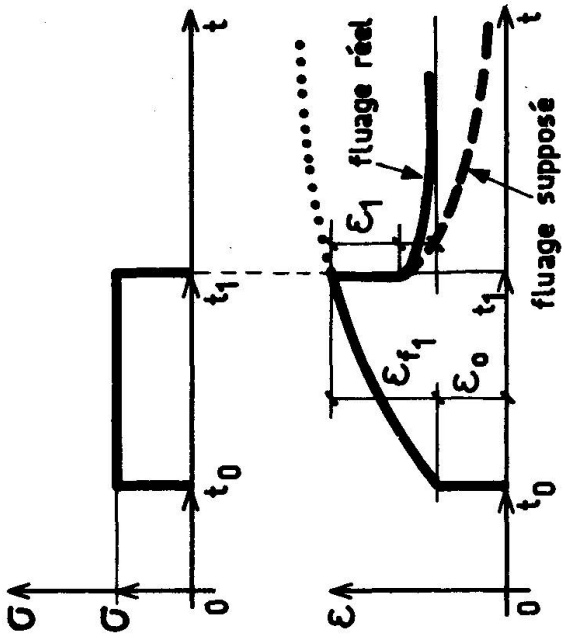

FIG. 2

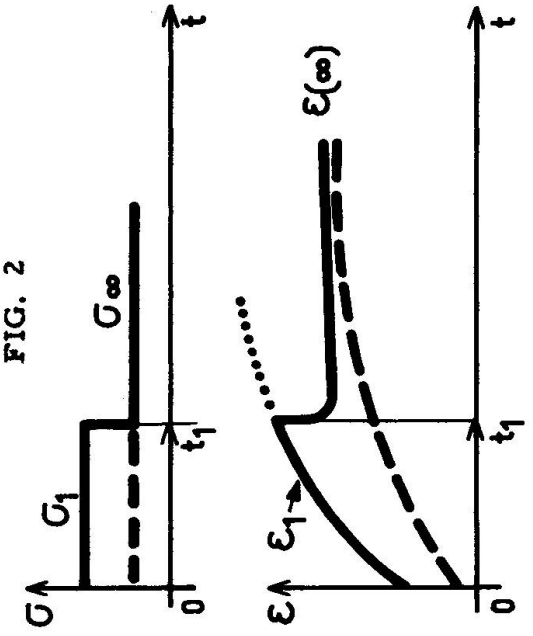

FIG. 4

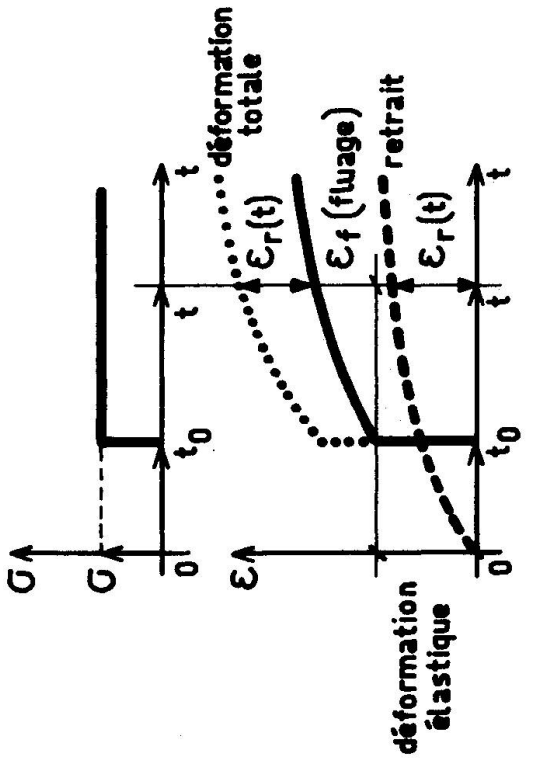

FIG. 3

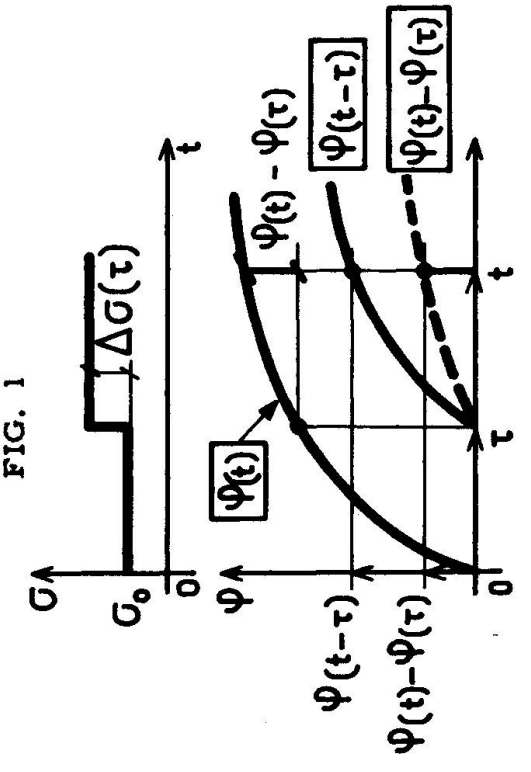

FIG. 1

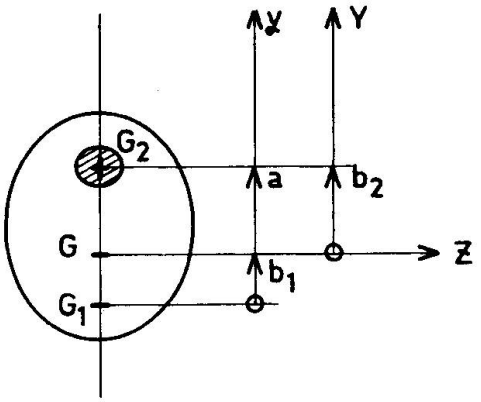

Figure 5

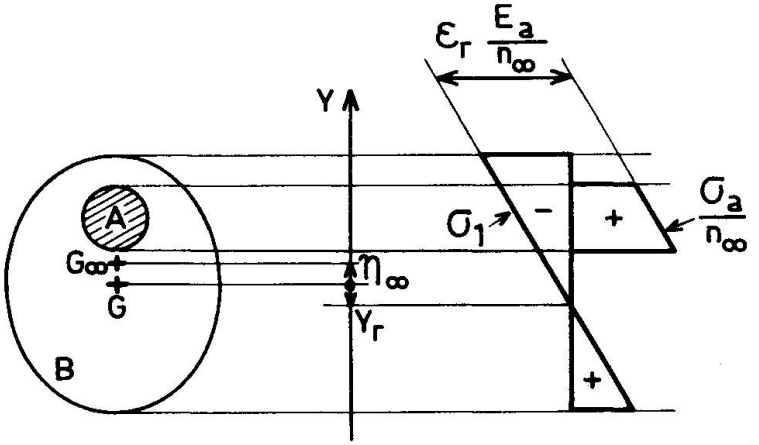

Figure 6 - Contraintes finales dues au retrait du béton (compressions comptées positives).

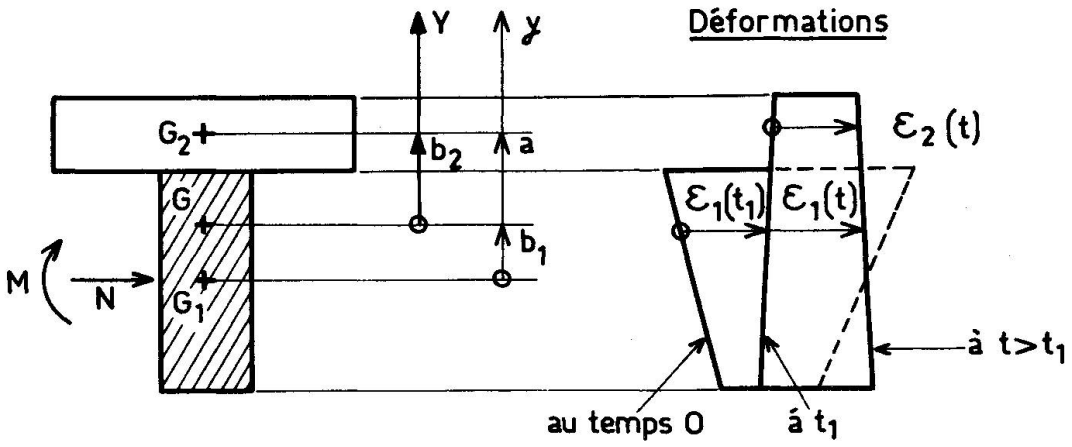

Figure 7 - (en pointillé : déformation du béton B_1 à $t > t_1$, en l'absence du béton B_2).