Zeitschrift: IABSE reports of the working commissions = Rapports des

commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

Band: 5 (1970)

Artikel: Formeln und Verfahren zur Ermittlung der Schnittkraftumlagerung

infolge Kriechen und Schwinden bei abschnittsweise hergestellten

Bauwerken

Autor: Hofmeister, Gottfried

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6933

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 23.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Formeln und Verfahren zur Ermittlung der Schnittkraftumlagerung infolge Kriechen und Schwinden bei abschnittsweise hergestellten Bauwerken

Redistribution of Internal Actions due to Creep and Shrinkage in Segmentally Constructed Structures

Formules et procédés permettant de calculer le déplacement des efforts intérieurs de section, dans les ouvrages fabriqués par segment par suite du fluage et du retrait

GOTTFRIED HOFMEISTER Deutschland

1. Einleitung und Grundlagen

Bei Betonbauwerken, die wegen ihrer Größe in zeitlich aufeinanderfolgenden Abschnitten hergestellt werden, sind die Schnittkräfte im allgemeinen von den in einem Zuge betonierten Bauwerken verschieden, da man aus konstruktiven Gründen die Größe der Bauabschnitte nicht beliebig wählen kann. Neben dem Spannkraftabfall im Spannglied sind deshalb auch die Umlagerungskräfte aus Kriechen und Schwinden zu beachten. Die Berechnung dieser Kräfte soll im folgenden am Beispiel eines feldweise hergestellten Durchlaufträgers gezeigt werden, da diese Tragwerksart sehr häufig vorkommt. Das Verfahren, das sich auch auf andere Systeme übertragen läßt, beruht auf einem schrittweisen Ansatz von Kontinuitätsbedingungen während des Kriechzeitraumes zur Ermittlung der zeitabhängigen Stützenmomente.

Aus der Formulierung von Dischinger für den Kriechvorgang bei Annahme eines konstanten E-Moduls

(1)
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \left(\frac{d\sigma}{dt} + \sigma \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

folgt allgemein für den zeitlichen Verlauf einer Verschiebung:

€ ist die elastische Verformung, aus der sich durch Multiplikation mit der Kriechkurve € der zeitabhängige Anteil € ergibt. Der Verlauf der Kriechkurve wird in Abhängigkeit vom Endwert und der Zeit tallgemein angesetzt zu

(3)
$$\varphi = \varphi_{\infty} \cdot \varphi(t)$$

Zur Erläuterung des Verfahrens wird zunächst ein Zweigelenkrahmen (Bild 1) betrachtet, dessen Auflager sich beim Ausrüsten
um $\Delta_{\mathcal{F}}$ verschoben haben. Aus dem Schwinden des Rahmenriegels ist
weiter noch eine Verkürzung Δ_{s} = \mathcal{E}_{s} · \mathcal{E} zu erwarten. Der zeitliche Verlauf des Schwindens mit dem Endschwindmaß \mathcal{E}_{s} sei dem Kriechen proportional:

$$(4) \qquad \qquad \mathcal{E} = \varphi \cdot \mathcal{E}_{\mathcal{S}} / \varphi_{oo}$$

Auflagerverschiebung und Riegelverkürzung rufen im Rahmen Zwängungen hervor, die bei der Kriechbetrachtung mit einbezogen werden müssen.

Für einen Zeitabschnitt $\Delta \zeta$ sei zu Beginn die zeitabhängige Unbekannte X_{n-1} bekannt. Am Ende ist X_n vorhanden. Die Kriechkurve ζ andert sich während $\Delta \zeta$ um $\Delta \zeta$ (vergl.Bild 2, z.B. für ζ). Nehmen wir nun an, daß X_{n-1} linear auf X_n anwächst, dann beträgt die mittlere Kraft $(X_n+X_{n-1})/2$. Diese erzeugt nach (2) die plastische Verformung

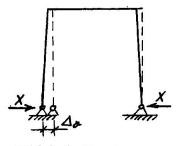


Bild 1. Zweigelenkrahmen

Die elastische Verformung $(X_n - X_{N-1}) \cdot \mathcal{S}_{rr}$

ist nur von der neu auftretenden Kraft abhängig. Infolge der Auflagerverschiebung Δ_{ν} ist die plastische Verformung während Δt nach (2):

Die Riegelverkürzung Agerzeugt nach (4):

Damit lautet die Kontinuitätsgleichung für die Verschiebung des linken Auflagerpunktes im Zeitabschnitt 44,

oder aufgelöst nach der Unbekannten X_n

(5b)
$$X_{N} \cdot \left(\frac{\Delta g_{i,n}}{2} + 1\right) \cdot J_{i,j} + X_{N-j} \cdot \left(\frac{\Delta g_{i,n}}{2} - 1\right) \cdot J_{i,j} + \left(\Delta u + \Delta s / g_{i,0}\right) \cdot \Delta g_{i,n} = 0$$

Gleichung (5b) entspricht der Form nach einer Elastizitätsgleichung für Xn. Ein Unterschied besteht in den Vorzahlen und den Belastungsgliedern, die zeitabhängige Anteile enthalten und die plastischen Verhältnisse wiedergeben. Man spricht hier also besser von einer "Plastizitätsgleichung". Die fortlaufende Anwendung von Gleichung (5b) liefert den Endwert X. genügend genau, wenn 4 bzw. Ap genügend klein gewählt werden. Hierauf wird noch im Abschnitt 3 eingegangen.

2. Die Plastizitätsgleichung für den feldweise hergestellten Durchlaufträger

Beim feldweise hergestellten Durchlaufträger nach Bild 2 wird zum Zeitpunkt t_{n-1} das Feld n an Feld n-1 angeschlossen. Für eine Stütze i (<n) lautet in Anlehnung an (5b) die Plastizitätsgleichung für den Zeitabschnitt $\Delta t_n'$ bis zum Anschluß des Feldes n+1 in verkürzter Schreibweise:

(6)
$$X_{i-\eta,\eta}\left(\delta_{i,i-\eta}^{i} + \frac{n\delta_{i,i-\eta}}{2}\right) + X_{i,\eta}\left(\delta_{i,i}^{i} + \frac{n\delta_{i,i}}{2}\right) + X_{i+\eta,\eta}\left(\delta_{i,i+\eta}^{i} + \frac{n\delta_{i,i+\eta}}{2}\right) - X_{i-\eta,\eta-\eta}\left(\delta_{i,i+\eta}^{i} - \frac{n\delta_{i,i+\eta}^{i}}{2}\right) - X_{i,\eta-\eta}\left(\delta_{i,i+\eta}^{i} - \frac{n\delta_{i,i+\eta}^{i}}{2}\right) + n\delta_{i,0}^{i} = 0$$

Betonierabschnitte

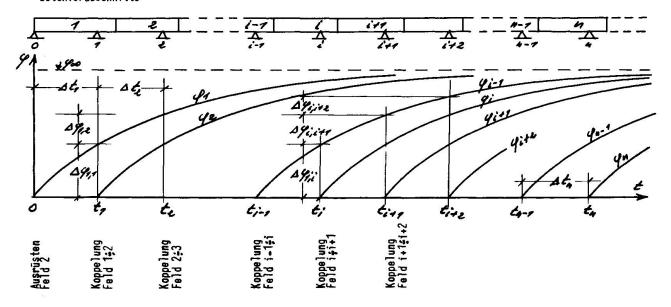


Bild 2. Feldweise betonierter Durchlaufträger

Darin sind:

 $\mathbf{X}_{i-1,n}$ die zeitabhängigen Momente an der Stütze i-1 zum Zeitpunkt \mathbf{t}_n usw.

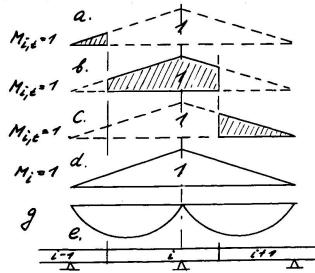
der Endtangentenwinkel am normalen Durchlaufträger aus dem Einheitsmoment $X_{i=1}$ usw.

der im Zeitabschnitt At infolge Kriechverformung nach (2) auftretende Endtangentenwinkel an Stütze i aus dem Einheitsmoment X₁₋₁=1 usw.

der im Zeitabschnitt 44 infolge Kriechverformung nach (2) auftretende Endtangentenwinkel an Stütze i aus den äußeren Lasten und der durch sie hervorgerufenen Stützenmomente (diese ohne Kriecheinfluß)

Die Berechnung der Endtangentenwinkel of infolge Kriechverformung sei anhand von Bild 3 für A Siz noch nä-her erläutert: Wegen des unterschiedlichen Betonalters ist das Kriechvermögen der einzelnen Betonabschnitte verschieden. Deshalb kann nicht durch ausgedrückt, sondern muß in drei Anteile aufgespalten werden. Die Momentenfläche d infolge Mi=1 als äußere Last muß mit den schraffierten Teilen der Flächen a, b u. c, die aus einem virtuellen Moment

die aus einem virtuellen Moment Bild 3. Berechnung der Endtan. Mi,t=1 resultieren, nach der Arbeits- gentenwinkel infolge Kriechen.



gleichung

integriert werden. Für jedes Teilintegral ist ein anderer Kriechfaktor maßgebend. Statisch gedeutet entspricht dieses Vorgehen einer Rechnung mit unterschiedlichem E-Modul. Die Kriechfaktoren, die das Anwachsen von pim Zeitabschnitt 24, bedeuten, lassen sich aus Bild 2 ablesen. Es folgt

Ag., : Anwachsen von 9:-, während At usw.

Mis: Anteil b der Momentenfläche infolge Mi, t= 1 usw.

Die zur Ermittlung von $N_{i,0}$ maßgebende Momentenfläche (e im Bild 3) setzt sich aus der M_0 -Fläche und den von den Bauabschnitten i-1 bis n hervorgerufenen Stützenmomenten $nX_{i-1,0}$, $nX_{i,0}$ und $nX_{i+1,0}$ zusammen. Die Integration für $N_{i,0}$ erfolgt entsprechend den Erläuterungen zu Gleichung (7). Darin ist M_i durch die Momentenfläche aus der Summe der Bauabschnitte zu ersetzen.

Gleichung (6) stellt eine Dreimomentengleichung mit den Unbekannten X_{i-1,n}, X_{i,n} und X_{i+1,n} dar. Das zugehörige Gleichungssystem ist dem zur Ermittlung der Stützenmomente eines Durchlaufträgers gleich. Mit jedem Bauabschnitt wächst die Zahl der Unbekannten und Gleichungen an, sofern man nicht wegen zu großer Betonierabstände den Zeitabschnitt At nochmals unterteilen muß (Vergl. Abschnitte 3 u. 4). Auf jeden Fall ist eine Unterteilung vorzunehmen, wenn die Verhältnisse vom Betonieren des letzten Feldes bis zum Ende des Kriechens untersucht werden. Hierfür empfiehlt sich, nicht At als Bezugsgröße zu wählen, sondern die Kriechkurve des letzten Feldes in gleiche Abschnitte aufzuteilen (Siehe Abschnitt 4).

3. Zur Genauigkeit und zur Konvergenz des Verfahrens

Für diese Untersuchung legen wir wieder den Rahmen des Abschnittes 1 zugrunde. Da bisher über den Verlauf der Kriechkurve keine Festlegung getroffen wurde, nehmen wir dafür an:

(8)
$$\varphi(t) = 1 - e^{-t}$$

Teilt man 9% in gleiche Abschnitte mit 15% auf, dann folgt aus (5b)

$$X_4 = X_0 \frac{29}{2n+9} = X_0 \cdot \alpha$$
, $X_2 = X_0 \times + X_+ \left(\frac{20-9}{2n+9}\right) = X_0 \times \left(1+\beta\right)$

(9)
$$X_n = X_0 \cdot \alpha \left(1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{n-1}\right)$$

mit
$$X_0 = -(\Delta_x + \Delta_S/\varphi_{ob})/\mathcal{L}_{ga}$$

Gleichung (9) liefert mit weiteren Umformungen

(10a)
$$X_4 = X_0 (1-\beta^4) = X_0 \left[1 - \left(\frac{2a-4}{2a+4} \right)^9 \right]$$

Geht n gegen ∞, dann wird:

(10a) geht in die genaue Lösung über:

$$(10b) X_{\infty} = X_{\alpha} \left(\tau - e^{-\beta} \right)$$

Die Näherungslösung konvergiert und liefert bei $h \rightarrow \infty$ als Endwert das Ergebnis, das sich aus der Auflösung der für das Problem gültigen Differentialgleichung herleiten läßt.

Die Auswertung der Gleichungen (10) ist in Tabelle 1 vorgenommen. Diese zeigt, daß für alle in Betracht kommenden Werte für % bei n=2 sehr gute, bei n=3 praktisch volle

Tabelle 1						
900	00	4	3	2	1	
1	0,632	0,634	0,636	0,640	0,667	
2	0,865	0,870	0,875	0,889	1,000	
3	0,950	0,957	0,963	0,980	1,200	
4	0,982	0,988	0,992	1,000	1,333	

Ubereinstimmung der schrittweisen Näherung mit der genauen Lösung vorhanden ist. Es empfiehlt sich also, bei Zeitabständen von 🕹, bei denen 🎎 ist, in zwei gleiche Kriechabschnitte zu unterteilen. Nach Fertigstellung werden zweckmäßig vier gleiche Kriechabschnitte gewählt.

4. Zahlenbeispiel

4.1 Allgemeine Angaben

Die Berechnung nach dem gezeigten Verfahren wird am Beispiel des feldweise hergestellten, symmetrischen Dreifeldträgers nach Bild 4 gezeigt. Der Zusammenschluß der Felder 1 und 2 erfolgt 3 Monate nach dem Betonieren von Feld 1. Nach weiteren 2 Monaten wird Feld 3 an Feld 2 angeschlossen. Die zur Berechnung der statisch Unbestimmten und der Kriechumlagerungen erforderlichen Drehwinkel ✓ zeigt Tabelle 2.

4.2 Betonierabschnitt 1

Bis zum Anschluß von Feld 2 nach 3 Monaten hat die Kriech-fähigkeit von Beton 1 bei $\frac{2}{1,1}$ abgenommen um $\frac{2}{1,1}$ = 2,5 $(1-e^{-0},25)$ = 0,552

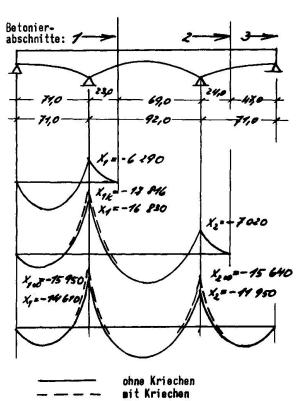


Bild 4. Dreifeldträger

4.3 Betonierabschnitt 2

Zu Beginn ist vorhanden:

X2 = -7 020 Mpm

 $X_1 = -(347\ 000-7\ 020\cdot11,38)/(9,19+16,12)-6\ 290 = -16\ 830\ Mpm$

Die Kriechfaktoren nach 5 Monaten sind für Beton 1: $\frac{4}{1}$ = 2,5(e⁻⁰, $\frac{25}{-e^{-0}}$, $\frac{417}{1}$) = 0,300 Beton 2: $\frac{4}{2}$ = 2,5(1-e⁻⁰,167) = 0,385

TΩ	he	776	2.
4 (1			

Feld	2		1 und 3
Last X ₁ ,X ₂		X2=1	$\begin{array}{ c c c c c }\hline & & X_1=1 \\ & X_2=1 \\\hline \end{array}$
X=1	4,75+11,37=16,12	0,87+10,51=11,38	4,04+5,15=9,19
X=1	0,87+10,51=11,38	0,20+15,92=16,12	
3 Million	347 000		99 700
Maring	38 700+382 300 = 421 000	13 000+408 000 = 421 000	37 800+118 600 = 156 400

Sie werden in zwei gleiche Teile aufgeteilt.

Plastizitätsgleichung für 1. Teilabschnitt:

$$X_{1,1}[25,31+\frac{0,300}{4}(9,19+4,75)+\frac{0,385}{4}\cdot11,37]-16\ 830[\frac{0,300}{2}(9,19+4,75)+\frac{0,385}{2}\cdot11,37]-7020(\frac{0,300}{2}\cdot0,87+\frac{0,385}{2}11,38)+\frac{0,300}{2}(156\ 400+38\ 700)+\frac{0,385}{2}\cdot382\ 300=0$$

$$X_{1,1} = -14 700/27,45 = -535 \text{ Mpm}$$

Plastizitätsgleichung für 2. Teilabschnitt: Zur Belastung kommt X1.1 dazu:

$$X_{1,2} = -\left[14\ 700+535(25,31-\frac{0,300}{4}.13,94-\frac{0,385}{4}11,37)\right]/27,45 = -986 \text{ Mpm}$$

4.4 Betonierabschnitt 3: Es ist vorhanden:

$$X_1 = -16 830 + 2 220 = -14 610 Mpm$$

$$X_2 = -7020 - 4930 = -11950 \text{ Mpm}$$

Die restlichen Kriechfaktoren bis Kriechabschluß für

Beton 1
$$4\%_{1R} = 2.5 \cdot e^{-0.417} = 0.659.2.5 = 1.647$$

Beton 2
$$\Delta \gamma_{2R} = 2,5.e^{-0,167} = 0,846.2,5 = 2,115$$

Beton 3
$$A_{3R} = 2.5$$

werden in 6 Teilabschnitte aufgeteilt. Die Verformungen $n J_{i,i-1}$, $n J_{i,i}$ usw. sind dann in allen Abschnitten gleich:

$$n \int_{1.1} = \frac{1}{6} [1,647(9,19+4,75)+2,115\cdot11,37] = 7,83$$

$$n\int_{1.2} = n\int_{2.1} = \frac{1}{6}(1,647.0,87+2,115.10,51)=3,94$$

$$n \int_{2,2} = \frac{1}{6} [1,647.0,20+2,115(15,92+4,04)+2,5.5,15] = 9,23$$

$$_{\rm n} \mathcal{I}_{1,0} = \frac{1}{6} \left[1,647.(156\ 400+38\ 700)+2,115.382\ 300 \right] = 188\ 300$$

 $_{\rm n} \mathcal{I}_{2,0} = \frac{1}{6} \left[1,647.13\ 000+2,115(408\ 000+37\ 800)+2,5.118\ 600 \right] = 210\ 200$

3. Teilabschnitt

$$X_{1,3}(25,31+7,83/2)+X_{2,3}(11,38+3,94/2)+986(25,31-7,83/2)$$

-14 610.7,83-11 950.3,94+188 300 = 0

$$X_{1,3}(11,38+3,94/2)+X_{2,3}(25,31+9,23/2)+986(11,38-3,94/2)$$

-14 610.3,94-11 950.9,23+210 300 = 0

$$X_{1,3} = -1 072 \text{ Mpm}$$

$$X_{2.3} = -1250 \text{ Mpm}$$

4. Teilabschnitt

$$X_{1,4.29,23+X_{2,4}.13,35+26}$$
 800+1 072.21,40+1 250.9,41 = 0

$$X_{1,4}.13,35+X_{2,4}.29,95+42$$
 300+1 072.9,41+ 1 250.20,70= 0

$$X_{1.4} = -1 144 \text{ Mpm}$$

$$X_{2,4} = -2 117 \text{ Mpm}$$

Ergebnisse der weiteren Teilabschnitte:

5. TA:
$$X_{1,5} = -1205 \text{ Mpm}$$
 $X_{2,5} = -2707 \text{ Mpm}$

6. TA:
$$X_{1,6} = -1253 \text{ Mpm}$$
 $X_{2,6} = -3110 \text{ Mpm}$

7. TA:
$$X_{1,7} = -1$$
 295 Mpm $X_{2,7} = -3$ 540 Mpm

8. TA:
$$X_{1,8} = -1$$
 340 Mpm $X_{2,8} = -3$ 690 Mpm

4.5 Vergleiche

In einem Zuge hergestellt sind die Stützenmomente:

$$X_1=X_2=-(156\ 400+421\ 000)/(16,12+9,19+11,38) = -15\ 760\ Mpm$$

Infolge Kriechen stellen sich diese Momente sehr genau ein, wobei das Ergebnis bei X_1 über dem obigen Wert liegt.

Eine Kontrollrechnung, bei der die Berechnungsschritte jeweils auf die Hälfte reduziert wurden (Betonierabschnitt 2: 1 Teilabschnitt; Betonierabschnitt 3: 3 Teilabschnitte), lieferte folgende Umlagerungsmomente:

Ende Betonierabschnitt 2:
$$X_{1,2} = -983 \text{ Mpm}$$

Kriechende:
$$X_{1.8} = -1$$
 330 Mpm

$$X_{2.8} = -3600 \text{ Mpm}$$

Die Ergebnisse stimmen mit denen für kleinere Zeitabschnitte sehr gut überein und rechtfertigen die in Abschnitt 3 gemachten Angaben.

Zusammenfassung

Zur Berechnung der Schnittkraftumlagerung infolge Schwinden und Kriechen werden am Beispiel eines abschnittsweise hergestellten Durchlaufträgers gebrauchsfertige Formeln abgeleitet. Sie sind gültig für beliebigen Verlauf der Kriechkurve und können auch auf andere Tragsysteme erweitert werden. Die Anwendung wird an einem Dreifeldträger bei Annahme einer Exponentialfunktion als Kriechkurve gezeigt. Anhaltspunkte für die Grösse der zu wählenden zeitlichen Unterteilung der Berechnungsschritte werden am Zweigelenkrahmen gegeben.

Summary

Equations are derived for the practical calculation of the redistribution of internal actions which occurs in a segmentally constructed continuous girder as a result of creep and shrinkage. The equations apply for any time-variation of creep, and can also be extended to other structural systems. An example is given in which a three span girder is considered on the assumption of an exponential creep function. Basic points involved in the choice of a suitable time increment for the step-wise calculations are discussed in relation to a two-pinned frame.

Résumé

Pour le calcul du déplacement des efforts intérieurs de section par suite du fluage et du retrait, de formules prêtes à être utilisées sont employeés comme exemple d'une poutre continue fabriquée par segment. Elles sont valables pour un tracé quelconque de la courbe de fluage et peuvent être aussi appliquées à d'autres ouvrages. L'emploi en est montré pour une poutre à trois travées par convention d'une fonction exponentielle de la courbe de fluage. On a donné au cadre à deux articulations des points d'appui pour déterminer la grandeur des subdivisions des étapes de calcul.