

Zeitschrift: IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

Band: 5 (1970)

Artikel: Beitrag und Rechenhilfsmittel zur Ermittlung von Formänderungen gerissener Tragwerke mit Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens

Autor: Hampe, E. / Köppler, H.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-6935>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Beitrag und Rechenhilfsmittel zur Ermittlung von Formänderungen gerissener Tragwerke mit Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens

Calculation of Creep and Shrinkage Deformations in Cracked Reinforced Concrete Structures

Contribution et procédé de calcul permettant la recherche des déformations des ouvrages fissurés avec considération du fluage et du retrait

E. HAMPE

Prof. Dr.-Ing. habil.

Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar
Sektion Bauingenieurwesen
Weimar, DDR

H. KÖPPLER

Dr.-Ing.

1. Einführung

Von den Verfassern wurden mit /5/ Grundlagen und Rechenhilfsmittel zur Ermittlung des Einflusses von Kriechen und Schwinden bei einfach bewehrten, gerissenen Stahlbeton- und Spannbetonquerschnitten bereitgestellt. In der vorliegenden Arbeit werden diese Materialien erweitert durch die Berücksichtigung von:

- beliebigen T-Querschnitten
- doppelter Bewehrung
- plastifizierter Betonzugzone zur Erfassung des Betonverhaltens in den zwischen den Rissen liegenden Bereichen

Neben den Änderungen von Stahlzugkraft, Betonrandspannung und Nulllinienlage wird auch die Änderung der Querschnittskrümmung infolge des Kriechens und Schwindens berechnet.

Zur Ermittlung der Formänderungen erfolgt eine Diskretisierung des zu untersuchenden Tragwerkes, wobei die Betonzugzone in den einzelnen Abschnitten je nach Größe der Beanspruchung ideal gerissen, ungerissen plastifiziert oder ideal elastisch angenommen wird. Durch einfache Integration über die Tragwerkslänge erhält man die Verdrehungen, durch zweifache Integration die Durchbiegungen des Tragwerkes. Die Integration kann nach den üblichen Verfahren für Funktionen diskreten Arguments ausgeführt werden. Bei statisch unbestimmten Tragwerken muß die Verträglichkeit an den Angriffsstellen der Überzähligkeiten durch Iteration hergestellt werden. Da die zeitabhängige Änderung der Überzähligkeiten infolge des Kriechens im allgemeinen gering ist, ist die Brauchbarkeit der Rechenhilfsmittel für statisch unbestimmte Tragwerke gewährleistet.

Bei den Untersuchungen wird von folgenden Voraussetzungen ausgegangen:

Fall a: "ideal gerissene Betonzugzone"

- Gültigkeit der Bernoullischen Hypothese
- Homogenität und Isotropie des Betons
- Proportionalität zwischen Spannungen und den elastischen und plastischen Verformungen

Fall b: "plastifizierte Betonzugzone"

- wie bei 1., jedoch werden vom Beton Zugspannungen aufgenommen, die proportional den Dehnungen bis zum ν -fachen der Betondruckspannungen sind und bei größeren Dehnungen den konstanten Wert $\nu \sigma_d$ beibehalten.

2. Bezeichnungen und Definitionen

E_b Elastizitätsmodul des Betons
 E_z Elastizitätsmodul des Stahls
 F_z/F_z Querschnittsfläche der Zugbewehrung/Druckbewehrung
 h Querschnittshöhe, gerechnet vom Schwerpunkt der Stahleinlagen bis zum oberen Querschnittsrand
 b größte Querschnittsbreite
 x Abstand der Spannungsnulllinie vom oberen Querschnittsrand
 y Abstand der jeweils betrachteten Faser der Betondruckzone vom oberen Querschnittsrand
 $\xi = x(\varphi)/h, \eta = y/h$
 $\bar{\rho}_h$ Abstand der Druckbewehrung vom oberen Querschnittsrand
 $\rho_1 h$ Flanschdicke des T-Querschnittes
 $\psi(\eta)b$ Querschnittsbreite an der Stelle η
 ψ_b Stegbreite des T-Querschnittes
 N_{bo} Betondruckkraft bei $t = 0$
 N_{bt} Änderung der Betondruckkraft bis $t = t$
 N_{zo} Stahlzugkraft bei $t = 0$
 N_{zv} Stahlzugkraft bei $\sigma = 0$ in Höhe der Stahleinlagen und $t = 0$
 $\Delta N_{zv} = N_{zo} - N_{zv}$
 N_{zt} Änderung der Stahlzugkraft bis $t = t$
 M auf den Querschnitt wirkendes konstantes Moment
 φ Kriechzahl zur Zeit $t = t$
 φ_∞ Endkriechzahl
 ε_S Endschwindmaß
 ε_b Betondehnung
 $\varepsilon_z/\bar{\varepsilon}_z$ Dehnung der Zugbewehrung /Druckbewehrung
 σ_b Betonspannung

$$n_z \mu_z = \frac{E_z F_z}{E_b b h}, \quad d\varepsilon_S = \frac{\varepsilon_S}{\varphi_\infty} d\varphi$$

Durch den Index "0" wird der Zustand $t = 0$, also vor Eintreten des Kriechens und Schwindens, gekennzeichnet.

3. Berechnungsgrundlagen

Mit den genannten Voraussetzungen ergibt sich unter Berücksichtigung des Schwindens folgende Beziehung zwischen den Spannungen und Verformungen des Betons (ausgenommen der plastifizierte Bereich des Betons im Fall b):

$$d\epsilon_b = \frac{1}{E} (d\sigma_b + \sigma_b d\varphi) - d\epsilon_S \quad (\epsilon_S \text{ mit pos. Vorzeichen einsetzen}) \quad (1)$$

Den folgenden Ableitungen liegt für den Fall a Abb. 1 zugrunde.

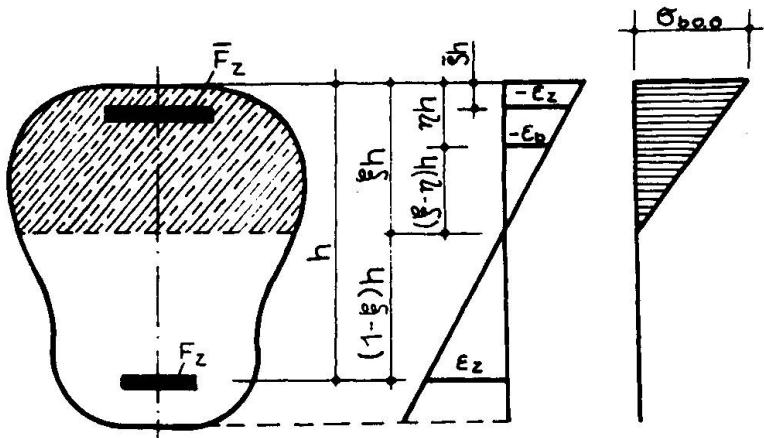


Abb. 1

Die Ableitungen für den Fall b müssen hier aus Platzgründen entfallen. Für sie gilt Abb. 2.

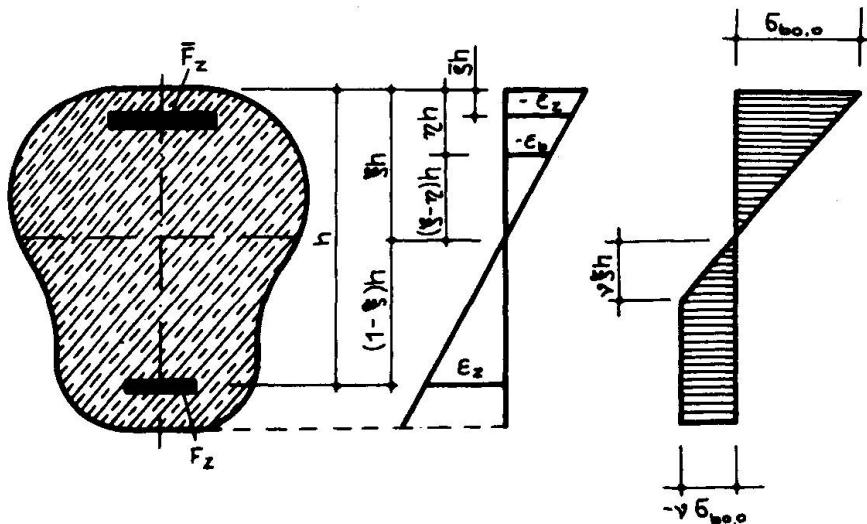


Abb. 2

Die Gleichgewichts- und Formänderungsbetrachtungen beziehen sich auf einen allgemeinen einfach symmetrischen Querschnitt. Die späteren Auswertungen werden für T-Querschnitte einschließlich des Sonderfalles Rechteckquerschnitt vorgenommen.

Gleichgewichtsbedingungen (Fall a)

$$\sum H = 0$$

$$\int_0^h b\psi(\eta) \sigma_b(\eta, \varphi) d\eta + \bar{\epsilon}_z E_z F_z + N_{zv} + \epsilon_z E_z F_z = 0 \quad (2)$$

$$\sum M = 0$$

$$\int_0^h h^2 b\psi(\eta) \sigma_b(\eta, \varphi) (1-\eta) d\eta + \bar{\epsilon}_z E_z F_z (1-\bar{\rho}) h + M = 0 \quad (3)$$

Formänderungsbedingungen (Hypothese nach Bernoulli)

$$\varepsilon_b(\eta) = -\varepsilon_z \frac{\xi - \eta}{1 - \xi} \quad (4)$$

$$\bar{\varepsilon}_z = \varepsilon_b(\bar{p}) = -\varepsilon_z \frac{\xi - \bar{p}}{1 - \xi} \quad (5)$$

Die Ableitung von Gl. (2) bzw. Gl. (3) nach φ wird zu Gl. (2) bzw. Gl. (3) addiert. Unter Berücksichtigung von Gl. (1) und mit Beachtung der Tatsache, daß $\sigma_b(\xi, \varphi) = 0$, ergeben sich:

$$E_b b h \int_0^F \psi(\eta) \left(\frac{\partial \varepsilon_b}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon_S}{\varphi_\infty} \right) d\eta = -N_{zv} - E_z F_z (1 + \frac{d}{d\varphi}) (\alpha \bar{\varepsilon}_z + \varepsilon_z) \quad (6)$$

$$E_b b h^2 \left[\int_0^F \left(\frac{\partial \varepsilon_b}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon_S}{\varphi_\infty} \right) (1 - \eta) \psi(\eta) d\eta + n_z \mu_z (1 - \bar{p}) (1 + \frac{d}{d\varphi}) \alpha \bar{\varepsilon}_z \right] + M = 0 \quad (7)$$

Auf Grund der Leibnitzschen Formel und der Bedingung $\varepsilon_b(\xi, \varphi) = 0$ lassen sich bei den Gln. (6) und (7) Integration und Differentiation in der Reihenfolge vertauschen und die partielle Differentiation durch die gewöhnliche ersetzen. Danach werden in Gl. (6) die Gln. (4) und (5) eingesetzt.

$$\frac{d}{d\varphi} \left\{ \varepsilon_z \left[\int_0^F \frac{\xi - \eta}{1 - \xi} \psi(\eta) d\eta - n_z \mu_z (1 - \alpha \frac{\xi - \bar{p}}{1 - \xi}) \right] \right\} = \frac{N_{zv}}{E_b b h} + \quad (8)$$

$$+ n_z \mu_z \varepsilon_z (1 - \alpha \frac{\xi - \bar{p}}{1 - \xi}) + \frac{\varepsilon_S}{\varphi_\infty} \int_0^F \psi(\eta) d\eta$$

Mit Berücksichtigung der Gln. (4) und (6) erhält man aus Gl. (7):

$$\frac{d}{d\varphi} \left\{ \varepsilon_z \left[\int_0^F \frac{\xi - \eta}{1 - \xi} (\bar{p} - \eta) \psi(\eta) d\eta + (1 - \bar{p}) n_z \mu_z \right] \right\} = \frac{M}{E_b b h^2} - \quad (9)$$

$$- (1 - \bar{p}) \left(\frac{N_{zv}}{E_b b h} + n_z \mu_z \varepsilon_z \right) + \frac{\varepsilon_S}{\varphi_\infty} \int_0^F \psi(\eta) (\bar{p} - \eta) d\eta$$

Folgende Vereinfachungen in der Schreibweise werden eingeführt:

$$\frac{\varepsilon_z E_b b h}{-N_{bo}} = \varepsilon_z^+, \quad \frac{\varepsilon_{bo,o} E_b b h}{-N_{bo}} = \varepsilon_{bo,o}^+, \quad \frac{N_{zv}}{-N_{bo}} = A,$$

$$\frac{\varepsilon_S E_b b h}{-N_{bo} \varphi_\infty} = B, \quad \frac{M}{-N_{bo} h} = \eta_o^+$$

Zunächst wird die Differentiation der Gln. (8) und (9) ausgeführt. Zur Lösung des sich ergebenden Differentialgleichungssystems erster Ordnung mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens ist eine explizite Darstellung der Ableitungen der unbekannten Funktionen $\varepsilon_z^+(\varphi)$ und $\xi(\varphi)$ erforderlich.

$$\frac{d\epsilon_z^+}{d\varphi} = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (10)$$

$$\frac{d\epsilon}{d\varphi} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (11)$$

Darin bedeuten:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_0^{\xi} \frac{\xi - \eta}{1 - \xi} (\bar{p} - \eta) \psi(\eta) d\eta + (1 - \bar{p}) n_z \mu_z \\ a_{12} &= \epsilon_z^+ \left[\int_0^{\xi} \frac{1 - \eta}{(1 - \xi)^2} (\bar{p} - \eta) \psi(\eta) d\eta \right] \\ b_1 &= \eta_0^+ - (1 - \bar{p})(A + n_z \mu_z \epsilon_z^+) + B \int_0^{\xi} (\bar{p} - \eta) \psi(\eta) d\eta \\ a_{21} &= \int_0^{\xi} \frac{\xi - \eta}{1 - \xi} \psi(\eta) d\eta - n_z \mu_z (1 - \bar{p}) \frac{\xi - \bar{p}}{1 - \xi} \\ a_{22} &= \epsilon_z^+ \left[\int_0^{\xi} \frac{1 - \eta}{(1 - \xi)^2} \psi(\eta) d\eta + n_z \mu_z \bar{p} \frac{1 - \bar{p}}{(1 - \xi)^2} \right] \\ b_2 &= A + n_z \mu_z \epsilon_z^+ (1 - \bar{p}) \frac{\xi - \bar{p}}{1 - \xi} + B \int_0^{\xi} \psi(\eta) d\eta \end{aligned}$$

Für die Berechnung der Stahlkraftänderung in der Zugbewehrung wird der dimensionslose Wert λ_{NZ} eingeführt.

$$\lambda_{NZ} = \frac{N_{zt}}{N_{zo}} = \frac{\epsilon_z^+ - \epsilon_{zo}^+}{\epsilon_{zo}^+ + \frac{A}{n_z \mu_z}} \quad (12)$$

Um die obere Randspannung zu ermitteln, nehmen wir als Spannungsverteilung ein Trapez an, das den gleichen Schwerpunkt wie das wirkliche Spannungsdiagramm hat. Die sich dabei ergebende Spannung in Höhe der Nulllinie ist eine fiktive Spannung und nur insofern interessant, als man mit ihrer Hilfe die Form des wirklichen Spannungsdiagramms abschätzen kann. Der mögliche Fehler bei der maximalen Randspannung ist vernachlässigbar klein (vgl. Abb. 3).

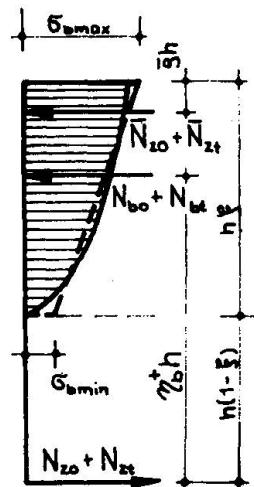


Abb. 3

Es sind nun zu berechnen: Betondruckkraft $N_{bo} + N_{bt}$ zur Zeit $t = t$, die Fläche der Druckzone F_{Dr} , Schwerpunktabstand der

Druckzone vom oberen Querschnittsrand η_s , das Trägheitsmoment der Druckzone I_{Dr} und die Widerstandsmomente W_o und W_u . Dann ergibt sich die Randspannung zu:

$$\max \sigma_b = (N_{bo} + N_{bt}) \left[\frac{1}{F_{Dr}} + h \frac{\eta_s - (1 - \eta_b^+)}{W_o} \right] \text{ bzw.} \quad (13)$$

$$\max \sigma_b = - \frac{M}{bh^2} \Phi_1$$

Darin sind:

$$\Phi_1 = \frac{1 + \frac{N_{bt}}{N_{bo}}}{\eta_o^+} \left[\frac{1}{\int_0^{\eta_s} \psi(\eta) d\eta} - \frac{(1 - \eta_s - \eta_b^+) \eta_s}{\int_0^{\eta_s} (\eta - \eta_s)^2 \psi(\eta) d\eta} \right] \quad (14)$$

$$\Delta \Phi_1 = \Phi_1 - \Phi_{10}$$

$$\eta_b^+ = \frac{\eta_o^+ - n_z \mu_z \alpha \varepsilon_z^+ \frac{\xi}{1 - \xi} - \bar{p}(1 - \bar{p})}{1 - \frac{N_{bt}}{N_{bo}}}$$

Die Berechnung von $\min \sigma_b$ wäre analog zu $\max \sigma_b$ für den unteren Rand der Betondruckzone auszuführen.

Als Grundlage für die Berechnung der Biegelinie w bzw. der Querschnittsverdrehungen w' wird zunächst die Krümmung w'' der Biegelinie ermittelt (vgl. Abb. 4).

$$w'' = \frac{\varepsilon_z}{(1 - \xi)h} = \frac{\alpha}{h}$$

Querschnittsverdrehungen:

$$w' = \int \frac{\alpha}{h} dl$$

Biegelinie:

$$w = \int \left(\int \frac{\alpha}{h} dl \right) dl$$

bezogene Krümmung:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_z}{1 - \xi} \text{ bzw. } \alpha^+ = \frac{\varepsilon_z^+}{1 - \xi}, \Delta \alpha^+ = \alpha^+ - \alpha_o^+$$

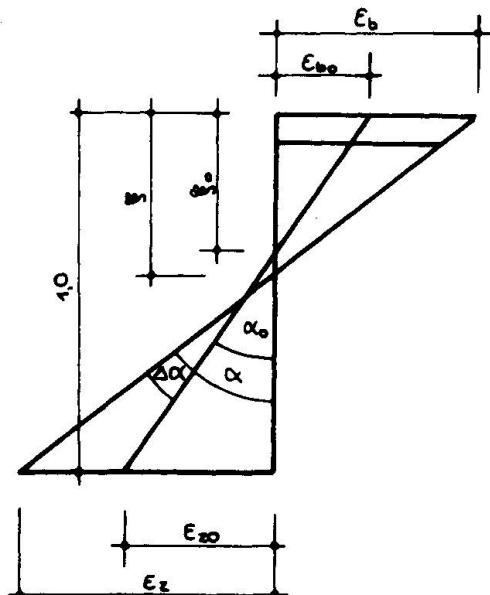


Abb. 4

4. Rechenhilfsmittel

Die bisherigen Betrachtungen gelten für einen allgemeinen einfach symmetrischen Querschnitt mit Druckbewehrung. In einer noch unveröffentlichten Arbeit sind umfangreiche Auswertungen der aufbereiteten Formeln für T-Querschnitte mit beliebigen geometrischen Verhältnissen vorgenommen worden. Mit den dort bereitgestellten Materialien ist sowohl eine einfache Berechnung der Spannungen und Verformungen zum Zeitpunkt $t = 0$ als auch der Änderungen von Spannungen und Verformungen bis zum Zeitpunkt $t = t$ möglich. An dieser Stelle müssen wir uns darauf beschränken, die Änderungen der Stahlzugkraft, der Betonrandspannung, der Krümmung und der Nulllinienlage in einem gegebenen Querschnitt zu ermitteln. Mit den Krümmungsänderungen in den einzelnen Querschnitten wären Verformungen infolge Kriechen - wie in der Einführung besprochen - zu ermitteln.

Beispiel:

Gegeben sei ein Querschnitt entsprechend Abb. 5.

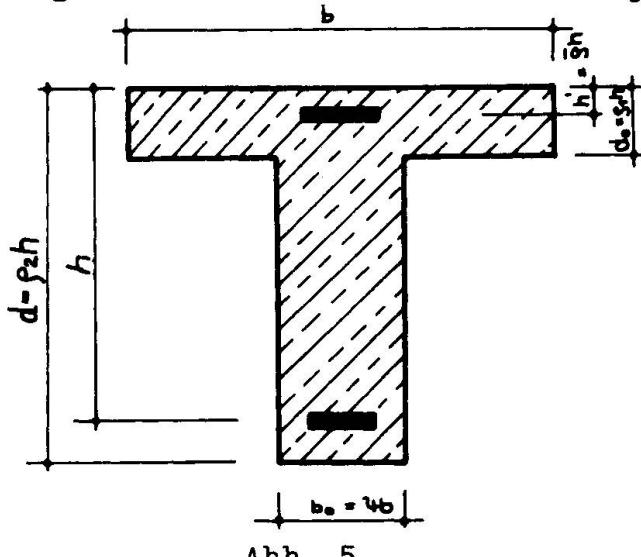


Abb. 5

$$\begin{aligned}
 b &= 1,0 \text{ m} & h &= 1,0 \text{ m} \\
 \psi &= 0,20 & \rho_1 &= 0,25 \\
 \bar{\rho} &= 0,9 & & \\
 F_z &= 76 \text{ cm}^2 & & \\
 (56 \text{ cm}^2 \text{ schlaffe Bewehrung} \\
 20 \text{ cm}^2 \text{ vorgesp. Bewehrung}) & & & \\
 F_z &= 20 \text{ cm}^2 & & \\
 E_b &= 300 \text{ MP/cm}^2 & & \\
 E_z &= 2100 \text{ MP/cm}^2 & & \\
 \varphi &= 3,0 & n_z u_z &= 0,053 \\
 M &= 165 \text{ Mpm} & N_{zv} &= 107 \text{ MP}
 \end{aligned}$$

Die Berechnung ergibt für den Zeitpunkt $t = 0$:

$$N_{bo} = -178 \text{ MP} \quad A = 0,6 \quad N_{zo} = 188 \text{ MP} \quad \bar{N}_{zo} = -10 \text{ MP}$$

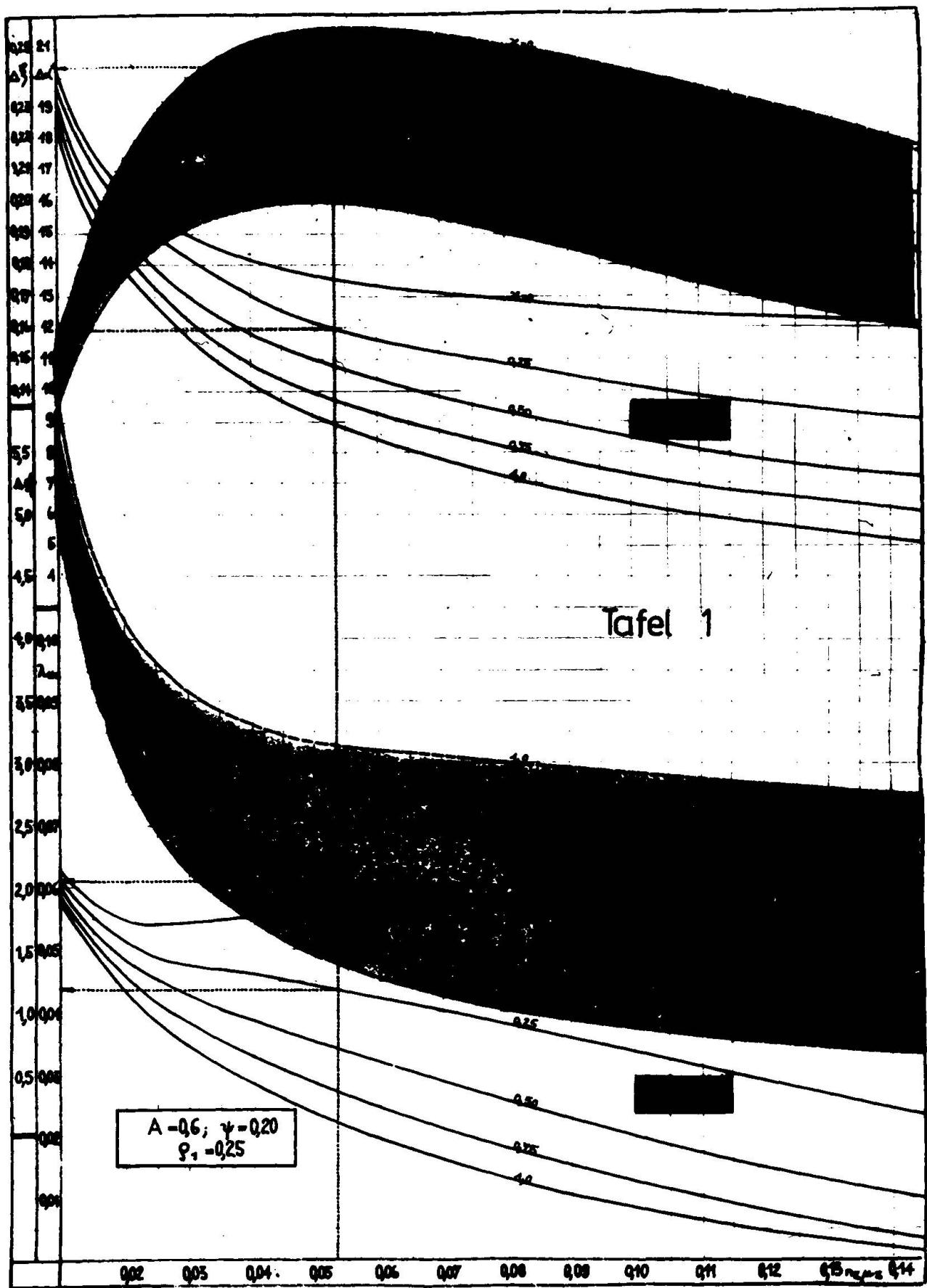
$$\max \sigma_{bo} = 0,10 \text{ MP/cm}^2 \quad \xi_0 = 0,40 \quad \alpha_0 = 0,833 \cdot 10^{-3}$$

Infolge Kriechen ergeben sich aus Tafel 1* folgende Werte:

$$\lambda_{Nz} = 0,0435 \quad \Delta \bar{\varphi}_1 = -2,05$$

$$\Delta \xi = 0,243 \quad \Delta \alpha^+ = 11,9$$

* diese gilt für die Endkriechzahl $\varphi_{\infty} = 3,0$



und damit die Änderung der Stahlzugkraft

$$N_{zt} = N_{zo} \cdot \lambda_{Nz} = 8,2 \text{ MP}$$

Änderung der Betonrandspannung

$$\Delta \max \sigma_b = - \frac{M}{bh^2} \Delta \phi_1 = 0,033 \text{ MP/cm}^2$$

Änderung der Nulllinienlage

$$\Delta \xi = 0,243$$

Änderung der bezogenen Krümmung im betrachteten Querschnitt

$$\Delta \alpha = - \frac{N_{bo}}{E_b bh} \Delta \alpha^+ = 0,705 \cdot 10^{-3}$$

Literaturverzeichnis

- /1/ Rabich, R. Die Formänderungen des Stahlbetons infolge Belastung
Bauplanung - Bautechnik, Berlin 10 (1956) 12, S. 497 - 503
- /2/ Elias, E. Einfluß des Kriechens auf einen gebogenen Stahlbeton-Rechteckbalken im Stadium II
Der Bauingenieur, 36 (1961) 3, S. 93 - 96
- /3/ Wippel, H. Der Einfluß des Kriechens auf Formänderung, Spannungsverteilung und Bruchlast des Stahlbetonbalkens im Stadium II
Östefreiehische Ingenieurzeitschrift, 6 (1963) 4, S. 118 - 124
- /4/ Mayer, H. Die Berechnung der Durchbiegung von Stahlbetonbauteilen
DAStb. H.194, Berlin 1967
- /5/ Hampe, E. - Köppler, H. Kriechen und Schwinden bei Querschnitten mit gerissener Betonzugzone
Handbibliothek Bauwesen, Heft 6
VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1967
- /6/ Rabich, R. Beitrag zur Berechnung der Formänderungen von Stahlbetonbauteilen unter Berücksichtigung der Rißbildung
Bauplanung - Bautechnik, Berlin, 23 (1969) 4/5, S. 184 - 187 u. 234 - 236

5. Zusammenfassung

Der Beitrag ist ein Auszug aus einer noch unveröffentlichten Arbeit über die Berechnung des Einflusses von Kriechen und Schwinden auf die Spannungsverteilung und die Verformungen in Tragwerken mit gerissener bzw. ungerissener plastifizierter Betonzugzone. Dort bereitgestellte Rechenhilfsmittel ermöglichen eine wesentliche Verminderung des sonst sehr großen Rechenaufwandes.

Summary

The paper summarizes the results of an unpublished study of the effects of creep and shrinkage on deformations and on the internal stress distribution in cracked and uncracked reinforced concrete structures. Detailed calculations are considerably simplified by previously prepared design aids.

Résumé

La contribution est l'extrait d'un travail encore non-publié traitant du calcul de l'influence du fluage et du retrait sur la répartition des tensions et des déformations dans les ouvrages avec, dans le domaine plastique, la zone tendue de béton relativement fissurée et non fissurée. Là, les procédés de calcul, mis à disposition, permettent une diminution essentielle du travail qui, dans le cas contraire, serait très important.