

Zeitschrift: IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

Band: 5 (1970)

Rubrik: Theme III: Practical computation methods (description of methods, limits of applicability)

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.03.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Verification and Application of a New Method of Creep Analysis to Structural Members

Vérification et application d'une nouvelle méthode pour l'analyse du fluage sur des parties d'ouvrage

Überprüfung und Anwendung eines neuen Verfahrens für die Kriechberechnung von Bauteilen

W. DILGER

Associate Professor of Civil Engineering
University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada

A.M. NEVILLE

Professor of Civil Engineering and Head of Department
University of Leeds, Leeds, England

We propose to show how data on creep and shrinkage of plain concrete can be used to calculate the time-dependent deformations and stresses in reinforced and prestressed concrete members. Using Trost's (1) relaxation coefficient η , we can write a general expression for the strain (including shrinkage $\epsilon_{sh}(T)$) at time T :

$$\epsilon(T) = \frac{f_0}{E_0} [1 + \phi(T, K_0)] + \frac{f(T) - f_0}{E_0} [1 + \eta\phi(T, K_0)] + \epsilon_{sh}(T) \quad (1)$$

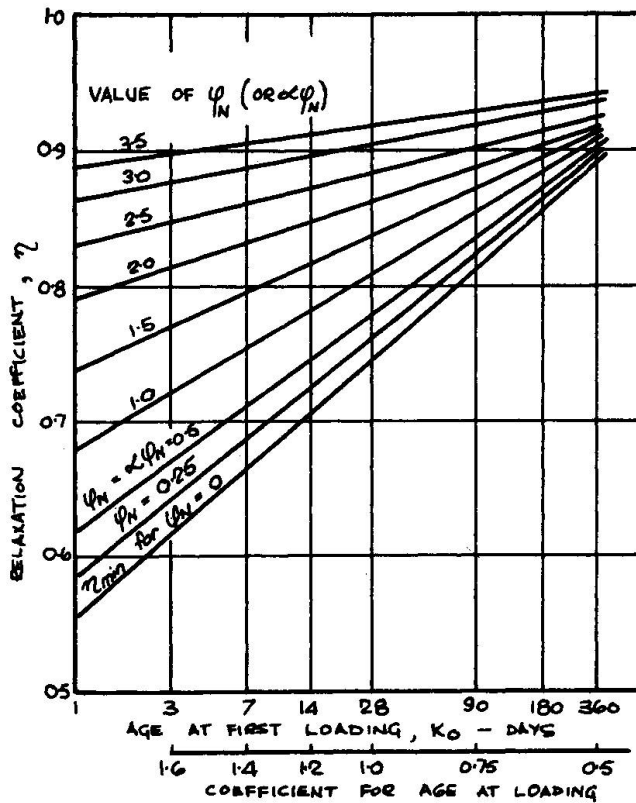


Fig. 1 Variation in relaxation coefficient

where f_0 = concrete stress at the instant of loading K_0 ,

$f(T)$ = concrete stress at time $T > K_0$,

$\phi(T, K_0)$ = creep coefficient for concrete loaded at age K_0 with the load sustained till time T .

The modulus of elasticity of concrete, E_0 , is assumed to be constant and equal to the value at the age of application of stress f_0 . The relaxation coefficient η takes into account the ageing of concrete as well as the variation in stress, which is assumed to follow the creep-time function. The value of η lies between 0.5 and 1.0 and is given in Fig. 1. This figure gives not only the variation of η with the age at loading K_0 and with the normal creep coefficient ϕ_N (which is the ultimate creep coefficient for $K_0 = 28$ days) but also for a modified creep

coefficient $\alpha\phi_N$. The factor α is introduced to account for the influence of reinforcement on creep and is in fact a stiffness coefficient $\alpha = \delta_c/(\delta_c + \delta_s)$. For an eccentrically reinforced uncracked concrete member with one layer of steel at distance y_1 from the centroid of the concrete section, the deformation of the steel due to a unit force is $\delta_s = 1/A_s E_s$ and the deformation of the concrete due to a unit force applied at the level of the reinforcement is $\delta_c = (1 + y_1^2/r^2)/(A_c E_o)$. Thus,

$$\alpha = \frac{pn_o (1 + y_1^2/r^2)}{1 + pn_o (1 + y_1^2/r^2)} \quad (2)$$

where p is the ratio of the steel area A_s to the net concrete area A_c ; n_o is the modular ratio (E_s/E_o), and r the radius of gyration of the net concrete section. For most practical cases the minimum value of η in Fig. 1 can be used because α is small. Using equilibrium and compatibility conditions and Eq. (1) to solve the problem of time-dependent change in stress in an uncracked reinforced or prestressed concrete member with top and bottom reinforcement (at y_1 and y_2 respectively from the centroid of the net concrete section) subjected to the forces of Fig. 2, we find the change in steel stress (2) in fibres 1 and 2:

$$\bar{f}_{s1}(T) = \frac{(1 + b_{22} - b_{21}) \epsilon_{sh}(T) E_s + [(1 + b_{22}) f_1 - b_{21} f_2] n_o \phi(T, K_o)}{(1 + b_{11})(1 + b_{22}) - b_{12} b_{21}} \quad (3a)$$

$$\bar{f}_{s2}(T) = \frac{(1 + b_{11} - b_{12}) \epsilon_{sh}(T) E_s + [(1 + b_{11}) f_2 - b_{12} f_1] n_o \phi(T, K_o)}{(1 + b_{11})(1 + b_{22}) - b_{12} b_{21}} \quad (3b)$$

where f_1 = initial concrete stress in fibre 1; f_2 = initial concrete stress in fibre 2.

$$b_{11} = p_1 n_o (1 + y_1^2/r^2) (1 + \eta\phi); \quad b_{12} = p_1 n_o (1 + y_1 y_2/r^2) (1 + \eta\phi)$$

$$b_{22} = p_2 n_o (1 + y_2^2/r^2) (1 + \eta\phi); \quad b_{21} = p_2 n_o (1 + y_1 y_2/r^2) (1 + \eta\phi)$$

$$p_1 = A_{s1}/A_c \text{ where } A_{s1} = \text{area of steel in fibre 1}$$

and $p_2 = A_{s2}/A_c$ where A_{s2} = area of steel in fibre 2 (see Fig. 2).

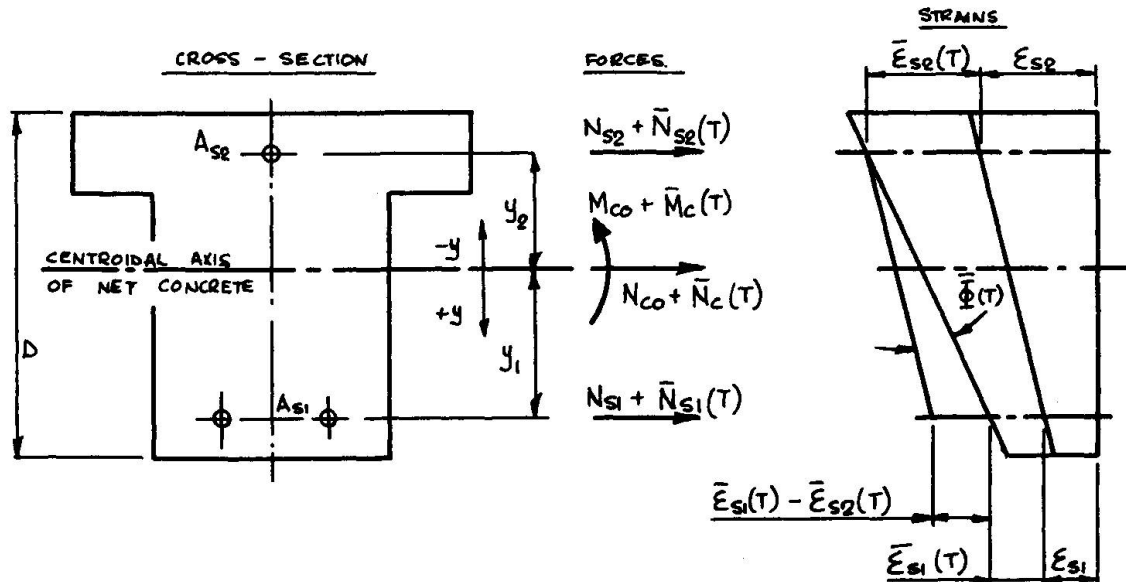


Fig. 2 Forces and strains in a section with two layers of reinforcement (A bar on top of a symbol denotes time-dependent change in force, strain or curvature)

The change in strains in the two fibres can be computed by dividing Eq. 3 by the modulus of elasticity of the steel, E_s . Knowing the time-dependent change in strain in the two fibres, we can compute the change in curvature from

$$\bar{\phi}(T) = \frac{\bar{f}_{s1}(T) - \bar{f}_{s2}(T)}{E_s (y_1 - y_2)} \quad (4)$$

(Note that y is positive below the centroid.)

If the section under consideration is symmetrical and symmetrically reinforced (i.e. $y_1 = -y_2$, $A_{s1} = A_{s2}$), then Eq. 3 can be simplified considerably and we obtain for fibre 1:

$$\bar{f}_{s1}(T) = \frac{f_1^N n_o \phi(T, K_o) + \epsilon_{sh}(T) E_s}{1 + p n_o (1 + \eta \phi)} + \frac{f_1^M n_o \phi(T, K_o)}{1 + p n_o (y_1^2/r^2) [1 + \eta \phi(T, K_o)]} \quad (5)$$

where f_1^N and f_1^M are respectively the normal and bending stress in fibre 1. Introducing the creep reduction coefficients

$$a_1 = \frac{1}{1 + p n_o [1 + \eta \phi(T, K_o)]} \quad \text{and} \quad a_3 = \frac{1}{1 + p n_o [1 + \eta \phi(T, K_o)] y_1^2/r^2} \quad (6)$$

where $p = (A_{s1} + A_{s2})/A_c$, we can write Eq. 5 in the form:

$$\bar{f}_{s1}(T) = (a_1 f_1^N + a_3 f_1^M) n_o \phi(T, K_o) + a_1 \epsilon_{sh}(T) E_s \quad (7a)$$

Similarly, for fibre 2

$$\bar{f}_{s2}(T) = (a_1 f_1^N - a_3 f_1^M) n_o \phi(T, K_o) + a_1 \epsilon_{sh}(T) E_s \quad (7b)$$

The change in curvature can be expressed by

$$\bar{\phi}(T) = a_3 \phi_o \phi(T, K_o) \quad (8)$$

where ϕ_o is the initial curvature. Thus the total curvature (initial plus time-dependent) $\phi(T)$ is

$$\phi(T) = \phi_o [1 + a_3 \phi(T, K_o)] \quad (9)$$

and the total deflection at time T can be written as

$$u(T) = u_o [1 + a_3 \phi(T, K_o)] \quad (10)$$

where u_o is the initial deflection.

In the case of a symmetrically reinforced member subjected to an axial load, Eq. 7a further simplifies to yield for the time-dependent steel stress

$$\bar{f}_s(T) = a_1 [n_o f \phi(T, K_o) + \epsilon_{sh}(T) E_s] = \frac{n_o f \phi(T, K_o) + \epsilon_{sh}(T) E_s}{1 + p n_o [1 + \eta \phi(T, K_o)]} \quad (11)$$

(The subscript of stress can be omitted.)

If there is only one eccentric layer of reinforcement (or tendon) Eq. 3 reduces to

$$\bar{f}_s(T) = \frac{n_o f_1 \phi(T, K_o) + \epsilon_{sh}(T) E_s}{1 + p n_o (1 + y_1^2/r^2) [1 + \eta \phi(T, K_o)]} \quad (12)$$

Introducing the creep reduction coefficient

$$a_2 = \frac{1}{1 + p n_o (1 + y_1^2/r^2) [1 + \eta \phi(T, K_o)]} \quad (13)$$

we can write Eq. 12 as

$$\bar{f}_s(T) = a_2 [n_o f_1 \phi(T, K_o) + \epsilon_{sh}(T) E_s] \quad (14)$$

For design purposes, the creep coefficients are available in chart form (3) for various values of the parameters $p n_o$, y_1/r and $\eta \phi(T, K_o)$. Since the

creep reduction coefficients indicate the effect of reinforcement on creep, by using a reduced creep coefficient $a\phi(T, K_0)$, reinforced concrete can be treated in the same way as plain concrete.

BIAXIALLY LOADED COLUMNS

For symmetrically reinforced, biaxially loaded columns, Eq. 7 can be suitably expanded to

$$\bar{f}_s(T) = (a_1 n_o f_o^N \pm a_3^y n_o f_o^x \pm a_3^x n_o f_o^y) \phi(T, K_0) + a_1 \epsilon_{sh}(T) E_s \quad (15)$$

where $f_o^N = \frac{N_o}{A'_c}$ = normal stress,

$f_o^x = \frac{M_{ox}}{I'_{cx}} y_{s1}$ = stress in concrete due to moment M_{ox} in a fibre distant y_{s1} from the centroid of the concrete section,

$f_o^y = \frac{M_{oy}}{I'_{cy}} x_{s1}$ = stress in concrete due to moment M_{oy} in a fibre distant x_{s1} from the centroid of the concrete section,

A'_c = cross-sectional area of the transformed section,

I'_c = second moment of area of the transformed section, the second subscript denoting the axis about which the moment is taken,

x_{s1} and y_{s1} are distances from centroidal axis to the outer layer of reinforcement,

and a_1, a_3^x, a_3^y are creep reduction coefficients, given by Eq. 6. Since the last two coefficients involve y_1 = distance from the centroidal axis to the centroid of steel area on each side, we require this distance in the x and y directions for a_3^x and a_3^y respectively.

PRESTRESS LOSSES

As mentioned before, all the equations apply equally to reinforced and to prestressed concrete. If Eq. 3 is used to determine the loss of prestress in a member with top and bottom layers of tendons and with additional non-prestressed reinforcement, the terms p_1 and p_2 have to include all the reinforcement, and y_1 and y_2 are the distances of the centroids of the bottom and top steel (prestressed and non-prestressed taken together) respectively.

If we have one eccentric layer of prestressed steel only, we find the prestress loss (including the effect of steel relaxation) from

$$\bar{f}_s(T) = a_2 [n_o f_o \phi(T, K_0) + \epsilon_{sh}(T) E_s + f_r(T)] \quad (16)$$

where $f_r(T)$ is the intrinsic relaxation loss of steel kept under a constant strain for $(T-K_0)$ days, and f_o is the stress in concrete at the level of the tendon due to dead load and to prestress.

If only one layer of tendon is used in combination with non-prestressed reinforcement uniformly distributed across the section, then $a_1 \approx a_3$. Eq. 12 then takes the form (steel relaxation included)

$$\bar{f}_s(T) = \frac{a_1 [(n_o f_o \phi(T, K_0) + \epsilon_{sh}(T) E_s)] + f_r(T)}{1 + p n_o (1 + y_1^2/r^2) [1 + a_1 n \phi(T, K_0)]} \quad (17)$$

If the non-prestressed steel is symmetrically disposed in two layers $a_1 \neq a_3$, and we can find the prestress loss from

$$\bar{f}_s(T) = \frac{(a_1 f_o^N + a_3 f_o^M) n_o \phi(T, K_o) + a_1 \epsilon_{sh}(T) E_s + f_r(T)}{1 + p n_o (1 + y_1^2/r^2) \left[1 + \frac{a_1 + a_3}{2} n_o \phi(T, K_o) \right]} \quad (18)$$

In Eq. 17 and 18 the creep reduction coefficients are determined for the non-prestressed reinforcement only and the term p is the ratio of the prestressing steel area to the concrete area.

VERIFICATION AND APPLICATION OF THE METHOD

Graf's tests (4) on columns and tests on prestressed concrete members by Ban et al. (5) are well suited to verify the approach presented. However, only two of Graf's columns (No. 587 and 591) can be compared with the theory, as the others were stressed to $0.60 f'_c$ at initial loading so that creep cannot be considered to be proportional to stress. The following data are available.

TABLE 1

Column No	587	591
Steel area, A_s (cm ²)	24.3	24.3
Net concrete area, A_c (cm ²)	875.7	875.7
$p = A_s/A_c$	0.028	0.028
Age at loading, K_o (days)	13	13
Time under load ($T-K_o$) (days)	1102	1080
Modulus of elasticity of concrete at time of loading, E_o (kg/cm ²)	191,000	149,000
Modulus of elasticity of steel, E_s (kg/cm ²)	2.1×10^6	2.1×10^6
Modular ratio, n_o	11	14
Applied load, P_o (kg)	72,000	70,000
Shrinkage, $\epsilon_{sh}(T)$	-450×10^{-6}	-460×10^{-6}
Observed change in steel stress, $\bar{f}_s(T)$ (kg/cm ²)	1512	1407
Creep coefficient, $\phi(T, K_o)$	3.20	2.89

With the initial concrete stress computed from the relation $f_o = P_o/A_c (1 + p n_o)$, and the relaxation coefficient $\eta = 0.76$ (determined for $\alpha \phi_N = 0.62$ and $K_o = 13$ days), we find, using Eq. 11, the change in steel stress, in column 587:

$$\bar{f}_s(T) = \frac{11 (-62.9) 3.20 + (-450) \times 10^{-6} \times 2.1 \times 10^6}{1 + 0.028 \times 11.0 (1 + 0.76 \times 3.20)} = -1530 \text{ kg/cm}^2$$

Using the same procedure, the increase in compressive stress in column 591 is found to be $\bar{f}_s(T) = -1455 \text{ kg/cm}^2$. Both values agree very well with those observed in the tests (see Table 1).

The tests of Ban et al. (5) will be used to demonstrate the accuracy of the equations when applied to determine the loss of prestress. The tests include members with symmetrical and unsymmetrical non-prestressed steel, and with the prestressing force applied axially (Series A) and eccentrically (Series B). Since no creep tests were performed, we shall use the tests without non-prestressed reinforcement to determine the creep coefficient, solving Eq. 12 for $\phi(T, K_o)$. From the test data in Table 2, the creep coefficient for series A is found to be $\phi = 2.60$ (Test A5). For series B, both test B5 and test B6 yield $\phi = 2.70$ for the period under load (350 days).

TABLE 2

Beam property	Series and beam No.	Eccentricity of tendon in.	Area ratio of non-prestressed steel		Initial prestress lb	Measured loss lb	Calc. loss lb
			top	bottom			
$\epsilon_{sh} = -470 \times 10^{-6}$ $\phi = 2.60$ $n_o = 6.48$	A-1	-0.04	-	0.31	26,060	6590	6940
	A-2	-0.08	-	0.31	26,830	7210	7140
	A-3	-0.08	0.16	0.16	27,050	6770	6770
	A-4	0	0.16	0.16	28,330	7140	7100
	A-5*	0.08	-	-	25,130	7960	-
$\epsilon_{sh} = -520 \times 10^{-6}$ $\phi = 2.70$ $n_o = 6.95$	B-1	0.71	-	0.31	27,290	8070	7330
	B-2	1.01	-	0.31	28,920	8460	7750
	B-3	1.30	0.16	0.16	27,970	8420	8340
	B-4	1.11	0.16	0.16	29,230	8600	8380
	B-5*	1.02	-	-	26,900	9460	-
	B-6*	0.85	-	-	27,560	9520	-

Tendon area, $A_s = 0.369 \text{ in}^2$ **

Cross-section $4 \text{ in.} \times 8 \text{ in.}$ (duct area 0.45 in^2)

Age at loading, $K_o = 28$ days

Time under load: $T - K_o = 350$ days

Modulus of elasticity: prestressing steel $E_s = 27.5 \times 10^6 \text{ psi}$
non-prestressed steel $E_s = 29.9 \times 10^6 \text{ psi}$

Consider Test A1: Eq. 3 is used to compute the loss of prestress. With $p_1 = 0.369 / (32.00 - 0.45 - 0.31) = 0.0117$, $p_2 = A'_s E'_s / (A_s E_s) = 0.31 \times 29.9 \times 10^6 / (27.5 \times 10^6 \times 31.24) = 0.0108$, $r^2 = 5.33 \text{ in}^2$, $\eta = \eta_{\min} = 0.75$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2.75 \text{ in.}$ we obtain the coefficients:

$$b_{11} = b_{12} = 0.0117 \times 6.48 (2 + 0.75 \times 2.60) = 0.224$$

$$b_{22} = 0.0108 \times 6.48 (1 + 2.75^2 / 5.33) (1 + 0.75 \times 2.60) = 0.499$$

$$b_{21} = 0.0108 \times 6.48 (1 + 0.75 \times 2.60) = 0.206$$

The concrete stresses at age $K_o = 28$ days are: $f_1 = -790 \text{ psi}$, and $f_2 = -860 \text{ psi}$. Thus,

$$\bar{f}_{s1}(T) = \frac{(1 + 0.499 - 0.207)(-470 \times 10^{-6}) \times 27.5 \times 10^6 + [(1 + 0.499)(-790) - 0.207 \times (-860)] 6.48 \times 2.60}{(1 + 0.224)(1 + 0.499) - 0.224 \times 0.207}$$

$$= 18,800 \text{ psi}$$

This stress corresponds to a loss in prestress of 6940 lb.

By the same procedure, we obtain $\bar{f}_s(T) = -19350 \text{ psi}$ for Test A2, which corresponds to a prestress loss of 7140 lb.

Consider Test A3: To compute the loss we can either use Eq. 11 or Eq. 17. Using the first of these, we find, with $p = (A_s + A'_s E'_s / E_s) / A_c = (0.369 + 2 \times 0.16 \times 29.9 \times 10^6 / 27.5 \times 10^6) / 31.24 = 0.0231$ and the concrete stress $f = 810 \text{ psi}$ at age $K_o = 28$ days,

$$\bar{f}_{s1}(T) = \frac{6.48(-810) \times 2.60 - 470 \times 10^{-6} \times 27.5 \times 10^6}{1 + 0.0231 \times 6.48 (1 + 0.75 \times 2.60)} = -18,350 \text{ psi}$$

Notes: * Test used to determine ϕ

** Since the steel is stressed to only $0.5 f'_s$, there is no steel relaxation loss.

This corresponds to a prestress loss of 6,790 lb.

Using Eq. 17, we find, with $y_1 = 0$ and $f_r(T) = 0$, $a_1 = 1/[1 + 0.0117 \times 6.48 (1 + 0.75 \times 2.60)] = 0.82$,

$$\bar{f}_{s1}(T) = \frac{[6.48(-810) \times 2.60 - 470 \times 10^{-6} \times 2.75 \times 10^6] 0.82}{1 + 0.0117 \times 6.48 (1 + 0.82 \times 0.75 \times 2.6)} = -18,350 \text{ psi}$$

The calculated prestress losses of Series B do not agree as well with the measured ones as for Series A. However, the agreement is still good.

EXAMPLE ON A BIAXIALLY LOADED COLUMN

The column shown in Fig. 3 is reinforced by 14 bars, 7/8 in. diameter, so that $A_s = 8.40 \text{ in}^2$ and $p = 0.0365$. We have $f'_c = 4,000 \text{ psi}$, $n_o = 8.0$, $\epsilon_{sh} = -300 \times 10^{-6}$, $\phi_\infty = 2.5$, $K_o = 60$ days. From Fig. 1 $\eta = \eta_{min} = 0.80$. The section properties are $A_c = 230 \text{ in}^2$, $A'_c = 297 \text{ in}^2$, $I_{cx} = 5538 \text{ in}^4$, $I'_{cx} = 7090 \text{ in}^4$, $I_{cy} = 3760 \text{ in}^4$, $I'_{cy} = 4775 \text{ in}^4$. The forces applied are $N_o = 180,000 \text{ lb}$, $M_{ox} = 250,000 \text{ lb in}$, $M_{oy} = 210,000 \text{ lb in}$.

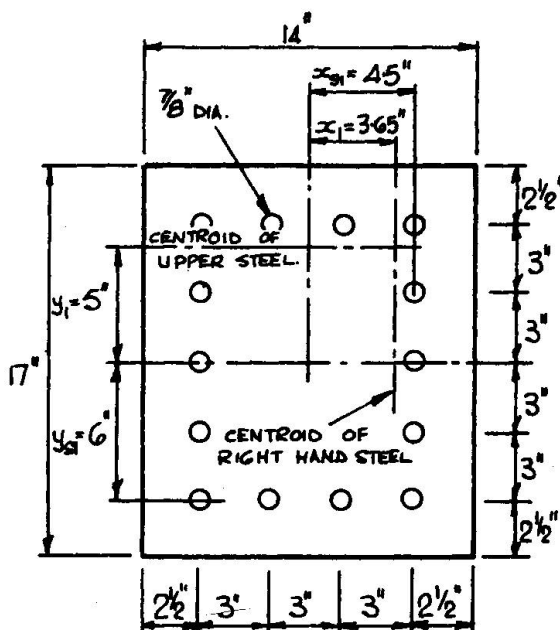


Fig. 3 Cross-section of column

Now, $y_1 = 5 \text{ in.}$, $r^2 = I_{cx}/A_c = 5538/230 = 24.1 \text{ in}^2$, whence

$$a_3^y = \frac{1}{1 + 0.29(1 + 2.0)(5)^2/24.1} = 0.53$$

From Eq. 15, the ultimate change in steel stress in the corner of the column subjected to the highest compression is

$$\begin{aligned} \bar{f}_{s\infty} = & [0.54 \times 8 \times (-606) + 0.53 \times 8 \times (-211) + 0.59 \times 8 \times (-198)] 2.5 \\ & + 0.54 \times 29 \times 10^6 \times (-300) \times 10^{-6} = -15,820 \text{ psi} \end{aligned}$$

REFERENCES

1. Trost, H., Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton, Beton- und Stahlbetonbau, Vol. 62, No. 10, Oct. 1967, pp. 230-238, No. 11, Nov. 1967, pp. 261-269.

Hence, the stresses in concrete are

$$f^N = -\frac{180,000}{297} = -606 \text{ psi,}$$

$$f^M_x = \pm \frac{250,000}{7090} \times 6 = \pm 211 \text{ psi,}$$

$$f^M_y = \pm \frac{210,000}{4775} \times 4.5 = \pm 198 \text{ psi}$$

The creep reduction coefficient a_1 is found from Eq. 6 to be $a_1 = 0.54$. From the same equation, we find the values of a_3 . For a_3^x , $x_1 = 3.65 \text{ in.}$ (to replace y_1 in Eq. 6), $r^2 = I_{cy}/A_c = 3760/230 = 16.4 \text{ in}^2$, so that

$$\begin{aligned} a_3^x = & \frac{1}{1 + 0.29(1 + 2.0)(3.65)^2/16.4} \\ = & 0.59 \end{aligned}$$

2. Dilger, W., and Neville, A.M., Method of creep analysis of structural members, to be published.
3. Neville, A.M., Creep of Concrete: Plain, Reinforced and Prestressed, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1970, 550 pp.
4. Graf, O., Versuche über den Einfluss langdauernder Belastung auf die Formänderungen und auf die Druckfestigkeit von Beton- und Eisenbetonsäulen, Deutscher Ausschuss für Eisenbeton, No. 83, 1936, pp. 13-24.
5. Ban, S., Okada, K., and Muguruma, H., Loss in prestress of post-tensioned members due to creep and shrinkage of concrete, Technical Report No. 39, Engineering Research Institute, Kyoto University, Oct. 1957, 34 pp.

SUMMARY

The paper shows how data on creep and shrinkage of plain concrete can be used to calculate time-dependent deformations and stresses in beams and columns of reinforced and prestressed concrete (with or without non-prestressed steel). Comparison of calculated values with experimental results of other investigations shows very good agreement.

RESUME

Ce document montre comment les données sur le fluage et le retrait du béton peuvent être utilisées pour calculer les déformations dépendant du temps et les tensions dans les poutres et les piliers en béton précontraint ou armé (avec ou sans acier précontraint). Des comparaisons effectuées entre les calculs et les résultats expérimentaux d'autres recherches, montrent de très bonnes concordances.

ZUSAMMENFASSUNG

Dieser Beitrag zeigt, wie das Datenmaterial über Kriechen und Schwinden von Beton gebraucht werden kann, um zeitabhängige Verformungen und Spannungen in Balken und Stützen aus Stahl- und Spannbeton (mit oder ohne Zusatzbewehrung) zu berechnen. Der Vergleich der berechneten Werte mit den experimentellen Ergebnissen anderer Untersuchungen ergibt gute Übereinstimmung derselben.

Zur Frage der Rissbildung an zwngungsbeanspruchten Stahlbetonstben

Crack Formation in Restrained Reinforced Concrete Beams as a Result of Shrinkage and Temperature Change

Formation de fissures dans des poutres en béton armé soumises au refroidissement

J. EIBEL

AV und Prof. Dr.-Ing.
TU Braunschweig
Deutschland

1. Allgemeines

In den letzten Jahren sind mehrere Untersuchungen zwngungsbeanspruchter Stahlbetonbauteile erschienen, die zum Teil eine recht gute über-einstimmung mit vorliegenden Versuchswerten zeigen. Die meisten der darin angegebenen "Rißformeln" gelten jedoch nur für den Bereich rei-ner Biegung. Sie enthalten außerdem empirische Faktoren, deren me-CHANISCHE Deutung nicht immer befriedigt. Der Verfasser hat deshalb versucht, eine "Riformel" abzuleiten, bei der nur die Verbundeigen-schaft des verwendeten Bewehrungsstahles als empirisch zu ermitteln-de Größe vorauszusetzen ist. Die wichtigsten Ergebnisse dieser Unter-suchung [1] sollen im folgenden wiedergegeben und kurz diskutiert werden.

2. Die analytische Erfassung der Zwngungsschnittkrfte bei vorgegebenem Verbundgesetz

Wir betrachten das idealisierte Modell eines an beiden Enden unver-schieblich festgehaltenen Stahlbetonstabes mit gleichmäßig verteil-ter Bewehrung gleichen Durchmessers. Dieser Stab sei zum Zeitpunkt t_0 einer über den Querschnitt konstanten Temperatur T unterworfen, die mit wachsendem t abnimmt. Unter dieser Voraussetzung steigt die Nor-malkraft im Stab zunächst linear bis

$$(2.1) \quad N = \beta_z \cdot F_b \cdot (1 + n\mu) ; \quad n = \frac{E_c}{E_s} ,$$

(β_z = zentrische Zugfestigkeit des Betons $\beta_z = 1,2 \sqrt{\beta_w}$)

an, bis sich der erste Riß bildet. Im Bereich des Risses (vgl. Bild 1) ergeben sich folgende Gleichgewichtsbedingungen [1]:

$$(2.2) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial N_e}{\partial f} df - \Delta N(f) df &= 0; \\ \frac{\partial N_b}{\partial f} df - \Delta N(f) df &= 0; \end{aligned} \right\} N = N_e + N_b,$$

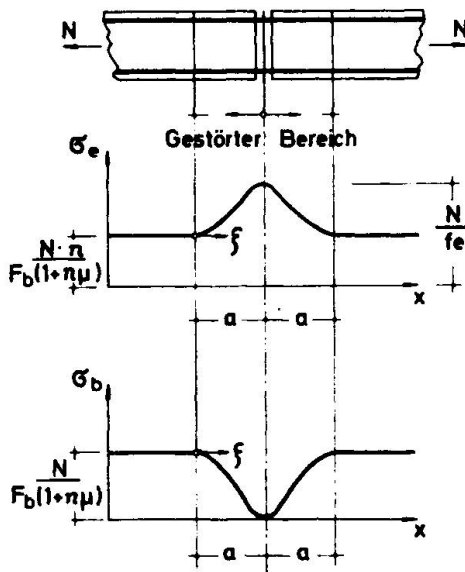


Bild 1

wobei $\Delta N(\zeta)$ die durch den Verbund zwischen Beton und Stahl übertragene Kraft je Längeneinheit bedeutet.

Mit dem daraus resultierenden Schnittkraftverlauf:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} N_b(f) &= - \int_0^f \Delta N(\zeta) d\zeta + \frac{N}{(1+n\mu)}; \\ N_e(f) &= \int_0^f \Delta N(\zeta) d\zeta + \frac{N \cdot n \cdot f \cdot e}{f_b (1+n\mu)}, \end{aligned}$$

erhält man unter Beachtung von:

$$(2.4) \quad \varepsilon = \frac{\partial w}{\partial f},$$

folgenden Ausdruck für die Rißweite, d.h. die Verschiebungsdifferenz:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} w &= v_e - v_b, \\ v &= \frac{2(1+n\mu)}{E_e f_e} \int_0^f \psi(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Hierin bezeichnet:

$$\psi(f) = \int \Delta N(f) df$$

die Änderung der Normalkraft (vgl. Bild 1) infolge Verbundwirkung.

Die auf die Stahloberfläche bezogene Verbundkraft τ – es handelt sich um keine Spannung im Sinne der Elastizitätstheorie – ist bei Rippenstählen gleicher Profilierung im wesentlichen eine Funktion der Betongüte und der Verschiebung. Für ihren Verlauf (vgl. dazu auch [1], [4]) wird daher mit Rücksicht auf die Bedingung $[\tau]_{\zeta=a}=0$ ein Ansatz von der Form:

$$(2.6) \quad \tau = k(\beta_2) \cdot f^s \quad (\text{Bild 2})$$

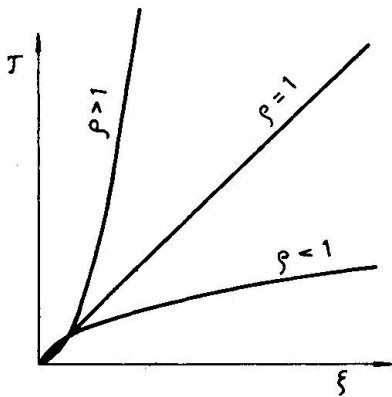


Bild 2

gemacht. Setzen wir zunächst nach [3], [4] - für eine weitere Begründung wird auf Abschnitt 3 verwiesen - $\rho=1$, so gilt

$$(2.7) \quad \Delta N = \sum \ddot{u} \cdot k(\beta_2) \cdot f.$$

Aus der Bedingung:

$$(2.8) \quad \int_0^a \Delta N(\xi) d\xi = \frac{N}{(1+n\mu)}, \quad (\text{Bild 1})$$

folgt dann:

$$(2.9) \quad \text{bzw.} \quad a = \sqrt{\frac{2N}{(1+n\mu) \cdot \sum \ddot{u} \cdot k(\beta_2)}} = \sqrt{\frac{N \cdot \phi}{2(1+n\mu) \cdot f_0 \cdot k(\beta_2)}},$$

$$(2.10) \quad w = \sqrt{\frac{0,222 \cdot N^3 \cdot \phi}{k(\beta_2) \cdot (1+n\mu) \cdot f_0^3 \cdot E_0^2}}.$$

Die in (2.9) und (2.10) auftretende Normalkraft N ermitteln wir aus folgender Bedingung für die Stablänge eines gerissenen Stabes mit i-Rissen:

$$(2.11) \quad L \frac{N}{F_0(1+n\mu) \cdot E_0} + \frac{i w}{(1+n\mu)} = \alpha \cdot T \cdot L, \quad (\text{vgl. [1]})$$

Nach kurzer Umformung erhält man daraus:

$$(2.12) \quad \bar{\varepsilon} + i \bar{\varepsilon} \cdot \sqrt{\gamma \bar{\varepsilon}} = T \cdot \alpha,$$

wobei

$$\bar{\varepsilon} = \frac{N}{E_0 \cdot F_0 (1+n\mu)}; \quad \gamma = \frac{0,222 \cdot \phi \cdot E_0}{n^3 \mu^3 L^2 \cdot k(\beta_2)}.$$

(α = Temperatúrausdehnungskoeffizient.)

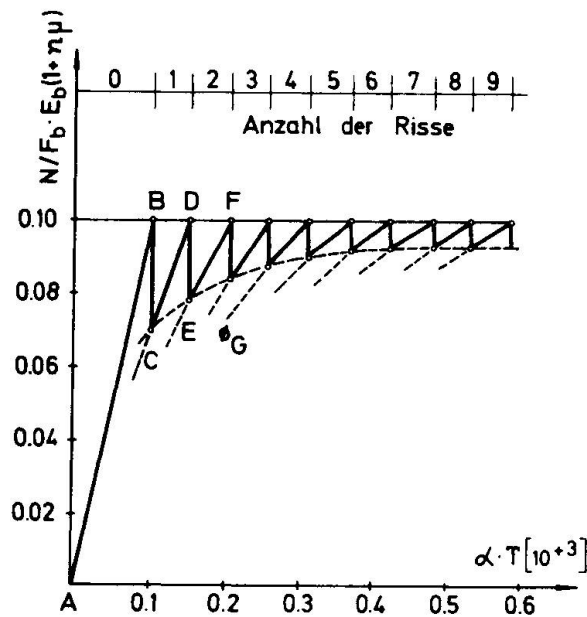


Bild 3

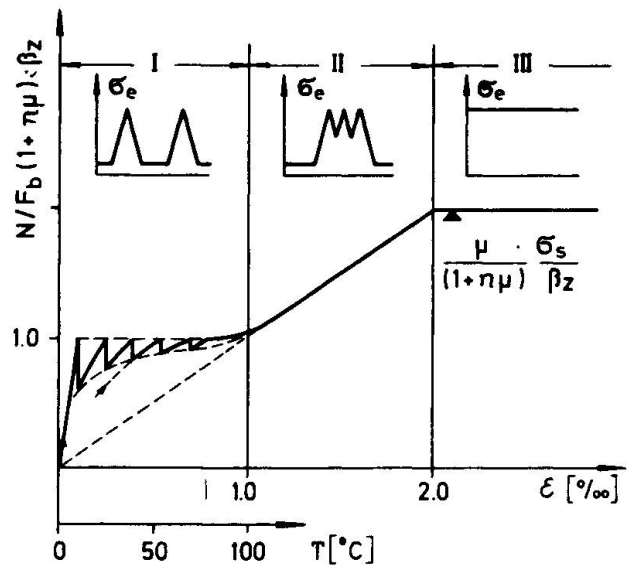


Bild 4

In [1] ist die Auswertung (2.12) an einem Beispiel gezeigt (Bild 3). Mit fallender Temperatur steigt die Normalkraft bei Erstbeanspruchung zunächst von A nach B an, fällt beim Entstehen des ersten Risses nach C ab, steigt wieder bis D an usw.

Bild 3 stellt einen Ausschnitt aus einem vollständigen " σ - ϵ -Diagramm" eines gezwängten Stahlbetonstabes nach Bild 4 dar. In der Praxis interessiert dabei auch bei großer Abkühlung und starkem Schwinden [1] meist nur Bereich I, der durch die Bedingung

$$i\alpha \leq L, \quad (\text{vgl. Bild 1})$$

oder

$$T \cdot \alpha < \left(\frac{2}{3n\mu} + 1 \right) \frac{\beta_z}{E_b},$$

begrenzt ist. Bei unbekannter "Lastgeschichte", d.h. bei zum Zeitpunkt der Beanspruchung unbekannter Rißanzahl, ist aber, wie in [1] näher aufgeführt, stets von der größten Normalkraft

(2.13)

$$N = F_b \cdot \beta_z (1 + n\mu) = \sigma_e \cdot f_c$$

auszugehen.

Damit erhält man aus (2.9) und (2.10)

(2.14)

$$w = \sqrt{\frac{0.222 \phi \cdot \sigma_e^3}{k(\beta_z) \cdot (1 + n\mu) \cdot E_c^2}}$$

oder

$$\frac{4.5 \omega^2}{\beta_z^3} \frac{\mu^3 \cdot k(\beta_z) \cdot E_c^2}{(1 + n\mu)^2} \geq \phi$$

(2.15)

$$a = \sqrt{0,5 \frac{\beta_z \cdot \phi'}{k(\beta_z) \cdot \mu}}$$

3. Diskussion des Verbundgesetzes

Von der allgemeinen Form eines Verbundgesetzes:

(3.1)

$$\tau = k(\beta_z) \cdot f^5$$

nach Bild 2 ausgehend, haben wir bislang nur den Sonderfall $\rho=1$ behandelt und daraus (2.14) (2.15) abgeleitet. Wenn wir statt dessen (2.14) in allgemeiner Form angeben, so erhalten wir:

(3.1)

$$\phi \leq \frac{w^{(p+1)}}{\beta_z^{(p+2)}} \frac{\mu^{(p+2)}}{(1+n\mu)^{(p+1)}} k \cdot E_c^{(p+1)} \frac{(p+2)^{(p+1)}}{2^{(p+1)} (p+1)}$$

Bild 5 zeigt eine Auswertung von (3.1) für drei verschiedene Werte. Aus Vergleichsgründen wurde allen Kurven ein gemeinsamer Punkt, der z.B. durch einen Versuch mit $\beta_z = 20 \text{ kp/cm}^2$, $\mu = 0,8 \%$, $\phi = 17 \text{ mm}$, $w = 0,02 \text{ cm}$ gegeben sei, zugrunde gelegt. Man sieht daraus, daß für eine Festlegung des maximal zulässigen Durchmessers der genaue Verlauf von $\tau = k \cdot f^p$ unerheblich ist. Gleiches gilt für die oftmals diskutierte Frage nach der Potenz von σ_e , wenn man 3.2 wegen (2.13) in der Form:

(3.2)

$$\phi \leq 4(1+n\mu) \frac{w^{(p+1)}}{\sigma_e^{(p+2)}} k(\beta_z) \cdot E_c^{(p+1)} \frac{(p+2)^{(p+1)}}{2^{(p+1)} (p+1)}$$

schreibt. Aus Gründen der Rechenvereinfachung und mit Rücksicht auf [3], [4] sollte $\rho=1$ gesetzt werden, wie in Abschnitt 2.

4. Diskussion einiger Rißformeln

In [2] berichtet Falkner über sieben durchgeführte Zwängungsversuche, deren Ergebnisse er mit den Angaben von Rehm bzw. CEB für die maximalen Rißabstände l_{EM} in [5]:

$$(4.1) \quad l_{EM} = (4 + 0,125 \frac{\phi}{\mu}) ; \quad w_m = l_{EM} \cdot \frac{\sigma_e}{E_c} \left(1 - \frac{\rho}{\mu^2 \sigma_e^2}\right); \quad (\text{Rehm})$$

$$(4.2) \quad l_{EM} = \left(4 + 0,160 \frac{\phi}{\mu}\right); \quad w_m = l_{EM} \cdot \frac{\sigma_e}{E_e} \left(1 - \frac{\rho}{\mu \cdot \sigma_e}\right); \quad (\text{CEB})$$

vergleicht.

Tabelle I zeigt diese Gegenüberstellung erweitert um einen Vergleichswert:

$$l_{EM}^* = a + 2 \text{ cm Betondeckung}$$

mit "a" nach Gleichung (2.15). Die angegebene Vergrößerung um 2 cm (vgl. dazu auch [5]) ist notwendig, weil die Übertragungslänge "a" unter der Voraussetzung einer völlig gleichmäßig verteilten Bewehrung ermittelt wurde. Bei Annahme einer Kraftausstrahlung unter 45° im Beton ist daher "a" um die Betondeckung zu verlängern, wenn ein Vergleich mit gemessenen Rißabständen erfolgen soll. Tab. I zeigt außer-

T a b e l l e I

Nr.	μ	ϕ	l_{EM} Versuch	l_{EM} Rehm	l_{EM} CEB	l_{EM}^* Gl. (2.15) k=3,9	w_m Versuch	w_m Gl. (2.14) k=3,9
	%	mm	cm	cm	cm	cm	mm	cm
1	0,5	4	15,4	14,0	17,2	16,7	0,19	0,20
2	0,48	6	17,8	19,5	24,1	20,3	0,17	0,22
3	0,51	10	28,4	27,5	34,0	25,0	0,32	0,27
4	0,77	6	12,5	13,0	16,0	16,5	0,10	0,13
5	0,75	12	28,8	24,0	29,0	22,8	0,23	0,19
6	1,00	8	12,2	14,0	12,3	16,7	0,08	0,12
7	1,02	14	22,5	21,5	26,4	21,3	0,16	0,16

dem eine Gegenüberstellung der gemessenen Rißweiten mit denen nach Gl. (2.14). Einen Vergleich der w_m -Werte nach (4.1) und (4.2) hat Falkner nicht durchgeführt, da er die angegebenen δ nicht als zutreffend erachtet. Er hat vielmehr aus den gemessenen w_m -Werten neue δ -Werte errechnet.

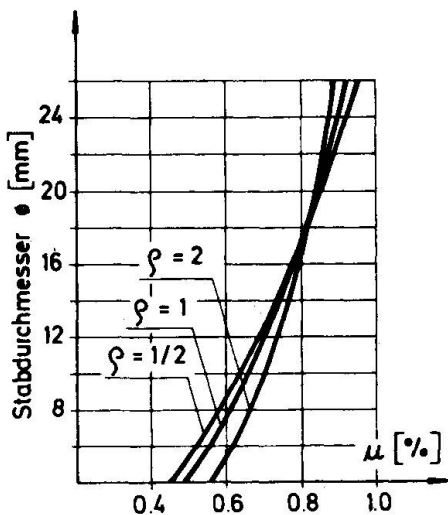


Bild 5

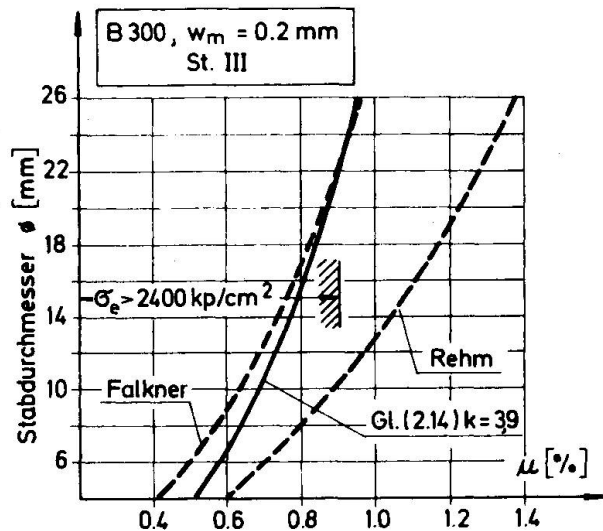


Bild 6

In Bild 6 ist die von Falkner gegebene " σ - μ -Empfehlung" den Ergebnissen des Verfassers für $k=3,9$ und einer Auswertung von (4.1) mit $\delta=50$ für zentrischen Zug gegenübergestellt.

Man sieht aus Tab. I, daß ein k -Wert von 3,9 gut den gemessenen Werten entspricht und auch von den ℓ_{EM} -Werten nach Rehm bestätigt wird. Eine weitere inzwischen von Rehm durchgeführte Untersuchung, die demnächst veröffentlicht wird, bestätigt für B 300 den hier gewählten k -Wert. Der aus [4] entnommene Wert $k=1$, wie er u.a. in [1] angegeben wurde, gilt nur für sehr geringe Betongüten.

Die aus Bild 6 ersichtliche Abweichung der Kurve nach (4.1) resultiert aus einer unterschiedlichen Einschätzung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen. Schreibt man (4.1) in der Form:

$$w_m = \ell_{EM} \cdot \varepsilon_c (1 - \alpha) - \ell_{EM} \cdot \varepsilon_c \beta - \ell_{EM} \cdot \varepsilon_{em},$$

so gibt Falkner β mit 0,55 an. Nach den Ansätzen des Verfassers:

$$\varepsilon_{em} \approx \frac{w}{a} = \sqrt{0,94 \frac{\beta \varepsilon_c^2 (1 + \eta \mu)^2}{\mu^2 E_c \ell}},$$

erhält man für den vorliegenden Fall von k unabhängig ähnliche Werte. Der entsprechende Wert in (4.1):

$$\left[1 - \frac{\rho}{\mu^2 \sigma_c^2} \right], \quad (\rho = 50 \text{ für zentr. Zug})$$

der von ausgewerteten Biegeversuchen [3] übernommen und für den Fall zentrischen Zuges geringfügig modifiziert wurde, liegt dagegen wesentlich höher.

Fraglich bleibt, inwieweit die mit Rücksicht auf einen Vergleich mit [2] vorgenommene Bezugnahme auf w_m , d.h. auf einen Wert, der von der Hälft-

te aller Versuche überschritten wird, geeignet ist. Sinnvoller erscheint eine Bezugnahme auf w_{95} , wie von Rehm vorgeschlagen.

Literatur:

1. Eibl, J. Zwängung und Rißbildung von Stahlbetonstäben bei Behinderung der Längsverformung
Bautechnik H 11 (1969)
2. Falkner, H. Zur Frage der Rißbildung durch Eigen- und Zwängungsspannungen infolge Temperatur in Stahlbetonteilen
DAfStB H. 208
3. Rao, P.S. Die Grundlagen zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte
DAfStB Heft 177
4. Rehm, G. Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton
DAfStB H. 138
5. Rehm, G. Zur Frage der Rißbegrenzung im Stahlbetonbau
Martin, H. Beton- u. Stahlbetonbau H. 8 (1968)

Zusammenfassung

In [1] wurde das Verhalten eines durch Abkühlung bzw. Schwinden zentrisch gezwängten Stahlbetonstabes analysiert. Die dabei gewonnenen Ergebnisse, die nur auf einem empirisch zu bestimmenden Verbundfaktor aufbauen, werden mit anderen "Rißformeln" und Versuchen verglichen und diskutiert.

Summary

In [1] the behaviour of a reinforced concrete beam was analyzed assuming the longitudinal deformation due to cooling and shrinkage to be fully restrained. The results, based on only one bond factor to be determined empirically, are discussed and compared with other "crack formulas" and tests.

Résumé

Dans [1], le comportement d'une poutre fut analysé en supposant que l'on empêche la déformation longitudinale due respectivement au refroidissement et au retrait. Les résultats obtenus par une méthode empirique, et seulement basés sur un facteur d'adhérence, sont analysés et comparés avec d'autres "formules de fissures" et d'autres essais.

Design of Concrete Structures for Creep, Shrinkage and Temperature Changes

Etudes concernant le fluage, le retrait et les changements de température pour les structures en béton

Entwurf von Massivbauten für Kriechen, Schwinden und Temperaturwechsel

LEV ZETLIN

Ph.D

President, Lev Zetlin Associates
President,

CHARLES H. THORNTON

Ph.D

Associate, Lev Zetlin Associates
Executive Vice President
Environspace Research and Technology Corporation
New York

I. PAUL LEW

M.S.

Research Specialist

1. INTRODUCTION

Concrete is a dynamic structural material which is in constant transition from its initially plastic state to an ultimately stable state. To design or analyze concrete as a stable material, a state that can only be approached but never completely achieved, can result in serious misconceptions as to the capacity and behavior of the structure in which it is used. Of particular importance is the self-straining process caused by the shrinkage that concrete undergoes throughout a structure's existence. The internal straining caused by the shrinkage process can result in large tensile stresses at the exposed surfaces of a structural member during its early history. This can, under certain circumstances, significantly affect a member's load carrying characteristics.

It should be noted that when concrete is treated as a static material and the stresses induced in it due to its own internal straining processes are not considered, much of the reserve capacity of the concrete structure is being ignored. As the concrete ages, the initially induced tensile stresses at the surface of a member's cross-section will be completely replaced by a state of compression. By considering this aging process, unnecessary strengthening of many structures to carry new loading requirements imposed later in the life of the structure may be eliminated.

The difficulty with incorporating the effects of the self-straining process of concrete in normal design is that the only solution currently available requires the solution of second-order partial differential equations (1). The solution of these equations is beyond the mathematical techniques ordinarily available to the design engineer. In addition, although the properties of concrete are well known, it is difficult to guarantee these properties. Modulus of elasticity and shrinkage characteristics can vary quite a bit for the same concrete mix. However the properties of concrete can be fixed with adequate accuracy to make the approach outlined herein valid. The purpose of this paper is to bridge the gap between these theoretically exact solutions and the actual

design situation. It provides an approximate solution to the problem of the self-straining of concrete which is within the scope of the mathematical techniques usually employed by a design engineer.

Two related questions are raised in solving the self-straining problem. The questions pertain to how the distribution of self-induced strains, particularly shrinkage strains, vary with depth and time; and what, if any, stress relaxation will occur to relieve the stresses induced in the concrete. This paper provides all the necessary data to consider both shrinkage distribution and stress relaxation. First, to make this information more meaningful, a basic solution for self-strained members is presented.

2. BACKGROUND

The background of this paper was developed as a result of research performed for the McDonnell Douglas Aircraft Corporation. This research was used to investigate the structural behavior and capacity of the LaGuardia Airport Runway deck located in New York City, New York, U.S.A. This deck consisted of a composite deck of precast concrete used as formwork and to carry the dead load of a poured-in-place slab.

In addition, consultation to the American insurance companies has led to the authors involvement in the study of many shrinkage and creep induced failures in structures. Two examples are a twenty-story apartment which exhibited severe distress of its facing due to shortening of its columns and a parking garage that was experiencing significant cracking of its continuous main girders although it had been designed within accepted structural standards. The results of these studies are included in an illustrative example presented later in this paper.

As a result of these investigations, the conclusion was reached that the internal straining of the concrete can have a dominant role on a structure's behavior and that there is widespread misconception as to the nature of the internal straining of concrete. In order to help clear up this problem and to provide a design oriented approach, this paper has been prepared.

3. DERIVATION OF BASIC SOLUTION

The solution of shrinkage, creep and thermal problems in concrete structures can be divided into three areas.

1. Determination of the build-up of internal strains in concrete through time.
2. Analysis of stress due to the induced strain pattern.
3. Relaxation of the induced stresses.

The general governing differential equation for the distribution of strain in three dimensions is:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = K \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right) \quad (a)$$

where

S is the unrestrained unit linear shrinkage strain or thermal strain for the concrete.

K is the diffusion coefficient of shrinkage or temperature in square inches per day.

t is the time in days.

For the simple case of one directional diffusion the problem reduces to

$$\frac{dS}{dt} = K \frac{d^2 S}{dy^2} \quad (b)$$

The solution for this strain distribution has been plotted in Figure 1 and an explanation of how to use the chart is included in the next section. With the induced strain pattern thus determined, the next step is the determination of the resultant equilibrium stress pattern.

An important point to note at this stage of the analysis is that the induced strain pattern is set in the member. Its shape is set and any type of equilibrium transformation can only result in the strain changing sign from tension to compression. To illustrate this point assume that a typical strain pattern, namely the most common one for diffusion, a parabola with a strain 100×10^{-6} in/in on one surface and zero strain on the other surface is chosen as illustrated in Figure 2. The equivalent unrestrained stress diagram can be found by multiplying the strains by the modulus of elasticity (3×10^6) as shown in Figure 3. Since the diagram is parabolic the centroid is $3/4$ the depth away from the bottom and the area is $1/3$ the maximum stress times the crosssectional area of the diagram. This area can be considered as an equivalent unrestrained force (P_u) acting at that centroid.

Using the principle of plane sections remaining plane the restrained stress distribution supplied by the section (Fig.3b) is

$$\sigma_y = \frac{P_u}{A} \pm \frac{P_u e y}{I} \quad (c)$$

Where P_u is the unrestrained equivalent force, e is the eccentricity of the equivalent force, y is the distance to and from the sections centroid, A is the area, and I is the moment of inertia. This stress distribution must be superimposed on the unrestrained diagram to achieve the final stress diagram shown in Figure 3 (c).

This simplified technique has been verified by matrix compatibility schemes and found perfectly general. If reinforcing steel is included then the properties of the transformed section are used in the analysis.

4. DETERMINATION OF SHRINKAGE STRAINS IN CONCRETE

The use of the equivalent force solution for stresses induced by the internal straining of concrete requires that the distribution of internal strain with respect to the cross section of a member be determined as the concrete ages. Such a relationship was found to exist between the moisture distribution in a member and shrinkage strain. On this basis Carlson (2) developed a chart of the percent shrinkage remaining in a member versus time. This chart depended on three factors:

1. The rate of diffusion "R" of the concrete (usually taken as .0001 ft²./day).
2. The distance "a" from the face to the center line of the member (normally one half the depth of the member in ft.).
3. The time "t" in days since the pouring of the concrete.

The results of this relationship are plotted in Fig.1 in terms of a non-dimensional factor $1000 R\phi/a^2$ and the distance away from the surface in terms

of "a".

Once the diffusion constant and the depth are chosen, the shrinkage distribution through the depth of the member is only dependent on the age of the structure. Then, the non-dimensional parameter can be written as $K\phi$ where K equals $1000 R/a^2$.

With this information, the induced strain in a concrete member at any depth at any time can be found. The only other value needed is the ultimate shrinkage for the type of concrete under consideration. This is normally chosen as the twenty-year shrinkage value. Typical values for the twenty-year shrinkage for different classes of cement have been provided in Table 1.

A more accurate solution of the problem includes the build-up of the modulus of elasticity with respect to time. Such a refinement is justifiable during the early history of the structure since a significant percentage of the external shrinkage occurs during the period when the modulus of elasticity is rapidly building up. Although very little direct information on the build-up of the modulus of elasticity exists, it is possible to use readily available information on the build-up of compressive strength of concrete which is proportional to modulus of elasticity. By using the empirical ACI relationship between the compressive strength of the concrete and its modulus of elasticity, it is possible to translate the build-up of compressive strength into an equivalent build-up of the modulus of elasticity. The empirical ACI formula is

$$E = 33w^{3/2} \sqrt{f'_c} \quad (d)$$

where w is the weight of the concrete in pounds per cubic foot; and f'_c is the compressive strength of the concrete during any time interval.

5. DETERMINATION OF EFFECT OF RELAXATION

The problem of determining the behavior of concrete due to its internal straining process is not complete after the initial stress pattern due to the build-up of shrinkage strain in each time interval has been found. One final phenomena of concrete behavior, stress relaxation, must be accounted for. To clarify this action, two definitions of concrete behavior will be presented; namely, that of creep and stress relaxation. Creep is the increase in strain due to a constant stress while stress relaxation is the decrease in stress due a constant strain. As might be expected from these definitions, one has a reciprocal relation to the other. It is thus possible to analyze for stress relaxation by means of readily available information on the creep properties of the concrete being considered.

Early work on stress relaxation was performed by Whitney (5), but the most significant work was recently performed by Ross (4). Based on Ross's work, Mattock (3) developed a simple rate of creep formula for stress relaxation which has the following relations:

$$R = (1 - e^{-\theta}) / \theta \quad (e)$$

where R = residual stress factor and $\theta = e_c/e_e$ is ratio of creep strain, e_c , to elastic strain, e_e , per psi of stress.

The value of creep strain, and therefore θ , is highly dependent on the age of the structure when the stress is applied. An example of how the creep and elastic strains vary as stresses are induced at different points in the life of the structure is illustrated in Fig.4. As can be seen from this illustration, the magnitude of creep strain varies inversely with the age of the concrete. Some average values of θ and the modulus of elasticity as related to the 28-day strength (f'_c) of the concrete have been plotted in Fig.5 and Mattock's formula for different values of θ has been illustrated in Fig. 6. Based on Fig. 4 and 6, a normal stress relaxation curve at various ages can be determined. This relationship has been presented in Fig. 7. The important result of this plot is that it can be seen that stress relaxation decreases with age until a stable state is reached beyond which time the stress relaxation will closely approximate a constant factor. A further note on creep and stress relaxation can be made as to the effect of compression and tension. Illston (6) found no significant difference between total creep in tension or compression. The only difference that was noticed was that tensile creep builds up faster than compressive creep although both will have the same ultimate value.

6. PROCEDURE FOR ANALYSING CONCRETE FOR SELF-INDUCED STRAINS.

The approach used in this paper is an incremental time method. The step by step procedure for the total solution is as follows:

1. The first step in the analysis is to decide on the proper time increments to be used. This is based on two criteria: the way in which the modulus of elasticity and the stress relaxation approach their ultimate steady state conditions as the concrete ages.

2. With the proper time increments chosen, the change and distribution of shrinkage strains (or any other strains) over the depth of the member for each time interval are determined from Fig.1.

3. The initial state of stress for each time interval can be determined by using the equivalent force approach.

4. With the initial state of stress determined for each time interval, the stresses are then relaxed in the subsequent time intervals in accordance with the age of the structure when the initial strain was induced. This is accomplished using Fig.6. The value of θ is obtained by only accounting for the amount of creep strain that would have occurred during the time since the initial strain was induced. By superimposing consecutive time intervals, a complete history of the behavior of a structure due to the self-induced strains can be obtained.

7. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

A problem similar to one investigated by the authors of this paper was a multi-bay concrete frame illustrated in Figure 8a. The main concrete girder was showing severe cracking, and questions were raised as to the extent shrinkage had and would continue to contribute to the cracking.

For ease of illustration only, the steel reinforcement was considered to be the equivalent of six 1-inch round bars symmetrically placed along the girder's

entire length. The girder was of standard weight concrete with minimum 28-day strength of 4000 psi.

Using the smaller 14-inch width of the girder as the controlling dimension, the shrinkage constant "K" is equal to 0.292 and the average shrinkage strain can be determined from Table 1. Using the procedure just outlined, a complete history of the concrete girder due to its internal straining process was obtained. This history has been listed in Table 2, and complete stress distributions at three months, one year, three years and twenty years have been illustrated in Figure 8b.

The following conclusions were reached from the illustration: First, concrete shrinkage cannot be prevented by reinforcement within normal percentage of steel for beams or columns. Concrete stresses will reverse themselves due to the exterior of a concrete member "drying-out" earlier than the interior while the concrete is in a more plastic state. Of particular importance is the outside face of the concrete girder which changes from over 400 psi tension at three months to over 600 psi compression at twenty years.

8. CONCLUSION

Up to now concrete has only been successfully analyzed as a static material, a material whose own internal processes did not affect the behavior of the structure in which it was used. The few attempts at analyzing concrete for its internal straining processes were either too complex for practical application or simplified the problem by omitting the way in which shrinkage is distributed over the member's depth as it ages or the way in which concrete relaxes stresses through time. These omissions could lead to large inconsistencies as to the behavior of a structure through time. The time dependent analysis presented in this paper provides a framework not only for shrinkage strains but any self-induced strains in a structure whose properties vary with time. The analysis has been set up by the use of simultaneous equations which are normally used in engineering and which can be solved either by hand or rapidly on computer.

9. BIBLIOGRAPHY

1. Pickett, G. "Shrinkage Stresses in Concrete." Journal of the American Concrete Institute, V. 17, January 1946, 165-195, 361-398.
2. Carlson, R.W., "Drying Shrinkage of Large Concrete Members," Proceedings of the American Concrete Institute, v. 33, January-February, 1937, pp. 327-336.
3. Mattock, A.H., "Precast Pre-stressed Concrete Bridges: 5, Creep and Shrinkage Studies," Journal of the Portland Cement Association Research and Development Laboratories, v. 3, May, 1961, pp. 32-66.
4. Ross, A.D., "Creep of Concrete under Variable Stress," Journal of the American Concrete Institute, v. 55, March, 1958, pp. 739-758.
5. Whitney, C.S., "Plain and Reinforced Concrete Arches," Proceedings of the American Concrete Institute, v. 28, 1932, pp. 479-519.
6. Illston, J.M., "The Creep of Concrete under Uniaxial Tension," Magazine of Concrete Research, 1965, pp. 77-84.

10. TABLES

TABLE 1

TYPICAL ULTIMATE (20yr.) SHRINKAGE VALUES (10^{-6} in/in)

Classification of Concrete	Shrinkage Strain 10^{-6}		
	High.	Avg.	Low.
Light-weight	1010	850	790
Standard	770	660	600
Finely Ground	810	680	630
High Early Strength	820	700	640

TABLE 2.

Age of Concrete	Unrestrained Concrete		Restrained by Reinforcement and Columns		
	Maximum Compression	Maximum Tension	Increase in Tension of Concrete	Compressive Stress Induced in Reinforcement	Deflection Inwards of Ends of Girder (from Center Line of Frame)
3 months*	-120 psi	+440 psi	+ 38 psi	- 2.8 ksi	.07"
6 months	-130	+270	+ 49	- 3.7	.09"
1 year*	-200	+190	+ 78	- 5.9	.15"
2 years	-140	+120	+117	- 8.3	.21"
3 years	-130	+100	+135	-10.1	.25"
10 years	-520	+140	+203	-15.1	.38"
20 years	-600	+200	+218	-16.2	.41"

* Complete Stress Distribution Illustrated in Figure 8.

11. FIGURES

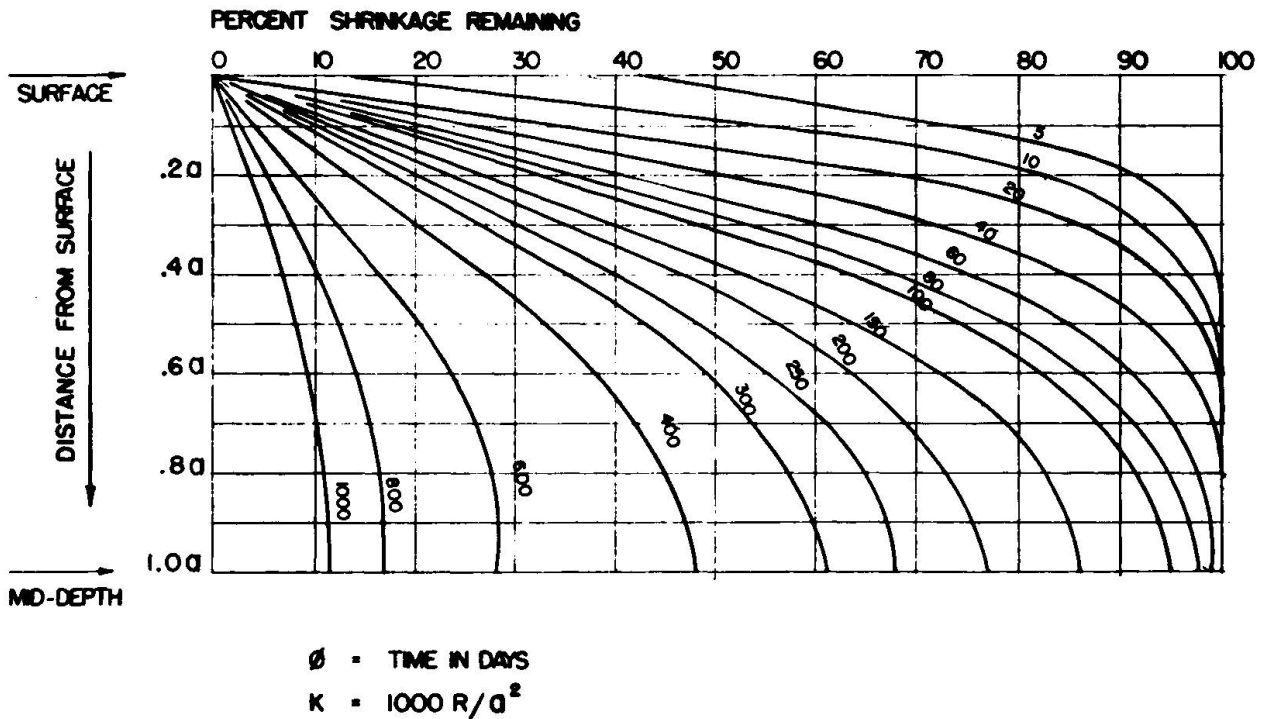


Fig. 1 Shrinkage Distribution Through Time

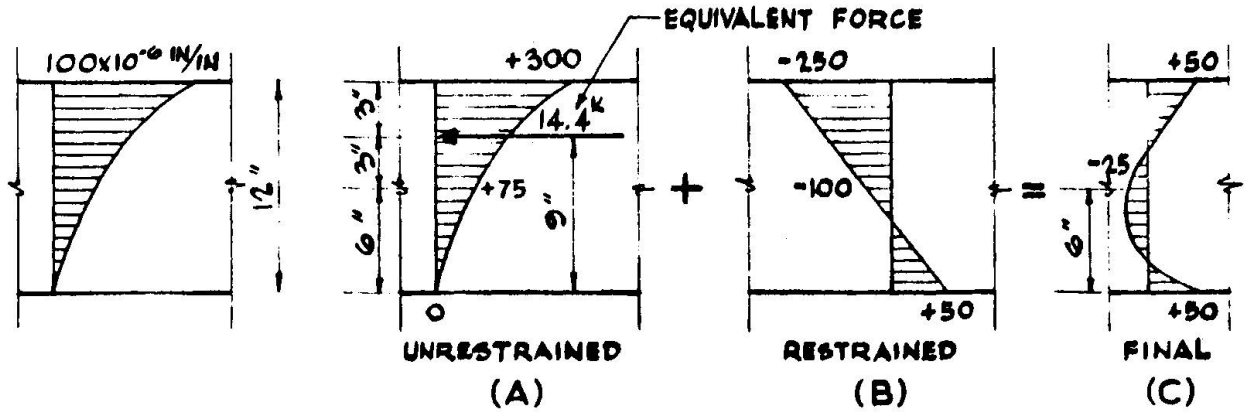


Fig. 2
Strain Pattern

Fig. 3
Stress Distribution

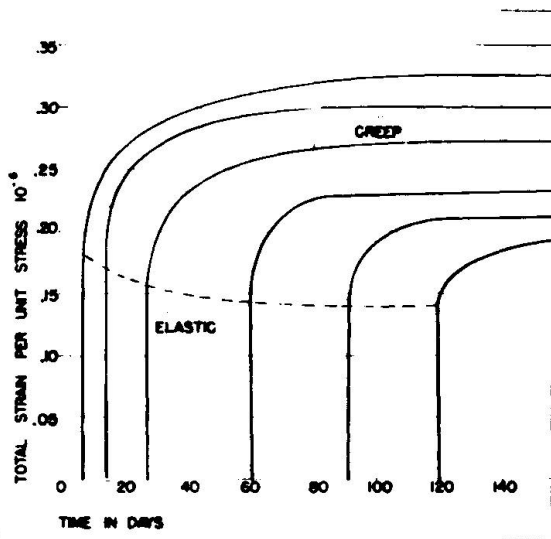


Fig. 4
Total Strains Due to Constant Sustained Stresses Applied at Various Ages

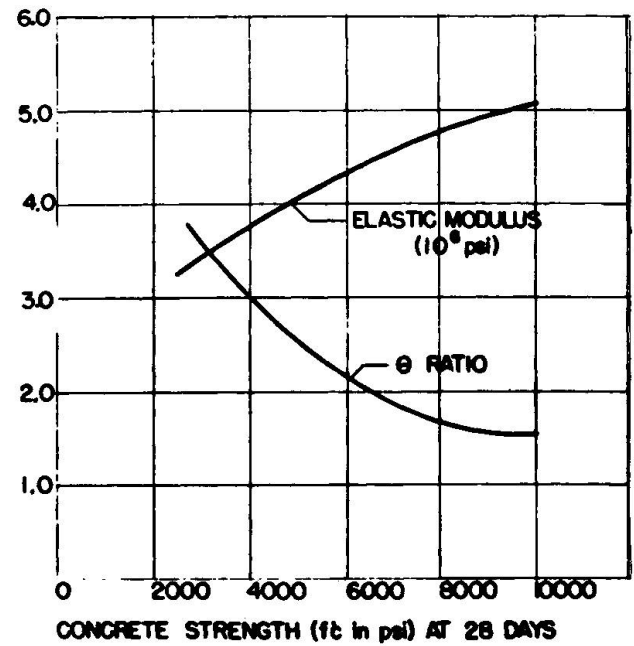
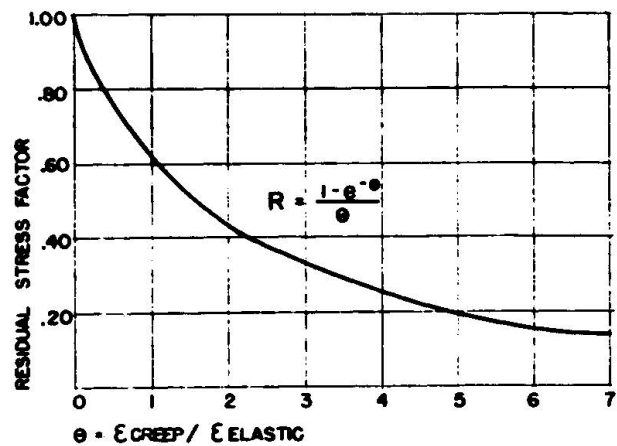


Fig. 5
Typical Values of θ and Elastic Modulus

Fig. 6
Residual Stress Relationship



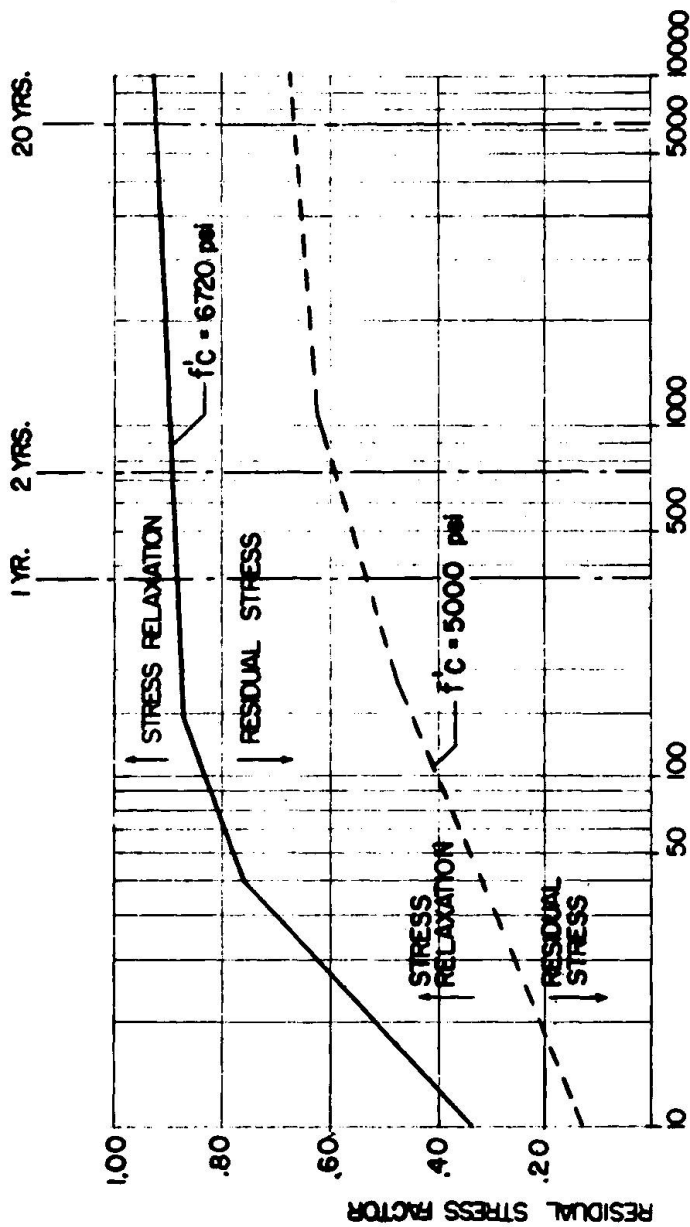
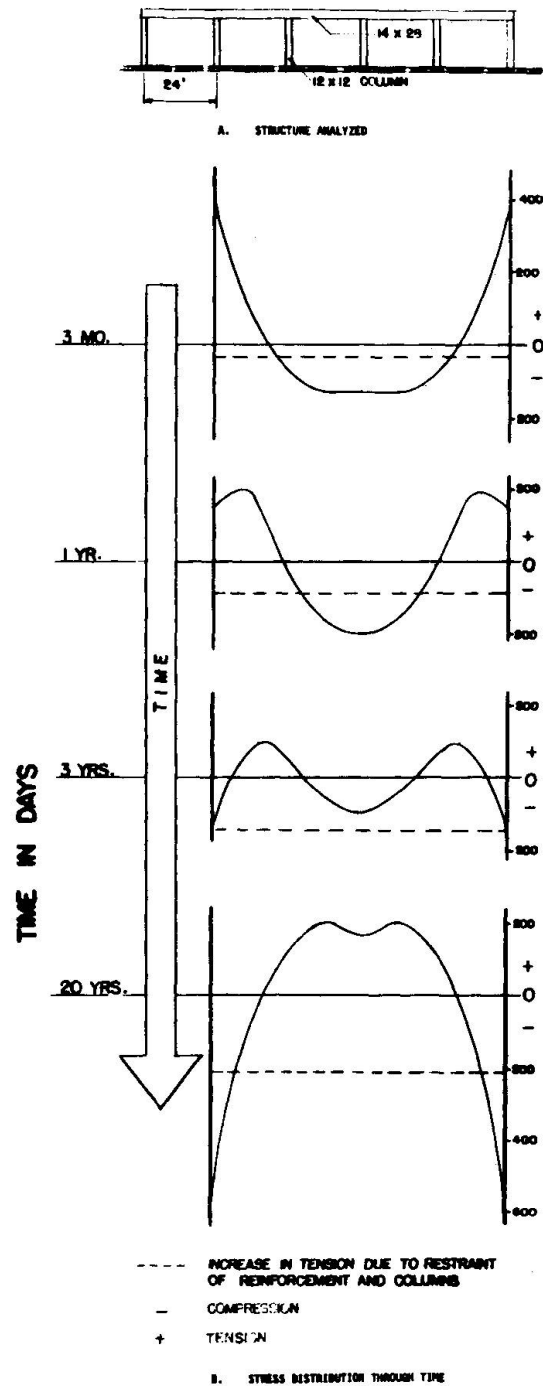


Fig. 7

Stress Relaxation Through Time

Fig. 8
Illustrative Example

APPENDIX

Examples of Existing Structures.

The internal straining of the concrete can have a dominant role on a structure's behavior. The magnitude of stresses developed by the internal straining of concrete can only be appreciated by observing cases in which shrinkage or thermal movements are constrained. For example, if a unit contraction equal to 200×10^{-6} in/in is induced in a concrete structure, the corresponding stresses are quite high when the contraction is constrained. These stresses are equal to the modulus of elasticity times the unit contraction, or 3×10^6 (lbs. per square inch) times 200×10^{-6} in/in which equals 600 psi. Multiplying this stress by the area of concrete determines the force developed by restraining the member from contracting. Using an area of 500 square inches, typical for large prestressed members, a restraining force of 300,000 lbs. is developed.

An example of this restraining force is illustrated in Figure 9. In this case the prestressed beam is connected by welding at both ends to the supporting bracket. The beams were thus partially restrained. This resulted in the development of large restraining forces. These restraining forces were sufficient to cause the bracket to crack open due to the tensile stresses.

A second example of the effect of internal straining of concrete, is the case of a twenty story building with brick facing. In this case shrinkage, creep and temperature contributed to the contraction of the structural concrete framework. If adequate provision is not made in the brick work to allow for this contraction the brick will restrain the movement. Expansion joints in the horizontal joints of the brick work should have been provided. Figure 10 illustrates a case where adequate expansion or contraction joints were not provided. The result was severe distress and eventual buckling of the brick facing. The contraction of the concrete frame was aggravated in this case by the use of lightweight concrete.

The main lesson of these two examples is that ample provisions must be allowed for the expansion and contraction of concrete. Any attempt at trying to restrain such movements will result in large and potentially destructive restraining forces.

The internal straining of concrete can be beneficial instead of destructive if the designer takes proper account of the time dependent behavior of concrete. This was particularly evident in the investigation of the structural capacity of the LaGuardia Airport runway deck in New York City, in the United States, as illustrated in Figure 11. The deck is supported over the water and consists of composite construction of precast inverted double tees that served as form work to carry the dead load of a poured-in-place slab. Since the shrinkage had partially occurred in the precast tees before the poured-in-place slab was installed, a differential shrinkage between the two sections existed. This differential shrinkage induced compressive stresses across the bottom face as illustrated in Figure 12. This differential shrinkage effect played a major role in determining that the structure had developed sufficient reserve capacity to land a plane twice as heavy as the original design called for. This was subsequently verified by load tests. A similar result would be found even if the deck were not composite as was seen in Figure 8. The development of reserve capacity as concrete ages

can be particularly important to structures where load requirements increase with time such as highways and airports.

Each of these examples illustrate the dominant role that the internal straining of concrete can have on a structures performance. Concrete can no longer always be treated as a static material whose own internal straining processes do not effect the behavior of the structure in which it is used. The purpose of the paper was to provide an approach that will allow the designer to predict the behavior of structure under internal straining.

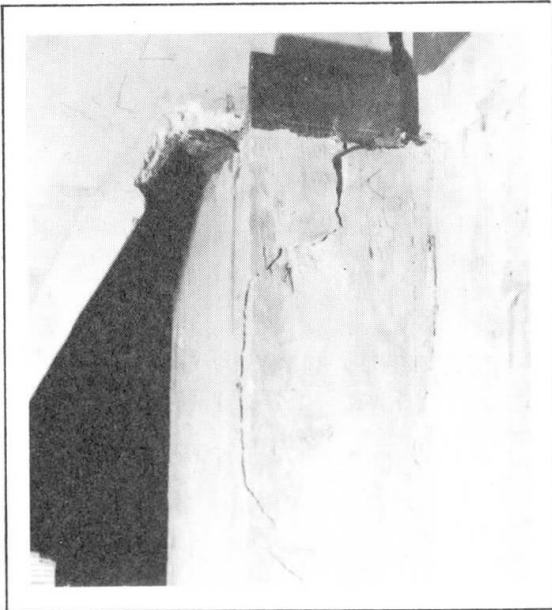


Fig. 9

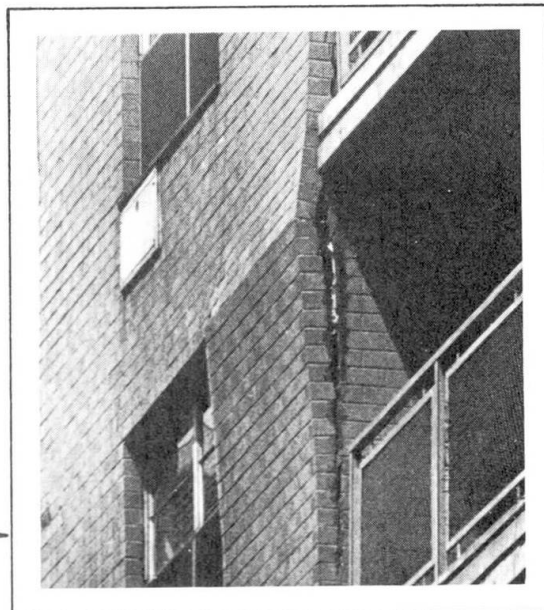
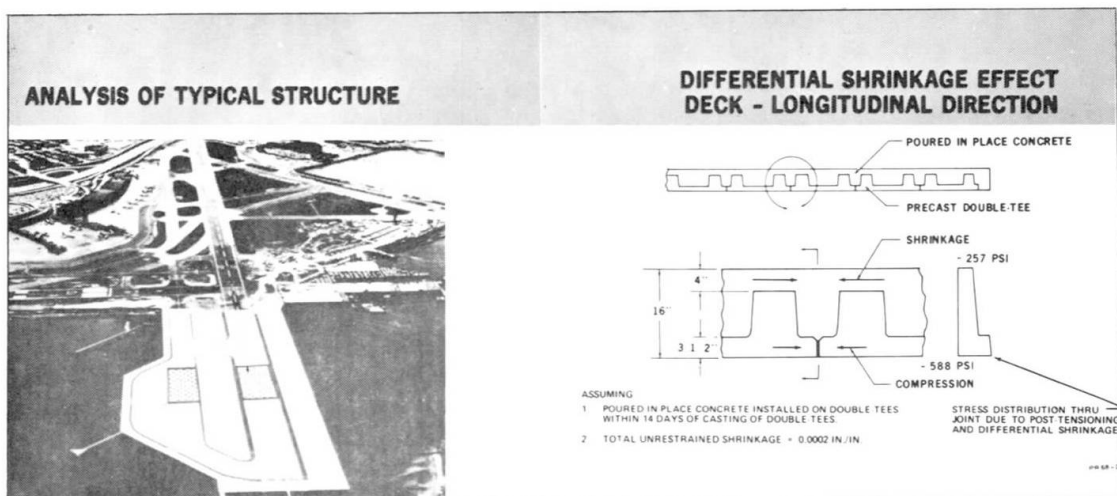


Fig. 10

Fig. 11



SUMMARY

The internal straining process of concrete due to shrinkage can be either beneficial or detrimental to the performance of a structure. Because of this phenomena the productive course of action is to design all structures utilizing this or at least minimizing its deleterious effects.

A brief outline of the mathematical approach to the problem and examples of actual structures built in the United States where the effects of shrinkage were predominant in the design and behavior are presented.

RESUME

Le retrait, qui entraîne dans le béton l'apparition de tensions internes, peut être un avantage ou un inconvénient pour l'exécution d'une structure. En conséquence, l'étude de toute structure se fera en tenant compte de ce phénomène, ou tout au moins en diminuant ses effets néfastes.

On présente un aperçu de l'approche mathématique du problème ainsi que des exemples de structures construites aux Etats-Unis d'Amérique dont l'étude et la réalisation furent intéressées par ce phénomène.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Vorgang der inneren Stauchung infolge Schwinden kann sich entweder vor- oder nachteilhaft auf das Verhalten des Bauwerkes auswirken. Es ist daher vorteilhaft, in der Planung eines Bauwerkes dieses Phänomen zu beachten, oder zumindest die Nachteile zu minimieren.

Eine kurze mathematische Uebersicht der Lösung dieses Problems sowie Beispiele für in den Vereinigten Staaten errichtete Bauten, bei welchen Schwinden im Entwurf und Verhalten überwiegend war, werden angegeben.

Formeln und Verfahren zur Ermittlung der Schnittkraftumlagerung infolge Kriechen und Schwinden bei abschnittsweise hergestellten Bauwerken

Redistribution of Internal Actions due to Creep and Shrinkage in Segmentally Constructed Structures

Formules et procédés permettant de calculer le déplacement des efforts intérieurs de section, dans les ouvrages fabriqués par segment par suite du fluage et du retrait

GOTTFRIED HOFMEISTER
Deutschland

1. Einleitung und Grundlagen

Bei Betonbauwerken, die wegen ihrer Größe in zeitlich aufeinanderfolgenden Abschnitten hergestellt werden, sind die Schnittkräfte im allgemeinen von den in einem Zuge betonierten Bauwerken verschieden, da man aus konstruktiven Gründen die Größe der Bauabschnitte nicht beliebig wählen kann. Neben dem Spannkraftabfall im Spannglied sind deshalb auch die Umlagerungskräfte aus Kriechen und Schwinden zu beachten. Die Berechnung dieser Kräfte soll im folgenden am Beispiel eines feldweise hergestellten Durchlaufträgers gezeigt werden, da diese Tragwerksart sehr häufig vorkommt. Das Verfahren, das sich auch auf andere Systeme übertragen läßt, beruht auf einem schrittweisen Ansatz von Kontinuitätsbedingungen während des Kriechzeitraumes zur Ermittlung der zeitabhängigen Stützenmomente.

Aus der Formulierung von Dischinger für den Kriechvorgang bei Annahme eines konstanten E-Moduls

$$(1) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \left(\frac{d\sigma}{dt} + \sigma \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

folgt allgemein für den zeitlichen Verlauf einer Verschiebung:

$$(2) \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}_0 (1 + \varphi) = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_t$$

$\mathcal{S}_0$ ist die elastische Verformung, aus der sich durch Multiplikation mit der Kriechkurve φ der zeitabhängige Anteil $\mathcal{S}_t$ ergibt. Der Verlauf der Kriechkurve wird in Abhängigkeit vom Endwert und der Zeit t allgemein angesetzt zu

$$(3) \quad \varphi = \varphi_{\infty} \cdot \varphi(t)$$

Zur Erläuterung des Verfahrens wird zunächst ein Zweigelenkrahmen (Bild 1) betrachtet, dessen Auflager sich beim Ausrüsten um Δ_a verschoben haben. Aus dem Schwinden des Rahmenriegels ist weiter noch eine Verkürzung $\Delta_s = \varepsilon_s \cdot l$ zu erwarten. Der zeitliche Verlauf des Schwindens mit dem Endschwindmaß ε_s sei dem Kriechen proportional:

$$(4) \quad \varepsilon = \varphi \cdot \varepsilon_s / \varphi_{\infty}$$

Auflagerverschiebung und Riegelverkürzung rufen im Rahmen Zwängungen hervor, die bei der Kriechbetrachtung mit einbezogen werden müssen.

Für einen Zeitabschnitt Δt_n sei zu Beginn die zeitabhängige Unbekannte X_{n-1} bekannt. Am Ende ist X_n vorhanden. Die Kriechkurve φ ändert sich während Δt_n um $\Delta \varphi_{1,n}$ (vergl. Bild 2, z.B. für φ_1). Nehmen wir nun an, daß X_{n-1} linear auf X_n anwächst, dann beträgt die mittlere Kraft $(X_n + X_{n-1})/2$. Diese erzeugt nach (2) die plastische Verformung

$$\frac{X_n + X_{n-1}}{2} \cdot \Delta \varphi_{1,n} \cdot \delta_{11}$$

Die elastische Verformung $(X_n - X_{n-1}) \cdot \delta_{11}$

ist nur von der neu auftretenden Kraft abhängig. Infolge der Auflagerverschiebung Δ_v ist die plastische Verformung während Δt nach (2):

$$\Delta_v \cdot \Delta \varphi_{1,n}$$

Die Riegelverkürzung Δ_s erzeugt nach (4):

$$\Delta_s \cdot \Delta \varphi_{1,n} / \varphi_{\infty}$$

Damit lautet die Kontinuitätsgleichung für die Verschiebung des linken Auflagerpunktes im Zeitabschnitt Δt_n

$$(5a) \quad \frac{X_n + X_{n-1}}{2} \Delta \varphi_{1,n} \cdot \delta_{11} + (X_n - X_{n-1}) \cdot \delta_{11} + (\Delta_v + \Delta_s / \varphi_{\infty}) \cdot \Delta \varphi_{1,n} = 0$$

oder aufgelöst nach der Unbekannten X_n

$$(5b) \quad X_n \cdot \left(\frac{\Delta \varphi_{1,n}}{2} + 1 \right) \cdot \delta_{11} + X_{n-1} \cdot \left(\frac{\Delta \varphi_{1,n}}{2} - 1 \right) \cdot \delta_{11} + (\Delta_v + \Delta_s / \varphi_{\infty}) \cdot \Delta \varphi_{1,n} = 0$$

Gleichung (5b) entspricht der Form nach einer Elastizitätsgleichung für X_n . Ein Unterschied besteht in den Vorzeichen und den Belastungsgliedern, die zeitabhängige Anteile enthalten und die plastischen Verhältnisse wiedergeben. Man spricht hier also besser von einer "Plastizitätsgleichung". Die fortlaufende Anwendung von Gleichung (5b) liefert den Endwert X_{∞} genügend genau, wenn Δt bzw. $\Delta \varphi$ genügend klein gewählt werden. Hierauf wird noch im Abschnitt 3 eingegangen.

2. Die Plastizitätsgleichung für den feldweise hergestellten Durchlaufträger

Beim feldweise hergestellten Durchlaufträger nach Bild 2 wird zum Zeitpunkt t_{n-1} das Feld n an Feld $n-1$ angeschlossen. Für eine Stütze i ($< n$) lautet in Anlehnung an (5b) die Plastizitätsgleichung für den Zeitabschnitt Δt_n bis zum Anschluß des Feldes $n+1$ in verkürzter Schreibweise:

$$(6) \quad X_{i-1,n} \left(\delta_{i,i-1} + \frac{n \delta_{i,i-1}}{2} \right) + X_{i,n} \left(\delta_{i,i} + \frac{n \delta_{i,i}}{2} \right) + X_{i+1,n} \left(\delta_{i,i+1} + \frac{n \delta_{i,i+1}}{2} \right) \\ - X_{i-1,n-1} \left(\delta_{i,i-1} - \frac{n \delta_{i,i-1}}{2} \right) - X_{i,n-1} \left(\delta_{i,i} - \frac{n \delta_{i,i}}{2} \right) - X_{i+1,n-1} \left(\delta_{i,i+1} - \frac{n \delta_{i,i+1}}{2} \right) + n \delta_{i,0} = 0$$

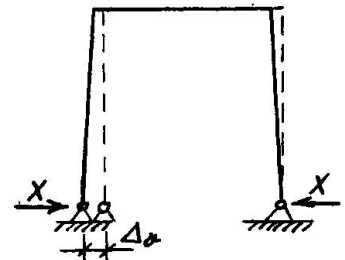


Bild 1. Zweigelenkrahmen

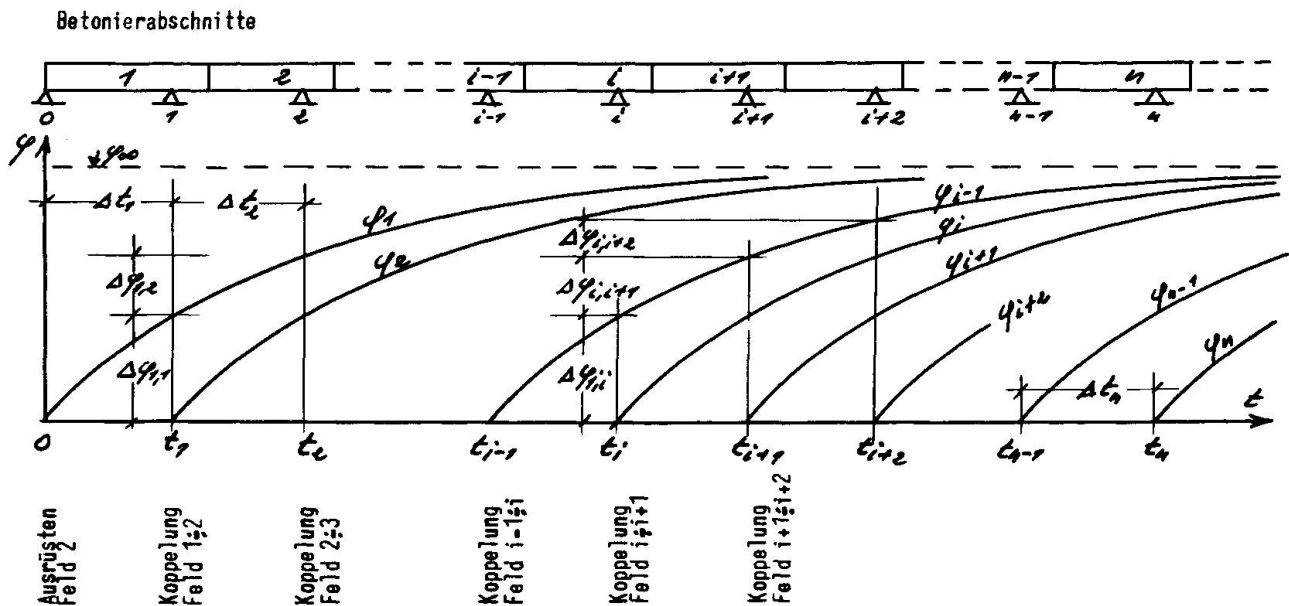


Bild 2. Feldweise betonierter Durchlaufträger

Darin sind:

- $X_{i-1,n}$ die zeitabhängigen Momente an der Stütze $i-1$ zum Zeitpunkt t_n usw.
- $\delta_{i-1,i}$ der Endtangentialwinkel am normalen Durchlaufträger aus dem Einheitsmoment $X_{i-1}=1$ usw.
- $\alpha \delta_{i-1,i}$ der im Zeitabschnitt Δt_n infolge Kriechverformung nach (2) auftretende Endtangentialwinkel an Stütze i aus dem Einheitsmoment $X_{i-1}=1$ usw.
- $\alpha \delta_{i,0}$ der im Zeitabschnitt Δt_n infolge Kriechverformung nach (2) auftretende Endtangentialwinkel an Stütze i aus den äußeren Lasten und der durch sie hervorgerufenen Stützenmomente (diese ohne Kriecheinfluß)

Die Berechnung der Endtangentialwinkel $\alpha \delta$ infolge Kriechverformung sei anhand von Bild 3 für $\alpha \delta_{i,i}$ noch näher erläutert: Wegen des unterschiedlichen Betonalters ist das Kriechvermögen der einzelnen Betonabschnitte verschieden. Deshalb kann $\alpha \delta_{i,i}$ nicht durch $\delta_{i,i}$ ausgedrückt, sondern muß in drei Anteile aufgespalten werden. Die Momentenfläche d infolge $M_i=1$ als äußere Last muß mit den schraffierten Teilen der Flächen a, b u. c, die aus einem virtuellen Moment $M_{i,t}=1$ resultieren, nach der Arbeits-

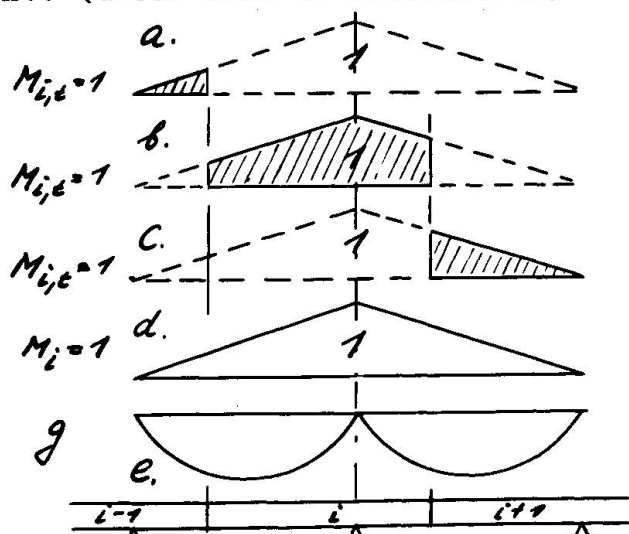


Bild 3. Berechnung der Endtangentialwinkel infolge Kriechen.

gleichung

$$S = \int M_i \cdot \eta_{i,t} \frac{d\epsilon}{E\beta}$$

integriert werden. Für jedes Teilintegral ist ein anderer Kriechfaktor maßgebend. Statistisch gedeutet entspricht dieses Vorgehen einer Rechnung mit unterschiedlichem E-Modul. Die Kriechfaktoren, die das Anwachsen von φ im Zeitabschnitt Δt_i bedeuten, lassen sich aus Bild 2 ablesen. Es folgt

$$(7) \quad \epsilon_{i,t} = \Delta \varphi_{i-1,n} \int M_i \eta_{i,t} \frac{d\epsilon}{E\beta} + \Delta \varphi_{i,n} \int M_i \eta_{i,t} \frac{d\epsilon}{E\beta} + \Delta \varphi_{i+1,n} \int \eta_{i+1,t} M_{i+1} \frac{d\epsilon}{E\beta}$$

mit

$\Delta \varphi_{i-1,n}$: Anwachsen von φ_{i-1} während Δt_i usw.

$M_{i,t}$: Anteil b der Momentenfläche infolge $M_{i,t=1}$ usw.

Die zur Ermittlung von $\epsilon_{i,0}$ maßgebende Momentenfläche (e im Bild 3) setzt sich aus der M_0 -Fläche und den von den Bauabschnitten i-1 bis n hervorgerufenen Stützenmomenten $nX_{i-1,0}$, $nX_{i,0}$ und $nX_{i+1,0}$ zusammen. Die Integration für $\epsilon_{i,0}$ erfolgt entsprechend den Erläuterungen zu Gleichung (7). Darin ist M_i durch die Momentenfläche aus der Summe der Bauabschnitte zu ersetzen.

Gleichung (6) stellt eine Dreimomentengleichung mit den Unbekannten $X_{i-1,n}$, $X_{i,n}$ und $X_{i+1,n}$ dar. Das zugehörige Gleichungssystem ist dem zur Ermittlung der Stützenmomente eines Durchlaufträgers gleich. Mit jedem Bauabschnitt wächst die Zahl der Unbekannten und Gleichungen an, sofern man nicht wegen zu großer Betonierabstände den Zeitabschnitt Δt nochmals unterteilen muß (Vergl. Abschnitte 3 u. 4). Auf jeden Fall ist eine Unterteilung vorzunehmen, wenn die Verhältnisse vom Betonieren des letzten Feldes bis zum Ende des Kriechens untersucht werden. Hierfür empfiehlt sich, nicht Δt als Bezugsgröße zu wählen, sondern die Kriechkurve des letzten Feldes in gleiche Abschnitte aufzuteilen (Siehe Abschnitt 4).

3. Zur Genauigkeit und zur Konvergenz des Verfahrens

Für diese Untersuchung legen wir wieder den Rahmen des Abschnittes 1 zugrunde. Da bisher über den Verlauf der Kriechkurve keine Festlegung getroffen wurde, nehmen wir dafür an:

$$(8) \quad \varphi(t) = 1 - e^{-t}$$

Teilt man φ in gleiche Abschnitte mit φ_0/n auf, dann folgt aus (5b)

$$X_1 = X_0 \frac{\frac{\varphi}{2n} + \varphi}{2n + \varphi} = X_0 \cdot \alpha, \quad X_2 = X_0 \alpha + X_1 \left(\frac{\frac{\varphi}{2n} - \varphi}{2n + \varphi} \right) = X_0 \alpha (1 + \beta)$$

$$(9) \quad X_n = X_0 \cdot \alpha (1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{n-1})$$

mit $X_0 = -(\Delta s + \Delta s/\varphi_0)/\delta_{11}$.

Gleichung (9) liefert mit weiteren Umformungen

$$(10a) \quad X_n = X_0 (1 - \beta^n) = X_0 \left[1 - \left(\frac{\frac{\varphi}{2n} - \varphi}{2n + \varphi} \right)^n \right]$$

Geht n gegen ∞ , dann wird:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\varphi}{n + \varphi/2} \right)^n = e^{-\varphi}$$

(10a) geht in die genaue Lösung über:

$$(10b) \quad X_{\infty} = X_0 (1 - e^{-\varphi})$$

Die Näherungslösung konvergiert und liefert bei $h \rightarrow \infty$ als Endwert das Ergebnis, das sich aus der Auflösung der für das Problem gültigen Differentialgleichung herleiten läßt.

Die Auswertung der Gleichungen (10) ist in Tabelle 1 vorgenommen. Diese zeigt, daß für alle in Betracht kommenden Werte für φ_0 bei $n=2$ sehr gute, bei $n=3$ praktisch volle

Tabelle 1

$\varphi_0 \backslash h$	∞	4	3	2	1
1	0,632	0,634	0,636	0,640	0,667
2	0,865	0,870	0,875	0,889	1,000
3	0,950	0,957	0,963	0,980	1,200
4	0,982	0,988	0,992	1,000	1,333

Übereinstimmung der schrittweisen Näherung mit der genauen Lösung vorhanden ist. Es empfiehlt sich also, bei Zeitabständen von Δt , bei denen $\Delta \varphi > \frac{\varphi_0}{2}$ ist, in zwei gleiche Kriechabschnitte zu unterteilen. Nach Fertigstellung werden zweckmäßig vier gleiche Kriechabschnitte gewählt.

4. Zahlenbeispiel

4.1 Allgemeine Angaben

Die Berechnung nach dem gezeigten Verfahren wird am Beispiel des feldweise hergestellten, symmetrischen Dreifeldträgers nach Bild 4 gezeigt. Der Zusammenschluß der Felder 1 und 2 erfolgt 3 Monate nach dem Betonieren von Feld 1. Nach weiteren 2 Monaten wird Feld 3 an Feld 2 angeschlossen. Die zur Berechnung der statisch Unbestimmten und der Kriechumlagerungen erforderlichen Drehwinkel φ zeigt Tabelle 2.

4.2 Betonierabschnitt 1

Bis zum Anschluß von Feld 2 nach 3 Monaten hat die Kriechfähigkeit von Beton 1 bei $\varphi_0=2,5$ abgenommen um

$$\Delta \varphi_{1,1} = 2,5(1 - e^{-0,25}) = 0,552$$

4.3 Betonierabschnitt 2

Zu Beginn ist vorhanden:

$$X_2 = -7\,020 \text{ Mpm}$$

$$X_1 = -(347\,000 - 7\,020 \cdot 11,38) / (9,19 + 16,12) - 6\,290 = -16\,830 \text{ Mpm}$$

Die Kriechfaktoren nach 5 Monaten sind für

$$\text{Beton 1: } \Delta \varphi_1 = 2,5(e^{-0,25} - e^{-0,417}) = 0,300$$

$$\text{Beton 2: } \Delta \varphi_2 = 2,5(1 - e^{-0,167}) = 0,385$$

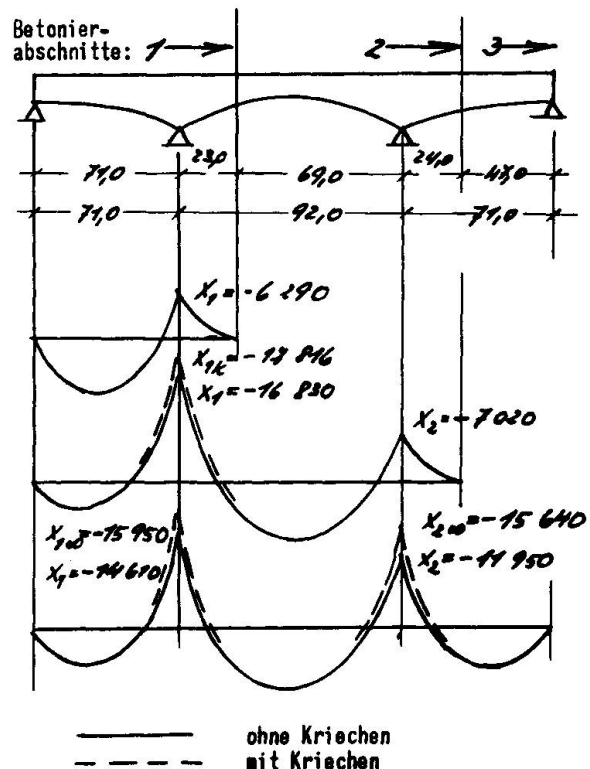
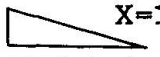
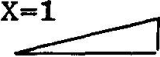
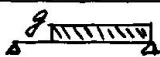
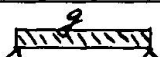


Bild 4. Dreifeldträger

Tabelle 2.

Feld	2		1 und 3
X_1, X_2 Last	 $X_1=1$	 $X_2=1$	 $X_1=1$  $X_2=1$
 $X=1$	4,75+11,37=16,12	0,87+10,51=11,38	4,04+5,15=9,19
 $X=1$	0,87+10,51=11,38	0,20+15,92=16,12	—
	347 000	—	99 700
	38 700+382 300 = 421 000	13 000+408 000 = 421 000	37 800+118 600 = 156 400

Sie werden in zwei gleiche Teile aufgeteilt.

Plastizitätsgleichung für 1. Teilabschnitt:

$$\begin{aligned}
 X_{1,1} & \left[25,31 + \frac{0,300}{4} (9,19 + 4,75) + \frac{0,385}{4} \cdot 11,37 \right] - 16\,830 \left[\frac{0,300}{2} (9,19 + 4,75) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{0,385}{2} \cdot 11,37 \right] - 7020 \left(\frac{0,300}{2} \cdot 0,87 + \frac{0,385}{2} \cdot 11,38 \right) + \frac{0,300}{2} (156\,400 \\
 & \quad + 38\,700) + \frac{0,385}{2} \cdot 382\,300 = 0
 \end{aligned}$$

$$X_{1,1} = -14\,700 / 27,45 = -535 \text{ Mpm}$$

Plastizitätsgleichung für 2. Teilabschnitt: Zur Belastung kommt $X_{1,1}$ dazu:

$$X_{1,2} = - \left[14\,700 + 535 \left(25,31 - \frac{0,300}{4} \cdot 13,94 - \frac{0,385}{4} \cdot 11,37 \right) \right] / 27,45 = -986 \text{ Mpm}$$

4.4 Betonierabschnitt 3: Es ist vorhanden:

$$X_1 = -16\,830 + 2\,220 = -14\,610 \text{ Mpm}$$

$$X_2 = -7\,020 - 4\,930 = -11\,950 \text{ Mpm}$$

Die restlichen Kriechfaktoren bis Kriechabschluß für

$$\text{Beton 1} \quad \Delta \varphi_{1R} = 2,5 \cdot e^{-0,417} = 0,659 \cdot 2,5 = 1,647$$

$$\text{Beton 2} \quad \Delta \varphi_{2R} = 2,5 \cdot e^{-0,167} = 0,846 \cdot 2,5 = 2,115$$

$$\text{Beton 3} \quad \Delta \varphi_{3R} = 2,5$$

werden in 6 Teilabschnitte aufgeteilt. Die Verformungen $n \int_{i,i-1}$, $n \int_{i,i}$ usw. sind dann in allen Abschnitten gleich:

$$n \int_{1,1} = \frac{1}{6} [1,647 (9,19 + 4,75) + 2,115 \cdot 11,37] = 7,83$$

$$n \int_{1,2} = n \int_{2,1} = \frac{1}{6} (1,647 \cdot 0,87 + 2,115 \cdot 10,51) = 3,94$$

$$n \int_{2,2} = \frac{1}{6} [1,647 \cdot 0,20 + 2,115 (15,92 + 4,04) + 2,5 \cdot 5,15] = 9,23$$

$$n\mathcal{J}_{1,0} = \frac{1}{6} [1,647 \cdot (156\,400 + 38\,700) + 2,115 \cdot 382\,300] = 188\,300$$

$$n\mathcal{J}_{2,0} = \frac{1}{6} [1,647 \cdot 13\,000 + 2,115 (408\,000 + 37\,800) + 2,5 \cdot 118\,600] = 210\,200$$

3. Teilabschnitt

$$X_{1,3}(25,31 + 7,83/2) + X_{2,3}(11,38 + 3,94/2) + 986(25,31 - 7,83/2) - 14\,610 \cdot 7,83 - 11\,950 \cdot 3,94 + 188\,300 = 0$$

$$X_{1,3}(11,38 + 3,94/2) + X_{2,3}(25,31 + 9,23/2) + 986(11,38 - 3,94/2) - 14\,610 \cdot 3,94 - 11\,950 \cdot 9,23 + 210\,300 = 0$$

$$X_{1,3} = -1\,072 \text{ Mpm}$$

$$X_{2,3} = -1\,250 \text{ Mpm}$$

4. Teilabschnitt

$$X_{1,4} \cdot 29,23 + X_{2,4} \cdot 13,35 + 26\,800 + 1\,072 \cdot 21,40 + 1\,250 \cdot 9,41 = 0$$

$$X_{1,4} \cdot 13,35 + X_{2,4} \cdot 29,95 + 42\,300 + 1\,072 \cdot 9,41 + 1\,250 \cdot 20,70 = 0$$

$$X_{1,4} = -1\,144 \text{ Mpm}$$

$$X_{2,4} = -2\,117 \text{ Mpm}$$

Ergebnisse der weiteren Teilabschnitte:

$$5. \text{ TA: } X_{1,5} = -1\,205 \text{ Mpm} \quad X_{2,5} = -2\,707 \text{ Mpm}$$

$$6. \text{ TA: } X_{1,6} = -1\,253 \text{ Mpm} \quad X_{2,6} = -3\,110 \text{ Mpm}$$

$$7. \text{ TA: } X_{1,7} = -1\,295 \text{ Mpm} \quad X_{2,7} = -3\,540 \text{ Mpm}$$

$$8. \text{ TA: } X_{1,8} = -1\,340 \text{ Mpm} \quad X_{2,8} = -3\,690 \text{ Mpm}$$

4.5 Vergleiche

In einem Zuge hergestellt sind die Stützenmomente:

$$X_1 = X_2 = -(156\,400 + 421\,000) / (16,12 + 9,19 + 11,38) = -15\,760 \text{ Mpm}$$

Infolge Kriechen stellen sich diese Momente sehr genau ein, wobei das Ergebnis bei X_1 über dem obigen Wert liegt.

Eine Kontrollrechnung, bei der die Berechnungsschritte jeweils auf die Hälfte reduziert wurden (Betonierabschnitt 2: 1 Teilabschnitt; Betonierabschnitt 3: 3 Teilabschnitte), lieferte folgende Umlagemomente:

$$\text{Ende Betonierabschnitt 2: } X_{1,2} = -983 \text{ Mpm}$$

$$\text{Kriechende: } X_{1,8} = -1\,330 \text{ Mpm}$$

$$X_{2,8} = -3\,600 \text{ Mpm}$$

Die Ergebnisse stimmen mit denen für kleinere Zeitabschnitte sehr gut überein und rechtfertigen die in Abschnitt 3 gemachten Angaben.

Zusammenfassung

Zur Berechnung der Schnittkraftumlagerung infolge Schwinden und Kriechen werden am Beispiel eines abschnittsweise hergestellten Durchlaufträgers gebrauchsfertige Formeln abgeleitet. Sie sind gültig für beliebigen Verlauf der Kriechkurve und können auch auf andere Tragsysteme erweitert werden. Die Anwendung wird an einem Dreifeldträger bei Annahme einer Exponentialfunktion als Kriechkurve gezeigt. Anhaltspunkte für die Grösse der zu wählenden zeitlichen Unterteilung der Berechnungsschritte werden am Zweigelenkrahmen gegeben.

Summary

Equations are derived for the practical calculation of the redistribution of internal actions which occurs in a segmentally constructed continuous girder as a result of creep and shrinkage. The equations apply for any time-variation of creep, and can also be extended to other structural systems. An example is given in which a three span girder is considered on the assumption of an exponential creep function. Basic points involved in the choice of a suitable time increment for the step-wise calculations are discussed in relation to a two-pinned frame.

Résumé

Pour le calcul du déplacement des efforts intérieurs de section par suite du fluage et du retrait, de formules prêtes à être utilisées sont employées comme exemple d'une poutre continue fabriquée par segment. Elles sont valables pour un tracé quelconque de la courbe de fluage et peuvent être aussi appliquées à d'autres ouvrages. L'emploi en est montré pour une poutre à trois travées par convention d'une fonction exponentielle de la courbe de fluage. On a donné au cadre à deux articulations des points d'appui pour déterminer la grandeur des subdivisions des étapes de calcul.

Eine praktische Berechnungsmethode der Vorspannungsverluste in Spanngliedern von Stahlbetonkonstruktionen

A Practical Method for Calculating Losses in Prestressed Concrete Structures

Une méthode pratique permettant le calcul de la perte de précontrainte dans des éléments sous tension de la construction en béton armé

O.JA. BERG
Prof. Dr. der Techn. Wiss.
UdSSR

E.N. ŠČERBAKOV
Dr.-Ing.
UdSSR

Bei der Projektierung von Spannbetonkonstruktionen ist es nötig, den tatsächlichen Spannungszustand infolge von Vorspannkraft, äusseren Last und anderen Faktoren richtig zu erfassen. Die betreffenden Berechnungen sind unvermeidlich mit einer Notwendigkeit der Berücksichtigung von lang dauernden Vorgängen im Beton verbunden. Dazu gehören vor allem Schwinden und Kriechen des Betons, die zu zeitlichem Abfall der Anfangsvorspannkraft führen.

Die in der UdSSR für die Berücksichtigung der obengenannten Verluste bei der Projektierung von Bauwerken aus Schwerbeton angewandte Berechnungsmethodik wurde bis zuletzt auf der Ausnutzung von einigen rein empirischen Beziehungen aufgebaut. Durch diese Beziehungen wird der Einfluss einer Reihe von massgebenden Faktoren nur näherungsweise berücksichtigt. Vollständig ohne Rücksicht bleibt dabei der Unterschied zwischen Kriech- und Schwindeigenschaften von verschiedenen Betontypen. Es wird üblich angenommen, dass die praktische Berücksichtigung des letztgenannten Faktors im Entwurfsstadium (insbesondere für Konstruktions-Typenbauteile) grosse Schwierigkeiten bietet.

Zugleich soll man die stetige Erweiterung von im Bauwesen

angewendeten Schwerbetontypen und insbesondere des Bereichs deren Festigkeitseigenschaften in Rücksicht nehmen. Das erfordert individueller Behandlung des Problems bei der Einschätzung des Betonverhaltens im Bauwerk, die den Zwecken von Entwurfspraxis am meisten angepasst wäre.

Solche Behandlung kann sich im einzelnen auf die Berücksichtigung der in [1,2,3] festgestellten Gesetzmässigkeiten der Veränderung von Kriech- und Schwindwerten bei verschiedenen Schwerbetonen stützen. Auf Grund dieser Gesetzmässigkeiten gelingt es, einige Ausgangswerte für Endkriechmass C_n und Schwindverformungen ϵ_{sn} (bezogen auf gegebene Verhältnisse des Verformungsvorgangs im Beton) näherungsweise einzuschätzen, d.h. in Abhängigkeit von zwei Kennwerten der individuellen Betoneigenschaften – Projektfestigkeit des Betons sowie Konsistenzgrad des eingebrachten Betongemisches. Die Zahlenwerte von C_n und ϵ_{sn} , die sich auf eine ausgedehnte Gruppe von neuzeitlichen Schwerbetonen beziehen, sind als Beispiel in Tabelle 1 zusammengestellt.

T a b e l l e 1

Konsistenzzahl für Betonmischung nach GOST 10181-62		Kriechmass-Endwerte $C_n \times 10^6, \text{ cm}^2/\text{kg}$				Schwindverformungs-Endwerte $\epsilon_{sn} \times 10^6$
Setzmass bei Setzkonsistenzprobe, cm	Betonsteife ermittelt mit techn. Viskosimeter sek	Betone mit Würfelfestigkeit im Alter von 28 Tagen $R, \text{ kg/cm}^2$				
		300	400	500	600	300-600
-	30-35	7,7	6,2	5,2	4,5	270
1-2	-	8,9	7,2	6,0	5,3	330
5-6	-	10,1	8,1	6,8	5,9	400
9-10	-	10,7	8,5	7,2	6,2	430

Anmerkung: Die in der Tabelle angegebene Werte entsprechen ungefähr den Schwerbetonen, die aus Portlandzementen mit normalsteifem Zementbrei von 25-26%, gebrochenen Zuschlägen mit Korngrössen bis 20 mm und aus Mittelsand hergestellt werden.

Bei der Ausnutzung der Tabelle 1 wird die Berücksichtigung des Einflusses des ganzen Komplexes technologischer Faktoren auf die Verformungsgrössen mittelbar realisiert, indem man sie auf die Einschätzung von zwei unabhängigen verallgemeinerten Parametern zurückführt, die mit einer grösseren Sicherheit im Stadium der Projektierung festgestellt werden können. Die konkrete Werte von diesen Parametern für einen gegebenen Typ der Konstruktion werden durch die Berechnungsannahmen, konstruktive und technologische Voraussetzungen vorgegeben.

Anhand der in der Tabelle 1 angegebenen Werten können die Verformungskennziffer für Schwerbeton errechnet werden, die den tatsächlich im Bauwerk vorhandenen Bedingungen entsprechen:

$$C_{\tau} = C_n \cdot \xi_{\tau 3}^k \cdot \xi_{\tau 4}^k \cdot \xi_{\tau} \quad (1)$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{sn} \cdot \xi_s^3 \cdot \xi_s^4 \quad (2)$$

wobei ξ_i - Korrekturkoeffiziente sind, die den Einfluss von tatsächlichen Querschnittsabmessungen der Bauteile (ξ_3^k und ξ_3^s), Feuchtigkeitsverhältnissen der Umwelt (ξ_4^k und ξ_4^s) sowie von Betonalter zum Zeitpunkt des Lastaufbringens (ξ_{τ}) auf die Grösse der Verformungen berücksichtigen.

Die Zahlenwerte für Koeffiziente ξ_i , können der Arbeit [3] entnommen werden. Die Grössen ξ_3^k und ξ_3^s werden dabei je nach dem Verhältnis $\bar{F}$ der Bauelement-Querschnittsfläche zu seiner

Querschnittsumfang (in cm) festgelegt. Wie die Verfasser in [2] schon gezeigt haben, soll man sich bei der Festlegung von Koeffizienten ξ_4^k und ξ_4^s (für die Konstruktionsglieder, die sich unter natürlichen klimatischen Bedingungen befinden) nach der mittleren relativen Luftfeuchtigkeit (in %) im Laufe von Warmzeit richten.

Das dargelegte Vorgehen ermöglicht es, die Einschätzung der Verformbarkeit verschiedener Betone bei unterschiedlichen Bedingungen weitgehend zu vereinfachen und differenzieren. Beim Vorliegen der Werte von lang dauernden Verformungen, die schon im Stadium der Projektierung recht zuverlässig bestimmt werden, kann die Ermittlung der Vorspannungsverluste aus Schwinden und Kriechen des Betons auf dem mathematischen Apparat einer der Linearkriechtheorien aufgebaut werden [4,5]. Der Endwert der Verluste in der Spannbewehrung kann dabei wie folgt ausgedrückt werden:

aus Schwinden, vom Zeitpunkt der Beginn dessen Einwirkung:

$$\Delta \sigma_{v1} = \varepsilon_s \cdot E_a \cdot \Phi \quad (3)$$

aus Kriechen, vom Zeitpunkt des Aufbringens der ständigen Last (Vorspannung, äussere Belastung u.s.w.)

$$\Delta \sigma_{v2} = \sigma_b \cdot C_r \cdot E_a \cdot \Phi \quad (4)$$

Hierbei bedeuten:

- E_a – Elastizitätsmodul der Spannbewehrung;
- σ_b – die im Beton durch Lastangriff erzeugte Spannungen auf der Höhe des Schwerpunkts von Spannbewehrung;
- Φ – eine gewisse Funktion, die den Einfluss von dauerndem

Charakter des Verformungsvorganges auf den Endwert der Verluste berücksichtigt.

Die Darstellung der Funktion Φ wird durch Annahmen der für die Berechnung benutzten Kriechtheorie bestimmt. Den einfachsten analytischen Ausdruck giebt sogenannte "Theorie der Alterung" [4]; nach dieser Theorie nimmt die Funktion folgende Form an [6]:

$$\Phi = \frac{1 - e^{-\frac{\rho n \mu}{1 + \rho n \mu} \varphi_{\tau}}}{\rho n \mu \varphi_{\tau}} \quad (5)$$

Hierin bedeuten:

$\varphi_{\tau} = C_{\tau} \cdot E_b$ - Kriechzahl, der aus Kriechmass C_{τ} und Elastizitätsmodul des Betons E_b errechnet wird;

$\rho = 1 + \frac{y^2}{i^2}$ Kennzeichen des Stahlbeton-Querschnitts in Bezug auf die durch den Schwerpunkt des ideellen Querschnitts laufende Achse (bei y - als Abstand bis Schwerpunkt der Spannbewehrung und i - Trägheitsradius);

$n = \frac{E_a}{E_b}$ - das Verhältnis der Elastizitätsmoduli von Spannbewehrung und Beton;

μ - relative Spannbewehrungsgehalt.

In einem allgemeinen Fall, wenn die Einflüsse (Schwinden, Anteile der ständigen Last) auf Beton im verschiedenen Alter τ einwirken, kann der Gesamtwert der Verluste infolge von Schwinden und Kriechen als algebraische Summe gesucht werden:

$$\sigma_v = \Delta \sigma_{v1} + \sum \Delta \sigma_{v2} \quad (6)$$

wobei die Summanden $\Delta \sigma_v$ für einzelne Einflüsse gesondert ermittelt und die Werte C_{τ} (sowie Funktionen Φ) in Formeln (3) und (4) mit Berücksichtigung von tatsächlichen Zeitpunkt der betreffen-

den Einflüsse angenommen werden.

Ermittlung der Zahlenwerte für Funktion Φ wird durch die Möglichkeit der Ausnutzung der in Abhängigkeit von zwei Variablen φ_{τ} und β_{NM} aufgestellten Tabellen erleichtert. Darum sind die (3) und (4) für praktische Anwendung nicht komplizierter als übliche empirische Formeln. Gleichzeitig erlauben sie es, den Einfluss der konkreten Betoneigenschaften sowie der Bauwerk-Betriebsbedingungen auf die Grösse der Verluste vollständiger zu offenbaren. Bei einer richtigen Voraussage der in (3) und (4) enthaltenen Kenngrössen C_{τ} und ε_s wird eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen [7] gewährleistet, trotz der Bedingtheit von einigen Voraussetzungen der "Theorie der Alterung" selbst.

Die dargestellte Berechnungsmethodik für Vorspannungsverluste infolge von Schwinden und Kriechen des Betons ist zur Zeit durch die seit 1967 in der UdSSR gültigen Bestimmungen für Projektierung von Spannbetonbrücken SN 365-67 [8] vorgeschrieben.

Praktische Anwendung dieser Methodik wird nachstehend durch rechnerische Einschätzung der Prüfungsergebnisse von Doppel - T - Spannbetonträgern von 12,2 m Stützweite und 61 cm Querschnittshöhe erläutert [9]. Die Vorspannung wurde bei Betonalter von 7 Tagen mittels Stabbewehrung aus hochfestem Stahl erzeugt. Im Alter von 22 Tagen wurden die Träger durch die äussere ständige Last von verschiedener Grösse nachträglich belastet. Die Versuche wurden im Freien bei natürlichen klimatischen Verhältnissen durchgeführt und erstreckten sich über 7 Jahre. In der Tabelle 2 sind die Angaben über die Vorspannungsverluste in der Spannbewehrung infolge von Schwinden und Kriechen des Betons aus Versuchen mit

T a b e l l e 2

Ständiger Last in % zu projektierter Wert	Spannungen im Beton in der Höhe des Schwer- punkts der Spann- bewehrung		Versuchswerte für Gesamtverluste kg/cm	Vorspannungsverlu- ste in der Beweh- rung, die nach dar- gestellter Methodik berechnet wurden			Rechenwerte für Gesamtverluste kg/cm	Unterschied Zwischen Rechen- und Versuchswerten in %
	aus Vor- spannung Eigenge- wicht kg/cm ²	aus ständi- ger ausse- rer Last kg/cm ²		aus Schwin- den	aus Kriechen			
	σ_b^I	σ_b^{II}		$\Delta\sigma_{v1}$ kg/cm ²	$\Delta\sigma_{v2}^I$ kg/cm ²	$\Delta\sigma_{v2}^{II}$ kg/cm ²		
0		0	1476			0	1380	-6
50		-34,5	1195			-255	1125	-6
100	118	-69,0	844	410	970	-510	870	+3
150		-103,5	352			-765	615	+75

Voraussetzungen der experimentellen Untersuchung:

Vorgegebene Betongüte $R = 500 \text{ kg/cm}^2$;

Setzmass der Betonmischung $S = 9 \text{ cm}$;

Betonfestigkeit zum Zeitpunkt der Vorspannung $R_7 = 415 \text{ kg/cm}^2$;

— " — zum Zeitpunkt des Aufbringens der Last

$R_{22} = 480 \text{ kg/cm}^2$;

Elastizitätsmodul des 28 Tage alten Betons $E_b = 246000 \text{ kg/cm}^2$;

Elastizitätsmodul der Vorspannbewehrung $E_a = 1720000 \text{ kg/cm}^2$;

Kennwert für Bauelement-Querschnitt $\rho n \mu = 0,14$;

Mittlere Luftfeuchtigkeit über Sommerperiode $\varphi = 80\%$;

Querschnittfläche / Querschnittumfang-Verhältnis $\bar{r} = 5 \text{ cm}$.

Rechnerische Werte:

Ausgangswerte für Kriechmass und Schwindverformungen bei

$R = 500 \text{ kg/cm}^2$ und $S = 9 \text{ cm}$ (nach Tabelle 1)

$C_n = 7,2 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$; $\varepsilon_{sn} = 430 \times 10^{-6}$;

Rechenwerte für Kriechzahl $\varphi_r = C_n \cdot \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 \cdot \varepsilon_r \cdot E_b$ und
für Funktion Φ :

$\varphi_7 = 7,2 \times 0,8 \times 0,85 \times 1,20 \times 0,246 = 1,45$; $\Phi = 0,808$;

$\varphi_{22} = 7,2 \times 0,8 \times 0,85 \times 1,07 \times 0,246 = 1,30$; $\Phi = 0,811$;

Rechenwerte für Schwindverformungen $\varepsilon_s = \varepsilon_{sn} \cdot \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4$:

$\varepsilon_s = 430 \times 0,8 \times 0,85 \times 10^{-6} = 290 \times 10^{-6}$

denen der Berechnung für gleichen Bedingungen zusammengestellt. Aus der Tabelle 2 ist zu ersehen, dass bei der Laststeigerung von Null bis auf ihre projektierte Grösse die dargestellte Methodik eine zufriedenstellende Übereinstimmung von Rechen- und Versuchswerte für Gesamt - Vorspannungsverluste aus Schwinden und Kriechen des Betons gewährleistet. Mit dieser Berechnungsmethode wird ebenfalls der Einfluss von äusserer Belastung auf das Mass der Vorspannungsverluste gut in Kauf genommen.

Literaturverzeichnis:

1. E.N.Ščerbakov. Entwicklung praktischer Methoden der Berücksichtigung von Kriechen und Schwinden des Betons bei der Projektierung von Stahlbetonkonstruktionen. "Beton i Železobeton", 1967, Nr.8
2. O.Ya.Berg, E.N.Ščerbakov. The evaluation of the creep of concrete in the design of structures. Proceedings of the Symposium AIPS. Cement and Concrete Association, London, 1968.
3. E.N.Ščerbakov. Über die Voraussage der Kriech- und Schwindverformungen für Schwerbeton im Stadium der Projektierung. Trudy CNIIS vyp.70. Izd-vo Transport, Moskva, 1969.
4. I.I.Ulitskij u.a. Die Berechnung der Stahlbetonkonstruktionen mit Berücksichtigung von Dauervorgängen. Gosstrojizdat USSR, Kiew, 1963.
5. I.E.Prokopovič. Der Einfluss von dauernden Vorgängen auf den Spannungs- und Verformungszustand der Bauwerken. Gosstrojizdat, Moskva, 1963.
6. E.N.Ščerbakov. Die Berücksichtigung von lang dauernden

Vorgängen im Beton bei der Berechnung von Verkehrsbauten aus Spannbeton. Trudy CNIIS, vyp. 70, Izd-vo Transport, Moskva, 1969.

7. V.L.Galič, R.A.Melnik. Über die Wirksamkeit der praktischen Methoden für Ermittlung von Vorspannungsverluste infolge Kriechens des Betons. Zbornik "Stroitelnyje konstrukciji", vyp.12. Izd-vo "Budiwelnik", Kiew, 1969.

8. Bestimmungen für Projektierung der Eisenbahn-, Strassen- und Stadt-Brücken sowie Durchlässe aus Beton und Stahlbeton (SN 365-67). Strojizdat, Moskva, 1967.

9. R.A.Breckenridge, S.L.Bugg. Effect of long-time load on prestress concrete beams. "Journal of the Prestressed Concrete Institute", vol.9, N 6, 1964.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Beitrag und Rechenhilfsmittel zur Ermittlung von Formänderungen gerissener Tragwerke mit Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens

Calculation of Creep and Shrinkage Deformations in Cracked Reinforced Concrete Structures

Contribution et procédé de calcul permettant la recherche des déformations des ouvrages fissurés avec considération du fluage et du retrait

E. HAMPE

Prof. Dr.-Ing. habil.
Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar
Sektion Bauingenieurwesen
Weimar, DDR

H. KÖPPLER

Dr.-Ing.

1. Einführung

Von den Verfassern wurden mit /5/ Grundlagen und Rechenhilfsmittel zur Ermittlung des Einflusses von Kriechen und Schwinden bei einfach bewehrten, gerissenen Stahlbeton- und Spannbetonquerschnitten bereitgestellt. In der vorliegenden Arbeit werden diese Materialien erweitert durch die Berücksichtigung von:

- beliebigen T-Querschnitten
- doppelter Bewehrung
- plastifizierter Betonzugzone zur Erfassung des Betonverhaltens in den zwischen den Rissen liegenden Bereichen

Neben den Änderungen von Stahlzugkraft, Betonrandspannung und Nulllinienlage wird auch die Änderung der Querschnittskrümmung infolge des Kriechens und Schwindens berechnet.

Zur Ermittlung der Formänderungen erfolgt eine Diskretisierung des zu untersuchenden Tragwerkes, wobei die Betonzugzone in in den einzelnen Abschnitten je nach Größe der Beanspruchung ideal gerissen, ungerissen plastifiziert oder ideal elastisch angenommen wird. Durch einfache Integration über die Tragwerkslänge erhält man die Verdrehungen, durch zweifache Integration die Durchbiegungen des Tragwerkes. Die Integration kann nach den üblichen Verfahren für Funktionen diskreten Arguments ausgeführt werden. Bei statisch unbestimmten Tragwerken muß die Verträglichkeit an den Angriffsstellen der Überzähligen durch Iteration hergestellt werden. Da die zeitabhängige Änderung der Überzähligen infolge des Kriechens im allgemeinen gering ist, ist die Brauchbarkeit der Rechenhilfsmittel für statisch unbestimmte Tragwerke gewährleistet.

Bei den Untersuchungen wird von folgenden Voraussetzungen ausgegangen:

Fall a: "ideal gerissene Betonzugzone"

- Gültigkeit der Bernoullischen Hypothese
- Homogenität und Isotropie des Betons
- Proportionalität zwischen Spannungen und den elastischen und plastischen Verformungen

Fall b: "plastifizierte Betonzugzone"

- wie bei 1., jedoch werden vom Beton Zugspannungen aufgenommen, die proportional den Dehnungen bis zum ν -fachen der Betondruckspannungen sind und bei größeren Dehnungen den konstanten Wert $\nu \sigma_d$ beibehalten.

2. Bezeichnungen und Definitionen

E_b	Elastizitätsmodul des Betons
E_z	Elastizitätsmodul des Stahls
$F_z/\bar{F}_z$	Querschnittsfläche der Zugbewehrung/Druckbewehrung
h	Querschnittshöhe, gerechnet vom Schwerpunkt der Stahleinlagen bis zum oberen Querschnittsrand
b	größte Querschnittsbreite
x	Abstand der Spannungsnulllinie vom oberen Querschnittsrand
y	Abstand der jeweils betrachteten Faser der Betondruckzone vom oberen Querschnittsrand
$\xi = x(\varphi)/h, \eta = y/h$	
$\bar{p}_h$	Abstand der Druckbewehrung vom oberen Querschnittsrand
$\rho_1 h$	Flanschdicke des T-Querschnittes
$\psi(\eta)b$	Querschnittsbreite an der Stelle η
ϕb	Stegbreite des T-Querschnittes
N_{bo}	Betondruckkraft bei $t = 0$
N_{bt}	Änderung der Betondruckkraft bis $t = t$
N_{zo}	Stahlzugkraft bei $t = 0$
N_{zv}	Stahlzugkraft bei $\sigma = 0$ in Höhe der Stahleinlagen und $t = 0$
$\Delta N_{zv} = N_{zo} - N_{zv}$	
N_{zt}	Änderung der Stahlzugkraft bis $t = t$
M	auf den Querschnitt wirkendes konstantes Moment
φ	Kriechzahl zur Zeit $t = t$
φ_∞	Endkriechzahl
ϵ_s	Endschwindmaß
ϵ_b	Betondehnung
$\epsilon_z/\bar{\epsilon}_z$	Dehnung der Zugbewehrung /Druckbewehrung
σ_b	Betonspannung

$$n_z \mu_z = \frac{E_z F_z}{E_b b h}, \quad d\epsilon_s = \frac{\epsilon_s}{\varphi_\infty} d\varphi$$

Durch den Index "0" wird der Zustand $t = 0$, also vor Eintreten des Kriechens und Schwindens, gekennzeichnet.

3. Berechnungsgrundlagen

Mit den genannten Voraussetzungen ergibt sich unter Berücksichtigung des Schwindens folgende Beziehung zwischen den Spannungen und Verformungen des Betons (ausgenommen der plastifizierte Bereich des Betons im Fall b):

$$d\varepsilon_b = \frac{1}{E}(d\sigma_b + \sigma_b d\varphi) - d\varepsilon_S \quad (\varepsilon_S \text{ mit pos. Vorzeichen einsetzen}) \quad (1)$$

Den folgenden Ableitungen liegt für den Fall a Abb. 1 zugrunde.

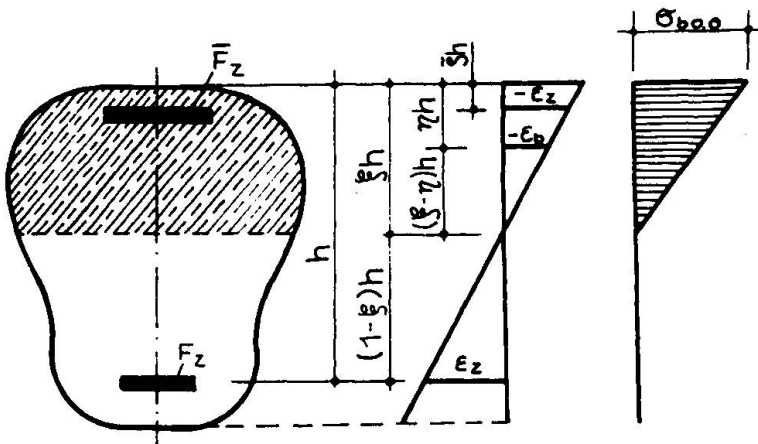


Abb. 1

Die Ableitungen für den Fall b müssen hier aus Platzgründen entfallen. Für sie gilt Abb. 2.

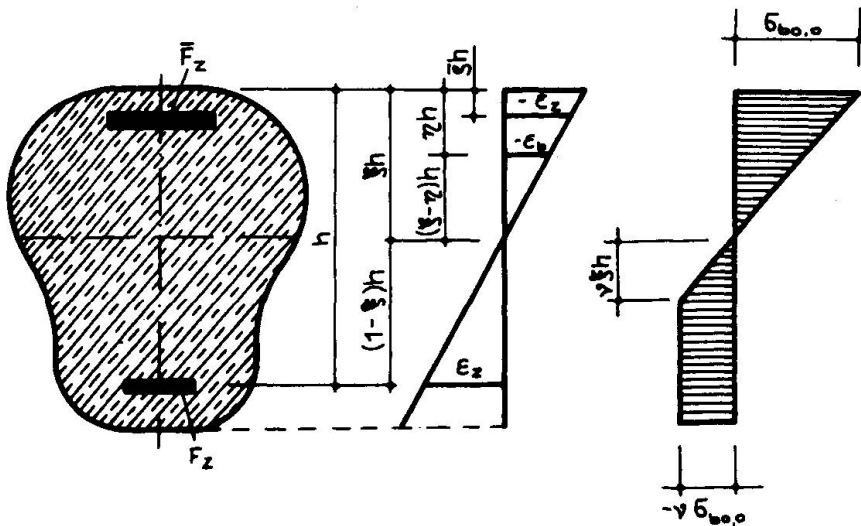


Abb. 2

Die Gleichgewichts- und Formänderungsbetrachtungen beziehen sich auf einen allgemeinen einfach symmetrischen Querschnitt. Die späteren Auswertungen werden für T-Querschnitte einschließlich des Sonderfalles Rechteckquerschnitt vorgenommen.

Gleichgewichtsbedingungen (Fall a)

$$\sum H = 0$$

$$\int_0^F hb\psi(\eta)\sigma_b(\eta,\varphi)d\eta + \bar{\varepsilon}_z E_z F_z + N_{zv} + \varepsilon_z E_z F_z = 0 \quad (2)$$

$$\sum M = 0$$

$$\int_0^F h^2 b\psi(\eta)\sigma_b(\eta,\varphi)(1-\eta)d\eta + \bar{\varepsilon}_z E_z F_z (1-\bar{\rho})h + M = 0 \quad (3)$$

Formänderungsbedingungen (Hypothese nach Bernoulli)

$$\varepsilon_b(\eta) = -\varepsilon_z \frac{\xi - \eta}{1 - \xi} \quad (4)$$

$$\bar{\varepsilon}_z = \varepsilon_b(\bar{\rho}) = -\varepsilon_z \frac{\xi - \bar{\rho}}{1 - \xi} \quad (5)$$

Die Ableitung von Gl. (2) bzw. Gl. (3) nach φ wird zu Gl. (2) bzw. Gl. (3) addiert. Unter Berücksichtigung von Gl. (1) und mit Beachtung der Tatsache, daß $\sigma_b(\xi, \varphi) = 0$, ergeben sich:

$$E_b b h \int_0^{\bar{\rho}} \psi(\eta) \left(\frac{\partial \varepsilon_b}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon_S}{\varphi_\infty} \right) d\eta = -N_{zv} - E_z F_z \left(1 + \frac{d}{d\varphi} \right) (\alpha \bar{\varepsilon}_z + \varepsilon_z) \quad (6)$$

$$E_b b h^2 \left[\int_0^{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \varepsilon_b}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon_S}{\varphi_\infty} \right) (1 - \eta) \psi(\eta) d\eta + n_z \mu_z (1 - \bar{\rho}) \left(1 + \frac{d}{d\varphi} \right) \alpha \bar{\varepsilon}_z \right] + M = 0 \quad (7)$$

Auf Grund der Leibnitzschen Formel und der Bedingung $\varepsilon_b(\xi, \varphi) = 0$ lassen sich bei den Gln. (6) und (7) Integration und Differentiation in der Reihenfolge vertauschen und die partielle Differentiation durch die gewöhnliche ersetzen. Danach werden in Gl. (6) die Gln. (4) und (5) eingesetzt.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \left\{ \varepsilon_z \left[\int_0^{\bar{\rho}} \frac{\xi - \eta}{1 - \xi} \psi(\eta) d\eta - n_z \mu_z (1 - \alpha \frac{\xi - \bar{\rho}}{1 - \xi}) \right] \right\} &= \frac{N_{zv}}{E_b b h} + \\ &+ n_z \mu_z \varepsilon_z (1 - \alpha \frac{\xi - \bar{\rho}}{1 - \xi}) + \frac{\varepsilon_S}{\varphi_\infty} \int_0^{\bar{\rho}} \psi(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (8)$$

Mit Berücksichtigung der Gln. (4) und (6) erhält man aus Gl. (7):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \left\{ \varepsilon_z \left[\int_0^{\bar{\rho}} \frac{\xi - \eta}{1 - \xi} (\bar{\rho} - \eta) \psi(\eta) d\eta + (1 - \bar{\rho}) n_z \mu_z \right] \right\} &= \frac{M}{E_b b h^2} - \\ &-(1 - \bar{\rho}) \left(\frac{N_{zv}}{E_b b h} + n_z \mu_z \varepsilon_z \right) + \frac{\varepsilon_S}{\varphi_\infty} \int_0^{\bar{\rho}} \psi(\eta) (\bar{\rho} - \eta) d\eta \end{aligned} \quad (9)$$

Folgende Vereinfachungen in der Schreibweise werden eingeführt:

$$\frac{\varepsilon_z E_b b h}{-N_{bo}} = \varepsilon_z^+, \quad \frac{\varepsilon_{bo,0} E_b b h}{-N_{bo}} = \varepsilon_{bo,0}^+, \quad \frac{N_{zv}}{-N_{bo}} = A,$$

$$\frac{\varepsilon_S E_b b h}{-N_{bo} \varphi_\infty} = B, \quad \frac{M}{-N_{bo} h} = \eta_0^+$$

Zunächst wird die Differentiation der Gln. (8) und (9) ausgeführt. Zur Lösung des sich ergebenden Differentialgleichungssystems erster Ordnung mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens ist eine explizite Darstellung der Ableitungen der unbekannten Funktionen $\varepsilon_z(\varphi)$ und $\xi(\varphi)$ erforderlich.

$$\frac{d\varepsilon_z^+}{d\varphi} = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (10)$$

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (11)$$

Darin bedeuten:

$$a_{11} = \int_0^{\xi} \frac{\xi - \eta}{1 - \xi} (\bar{p} - \eta) \psi(\eta) d\eta + (1 - \bar{p}) n_z \mu_z$$

$$a_{12} = \varepsilon_z^+ \left[\int_0^{\xi} \frac{1 - \eta}{(1 - \xi)^2} (\bar{p} - \eta) \psi(\eta) d\eta \right]$$

$$b_1 = \eta_0^+ - (1 - \bar{p})(A + n_z \mu_z \varepsilon_z^+) + B \int_0^{\xi} (\bar{p} - \eta) \psi(\eta) d\eta$$

$$a_{21} = \int_0^{\xi} \frac{\xi - \eta}{1 - \xi} \psi(\eta) d\eta - n_z \mu_z (1 - \alpha \frac{\xi - \bar{p}}{1 - \xi})$$

$$a_{22} = \varepsilon_z^+ \left[\int_0^{\xi} \frac{1 - \eta}{(1 - \xi)^2} \psi(\eta) d\eta + n_z \mu_z \alpha \frac{1 - \bar{p}}{(1 - \xi)^2} \right]$$

$$b_2 = A + n_z \mu_z \varepsilon_z^+ (1 - \alpha \frac{\xi - \bar{p}}{1 - \xi}) + B \int_0^{\xi} \psi(\eta) d\eta$$

Für die Berechnung der Stahlkraftänderung in der Zugbewehrung wird der dimensionslose Wert λ_{Nz} eingeführt.

$$\lambda_{Nz} = \frac{N_{zt}}{N_{zo}} = \frac{\varepsilon_z^+ - \varepsilon_{zo}^+}{\varepsilon_{zo}^+ + \frac{A}{n_z \mu_z}} \quad (12)$$

Um die obere Randspannung zu ermitteln, nehmen wir als Spannungsverteilung ein Trapez an, das den gleichen Schwerpunkt wie das wirkliche Spannungsdiagramm hat. Die sich dabei ergebende Spannung in Höhe der Nulllinie ist eine fiktive Spannung und nur insofern interessant, als man mit ihrer Hilfe die Form des wirklichen Spannungsdiagramms abschätzen kann. Der mögliche Fehler bei der maximalen Randspannung ist vernachlässigbar klein (vgl. Abb.3).

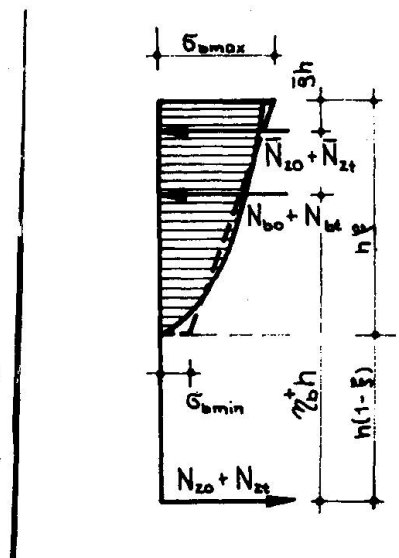


Abb. 3

Es sind nun zu berechnen: Betondruckkraft $N_{bo} + N_{bt}$ zur Zeit $t = t$, die Fläche der Druckzone F_{Dr} , Schwerpunktabstand der

Druckzone vom oberen Querschnittsrand η_s , das Trägheitsmoment der Druckzone I_{Dr} und die Widerstandsmomente W_o und W_u . Dann ergibt sich die Dr Randspannung zu:

$$\max \sigma_b = (N_{bo} + N_{bt}) \left[\frac{1}{F_{Dr}} + h \frac{\eta_s - (1 - \eta_b^+)}{W_o} \right] \text{ bzw.} \quad (13)$$

$$\max \sigma_b = - \frac{M}{bh^2} \Phi_1$$

Darin sind:

$$\Phi_1 = \frac{1 + \frac{N_{bt}}{N_{bo}}}{\eta_o^+} \left[\frac{1}{\int_0^{\eta_o^+} \psi(\eta) d\eta} - \frac{(1 - \eta_s - \eta_b^+) \eta_s}{\int_0^{\eta_o^+} (\eta - \eta_s)^2 \psi(\eta) d\eta} \right] \quad (14)$$

$$\Delta \Phi_1 = \Phi_1 - \Phi_{10}$$

$$\eta_b^+ = \frac{\eta_o^+ - n_z \mu_z \alpha \varepsilon_z \frac{\xi}{1 - \xi} (1 - \bar{p})}{1 - \frac{N_{bt}}{N_{bo}}}$$

Die Berechnung von $\min \sigma_b$ wäre analog zu $\max \sigma_b$ für den unteren Rand der Betondruckzone auszuführen. Als Grundlage für die Berechnung der Biegelinie w bzw. der Querschnittsverdrehungen w' wird zunächst die Krümmung w'' der Biegelinie ermittelt (vgl. Abb. 4).

$$w'' = \frac{\varepsilon_z}{(1 - \xi)h} = \frac{\alpha}{h}$$

Querschnittsverdrehungen:

$$w' = \int \frac{\alpha}{h} dl$$

Biegelinie:

$$w = \int \left(\int \frac{\alpha}{h} dl \right) dl$$

bezogene Krümmung:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_z}{1 - \xi} \quad \text{bzw.} \quad \alpha^+ = \frac{\varepsilon_z^+}{1 - \xi}, \quad \Delta \alpha^+ = \alpha^+ - \alpha_o^+$$

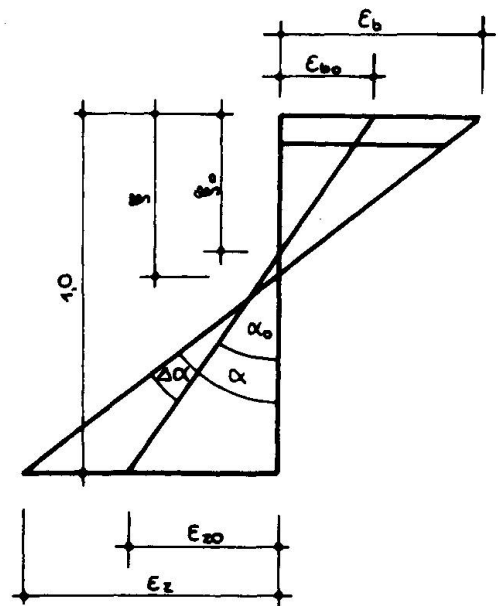


Abb. 4

4. Rechenhilfsmittel

Die bisherigen Betrachtungen gelten für einen allgemeinen einfach symmetrischen Querschnitt mit Druckbewehrung. In einer noch unveröffentlichten Arbeit sind umfangreiche Auswertungen der aufbereiteten Formeln für T-Querschnitte mit beliebigen geometrischen Verhältnissen vorgenommen worden. Mit den dort bereitgestellten Materialien ist sowohl eine einfache Berechnung der Spannungen und Verformungen zum Zeitpunkt $t = 0$ als auch der Änderungen von Spannungen und Verformungen bis zum Zeitpunkt $t = t$ möglich. An dieser Stelle müssen wir uns darauf beschränken, die Änderungen der Stahlzugkraft, der Betonrandspannung, der Krümmung und der Nulllinienlage in einem gegebenen Querschnitt zu ermitteln. Mit den Krümmungsänderungen in den einzelnen Querschnitten wären Verformungen infolge Kriechen - wie in der Einführung besprochen - zu ermitteln.

Beispiel:

Gegeben sei ein Querschnitt entsprechend Abb. 5.

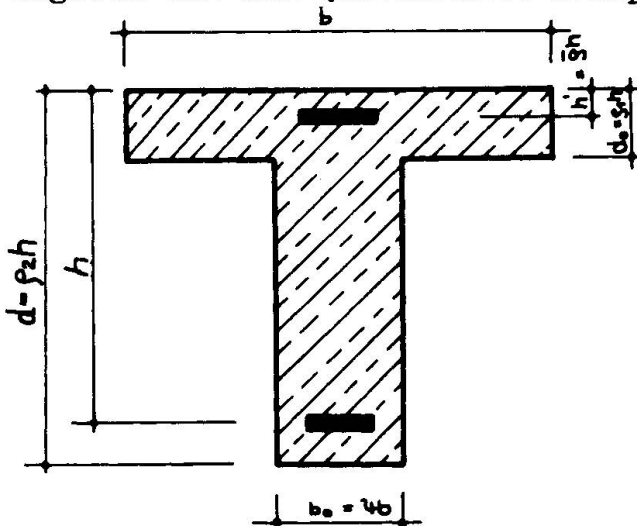


Abb. 5

$$\begin{aligned}
 b &= 1,0 \text{ m} & h &= 1,0 \text{ m} \\
 \psi &= 0,20 & \rho_1 &= 0,25 \\
 \bar{p} &= 0,9 \\
 F &= 76 \text{ cm}^2 \\
 (56 \text{ cm}^2 \text{ schlaaffe Bewehrung} \\
 20 \text{ cm}^2 \text{ vorgesp. Bewehrung}) \\
 \bar{F}_z &= 20 \text{ cm}^2 \\
 E_b &= 300 \text{ Mp/cm}^2 \\
 E_z &= 2100 \text{ Mp/cm}^2 \\
 \varphi &= 3,0 & n_z \mu_z &= 0,053 \\
 M &= 165 \text{ Mpm} & N_{zv} &= 107 \text{ Mp}
 \end{aligned}$$

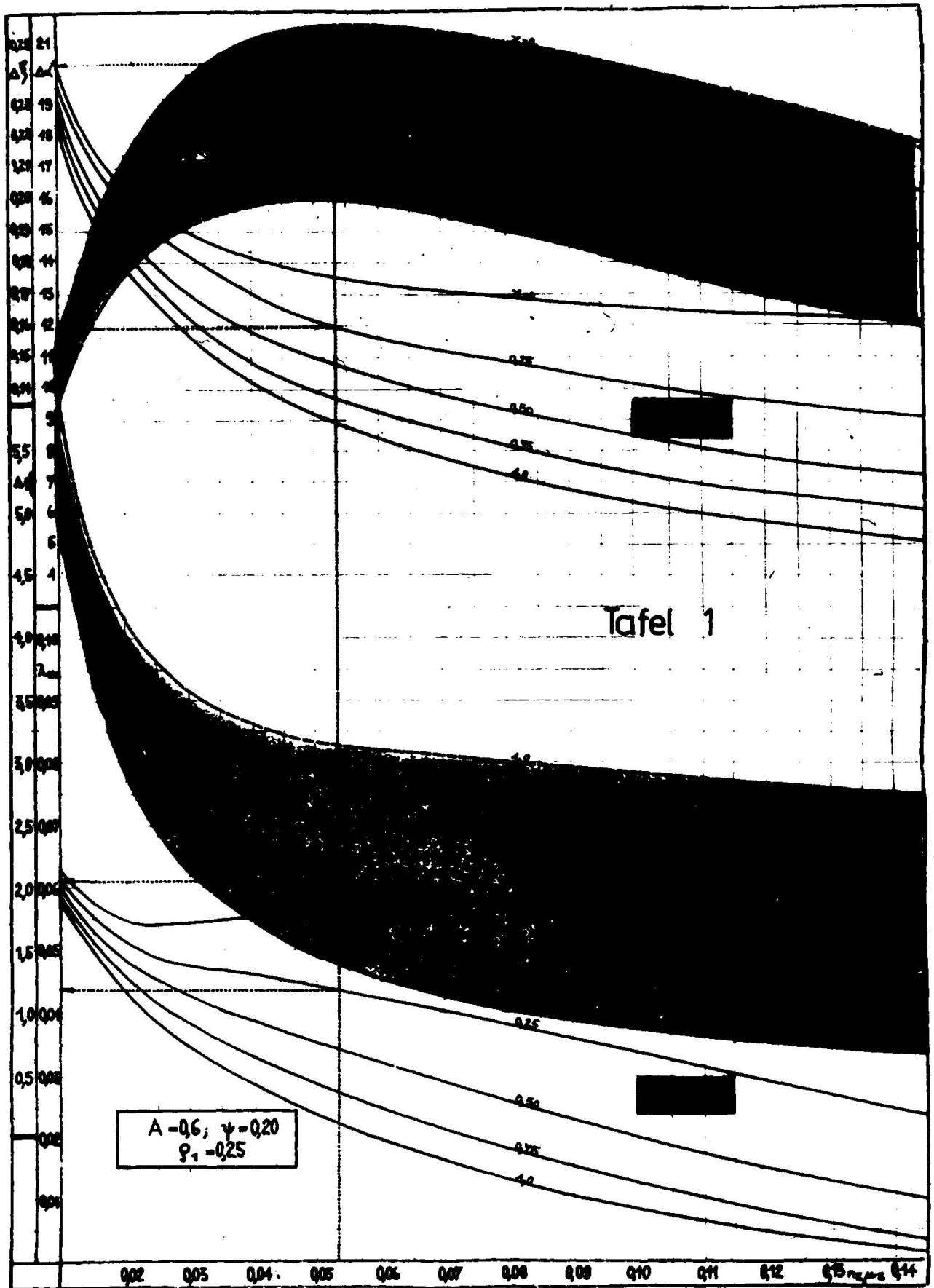
Die Berechnung ergibt für den Zeitpunkt $t = 0$:

$$\begin{aligned}
 N_{b0} &= -178 \text{ Mp} & A &= 0,6 & N_{z0} &= 188 \text{ Mp} & \bar{N}_{z0} &= -10 \text{ Mp} \\
 \max \sigma_{b0} &= 0,10 \text{ Mp/cm}^2 & \xi_0 &= 0,40 & \alpha_0 &= 0,833 \cdot 10^{-3}
 \end{aligned}$$

Infolge Kriechen ergeben sich aus Tafel 1* folgende Werte:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{Nz} &= 0,0435 & \Delta \bar{\Phi}_1 &= -2,05 \\
 \Delta \xi &= 0,243 & \Delta \alpha^+ &= 11,9
 \end{aligned}$$

* diese gilt für die Endkriechzahl $\varphi_{\infty} = 3,0$



und damit die Änderung der Stahlzugkraft

$$N_{zt} = N_{zo} \cdot \lambda_{Nz} = 8,2 \text{ Mp}$$

Änderung der Betonrandspannung

$$\Delta \max \sigma_b = - \frac{M}{bh^2} \Delta \bar{\Phi}_1 = 0,033 \text{ Mp/cm}^2$$

Änderung der Nulllinienlage

$$\Delta \xi = 0,243$$

Änderung der bezogenen Krümmung im betrachteten Querschnitt

$$\Delta \alpha = - \frac{N_{bo}}{E_b bh} \Delta \alpha^+ = 0,705 \cdot 10^{-3}$$

Literaturverzeichnis

- /1/ Rabich, R. Die Formänderungen des Stahlbetons
infolge Belastung
Bauplanung - Bautechnik, Berlin
10 (1956) 12, S. 497 - 503
- /2/ Elias, E. Einfluß des Kriechens auf einen gebogenen
Stahlbeton-Rechteckbalken im Stadium II
Der Bauingenieur, 36 (1961) 3, S. 93 - 96
- /3/ Wippel, H. Der Einfluß des Kriechens auf Formänderung,
Spannungsverteilung und Bruchlast des Stahl-
betonbalkens im Stadium II
Österreichische Ingenieurzeitschrift,
6 (1963) 4, S. 118 - 124
- /4/ Mayer, H. Die Berechnung der Durchbiegung
von Stahlbetonbauteilen
DASTb. H.194, Berlin 1967
- /5/ Hampe, E. - Köppler, H. Kriechen und Schwinden bei Querschnitten
mit gerissener Betonzugzone
Handbibliothek Bauwesen, Heft 6
VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1967
- /6/ Rabich, R. Beitrag zur Berechnung der Formänderungen
von Stahlbetonbauteilen unter Berücksich-
tigung der Rißbildung
Bauplanung - Bautechnik, Berlin,
23 (1969) 4/5, S. 184 - 187 u. 234 - 236

5. Zusammenfassung

Der Beitrag ist ein Auszug aus einer noch unveröffentlichten Arbeit über die Berechnung des Einflusses von Kriechen und Schwinden auf die Spannungsverteilung und die Verformungen in Tragwerken mit gerissener bzw. ungerissener plastifizierter Betonzugzone. Dort bereitgestellte Rechenhilfsmittel ermöglichen eine wesentliche Verminderung des sonst sehr großen Rechenaufwandes.

Summary

The paper summarizes the results of an unpublished study of the effects of creep and shrinkage on deformations and on the internal stress distribution in cracked and uncracked reinforced concrete structures. Detailed calculations are considerably simplified by previously prepared design aids.

Résumé

La contribution est l'extrait d'un travail encore non-publié traitant du calcul de l'influence du fluage et du retrait sur la répartition des tensions et des déformations dans les ouvrages avec, dans le domaine plastique, la zone tendue de béton relativement fissurée et non fissurée. Là, les procédés de calcul, mis à disposition, permettent une diminution essentielle du travail qui, dans le cas contraire, serait très important.

Méthode pratique d'analyse des effets de la pression d'eau, de la température, du fluage et du retrait sur un barrage — Application au barrage à voûtes multiples de Calacuccia

Praktische Berechnung der Wasserdruck-, Temperatur-, Kriech- und Schwindwirkung auf eine Staumauer — Anwendung auf die mehrböigige Staumauer von Calacuccia

Practical Calculation of the Effects of Water Pressure, Temperature, Creep and Shrinkage on a Dam Wall-Application to the Multiple Arch Dam of Calacuccia

Y. LE MAY

Ingénieur à la Direction de l'Équipement
d'Électricité de France
Paris

1. Caractéristiques principales du barrage

Le barrage de Calacuccia, réalisé en Corse par Electricité de France, est du type "à contreforts et voûtes multiples" (fig. 16). Sa hauteur maximale au-dessus du terrain naturel est de 72 m, sa longueur en crête de 240 m. L'ouvrage comprend 4 voûtes, de 50 m de portée, dont les sections horizontales sont circulaires (rayon du cercle amont = 26,75 m); l'épaisseur des voûtes varie de 1,62 m en crête à 4,30 m au pied. Ces voûtes s'appuient sur des contreforts de 5,50 m d'épaisseur, dont le fruit amont est de 0,7 et le fruit aval de 0,6. Ces contreforts sont découpés en plots dont les joints, parallèles au parement aval et munis de crémaillères, ont été injectés.

Le rocher de fondation est constitué d'un granite, quelque peu altéré en surface, mais de très bonne qualité en profondeur. Les contreforts sont fondés sur ce granite sain. Les fouilles des voûtes ont été moins profondes afin que ces dernières puissent s'adapter plus facilement au rocher plus souple et un peu plus fissuré que l'on trouve au-dessus du rocher de fondation des contreforts.

Les bétons de l'ouvrage ont été dosés à 275 kg de ciment Sixel 325 (ciment CPA 400 : 30% - cendres : 31,5% - laitier : 38,5%); les granulats sont constitués de granite concassé.

Le barrage a été mis en eau début Mars 1968.

2. Dispositif d'auscultation

Le dispositif d'auscultation du barrage comprend :

- des mesures topographiques d'intersection sur des repères scellés sur le parement aval des contreforts et en crête, en vue de la détermination des déplacements planimétriques.
- des mesures de nivellement topographique au pied des trois contreforts (contrôle des tassements de la fondation).

- des fils de fondation, sous la base des contreforts (contrôle des déplacements de la fondation).
- un pendule sur le contrefort central C_3 , donnant le déplacement de la crête par rapport à la base.
- des extensomètres "à corde vibrante" dans les contreforts et deux voûtes, cette auscultation portant principalement sur le contrefort central C_3 et la voûte 3-4 s'y appuyant.
- des sondes thermiques donnant les températures du béton à proximité de chaque groupe d'extensomètres.

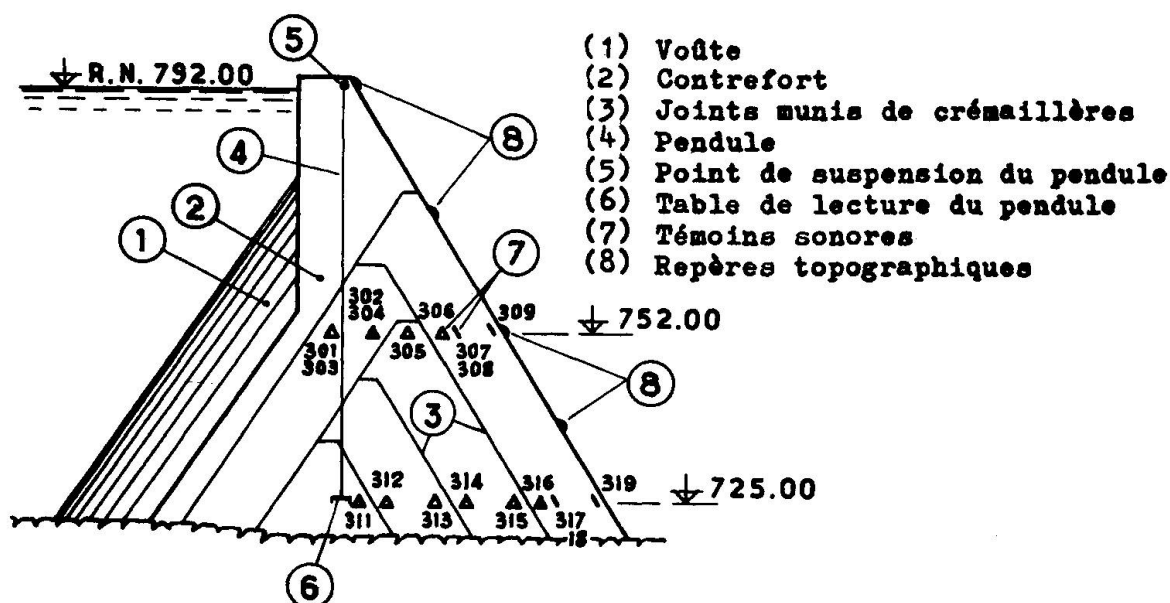


Fig. 1

La fig. 1 représente les appareils d'auscultation du contrefort central C_3 .

3. Analyse des effets de la pression d'eau, de la température, du fluage et du retrait

3.1. Méthode d'analyse

On peut estimer que de l'ensemble de l'information fournie par les mesures d'auscultation il y a lieu de tirer deux catégories de renseignements :

- l'une relative au comportement normal de l'ouvrage : en ce qui concerne les barrages en béton, il s'agit de connaître les phénomènes réversibles, de caractère élastique, renseignements intéressant en particulier les bureaux d'études qui chercheront par ce moyen à contrôler la validité de leurs méthodes et hypothèses de calculs.
- l'autre relative aux phénomènes accidentels ou évolutifs, dont la connaissance permet aux responsables de la surveillance du barrage de juger de la "santé" de la construction.

Une telle analyse nécessite la possession d'un grand nombre de mesures, l'expérience ayant montré que seule une exploitation statis-

tique des lectures des appareils conduit à des résultats d'analyse satisfaisants.

Les déformations d'un barrage en béton sont dues à de nombreuses causes, en particulier :

- . la charge d'eau
- . les variations de la température extérieure
- . le retrait (sur les ouvrages neufs), le gonflement du béton par imbibition sous l'effet de l'eau de la retenue
- . le fluage du béton sous charge
- . les phénomènes dits d'adaptation.

Les incidences de certains paramètres sont souvent du même ordre de grandeur et on peut déjà entrevoir les difficultés d'analyse qui se présentent lorsqu'ils interviennent simultanément : c'est ce qui se produit au cours d'un premier remplissage.

En fait, il est possible de ne considérer, pour l'analyse des déformations, que trois facteurs : la charge d'eau, la température du béton et le temps.

La considération du temps facilite certes l'analyse puisqu'il englobe les trois dernières causes énumérées ci-dessus, conduisant à des déformations permanentes.

A ces déformations permanentes s'ajoutent celles, de caractère réversible, dues à la charge d'eau et à la température.

Il y a lieu d'attirer l'attention sur le fait que le comportement d'un barrage au cours de sa première mise en charge sera le plus souvent mieux connu en associant aux mesures effectuées lors du premier remplissage celles concernant les vidanges et remplissages ultérieurs, au cours desquels les déformations irréversibles sont en général très faibles.

3.2. Résultats de l'analyse

On peut distinguer dans les variations du plan d'eau de Calacucia les périodes suivantes :

- premier remplissage : 4 Mars 1968 au 16 Août 1968
- vidange : 16 Août 1968 au 7 Novembre 1968
- retenue vide : 7 Novembre 1968 au 10 Février 1969
- deuxième remplissage : 10 Février 1969 au 25 Mars 1969
- retenue pleine : 25 Mars 1969 au 30 Juin 1969
- deuxième vidange : 30 Juin 1969 au 10 Octobre 1969
- retenue vide : depuis le 10 Octobre 1969 (jusqu'à fin 1969)

L'analyse a porté sur les mesures d'auscultation effectuées au cours de ces diverses périodes.

3.2.1. Témoins sonores (mesures des déformations unitaires)

Nous présenterons ici les principaux résultats tirés de l'auscultation sonore du contrefort C₃ et de la voûte 3-4 qui s'y appuie. Avant analyse, les lectures des témoins sonores ont été corrigés de l'effet thermo-différentiel témoin-béton (2 μ /m par degré).

3.2.1.1. Voûte 3-4

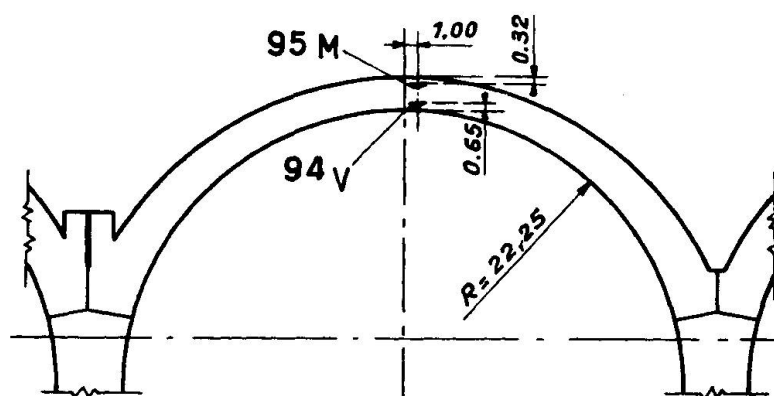


Fig. 2

Au cours du premier remplissage sont apparus sur certains témoins sonores des allongements très importants, sans fissuration du béton. Une étude a été entreprise afin d'en trouver une explication. Nous donnons ici les résultats de l'analyse faite sur les triangles d'extensomètres 95 M (amont) et 94 V (aval), situés en clé de la voûte 3-4, au niveau 760. (fig. 2)

Les deux périodes "barrage vide" ont permis d'établir les lois de corrections thermiques des divers témoins constituant les 2 groupes, le paramètre thermique adopté étant la température du béton à proximité du groupe (exemple fig. 3). On trouve, pour une augmentation de température de 1° , des raccourcissements variant de -4 à $-7,5 \cdot 10^{-6}$ (soit pour une augmentation maximale annuelle de température de 16° , une variation de $-64 \cdot 10^{-6}$ à $-120 \cdot 10^{-6}$). Les déformations unitaires d'origine thermique sont donc loin d'être négligeables : à titre de comparaison, le remplissage total maximal donne une déformation de $-170 \cdot 10^{-6}$ sur le témoin horizontal amont de clé (déformation maximale due à l'effet d'arc). Cet effet thermique comprend pour une grande part "l'effet de peau" ou "effet de gradient".

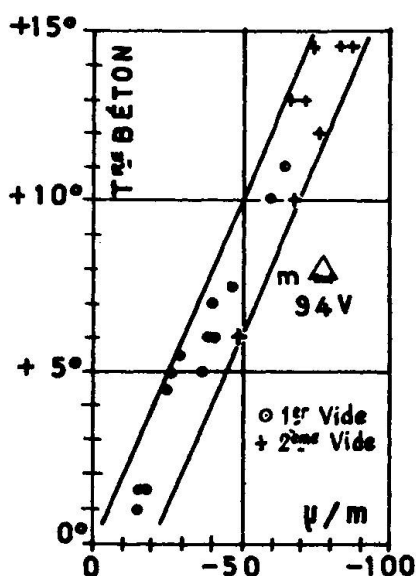


Fig. 3

A partir de ces lois, les déformations unitaires enregistrées par chaque témoin ont été corrigées de l'effet thermique et reportées sur des graphiques en fonction de la charge d'eau. Les figures 4 et 5 représentent, à titre d'exemple, deux de ces graphiques : l'un - fig. 4 - concerne le témoin p, incliné sur l'horizontale, du groupe amont 95 M, l'autre - fig. 5 - le témoin p du groupe aval 94 V.

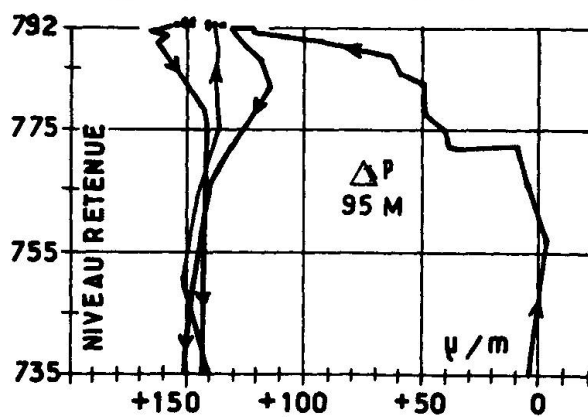


Fig. 4

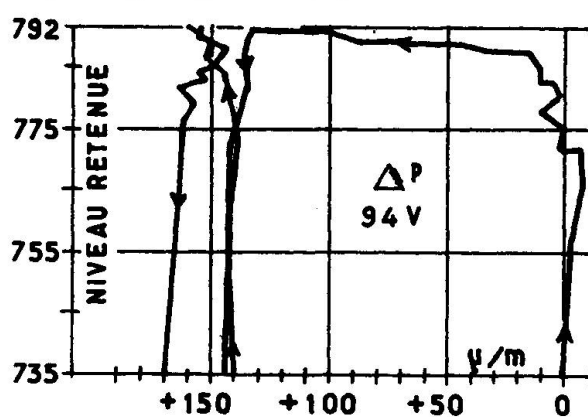


Fig. 5

On constate que dès que le plan d'eau atteint la cote du groupe - soit 760 - le témoin côté amont s'allonge. Cet effet apparaît également sur le témoin aval, mais un peu après celui décelé à l'amont.

Les déformations correspondant au deuxième remplissage et à la deuxième vidange sont à peu près réversibles - et d'ailleurs très faibles sur les témoins inclinés.

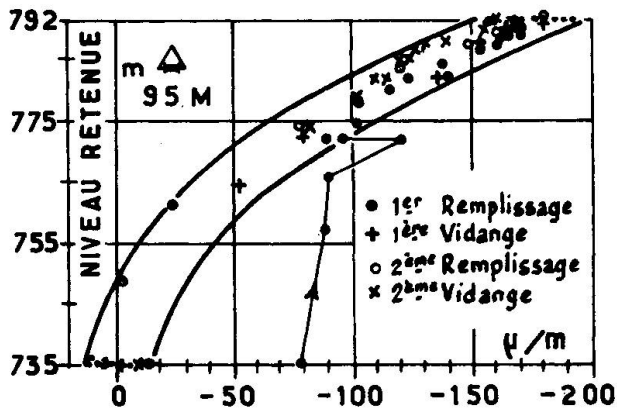


Fig. 6

A partir des lois hydrostatiques et thermiques, les déformations des témoins ont été corrigées des effets "charge d'eau" et "température". On obtient ainsi les déformations permanentes enregistrées par les T.S. (fig. 7).

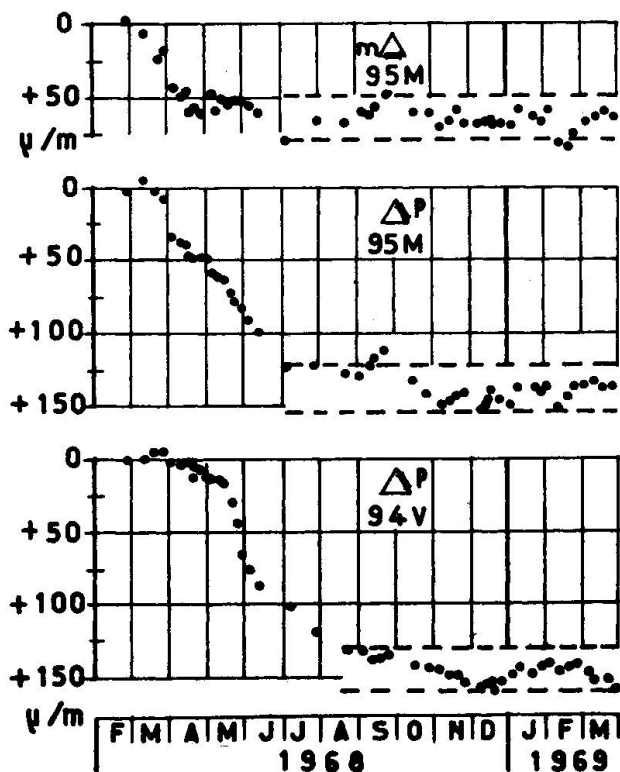


Fig. 7

Les nombreuses traces humides observées sur le parement aval des voûtes incitent à penser que ces allongements sont dûs au gonflement du

Par contre, les témoins horizontaux m qui enregistrent essentiellement l'effet d'arc ont des déformations plus importantes et leurs lois hydrostatiques apparaissent nettement (exemple fig. 6).

Sur le groupe amont, les allongements prennent naissance dès que le plan d'eau atteint la cote de situation du triangle de T;S. A partir de début Juillet 68 - cote du plan d'eau voisine de la cote de retenue normale - l'évolution est terminée. Les allongements ont atteint + 70 μ /m sur le témoin horizontal m et + 140 μ /m sur le témoin p. L'allongement moins important enregistré par le témoin horizontal peut s'expliquer par un "fluage" du béton à la compression lors de la mise en charge.

Sur le groupe aval, l'allongement commence à se manifester un mois environ après celui mis en évidence à l'amont et est du même ordre de grandeur (+ 140 μ /m sur le témoin p).

Ces allongements restent acquis après le premier remplissage.

béton par imbibition. A noter que les mesures de retrait et de gonflement effectuées en laboratoire, sur le béton de l'ouvrage, ont donné pour l'éprouvette conservée en atmosphère conditionnée (20°C - 50% d'humidité relative) : un retrait de $-150\ \mu/\text{m}$ à 12 mois et un gonflement de $+290\ \mu/\text{m}$, par rapport à la valeur du retrait, après une immersion de 5 mois (dont $+240\ \mu/\text{m}$ 4 jours après l'immersion). Ce gonflement très notable peut être attribué au ciment et aux cendres calcaïques qu'il contient.

Bien entendu, ces allongements n'équivalent pas à des contraintes mécaniques d'extension (qui seraient alors de l'ordre de $140 \cdot 10^{-6} \times 300.000$ bars = 42 bars et auraient entraîné des fissurations). Lorsque l'allongement dû au gonflement a pu se faire librement (direction verticale), il n'y a pas eu pour ainsi dire de contrainte mécanique. Là où il n'a pu se faire en toute liberté (comme dans les arcs) des contraintes mécaniques de compression ont dû prendre naissance.

3.2.1.2. Contreforts C_3

Deux niveaux du contrefort central C_3 sont auscultés par des témoins sonores (fig. 1) : les niveaux 752 et 725.

3.2.1.2.1. Niveau 752

Certains groupes de T.S. ont été placés à mi-épaisseur du contrefort, d'autres à 50 cm du parement.

. effet thermique

Les périodes "barrage vide" et "barrage plein" (après deuxième remplissage) ont permis d'analyser l'effet thermique sur chaque témoin.

Connaissant les températures du béton dans l'axe et côté parement, il a été possible de séparer l'effet "moyen" (résultant d'une variation identique de la température dans toute l'épaisseur du contrefort) et l'effet de "gradient" (résultant d'une variation différente de la température entre "cœur" et parement).

L'effet "moyen" (fig. 8) est en général très faible : de l'ordre de -2 à $-4\ \mu/\text{m}$ pour une augmentation de 1°C de la température. Par contre, l'effet de "gradient" (fig. 9) est plus important : de l'ordre de -7 à $-8\ \mu/\text{m}$ pour une élévation de la température de 1°C du "cœur" par rapport au parement.

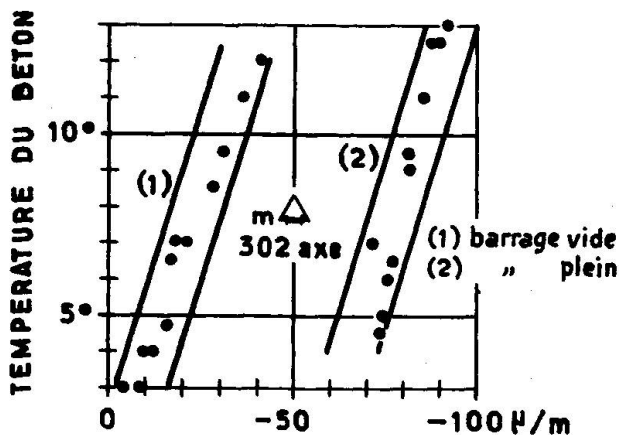


Fig. 8

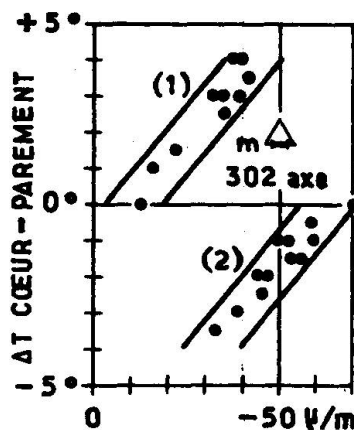


Fig. 9

• effet hydrostatique

Les lectures des témoins sonores ont été corrigées de l'effet thermique à partir des lois précitées et les déformations principales résultant de la charge d'eau ont été calculées pour chaque groupe. Les figures 10 et 11 représentent les graphiques tracés dans les "nuages de points", pour les groupes 301 et 302 situés à mi-épaisseur du contrefort.

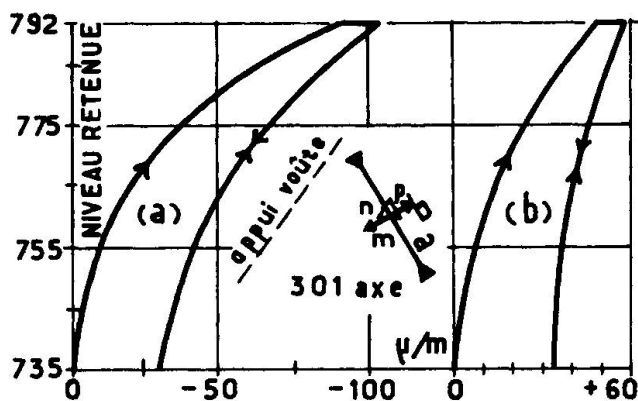


Fig. 10

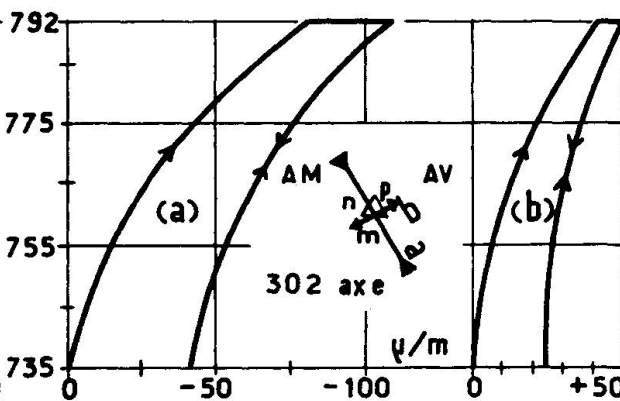


Fig. 11

Pour le groupe 301, situé près des appuis de la voûte, on constate une irréversibilité dans les déformations principales (a) et (b), lors du premier remplissage :

- allongement irréversible de $+ 33 \mu/m$ sur (b), la déformation réversible lors des vidanges et remplissage ultérieurs étant de $+ 25 \mu/m$. Cette déformation irréversible, parallèle à la génératrice des voûtes, doit résulter de l'allongement des voûtes dont il a été question en 3.2.1.1.

- raccourcissement irréversible de $- 30 \mu/m$ sur (a), la déformation réversible étant de l'ordre de $- 75 \mu/m$. La direction de la déformation (a) est celle des forces transmises par la voûte 3-4 au contrefort C_3 . Un certain "fluage" à la compression se manifeste donc dans le béton du contrefort. La contrainte élastique de compression peut être estimée à -24 bars environ, avec $E = 330.000$ bars et σ (coefficient de Poisson) $= 0,20$.

Pour le groupe 302, on constate également une déformation permanente de $- 40 \mu/m$, acquise sur (a) lors du premier remplissage, la déformation réversible étant de $- 70 \mu/m$ (valeurs qui se rapprochent de celles enregistrées sur le groupe 301).

Détermination du module d'élasticité moyen du béton

Les contraintes principales, à E près, ont été calculées en considérant les déformations hydrostatiques réversibles des témoins sonores. La figure 12 représente celles données par les témoins situés à mi-épaisseur du contrefort. Sur la section horizontale au niveau 752, la poussée hydrostatique au-dessus de ce niveau exerce une composante horizontale qui est la somme des efforts de cisaillement et une composante verticale qui est la somme des efforts normaux le long de cette section.

Connaissant ces composantes par le calcul et les contraintes nor-

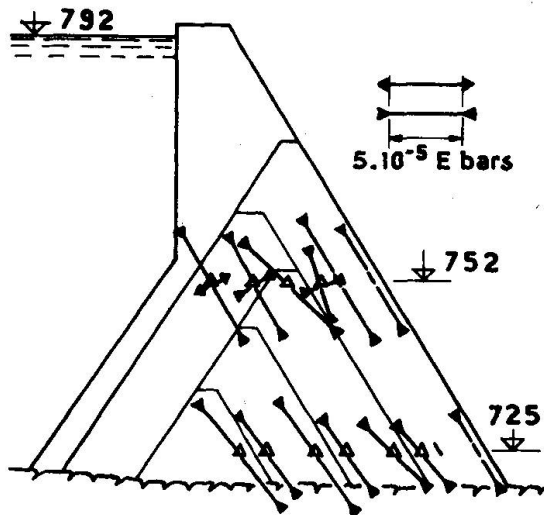


Fig. 12

males et de cisaillement mesurées à E près, on peut en déduire la valeur du module moyen d'élasticité E du béton du contrefort. On obtient :

- . à partir des contraintes normales, la valeur de 340.000 bars,
- . à partir des contraintes de cisaillement, la valeur de 330.000 bars.

Ce module d'élasticité, après la période du premier remplissage, apparaît donc élevé.

3.2.1.2.2. Niveau 725 (base du contrefort C₃)

Les groupes de témoins sonores de ce niveau sont situés à mi-épaisseur du contrefort.

. effet thermique

La même méthode que celle mentionnée en 3.2.1.2.1. a été utilisée pour l'analyse de l'effet thermique. Il a été admis que la température du parement au niveau 725 était égale à celle mesurée au niveau 752.

On trouve un effet de "gradient" de l'ordre de 7 à 8 μ/m pour une variation de température de 1° C du "coeur" par rapport au parement.

En ce qui concerne l'effet "moyen", il est en général faible pour les témoins inclinés (de - 2 à - 4 μ/m pour une augmentation de 1° C). Par contre, il atteint - 8 $\mu/m/$ degré pour les témoins horizontaux ; on peut penser que, dans la direction horizontale, la base du contrefort ne peut se dilater librement par suite de son encastrement dans le rocher, ce qui entraîne des compressions.

. effet hydrostatique

Les lois thermiques ont permis de corriger les déformations des témoins sonores de l'effet thermique et d'établir les graphiques des déformations en fonction de la charge d'eau.

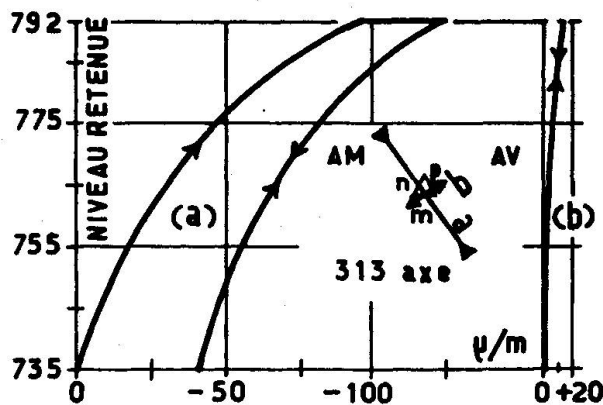


Fig. 13

La figure 13 qui représente les déformations principales moyennes obtenues sur le groupe 313 laisse apparaître, comme au niveau 752, un "fluage" du béton à la compression lors du premier remplissage : la déformation permanente est de - 40 μ/m pour une déformation réversible de l'ordre de - 85 μ/m (déformation principale (a)). Ce fluage apparaît sur toute la base du contrefort.

La déformation principale (b) est très faible (cela est vrai pour tous les groupes).

Les contraintes principales à mi-épaisseur du contrefort, au niveau 725, ont été déterminées à partir des déformations réversibles résultant d'un remplissage total (fig. 12). On note essentiellement des contraintes principales de première espèce de compression, les contraintes de deuxième espèce étant très faibles et pouvant être négligées. Avec $E = 330.000$ bars et $\sigma = 0,20$, la compression maximale sur la base est de -28 bars.

La direction des contraintes de compression est très satisfaisante. Les joints semblent introduire une certaine discontinuité, la contrainte étant systématiquement plus forte à l'amont du joint qu'à l'aval.

3.2.2. Pendule

Le pendule étant accroché au sommet du contrefort C_3 (table de lecture au pied), on peut penser que les déplacements d'origine thermique de ce contrefort (déplacement de sa crête par rapport à sa base) sont liés aux températures de l'aval et de l'amont du contrefort.

Les périodes "barrage vide" et "barrage plein" (après le deuxième remplissage) ont permis d'établir la loi thermique des déplacements réversibles du pendule (Fig. 14).

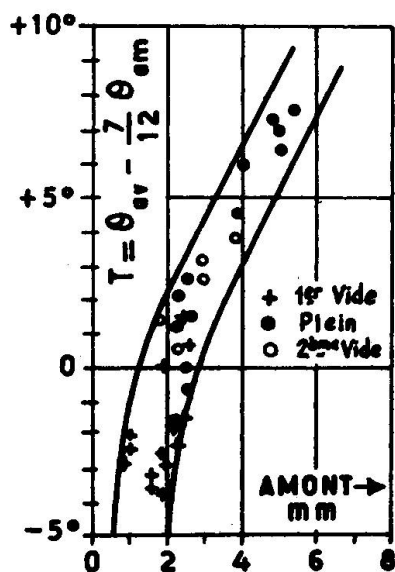


Fig. 14

microfissures qui affectent toujours les parements aval des barrages : l'effet de dilatation se fait plus sentir aux températures élevées (joints et fissures fermés) qu'aux basses températures (où ils sont ouverts).

A partir de cette loi, les lectures du pendule ont été corrigées de l'effet thermique; le graphique de la fig. 15 donne les déplacements, après correction, en fonction de la cote du plan d'eau.

Les déplacements lors des deux vidanges représentent la loi des déplacements réversibles du pendule sous l'effet de la charge d'eau : l'amplitude de ces déplacements est de 4 m/m environ.

On note une irréversibilité très nette des déplacements lors de la première mise en eau et de la première vidange.

Le paramètre thermique qui convient le mieux est :

$$T = \theta_{av} - \frac{7}{12} \theta_{am}$$

θ_{av} : température de la partie aval du contrefort.

θ_{am} : température de la partie amont du contrefort.

Le coefficient $\frac{7}{12}$ tient compte du fait que le parement amont intervient moins que le parement aval, en raison même de la forme du contrefort.

Les déplacements sont d'autant plus grands que la température du parement aval est plus élevée, ce qui peut être dû à la présence de joints et de quelques

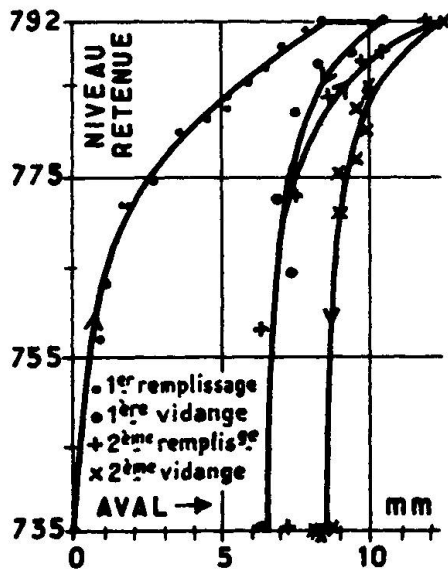


Fig. 15

3.2.3. Mesures topographiques

Les mesures topographiques n'ont pas été suffisamment nombreuses pour permettre l'établissement des lois hydrostatiques et thermiques des déplacements réversibles de l'ouvrage. Elles constituent néanmoins un excellent moyen de contrôle et donnent des renseignements intéressants sur le comportement de l'ouvrage.

3.2.3.1. Planimétrie

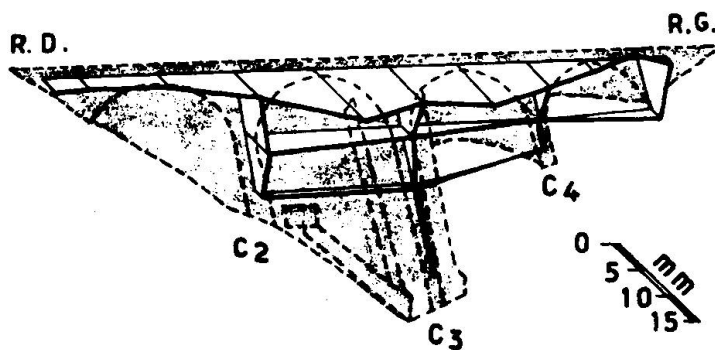


Fig. 16

plissage doivent résulter essentiellement de l'effet du gonflement des voûtes et du parement amont du contrefort ainsi qu'il a été dit à propos du pendule. En crête du contrefort C_3 , on a mesuré un déplacement permanent de 6 m/m vers l'aval, qui est à rapprocher des 6,5 m/m donnés par le pendule.

Le déplacement réversible de la crête du barrage, évalué à partir des mesures topographiques, est de l'ordre de 5 m/m environ sous l'effet d'un remplissage total (le pendule donne 4 m/m).

3.2.3.2. Nivellement

Les déplacements irréversibles des barrages ayant souvent pour origine les déformations de leur fondation, il était intéressant de complé-

La déformation permanente de 6,5 m/m environ vers l'aval doit résulter essentiellement du gonflement des voûtes et du parement amont du contrefort lors du premier remplissage, dont l'effet est identique à celui d'un réchauffement de la partie amont du contrefort. Une légère part de cette déformation peut être également attribuée à un "fluage" du béton à la compression (voir chapitre 3.2.1) et à une légère rotation irréversible de la fondation du contrefort (voir chapitre 3.2.3.).

La comparaison des deux mesures topographiques effectuées, retenue vide, avant le premier remplissage (le 29/2/1968) et après le premier remplissage (le 5/2/1969), dans des conditions de température identiques, met en évidence des déformations irréversibles, vers l'aval, relativement importante en crête de l'ouvrage - fig. 16 -. Ces déformations irréversibles acquises lors du premier rem-

ter les mesures planimétriques sur le barrage proprement dit par des mesures de nivellement au pied des contreforts.

La figure 17 donne les tassements de la base du contrefort C₃ (cote 732) mesurés entre le 29/2/1968 et le 5/2/1969, le barrage étant vide, et représente la rotation irréversible de la fondation lors du premier remplissage. Cette rotation est très faible (1 m/m environ de tassement au pied aval sur une base de 60 m). Il est vrai que le contrefort C₃ est fondé sur un granite de très bonne qualité, peu déformable. Les tassements réversibles de la fondation, pour un remplissage total, sont également de l'ordre du m/m.

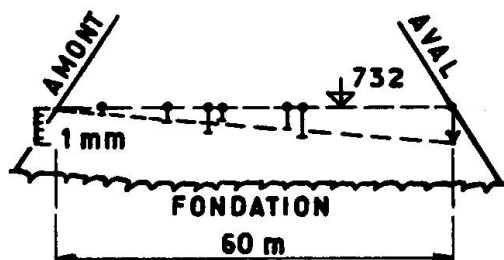


Fig. 17

La rotation irréversible de la fondation ne donne qu'un millimètre de déplacement vers l'aval en crête du contrefort C₃, ce qui laisse subsister 5 m/m de déformation irréversible, en ce point, résultant de la déformation propre du contrefort.

4. Conclusions

Ainsi que le montre la présente communication, un barrage en béton est le siège de déformations continues, complexes et, le plus souvent, de faible amplitude. Les déformations sont dues à de nombreuses causes (charge d'eau; température; retrait, gonflement et fluage du béton; phénomènes dits d'adaptation). Seule une analyse fine, portant sur un assez grand nombre de mesures, permettra de connaître, de façon aussi complète que possible, le comportement de l'ouvrage pris dans son ensemble - barrage et fondation - ou dans ses parties.

C'est un fait bien connu que les théories applicables aux barrages et à leurs massifs de fondation reposent sur des hypothèses et simplifications destinées notamment à rendre possible leur étude mathématique. Aussi apparaît-il souhaitable de réserver à l'expérience, à l'observation, le droit de vérifier la théorie, afin d'en tirer des enseignements pour les études futures. C'est l'un des objectifs de l'auscultation des barrages, à côté de celui concernant le contrôle de leur sécurité.

RESUME

L'analyse des déformations d'un barrage en béton, mesurées pendant les premières années d'exploitation, permet, par une méthode pratique, de faire la part des effets réversibles (charge d'eau, température) et des effets irréversibles (retrait, gonflement, fluage du béton). La communication expose cette méthode d'analyse et présente les principaux résultats tirés de l'auscultation du barrage, à contreforts et voûtes multiples, de Calacuccia (hauteur maximale au-dessus du lit : 72 m - longueur en crête : 240 m - entr'axe des contreforts : 50 m).

ZUSAMMENFASSUNG

Die während der ersten Betriebsjahre unternommenen Messungen erlauben, mittels einer praktischen Methode die umkehrbaren Wirkungen (Wasserdruck, Temperatur) sowie die nichtumkehrbaren (Schwinden, Blähen, Kriechen des Betons) zu bestimmen. Dieser Beitrag legt dieses Verfahren dar und zeigt die wichtigsten durch Abhorchen gewonnenen Ergebnisse der mehrbölgigen und mit Strebepfeilern versehenen Staumauer von Calacuccia (maximale Höhe vom Lager: 72 m, Kronenlänge: 240 m, Abstand der Strebepfeiler: 50 m).

SUMMARY

The paper presents a practical method of calculation and also the most important experimental results obtained on the multiple arch, buttress dam of Calacuccia. (Maximum height: 72 m., crest length: 240 m., buttress spacing: 50 m.) The measurements made during the first years of use, together with the proposed calculation method, allow the reversible effects (water pressure, temperature) and also the non-reversible effects (shrinkage, swelling, creep) to be calculated.

Anwendung der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers bei der Ermittlung der Stahl- und Betonspannungen in doppelt bewehrten Stahlbetonquerschnitten

Elastic-Creeping Body Theory Application for the Calculation of Steel and Concrete Stresses in Concrete Cross Sections with Double Reinforcement

Application de la théorie des corps sujets au fluage élastique pour déterminer les tensions de l'acier et du béton dans des sections de béton doublement armées

WOLFGANG KRÜGER

Dipl.-Ing.

Institut für Stahlbeton Dresden

DDR

1. Einleitung

Das durch Langzeitbelastungen hervorgerufene Kriechen des Betons führt nicht nur bei vorgespannten, sondern auch bei gewöhnlichen Stahlbetonkonstruktionen zu einer Vergrößerung der anfänglichen Verformungen und zu Spannungsumverteilungen zwischen dem Beton und der Bewehrung. Diese Tatsache sollte zur Erlangung richtiger Ergebnisse in einer Reihe von Fällen (z.B. bei Stabilitätsuntersuchungen, bei der Ermittlung der Durchbiegungen und der Rißsicherheit einzelner Konstruktionsteile oder der Gesamtkonstruktion) berücksichtigt werden.

Der Einfluß des Betonkriechens auf die Veränderung des Spannungszustandes von doppelt bewehrten Stahlbetonelementen soll nachfolgend unter Anwendung der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers näher untersucht werden.

Den Untersuchungen wird ein Rechteckquerschnitt zugrunde gelegt. Die Belastung besteht aus einer außermittigen Druckkraft mit großem Ausschlag.

Das Wesen des gewählten Berechnungsverfahrens besteht darin, durch Anwendung des erweiterten Mittelwertsatzes der Integralrechnung die bei der mathematischen Erfassung des obengenannten Problems auftretenden Integralgleichungen zurückzuführen auf eine algebraische Gleichung 3. Grades, deren Lösung keine Schwierigkeiten bereitet. Die Berechnung wird also mit Hilfe eines Näherungsverfahrens, dessen Genauigkeit durch geeignete Wahl der entsprechenden Zeitintervalle beliebig festgelegt werden kann, durchgeführt, wobei die Teilansätze der genauen Theorie des elastisch-kriechenden Körpers entsprechen.

Die Grundlage der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers, bei der im Gegensatz zu anderen Kriechtheorien in Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen die Verformungen nach Wegnahme der Dauerlast teilweise reversibel sind, bilden folgende Annahme:

- a) der Beton wird als isotropes und homogenes Material angesehen, in dem bei Fehlen einer äußeren Belastung und ohne Änderung der Temperatur und Feuchtigkeit keine Anfangsspannungen vorhanden sind;
- b) zwischen den elastischen Verformungen und den Spannungen des Betons besteht eine lineare Abhängigkeit;
- c) zwischen den Kriechverformungen und den Spannungen des Betons besteht ein linearer Zusammenhang (lineares Kriechen);
- d) die absoluten Verformungsgrößen (sowohl die elastischen als auch die Kriechverformungen) sind unabhängig vom Vorzeichen der Spannungen;
- e) für die Kriechverformungen gilt das Überlagerungsprinzip, d.h. die vollständige Kriechverformung bei veränderlicher Spannung kann gefunden werden als Summe der Kriechverformungen, die durch den entsprechenden Spannungszuwachs entstehen, wobei vorausgesetzt wird, daß die Größe der Kriechverformung, die durch den Spannungszuwachs hervorgerufen wird, nur von der Größe und Wirkungskdauer dieses Zuwachses abhängt und von vorangegangenen und nachfolgenden Spannungsänderungen nicht beeinflusst wird.

2. Ansätze der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers

Beim einachsigen Spannungszustand eines unter Dauerlast stehenden Betonkörpers läßt sich die relative Gesamtverformung $\varepsilon_b(t)$ einer Betonfaser zum Zeitpunkt t bei Anwendung der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers aus der nachfolgenden Beziehung ermitteln [1]

$$\varepsilon_b(t) = \sigma_b(t_0) \left[\frac{1}{E_b(t_0)} + C(t, t_0) \right] + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{d\sigma_b(\tau)}{d\tau} \left[\frac{1}{E_b(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \quad (1)$$

Hierin bedeuten:

t_0 = Zeitpunkt der Lastaufbringung

t = betrachteter Zeitpunkt (Untersuchungszeitpunkt)

$\sigma_b(t)$ = Betonspannung zum Zeitpunkt t

$E_b(t_0)$ = Elastizitätsmodul des Betons zum Zeitpunkt der Lasteintragung

$C(t, t_0)$ = Kriechmaß des Betons zur Zeit t bei einer Lasteintragung zum Zeitpunkt t_0 .

Diese Kriechgleichung läßt sich durch partielle Integration umformen in

$$\varepsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E_b(t)} - \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma_b(\tau) \cdot \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{E_b(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \quad (2)$$

Führt man den Elastizitätsmodul des Betons als konstante Größe ein und berücksichtigt, daß zwischen dem Kriechmaß $C(t, t_0)$ und der Kriechzahl $\varphi(t, t_0)$ die Beziehung

$$\varphi(t, t_0) = C(t, t_0) \cdot E_b \quad (3)$$

besteht, so läßt sich Gleichung (2) wie folgt weiter vereinfachen

$$\varepsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E_b} - \frac{1}{E_b} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma_b(\tau) \cdot \frac{d}{d\tau} [1 + \varphi(t, \tau)] d\tau \quad (4)$$

In den Formeln (1), (2) und (4) wird bei der Ermittlung der Gesamtverformungen der Kriechanteil jeweils durch das Kriechmaß $C(t, \tau)$ bzw. die Kriechzahl $\varphi(t, \tau)$ dargestellt. Das Kriechmaß und die Kriechzahl sind Funktionen der Zeit. Größe und zeitlicher Verlauf dieser Funktionen sind u.a. abhängig von den Betoneigenschaften, der Temperatur und Feuchtigkeit der das Konstruktionselement umgebenden Luft, dem Belastungsalter und den Querschnittsabmessungen des Elementes. Die Kriechzahl kann in allgemeiner Form folgendermaßen dargestellt werden [1]:

$$\varphi(t, \tau) = \lambda(\tau) \cdot f(t, \tau) \quad (5)$$

In Formel (5) werden durch $\lambda(\tau)$ der Alterungsprozeß des Betons und durch $f(t, \tau)$ der zeitliche Verlauf der Kriechfunktion wiedergegeben. Beide Funktionen können nur auf experimentellem Wege ermittelt werden. Eine gute Übereinstimmung mit den versuchsmäßig bestimmten Kriechzahlen läßt sich erzielen, wenn man bei der theoretischen Ermittlung folgende Ausdrücke verwendet [2] [3]:

$$\lambda(\tau) = \varphi_{\infty}^m \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3(\tau) = \varphi_{\infty} \quad (6)$$

$$f(t, \tau) = \frac{(t - \tau)}{k_0 + (t - \tau)} \quad (7)$$

Hierin bedeuten:

- φ_{∞}^m – Endkriechzahl des Betons für Normalbedingungen (relat. Luftfeuchtigkeit 50 bis 60 %; kleinste Querschnittsabmessung 20 cm; Belastungsalter 28 Tage)
- k_1 – Korrekturfaktor, der den Einfluß der tatsächlichen Luftfeuchtigkeit berücksichtigt
- k_2 – Korrekturfaktor, der den Einfluß der tatsächlichen Querschnittsabmessungen des Elementes berücksichtigt
- $k_3(\tau)$ – Korrekturfaktor, der vom Belastungsalter τ des Betons abhängt
- k_0 – experimentell zu ermittelnde Konstante.

Für den Korrekturfaktor $k_3(\tau)$ kann man folgenden Ausdruck angeben [2]

$$k_3(\tau) = x_0 + \frac{x_1}{x_2 + \tau} \quad (8)$$

wobei x_0 , x_1 und x_2 auf dem Versuchswege zu bestimmende Konstanten sind.

Als Ergebnis der Auswertung einer Vielzahl von Versuchen [2] [4] wurden für die zur Festlegung der Kriechzahl benötigten Größen die in den Tabellen 1 bis 4 angegebenen Zahlenwerte gefunden, wobei in Tabelle 4 nur mittlere Werte wiedergegeben werden (weitere Angaben sind in [2] enthalten).

Tabelle 1: Werte φ_{∞}^m

Betonart	φ_{∞}^m
Gewöhnlicher Schwerbeton mit natürlicher Erhärtung	2,0
Gewöhnlicher Schwerbeton mit Dampfbehandlung	1,8
Feinkörniger (Sand-) Schwerbeton mit natürlicher Erhärtung	2,5
Feinkörniger erwärmter Schwerbeton für Rüttelwalzkonstruktionen	2,0
Leichtbeton mit natürlicher Erhärtung	2,5
Feinkörniger Leichtbeton mit natürlicher Erhärtung	2,5
Feinkörniger Leichtbeton mit Dampfbehandlung	2,0
Feinkörniger Zementbeton mit Autoklavbehandlung	1,8
Gewöhnlicher (dichter) Silikatbeton, Silikalzit	1,5
Schaumsilikat, Schaumsilikalzit, Gassilikatbeton	2,5

Tabelle 2: k_1 -Werte

Relative Luftfeuchtigkeit [%]	k_1
< 20	1,40
20 bis 49	1,30
50 bis 60	1,00
61 bis 75	0,85
> 75	0,70

Bei der Anwendung der Zahlenwerte nach Tabelle 2 und 3 ist folgendes zu beachten: Für Massivbauten, deren kleinste Querschnittsabmessung > 100 cm ist, und Betonkonstruktionen, die allseitig isoliert sind, kann unabhängig von den Abmessungen

$k_1 = 1,0$ gesetzt werden. Bei der Be-

rechnung von Dach- oder Deckenplatten, bei denen eine der Oberflächen durch die Dachhaut bzw. Fußbodenbeläge bedeckt ist, wird

Tabelle 3: k_2 -Werte

Kleinste Querschnittsabmessung cm	k_2	kleinste Querschnittsabmessung cm	k_2
< 5	1,60	30	0,90
5	1,50	40	0,80
7	1,30	50	0,75
10	1,15	60	0,70
15	1,05	80	0,55
20	1,00	100	0,50
25	0,95	> 100	0,40

k_2 für den doppelten

Wert der kleinsten

Querschnittsabmes-

sung bestimmt. Bei

allseitig wasser-

isolierten Elemen-

ten aus natürlich

erhärteten Betonen

ist unabhängig vom

kleinsten Quer-

schnittsmaß $k_2 = 0,40$

zu setzen. Für Sili-

katmaterialien kann

ohne Rücksicht auf das Belastungsalter der Wert $k_3 = 1,0$ angenommen werden. Die Zeit ist in Tagen einzusetzen.

Tabelle 4: Mittlere Werte der Konstanten α_0 , α_1 , α_2 und k_0

Erhärtingsregime	α_0	α_1	α_2	k_0
Betone mit natürlicher Erhärtung	0,37	25	13	22
Betone mit Dampfbehandlung	0,36	37	30	30

Die Angabe des Korrekturfaktors k_3 erfolgt nicht, wie bisher üblich, in Abhängigkeit von dem Verhältnis der bei Lasteintragung vorhandenen Würfelfestigkeit R_{vorh} zur Endfestigkeit R_{∞} , sondern unmittelbar als Funktion des Belastungsalters. Dies ge-

schieht auf Grund von Versuchsergebnissen [4], die bei der gewählten Bezugsbasis eine bessere Gesetzmäßigkeit erkennen lassen als bei Darstellung des Faktors k_3 in Abhängigkeit von R_{vorh}/R_{∞} . Ist bei der durchzuführenden Berechnung nur die Betonfestigkeit, nicht aber das Belastungsalter vorgegeben, so kann ohne Schwierigkeiten mit Hilfe hierfür geeigneter Kurven oder Tabellen das zu einer bestimmten Betonfestigkeit gehörende Alter des Betons ermittelt werden (z.B. nach [5]).

3. Ermittlung der Stahl- und Betonspannungen bei Wirkung exzentrischer Druckkräfte mit großem Ausschlag

3.1 Annahmen zur Spannungs- und Dehnungsverteilung

Die nachfolgenden Formeln werden für den Fall des linearen Kriechens abgeleitet. Die Abhängigkeit zwischen den Kriechverformungen und den Spannungen kann bei $\bar{\sigma}_b \leq 0,5 \cdot R_{28}$ als linear angesehen werden [4]. Für diesen Bereich kann die Verteilung der Spannungen in der Betondruckzone als dreieckförmig angenommen werden. Somit erhält man die in Bild 1 dargestellten Verteilungen der Spannungen und Dehnungen über die Querschnittshöhe, die die Grundlage der weiteren Berechnungen bilden.

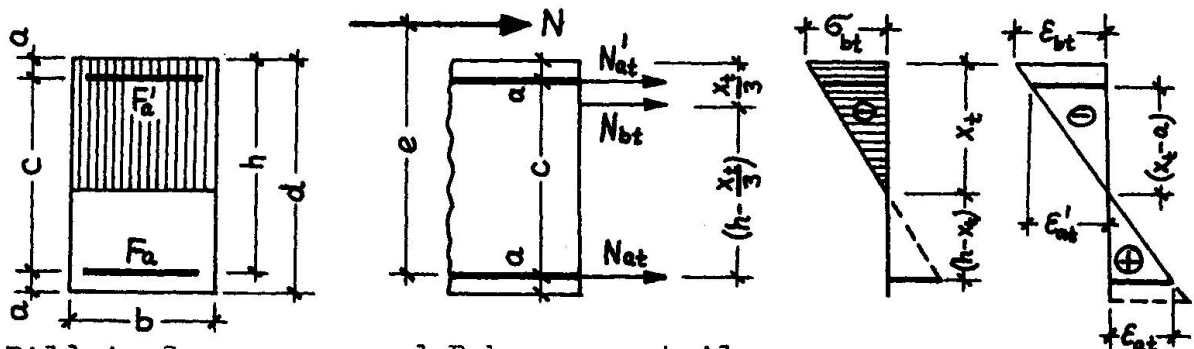


Bild 1: Spannungs- und Dehnungsverteilungen

Der Querschnitt wird als gerissen angenommen, d.h. er befindet sich im Zustand II. Die Spannungen in der Zugzone zwischen den Rissen werden nicht berücksichtigt.

Die im folgenden benötigten Bezeichnungen gehen aus Bild 1 hervor. Der Index "t" an den Symbolen für die Spannungen, Dehnungen und die Druckzonenhöhe deutet darauf hin, daß diese Größen zeitlich veränderliche Größen sind.

Für die weiteren Erörterungen ist es zweckmäßig, die Querschnittswerte in der nachfolgenden Form als bezogene Größen darzustellen.

$$\alpha = \frac{a}{h} ; \quad \gamma = \frac{c}{h} ; \quad \eta = \frac{e}{h} \quad (9)$$

$$\xi_t = \frac{x_t}{h} ; \quad \xi_0 = \frac{x_0}{h} \quad (10)$$

Des weiteren werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\sigma_{ON} = \frac{N}{b \cdot h} ; \quad \beta_{ON} = \frac{N}{\sigma_{bo} \cdot b \cdot h} = \frac{\sigma_{ON}}{\sigma_{bo}} \quad (11)$$

$$\mu = \frac{F_a}{b \cdot h} ; \quad \mu' = \frac{F_a'}{b \cdot h} ; \quad n = \frac{E_a}{E_b} \quad (12)$$

Die Darstellung der zeitlich veränderlichen Spannungen erfolgt in Abhängigkeit von der anfänglichen Spannung am Betondruckrand

$$\sigma_{bt} = \beta_{bt} \cdot \sigma_{bo} ; \quad \sigma_{at} = \beta_{at} \sigma_{bo} ; \quad \sigma_{at}' = \beta_{at}' \sigma_{bo} \quad (13)$$

3.2 Spannungsermittlungen für $t > t_0$

Unter der Voraussetzung, daß die Querschnitte auch nach der Verformung des Elementes eben bleiben (Gültigkeit der Hypothese von Bernoulli), und unter der Annahme des Verbundes zwischen der Bewehrung und dem Beton bestehen zwischen den Stahl- und Betondehnungen folgende Zusammenhänge (s. Bild 1):

$$\varepsilon_{at} = - \frac{h - x_t}{x_t} \cdot \varepsilon_{bt} = - \frac{1 - \xi_t}{\xi_t} \cdot \varepsilon_{bt} \quad (14)$$

$$\varepsilon_{at}' = \frac{x_t - a}{x_t} \cdot \varepsilon_{bt} = \frac{\xi_t - \alpha}{\xi_t} \cdot \varepsilon_{bt} \quad (15)$$

$$\frac{\varepsilon_{at}'}{\varepsilon_{at}} = - \frac{x_t - a}{h - x_t} = - \frac{\xi_t - \alpha}{1 - \xi_t} \quad (16)$$

Für die in Bild 1 dargestellten Resultierenden N_{bt} , N_{at} und N_{at}' gilt

$$N_{bt} = \frac{1}{2} \sigma_{bt} \cdot x_t \cdot b ; \quad N_{at} = \sigma_{at} \cdot F_a ; \quad N_{at}' = \sigma_{at}' \cdot F_a' \quad (17)$$

Aus der Bedingung $\sum M_a = 0$ erhält man die Gleichung

$$N \cdot e = - \sigma_{at}' \cdot F_a' \cdot c - \frac{1}{2} \sigma_{bt} \cdot x_t \cdot b \left(h - \frac{x_t}{3} \right),$$

die sich unter Beachtung der Formeln (9) bis (13) umformen läßt zu

$$6 \beta_{ON} \eta + 6 \mu' \gamma \beta_{at}' + \xi_t (3 - \xi_t) \beta_{bt} = 0 \quad (18)$$

Entsprechend ergeben sich aus $\sum M_a' = 0$ die Gleichungen

$$N(e - c) = \sigma_a \cdot F_a \cdot c + \frac{1}{2} \sigma_{bt} \cdot x_t \cdot b \left(\frac{x_t}{3} - a \right) \quad (19)$$

$$6 \beta_{ON} (\eta - \gamma) - 6 \mu \gamma \beta_{at} - \xi_t (\xi_t - 3\alpha) \beta_{bt} = 0$$

Die Stahldehnungen und -spannungen sind miteinander verknüpft durch die Beziehungen

$$\bar{\sigma}_{at} = E_a \cdot \varepsilon_{at} ; \quad \bar{\sigma}'_{at} = E_a \cdot \varepsilon'_{at} \quad (20)$$

Nach einigen Umformungen erhält man unter Berücksichtigung der Ausdrücke (16) und (20) aus den Gleichungen (18) und (19) die gesuchten Formeln zur Ermittlung der Stahl- und Betonspannungen für einen beliebigen Zeitpunkt t

$$\beta_{at} = \frac{\bar{\sigma}_{at}}{\bar{\sigma}_{bo}} = \frac{[3(\eta-1) + \varphi_t] \cdot (1 - \varphi_t) \beta_{on}}{\mu(1 - \varphi_t)(3 - \varphi_t) + \mu'(\varphi_t - \alpha)(\varphi_t - 3\alpha)} \quad (21)$$

$$\beta'_{at} = \frac{\bar{\sigma}'_{at}}{\bar{\sigma}_{bo}} = - \frac{[3(\eta-1) + \varphi_t] \cdot (\varphi_t - \alpha) \beta_{on}}{\mu(1 - \varphi_t)(3 - \varphi_t) + \mu'(\varphi_t - \alpha)(\varphi_t - 3\alpha)} \quad (22)$$

$$\beta_{bt} = \frac{\bar{\sigma}_{bt}}{\bar{\sigma}_{bo}} = - \frac{[\eta\mu(1 - \varphi_t) - (\eta - \gamma)\mu'(\varphi_t - \alpha)] 6 \beta_{on}}{\varphi_t [\mu(1 - \varphi_t)(3 - \varphi_t) + \mu'(\varphi_t - \alpha)(\varphi_t - 3\alpha)]} \quad (23)$$

3.3 Spannungsformeln für $t = t_0$

Die Formeln zur Ermittlung der Spannungen bei $t = t_0$ (anfänglicher Spannungszustand) erhält man auf einfache Weise aus den Gleichungen (21) bis (23) dadurch, daß man φ_t durch φ_0 ersetzt. Unter Beachtung der Beziehung (11) ergibt sich dann

$$\bar{\sigma}_{ao} = \frac{[3(\eta-1) + \varphi_0] \cdot (1 - \varphi_0) \cdot \bar{\sigma}_{on}}{\mu(1 - \varphi_0)(3 - \varphi_0) + \mu'(\varphi_0 - \alpha)(\varphi_0 - 3\alpha)} \quad (21a)$$

$$\bar{\sigma}'_{ao} = - \frac{[3(\eta-1) + \varphi_0] \cdot (\varphi_0 - \alpha) \cdot \bar{\sigma}_{on}}{\mu(1 - \varphi_0)(3 - \varphi_0) + \mu'(\varphi_0 - \alpha)(\varphi_0 - 3\alpha)} \quad (22a)$$

$$\bar{\sigma}_{bo} = - \frac{[\eta\mu(1 - \varphi_0) - (\eta - \gamma)\mu'(\varphi_0 - \alpha)] 6 \bar{\sigma}_{on}}{\varphi_0 [\mu(1 - \varphi_0)(3 - \varphi_0) + \mu'(\varphi_0 - \alpha)(\varphi_0 - 3\alpha)]} \quad (23a)$$

3.4 Druckzonenhöhe für $t > t_0$

Die Kenntnis der Druckzonenhöhe X_t bzw. der relativen Druckzonenhöhe φ_t ist erforderlich für die Berechnung der Spannungen. Die Bedingung zur Ermittlung von φ_t ist mit Gleichung (14) gegeben, die sich mit Gleichung (20) umschreiben läßt in

$$\frac{\bar{\sigma}_{at}}{E_a} \cdot \frac{\varphi_t}{(1 - \varphi_t)} = - \varepsilon_{bt} \quad (24)$$

Hierin ist ε_{bt} identisch mit $\varepsilon_b(t)$ und kann durch Gleichung (4) ausgedrückt werden. Zur Erleichterung der Rechnung wird Gleichung (4) jedoch umgeformt, d.h. die Zeit wird in einzelne Intervalle von t_0 bis t_k unterteilt und damit der Integralausdruck der

Gleichung (4) in einzelne Teilintegrale zerlegt. Zur Zeit $t = t_k$ gilt dann

$$\varepsilon_{bk} = \frac{\bar{\sigma}_{bk}}{E_b} - \frac{1}{E_b} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \bar{\sigma}_b(\tau) \frac{d}{d\tau} [1 + \varphi(t_k, \tau)] d\tau + \dots + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{\sigma}_b(\tau) \frac{d}{d\tau} [1 + \varphi(t_k, \tau)] d\tau \right\} \quad (25)$$

Wendet man auf diesen Ausdruck den Mittelwertsatz der Integralrechnung an, läßt sich dafür schreiben

$$\varepsilon_{bk} = \frac{\bar{\sigma}_{bk}}{E_b} - \frac{1}{E_b} \left\{ \bar{\sigma}_b(\xi_{0,1}) \cdot \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\tau} [1 + \varphi(t_k, \tau)] d\tau + \dots + \bar{\sigma}_b(\xi_{k-1,k}) \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{d}{d\tau} [1 + \varphi(t_k, \tau)] d\tau \right\} \quad (26)$$

wobei $\xi_{k-1,k} = t_{k-1} + \eta(t_k - t_{k-1})$ ist.

Bei Wahl genügend kleiner Zeitintervalle kann mit ausreichender Genauigkeit $\eta = \frac{1}{2}$ gesetzt werden und man erhält

$$\xi_{k-1,k} = \frac{t_{k-1} + t_k}{2}$$

bzw.

$$\bar{\sigma}_b(\xi_{k-1,k}) = \bar{\sigma}_b\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) \approx \frac{\bar{\sigma}_{b,k-1} + \bar{\sigma}_{bk}}{2} \quad (27)$$

Damit geht Gleichung (26) über in

$$\varepsilon_{bk} = \frac{\bar{\sigma}_{b0}}{E_b} \cdot \frac{(\varphi_{k0} - \varphi_{k1})}{2} + \sum_{i=1}^{(k-1)} \frac{\bar{\sigma}_{bi}}{E_b} \cdot \frac{(\varphi_{k,i-1} - \varphi_{k,i+1})}{2} + \frac{\bar{\sigma}_{bk}}{E_b} \cdot \frac{(2 + \varphi_{k,k-1})}{2} \quad (28)$$

$\varphi_{k,k-1}$ ist hierin identisch mit $\varphi(t_k, t_{k-1})$.

Nach Einsetzen der Gleichungen (21) und (28) in (24) lautet unter Beachtung der Ausdrücke (12) und (13) die Bestimmungsgleichung für die relative Druckzonenhöhe

$$\xi_k^3 + a_{2k} \cdot \xi_k^2 + a_{1k} \cdot \xi_k + a_{0k} = 0 \quad (29)$$

Mit Einführung der abkürzenden Bezeichnung

$$K_k = \frac{n}{2\beta_{0n}} \left[(\varphi_{k0} - \varphi_{k1}) + \sum_{i=1}^{(k-1)} \beta_{bi} (\varphi_{k,i-1} - \varphi_{k,i+1}) \right] \quad (30)$$

bedeuten hierin

$$\left. \begin{aligned} a_{2k} &= \frac{3(\eta-1) - 4(\mu + \alpha\mu') \cdot K_k}{1 + (\mu + \mu') \cdot K_k} \\ a_{1k} &= \frac{3n[\eta\mu + (\eta-\eta)\mu'](2 + \varphi_{k,k-1}) + 3(\mu + \alpha^2\mu') \cdot K_k}{1 + (\mu + \mu') \cdot K_k} \\ a_{0k} &= - \frac{3n[\eta\mu + \alpha(\eta-\eta)\mu'](2 + \varphi_{k,k-1})}{1 + (\mu + \mu') \cdot K_k} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

3.5 Druckzonenhöhe für $t = t_0$

Für den Zeitpunkt $t = t_0$ werden $K_k = 0$ und $\varphi_{k,k-1} = 0$. Damit erhält man aus den Ausdrücken (29) und (31) die bekannte Bestimmungsgleichung der relativen Druckzonenhöhe des elastischen Spannungszustandes

$$\xi_0^3 + a_2 \cdot \xi_0^2 + a_1 \cdot \xi_0 + a_0 = 0 \quad (29a)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= 3(\eta - 1) \\ a_1 &= 6n[\eta\mu + (\eta - \gamma)\mu'] \\ a_0 &= -6n[\eta\mu + \alpha(\eta - \gamma)\mu'] \end{aligned} \right\} \quad (31a)$$

4. Berechnungsbeispiel

Zur Erläuterung der unter Abschnitt 2 und 3 gemachten Ausführungen soll das folgende Berechnungsbeispiel dienen. Es werden als Beton gewöhnlicher Schwebeton der Güte B 300 mit natürlicher Erhärtung und als Stahl StA I (naturharter Stahl mit $\bar{\sigma}_s = 2400 \text{ kp/cm}^2$)

Tabelle 5: Rechenwerte

$b = 20,0 \text{ cm}$	$d = 35,0 \text{ cm}$	$h = 31,7 \text{ cm}$
$a = 3,3 \text{ cm}$	$c = 28,4 \text{ cm}$	$e = 60,0 \text{ cm}$
$\alpha = 0,104$	$\gamma = 0,896$	$\eta = 1,893$
$F_a = 6,16 \text{ cm}^2 (4\phi 14)$ $\mu = 0,00972$		$F'_a = 4,62 \text{ cm}^2 (3\phi 14)$ $\mu' = 0,00729$
$N = 7000 \text{ kp}$		$\sigma_{ON} = 11,04 \text{ kp/cm}^2$
$E_a = 21 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$ $E_b = 3 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$ $n = 7,0$		
$\beta_{ON} = -0,102$		

gewählt. Die Querschnitts-, Material- und Belastungskennwerte sind in Tabelle 5 zusammengestellt.

Für die Bestimmung der Kriechzahl werden folgende Annahmen getroffen:

Die relative Feuchtigkeit der Luft, in der sich das untersuchte Element befindet, beträgt durchschnittlich 50 bis 60 %.

Als kleinste Querschnittsabmessung gilt nach Tabelle 5 $b = 20,0 \text{ cm}$. Die

Aufbringung der Last erfolgt 10 Tage nach der Herstellung, d.h. das Belastungsalter ist $t_0 = 10$ Tage.

Mit diesen Angaben kann man den Tabellen 1 bis 4 folgende zur Bestimmung der Kriechzahl erforderlichen Werte entnehmen:

$$\varphi_{\infty}^m = 2,0 ; \quad k_1 = 1,00 ; \quad k_2 = 1,00 ;$$

$$\alpha_0 = 0,37 ; \quad \alpha_1 = 25 ; \quad \alpha_2 = 13 ; \quad k_0 = 22$$

Mit Hilfe der Formeln (5) bis (8) erhält man für die Kriechzahl den Ausdruck

$$\varphi(t_k, t_1) = (0,74 + \frac{50}{13 + t_1}) \cdot \frac{(t_k - t_1)}{22 + (t_k - t_1)},$$

worin t_k und t_1 in Tagen einzusetzen sind.

Tabelle 6: Rechenergebnisse

	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6	k = 7
t_k [Tage]	10	12	17	24	40	100	370	1090
$(t_k - t_1)$ [Tage]	0	2	7	14	30	90	360	1080
$\varphi(t_k, t_1)$	0	0,24	0,70	1,13	1,68	2,34	2,75	2,86
$f(t_k, t_1)$	0	0,083	0,241	0,389	0,577	0,804	0,942	0,980
$\xi(t_k)$	0,366	0,394	0,437	0,467	0,502	0,533	0,549	0,553
$\sigma_b(t_k)$ [kp/cm ²]	-108,3	-97,9	-84,0	-75,2	-65,5	-57,2	-53,1	-52,1
$\sigma_a(t_k)$ [kp/cm ²]	1306	1324	1352	1368	1384	1393	1397	1398
$\sigma_a'(t_k)$ [kp/cm ²]	-540	-634	-799	-932	-1107	-1280	-1378	-1403
$\varepsilon_b(t_k)$ [‰]	-0,360	-0,410	-0,500	-0,572	-0,664	-0,756	-0,809	-0,823
$\varepsilon_a(t_k)$ [‰]	0,622	0,631	0,644	0,652	0,659	0,663	0,665	0,666
$\varepsilon_a'(t_k)$ [‰]	-0,257	-0,302	-0,381	-0,444	-0,527	-0,609	-0,656	-0,668

Die mit den Formeln des Abschnittes 3 errechneten Werte sind in Tabelle 6 zusammengestellt. Die Berechnung wurde für eine Belastungszeit von 3 Jahren durchgeführt. Der Fehler, der durch die Aufteilung der Gesamtzeit in die in Tabelle 6 angeführten Zeitintervalle bei Anwendung des Wertes $\nu = 0,5$ (s. Abschnitt 3.4) entsteht, ist kleiner als 3 %.

Wie aus Tabelle 6 ersichtlich, ändern sich im Laufe von 3 Jahren die Stahlzugspannungen nur unwesentlich (Zunahme um 7 %), wogegen die Änderung der Druckspannungen im Stahl (Zunahme um 160 %) und im Beton (Abnahme um 52 %) ganz erheblich ist.

Literatur

- [1] Arutjunjan, N.Ch.
Einige Fragen der Kriechtheorie
Gostechisdat - Moskau, Leningrad - 1952

- [2] Krüger, W.
Zur Frage der Kriechverformungen
Sammelband "Ingenieurkonstruktionen" des Leningrader
Bauingenieurinstituts - Leningrad - 1970
- [3] Krüger, W.
Zum zeitlichen Verlauf der Kriechkurven von unbedampften und
bedampften Betonen
Beton, Düsseldorf 19 (1969), H. 4
- [4] Ulizki, J.J.
Theorie und Berechnung von stabförmigen Stahlbetonkonstruk-
tionen unter Berücksichtigung von Langzeitprozessen
Kiew - 1967
- [5] Reinsdorf, S.
Betontaschenbuch, Bd. I (Betontechnologie)
VEB Verlag für Bauwesen Berlin - 1965, S. 29

Zusammenfassung

Unter Anwendung der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers auf einen doppelt bewehrten Stahlbetonquerschnitt werden mit Hilfe eines Näherungsverfahrens gebrauchsfertige Formeln zur Ermittlung der Stahl- und Betonspannungen für den Fall einer exzentrischen Druckkraft mit großem Ausschlag hergeleitet. Die theoretischen Abhandlungen werden durch ein praktisches Zahlenbeispiel ergänzt.

Summary

The application of elastic-creeping body theory for concrete cross sections with double reinforcement is described. By using an approximative method formulae are derived for calculation of steel and concrete stresses in concrete cross sections charged by compressive forces with high eccentricity.

A numerical example completes the theoretical considerations.

Résumé

L'application de la théorie des corps sujets au fluage élastique pour une section de béton doublement armée permet d'établir, à l'aide d'une méthode d'approximations successives, des formules pratiques pour la détermination des tensions dans l'acier et dans le béton dans le cas d'une compression excentrique à grande amplitude. La théorie traitée est complétée à l'aide d'un exemple pratique.