Zeitschrift: IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

Band: 5 (1970)

Rubrik: Theme II: Consideration of these influences in the design of structures (choice of system, structural details, jointing, etc.)

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 30.03.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Konstruktive Massnahmen zur Verringerung schädlicher Einflüsse von Kriechen, Schwinden und Temperatur

Constructive Measures for Reducing Detrimental Effects due to Creep, Shrinkage and Temperature

Mesures constructives visant à la réduction d'effets nuisibles dus au fluage, au retrait et à la température

FRITZ LEONHARDT
Stuttgart

1. Arten der schädlichen Einflüsse

1.1 Verformungen: Kriechen und Schwinden des Betons können zu störenden Verformungen führen, z.B. zu übermäßigen Durchbiegungen schlanker Deckenträger oder Aufbiegungen von Spannbetonträgern durch zu hohe Druckspannungen im vorgedrückten Zuggurt. Sie können Schäden hervorrufen, z.B. Risse in Trennwänden auf Decken oder Bruch von Glasscheiben unter Balken. Nachträgliche Durchbiegungen können auch zum Knicken schlanker Stützen führen, wenn diese biegesteif mit dem Balken verbunden sind.

Auch Verkürzungen von Bauteilen durch Kriechen, Schwinden oder Temperatur können zu Schäden führen, wenn die Längenänderungen behindert werden. Schließlich können unterschiedliche Verkürzungen stützender Elemente vor allem bei Hochhäusern Schäden an biegesteifen Decken oder Scheiben verursachen.

1.2 Rißbildung: Risse entstehen im Beton viel häufiger durch den Einfluß von Temperaturänderungen als allgemein vermutet wird; Schwinden und Kriechen sind daran weniger beteiligt. In dicken Bauteilen gefährdet die Hydratationswärme des Zementes den noch jungen und entsprechend noch wenig zugfesten Beton durch Eigenspannungen besonders stark. In innerlich oder äußerlich statisch unbestimmten Tragwerken verursachen Temperaturänderungen zusätzlich Zwangskräfte durch Behinderung der Temperaturverformungen. Als Beispiele seien Decken für Flachdächer oder Hohlkasten für Brücken erwähnt. In einigen Fällen haben Risse, die vorwiegend durch Temperatur hervorgerufen waren, Brücken fast zum Einsturz gebracht [1].

1.3 Umlagerung von Schnittkräften: Bei statisch unbestimmt gelagerten Tragwerken ergeben die Verformungen infolge von Schwinden und Kriechen eine Umlagerung der Schnittkräfte, die zu Rissen führen kann und oft zusätzliche Stahleinlagen bedingt. Diese Umlagerung entsteht durch Abbau von Zwangkräften und kann klein gehalten werden, wenn man von vornherein so entwirft, daß die Zwangkräfte klein sind. Eine Umlagerung von Spannungen entsteht bei schubfester Verbindung von Betonteilen verschiedenen Alters, z.B. von vorgefertig-

ten Balken mit Ortbetonplatten. Die Umlagerung wirkt sich hier meist nicht schädlich aus, wenn das fertige Tragwerk für den Endzustand die nötige Biege- und Schubbruchsicherheit aufweist und wenn im Bauzustand am vorgefertigten Bauteil keine unzulässigen Spannungen auftreten.

2. Maßnahmen zur Verringerung der schädlichen Einflüsse

2.1 Verringerung des Kriechens und Schwindens

2.1.1 Durch betontechnologische Maßnahmen. Schwinden und Kriechen des Betons werden vorwiegend durch den lange Zeit dauernden Aushärtungsprozeß des Zementes und durch das Heraustrocknen des chemisch nicht gebundenen Anmachwassers hervorgerufen. Demnach kann man die Schwind- und Kriechmaße durch weniger Zementzugabe vermindern. Der für eine bestimmte Festigkeit des Betons erforderliche Zementgehalt richtet sich nach der Summe der Oberflächen der Zuschlagstoffe, die miteinander zu verleimen sind, und nach den Hohlräumen, die zwischen den Zuschlagstoffen auszufüllen sind. Beide Größen können klein gehalten werden, wenn möglichst viel grobes Korn verwendet wird. Es ist zwar seit langem bekannt, daß man dies am besten mit Ausfallkörnungen erreicht (Bild 1) [2], dennoch wird hiervon in der Praxis noch viel zu wenig Gebrauch gemacht. Anwendungen haben bewiesen, daß man nach Eignungsprüfung nicht nur höhere Festigkeiten, sondern auch gute Verarbeitbarkeit erzielt, wobei die hierfür nötige Menge an Mehlkorn nicht unbedingt aus Zement bestehen muß, sondern durch Quarzmehl oder dergl. ergänzt werden kann. Die Mörtelmenge (Körnung 0 bis 7 mm) kann von 55 % auf 30 bis 35 % vermindert, der Zementgehalt von rd. 350 bis 400 kg/m^3 herabgesetzt werden. Man darf erwarten, daß Kriechen und Schwinden fast proportional zum Zementgehalt zurückgehen.

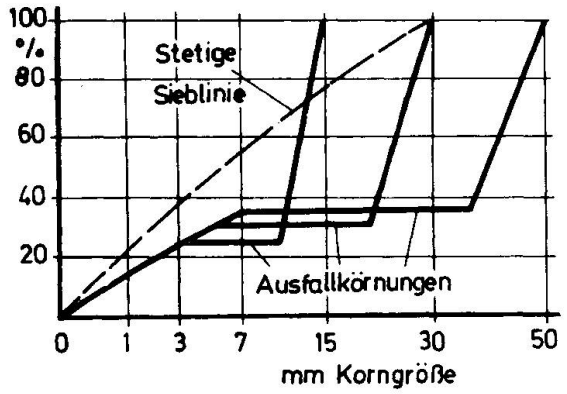


Bild 1. Ausfallkörnung zur Reduktion der nötigen Zementmenge

Es ist weiter bekannt, daß ein niedriger Wasserzementfaktor das Schwinden und Kriechen vermindert. Er kann bis auf 0,40 gesenkt werden, wenn man durch kräftige Schalungen dafür sorgt, daß wirkungsvolle Innen- bzw. Außenrüttler zur Verdichtung des Betons eingesetzt werden können.

2.1.2 Durch Nachbehandlung: Kriechen und Schwinden wird stark vermindert, wenn der Beton einen hohen "Reifegrad" der chemischen Aushärtung erreicht hat, bevor er den Einflüssen ausgesetzt wird, die Kriechen und Schwinden auslösen (Bild 2). Der Reifeprozeß erfordert Zeit und Wärme, die erforderliche Zeit kann durch höhere Temperatur abgekürzt werden (Dampfhärtung). In gemäßigtem

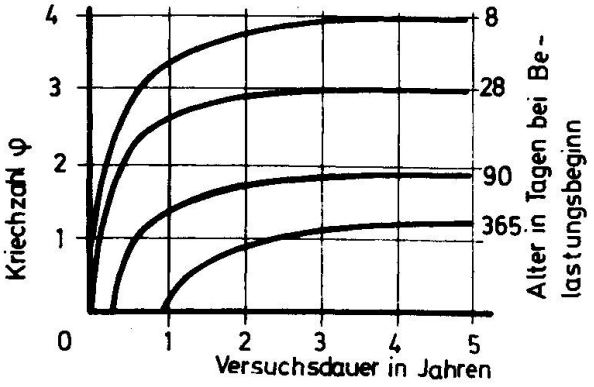


Bild 2. Einfluß des Alters bei Belastungsbeginn auf den Kriechverlauf (nach Rös).

Klima ist zu beachten, daß der Reifeprozeß durch Temperaturen unter + 18 °C verlangsamt wird und bei Temperaturen unter + 5 °C fast aufhört. Zum Reifen ist Feuchthalten des Betons nötig; es genügt, die Verdunstung des überschüssigen Anmachwassers zu verhüten, indem man nach dem Erstarren des Betons, bzw. direkt nach dem Ausschalen die Betonflächen mit einem geprüften Sperrmittel bespritzt (Dampfsperre) [3] [4]. Auch das Abdecken mit feuchtem Jutegewebe ist geeignet. Das früher übliche Bespritzen des Betons mit kaltem Wasser sollte möglichst unterbleiben, um die schädlichen Wirkungen der Abkühlung zu vermeiden (siehe Abschnitt 2.2).

2.1.3 Durch Verminderung der schwind- und kriecherzeugenden Einflüsse: Beim Schwinden und Kriechen ist es schwierig, die wesentliche Ursache, nämlich die Trockenheit der das Tragwerk umgebenden Luft, zu beeinflussen. Bei Bauwerken im Freien ist die relative Feuchtigkeit dieser Luft klimabedingt und kann künstlich nicht verändert werden. In Hochbauten, die beheizt werden, ist das Schwind- und Kriechmaß während der ersten Winter besonders groß, weil die Luft durch die üblichen hohen Heizkörpertemperaturen besonders trocken wird. Eine ausreichende Befeuchtung der Luft bis 60 % rLf wäre hier erwünscht und auch der Gesundheit der Menschen zuträglich.

2.2 Verringerung der Temperatureinflüsse

2.2.1 Durch Wärmedämmung: Die größten Temperaturdifferenzen erhalten wir zwischen direkter Sonnenbestrahlung im Sommer und der Strahlungskälte in klaren Winternächten. Die Temperatur von Betonoberflächen kann durch Sonne + 60 °C, bei dunkler Farbe bis zu + 70 °C erreichen, während sie im Winter je nach geographischer Lage und Höhe auch in Mitteleuropa bis auf - 30 °C absinken kann. Viele Bauwerke, wie z.B. Brücken und Türme wird man für die Einflüsse solcher Temperaturen berechnen und bemessen müssen. Bedenkliche Spannungen entstehen, wenn an einem Bauteil große Temperaturdifferenzen zwischen außen und innen auftreten. Dies ist z.B. bei allen Sichtbetonbalken von im Winter beheizten Hochbauten der Fall, in denen Randbalken an Fenstern durch Heizkörper innen + 30° bis + 40 °C warm sein können, während die Außenflächen - 20 °C aufweisen. Temperaturrisse sind hier unvermeidlich. Im Inneren entsteht andererseits an unterkühlten Flächen Schwitzwasser oder gar Eis. Solche schädlichen Einflüsse lassen sich im Hochbau nur dadurch vermeiden, daß das tragende Stahlbetonskelett von außen durch eine Wärmedämmschicht geschützt wird. Auch bei Behältern oder Silos, die warmes oder heißes Füllgut aufzunehmen haben, ist eine äußere Wärmedämmschicht eine sinnvolle konstruktive Maßnahme, um schädliche Spannungen zu verhüten.

2.2.2 Durch Verminderung der Hydratationswärme: Durch Hydratationswärme des Zementes können besonders in dicken Bauteilen hohe Temperaturen entstehen, wobei man schon von 50 cm Dicke ab vorsichtig sein muß. Diese Temperaturen können durch geeignete Wahl der Zementart und durch Kühlung des Betons beeinflußt werden. Frühhochfeste Portlandzemente entwickeln ihre Hydratationswärme rascher und ergeben damit höhere Temperaturen als grob gemahlene Hochofenzemente. Die gesamte Wärmemenge ist allerdings für beide etwa gleich, d.h. der Hochofenzement entwickelt seine Wärme langsam über einen langen Zeitraum. Eine Verringerung der Zementmenge reduziert natürlich auch die Abbindetemperatur (s. 2.1.1). Kühlung der Zuschlagstoffe oder des Anmachwassers sollte nur in heißen Zonen in Betracht gezogen werden. Beim Anschluß von frischem Beton an erhärtete Bau -

teile kann man das alte Bauteil erwärmen, um Risse durch Temperaturunterschiede im neuen Betonteil zu vermeiden.

2.3 Konstruktive Maßnahmen gegen Schäden durch Verformungen

2.3.1 Gegen schädliche Biegeverformungen: In erster Linie sollte man eine reichliche Bauhöhe wählen, d.h. übertriebene Schlankheit vermeiden und den Druckgurt so bemessen, daß die kriecherzeugenden Druckspannungen nicht zu hoch sind. Können hohe Betondruckspannungen nicht vermieden werden, so kann man die Kriechverformung durch Druckbewehrung fast beliebig reduzieren. Schließlich kann durch eine leichte Vorspannung erreicht werden, daß der Querschnitt für die ständig wirkenden Lasten im Zustand I bleibt, so daß die starke Zunahme der Durchbiegung durch das Reißen der Betonzugzone vermieden wird.

Bei Spannbetonträgern muß meist die negative Durchbiegung bzw. das Hochwölben infolge zu hoher Druckspannungen im vorgedrückten Zuggurt verhütet werden. Solches Hochwölben wurde oftmals bei den im Hochbau beliebten π-Trägern und bei vorgefertigten Brückenbalken beobachtet, wenn die sehr hohen zulässigen Druckspannungen im Zuggurt für Eigengewicht ausgenützt wurden, um dort Zugspannungen bei Vollast zu vermeiden (volle Vorspannung). Dieses Ziel ist bestimmt nicht sinnvoll, wenn die Vollast im Leben des Tragwerkes selten oder nur wenige Tausend Mal vorkommt, aber sich nicht millionenfach wiederholt. Die Sicherheit des Tragwerkes wird nicht verringert, wenn unter seltener Vollast Haarrisse im Zuggurt entstehen, die sich durch die Vorspannung bei Dauerlast sofort wieder schließen. Die richtige konstruktive Maßnahme ist hier also die Herabsetzung des Vorspanngrades bzw. die Anwendung beschränkter oder mäßiger Vorspannung mit der Bedingung, daß unter häufig vorkommender Last noch keine Zugspannung im Beton des Zuggurtes auftritt. Dabei spielt die Größe der Zugspannung bzw. Zugdehnung unter Vollast keine Rolle, wenn neben den Spanngliedern ausreichend schlaffe Bewehrung zur Sicherung kleiner Rißbreiten (z.B. 0,1 mm) eingelegt wird, die für die Bruchsicherheit angerechnet werden kann. Als günstige Nebenwirkung entstehen kleinere Spannkraftverluste durch vermindertes Kriechen. Es ist dringend erwünscht, daß diese Vorteile der beschränkten Vorspannung (Klasse 2 und 3 der CEB-FIP-Empfehlungen) mehr erkannt und genützt werden.

Genügt die Herabsetzung des Vorspanngrades nicht, dann muß der Betonquerschnitt im Zuggurt vergrößert werden, z.B. durch Anfügen eines Flansches. Schließlich kann man schädliche Biegeverformungen von Spannbetonträgern auch durch negative Momente an den Auflagern mit Hilfe der Kontinuität zu Nachbaröffnungen oder zu Rahmenstützen vermindern.

2.3.2 Gegen schädliche Normalkraftverformung: Bei Hochhäusern hat man häufig den Unterschied zwischen den Kriech- und Schwindverformungen hochbeanspruchter Stützen und tragender Wände, der sogenannten Kerne, zu beachten. Sie werden am einfachsten durch verstärkte Bewehrung der Stützen ausgeglichen.

Bei der statisch unbestimmten Stützung aller im Verhältnis zur Stützweite nicht schlanken Tragwerke muß man unterschiedliche Verkürzungen der Stützen durch Kriechen, Schwinden oder Temperatur beachten, weil sie die Verteilung der Schnittkräfte im Tragwerk erheblich beeinflussen können. Mehmel hat in [5] aufgezeigt, daß dieser Einfluß selbst für die Stützung von Plattenbrücken beachtlich groß werden kann. Besonders stark sind mehrfeld-

rige wandartige Träger davon betroffen. Für die Längenänderungen von Balken oder Platten werden meist bewegliche Lager oder elastisch verformbare Stützen vorgesehen. Bei Spannbetontragwerken muß besonders die Verkürzung mit realistischen Schwind- und Kriechmaßen berechnet werden. Die Erfahrung lehrt, daß man hierbei einen Sicherheitsfaktor von mindestens 1,3 ansetzen sollte. Bei guter Ausbildung der beweglichen Lager ist der fugenlosen Länge von Spannbetonträgern fast keine Grenze gesetzt. Im Brückenbau wurden schon rund 1000 m lange, über viele Öffnungen durchlaufende Spannbetonbalken fugenlos ausgeführt. Die Summe der Bewegungswiderstände aller beweglichen Lager muß bei der Bemessung des festen Lagers, mit einem Sicherheitsfaktor versehen, angesetzt werden.

Unterschiedliche Verformungen spielen auch bei mehrschichtigen Wand tafeln (Sandwich-Bauart) eine Rolle; sie sind hier wegen unterschiedlicher Temperaturen und verschiedenem Schwind- und Kriechverhalten der Schichten meist nicht vermeidbar. Es gibt nur zwei brauchbare Lösungen:

1.) möglichst freie Beweglichkeit der einzelnen Schichten gegeneinander.
2.) die Schichten werden an den Rändern schubfest miteinander verbunden; diese Verbindung muß aber für die vollen Zwangkräfte bemessen werden, die bei Behinderung der unterschiedlicher Verformungen entstehen.

Diese zweite Lösung scheidet meist aus, weil dabei die Funktion, z.B. Wärmedämmung, am Rand zu sehr gestört wird.

3. Konstruktive Maßnahmen gegen Rißbildung

3.1 Verhütung von Rissen: Risse im Beton können nur dann verhütet werden, wenn die Zugspannungen im Beton aus der Summe aller gleichzeitig möglichen Ursachen unter der unteren Grenze der Zugfestigkeit des Betons bleiben. Zu den möglichen Ursachen gehören neben den Lasten vor allem Temperatur, Schwinden und äußerer oder innerer Zwang. Durch Bewehrung kann man keine Risse verhüten, sondern nur den Rißabstand und damit die Rißbreite verkleinern.

Maßnahmen zur Verhütung von Rissen:

1.) Abmessungen der Bauteile klein halten. Unter den Einflüssen mitteleuropäischen Klimas bleiben z.B. Platten nur bei 2 bis 5 m Längenabmessungen (je nach Betongüte) bis höchstens 50 cm Dicke rissefrei, wenn nicht äußere Lasten Zugspannungen $\sigma_{bZ} > 0,85\ \beta_{bZ}$ erzeugen. Risse können demnach durch Dehnungsfugen in Abständen von 2 bis 5 m verhütet werden. Bei Herstellung unter hohen Sommertemperaturen genügen Schwindfugen, die nur Verkürzung und keine Verlängerung zulassen. So kleine Fugenabstände sind in der Praxis unbeliebt, bei größeren Abständen nimmt man aber Risse in Kauf, es sei denn, daß größere Temperaturänderungen ferngehalten werden können, z.B. bei eingeschütteten Behälterwänden. Dabei muß man die Temperatur des Betons besonders während der ersten Tage nach der Herstellung unter Kontrolle halten, solange die Betonzugfestigkeit noch niedrig ist. Gefährlich ist die Abkühlung durch kalte Nachtluft oder durch Regen nach warmen Tagen.

2.) Die beste Maßnahme zur Verhütung von Rissen ist die Vorspannung, mit der im Beton ausreichend hohe Druckspannungen erzeugt werden. Die Größe der nötigen Vorspannkraft hängt von der Größe der die Zugspannungen erzeugenden Kräfte ab. Je nach dem Zweck des Bauwerkes genügt es, wenn über die ganze Dicke durchgehende Risse verhütet werden, während Biegerisse oder Netzrisse aus Eigenspannungen, die nur eine geringe Tiefe haben, nicht scha-

den und z.B. die Dichtheit einer Behälterwand nicht beeinträchtigen. Um durchgehende Risse zu verhüten, genügt meist eine Vorspannkraft, die eine mittlere Druckspannung von 5 bis 15 kp/cm^2 erzeugt. Als beachtenswertes Beispiel sei das eingeschüttete Maschinenhaus des Pumpspeicherkraftwerkes Glems bei Stuttgart erwähnt (Bild 3). Die sehr dicken Betonkörper wurden

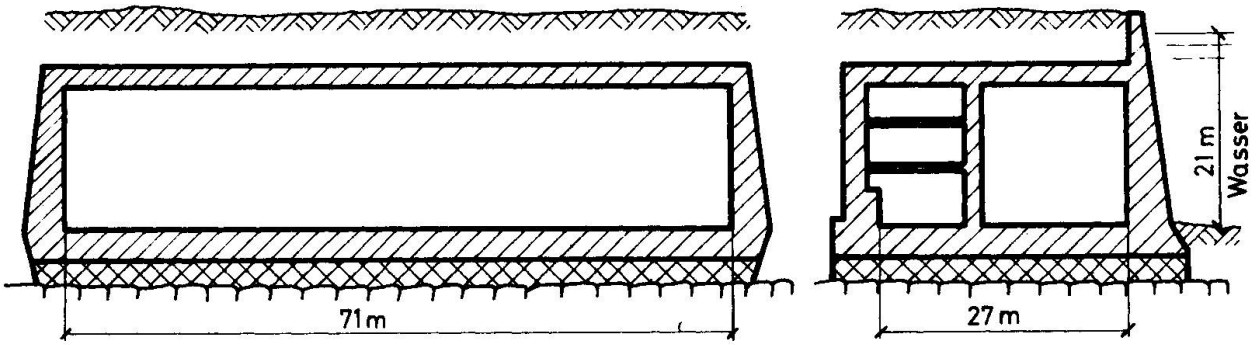


Bild 3 Maschinenhaus des Pumpspeicherwerkes Glems b.Stuttgart

auf rund 80 m Länge fugenlos ausgeführt und direkt auf fast felsartig festen Mergel aufbetoniert (E-Modul bei horizontaler Zusammendrückung = 30 000 kp/cm^2). Das ganze Bauwerk wurde längs, quer und lotrecht für eine mittlere Druckspannung im Beton von 8 bis 10 kp/cm^2 vorgespannt, wobei nur etwa 18 % der Vorspannkraft in Längsrichtung in den Untergrund abwanderten. Die Wände sind selbst nach mehreren harten Wintern dicht und damit von durchgehenden Rissen freigeblieben, obwohl die Außenwand ungeschützt den Einwirkungen des Wetters und der täglich wechselnden Wasserhöhen des unteren Beckens bei bis zu 21 m Wasserdruck ausgesetzt ist. +)

Von solcher Möglichkeit einer nur konstruktiven Vorspannung zur Verhütung von Rissen sollte viel mehr Gebrauch gemacht werden als bisher.

Risse entstehen besonders gerne in dünnen Bauteilen, die an dicke anschließen (Bild 4). Das dünne Bauteil ist einem raschen Schwinden und raschen Temperaturwechseln unterworfen, während beides im dicken Bauteil viel langsamer vor sich geht. Risse lassen sich in solch dünnen Bauteilen fast nicht vermeiden, es sei denn, daß man den gesamten Querschnitt stark vorspannt. Konstruktive Abhilfen bestehen in der Anordnung eines Hohlraumes im dicken Bauteil oder in einer engen Bewehrung nach Falkner (s. 3.2) im dünnen Bauteil.

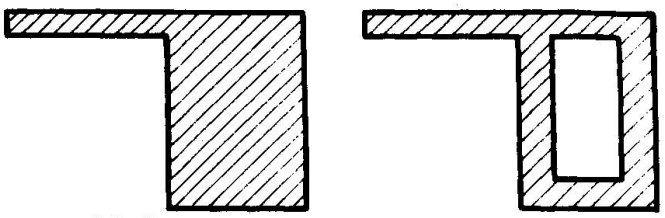


Bild 4

+) **Die fugenlose Bauart dieses Krafthauses wurde von F. Leonhardt angegeben, nachdem die Wanddicken zuvor nach anderen Gesichtspunkten festgelegt waren. Durch konsequente Anwendung der Vorspannung hätte man die Wanddicken und damit die erforderliche Vorspannkraft stark vermindern können. Als Masse gegen Turbinenschwingungen kann dabei der felsige Baugrund durch vorgespannte Bodenanker herangezogen werden.**

An Brücken sind mehrfach grobe Risse durch Zwang aufgetreten, z.B. an Hohlkasten mit sehr unterschiedlichen Wanddicken (Bild 5). Der gezeigte

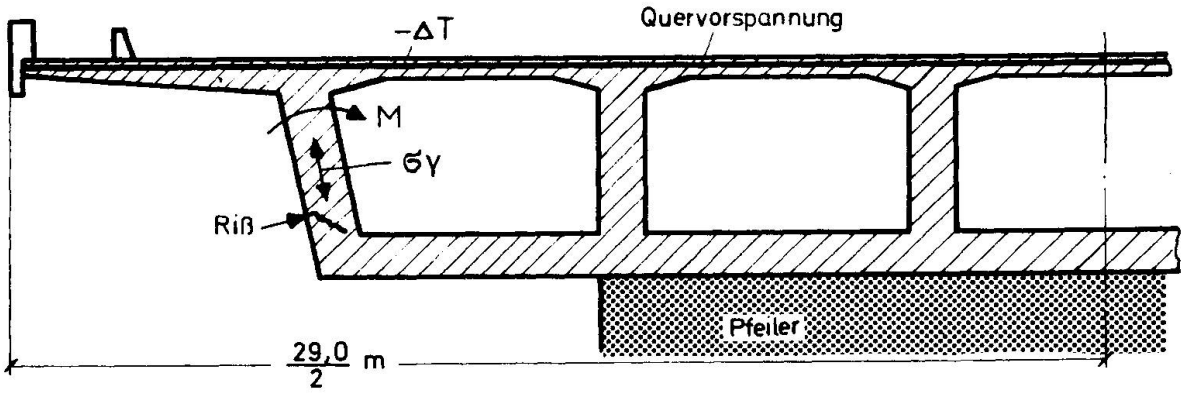


Bild 5

Riß entstand durch das Zusammenwirken der elastischen Verkürzung der quervorgespannten, sehr breiten Fahrbahnplatte, der Temperaturverkürzung bei Abkühlung der oberen Fahrbahnplatte im Winter und der lotrechten Zugspannungen im Steg infolge indirekter Lagerung. Die beste konstruktive Maßnahme zur Verhütung solcher Schäden ist die vertikale Stegvorspannung. Als Variante kommt eine ausreichend kräftige und enge vertikale Stegbewehrung insbesondere an der äußeren Stegfläche in Betracht.

3.2 Maßnahmen zur Beschränkung der Rißbreiten: Meist werden die Zwang- und Eigenspannungen im Beton, die durch Temperatur oder Schwinden hervorgerufen werden, einfach nicht beachtet, nicht berechnet und unterschätzt, obwohl an unseren Bauwerken häufig grobe Risse aus solchen Wirkungen auftreten. Viele Ingenieure der Praxis glauben noch, daß eine leichte "Schwindbewehrung" gegen solche Risse genüge. H. Rüsch hat in [6] theoretisch aufgezeigt, daß man eine starke Bewehrung (mind. 1 %) braucht, um zu verhüten, daß beim Entstehen des ersten Risses aus Zwang gleich die Streckgrenze der schwachen Bewehrung überschritten wird und damit ein breiter Riß entsteht. 1969 konnte H. Falkner [7] theoretisch und experimentell nachweisen, daß die für mittigen Zwang im Diagramm (Bild 6) angegebenen Bewehrungsprozentsätze zur Beschränkung der Rißbreite auf die genannten Maße genügen. J. Eibl kam zu den gleichen theoretischen Ergebnissen [8]. Falkner gibt auch die Abnahme der Dehnsteifigkeit in Abhängigkeit von der Zahl der Risse je Längeneinheit an, so daß künftig die Größe der Zwangskraft für eine bestimmte Längenänderung aus Schwinden und Tem-

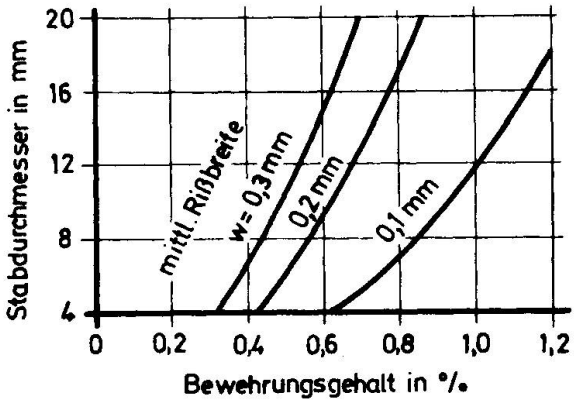


Bild 6. Erforderl. Bewehrungsgehalt zur Beschränkung der Rißbreite auf w_m bei mittigem Zwang für gerippten Betonstahl mit $\beta_S \leq 40$ kp/mm^2 (nach H. Falkner [7])

peratur wirklichkeitsnah berechnet werden kann. Wesentlich ist, daß gerippte Stäbe kleinen Durchmessers aus hochfestem Stahl mit kleinem Abstand gewählt werden müssen, um die Rißbreiten wirkungsvoll zu beschränken.

Beim Abkühlen von Betonkörpern sind durchgehende Risse nur bis zu Dicken von etwa 100 cm zu befürchten. Bei dickeren Bauteilen entstehen Netzrisse an der Oberfläche mit kleiner Rißtiefe, deren Abstand und Rißbreite nur mit einer feinmaschigen Hautbewehrung bei höchster Verbundgüte beeinflußt werden können. Die Rißbreiten bleiben jedoch auch ohne Bewehrung klein. Jedenfalls sind die in der Praxis häufig angewandten Bewehrungsnetze aus dikken Stäben an dicken Betonkörpern gegen solche Oberflächenrisse wertlos.

Schrifttum

[1] Leonhardt, Fritz; Kolbe, Georg und Peter, Jörg: Temperaturunterschiede gefährden Spannbetonbrücke. Beton- und Stahlbetonbau, 60 (1965), H. 7, S. 157 - 163

[2] Ullrich, Ernst: Vorteile von Ausfallkörnungen, Bauwirtschaft 19 (1965), H. 28 und 29

[3] Krenkler, Karl: Gütesteigerung des Betons durch Überzüge. Straßen- und Tiefbau, 14 (1960) H. 7/8

[4] Hilsdorf, Hubert und Finsterwalder, Klemens: Untersuchungen über den Einfluß einer Nachverdichtung und eines Anstriches auf Festigkeit, Kriechen und Schwinden von Beton. Schriftenreihe D.A.f.St., H.184, Berlin 1966

[5] Mehmel, Alfred und Weise, Hans: Modellstatische Untersuchung punktförmig gestützter schiefwinkliger Platten unter besonderer Berücksichtigung der elastischen Nachgiebigkeit. Schriftenreihe D.A.f.St., Heft 161, Berlin 1964

[6] Rüsch, Hubert: Die wirklichkeitsnahe Bemessung für lastunabhängige Spannungen. Vorträge Betontag 1965, Verlag Deutscher Beton-Verein, Wiesbaden, S. 277 - 304

[7] Falkner, Horst: Zur Frage der Rißbildung durch Eigen- und Zwängsspannungen infolge Temperatur in Stahlbetonbauteilen. Schriftenreihe D.A.f.St., Heft 208, Berlin 1969

[8] Eibl, Josef: Zwängung und Rißbildung von Stahlbetonstäben bei Behinderung der Längsverformung. Die Bautechnik, 46 (1969), H. 11, S. 373 - 379 .

Zusammenfassung

Schädliche Einflüsse von Kriechen, Schwinden und Temperatur an Betonbauteilen äußern sich durch störende Verformungen, Rißbildung und bei statisch unbestimmten Tragwerken durch Zwangskräfte und Umlagerung von Schnittkräften. Zur Abhilfe sollten primär betontechnologische Maßnahmen zur Reduktion der Schwind- und Kriechmaße ergriffen werden, wie Ausfallkörnung mit kleinem Zementgehalt, wirksame Nachbehandlung des Betons zur Erzielung eines hohen Reifegrades vor Beginn der Belastung und Schutz vor

Abkühlung vor ausreichender Erhärtung. Konstruktive Maßnahmen betreffen günstige Wahl der Querschnitte, keine hohen Vorspanngrade und als Notlösung die Anordnung von Druckbewehrung. Die Verhütung von Rissen gelingt meist nur durch leichte Vorspannung. Für Beschränkung der Rißbreite bei Rissen durch Zwang werden neue Regeln für die Bewehrung mitgeteilt. Verschiedene Gefahren durch Temperatureinflüsse werden besonders hervorgehoben.

Summary

The detrimental effects of creep, shrinkage and temperature on concrete structural elements manifest themselves through excessive deformations, cracking and in statically indeterminate structures also through the development of forces and moments due to constraint and through a redistribution of inner forces. Remedial measures should primarily regard concrete technology with the aim of reducing creep and shrinkage coefficients, such as the use of gap grading with small cement content, efficient curing of the concrete attempting to achieve a high degree of maturity before loading and finally protection against cooling prior to sufficient hardening. Measures regarding design should include the choice of favorably behaving cross sections, abstention from high degrees of prestressing and, at the very end of the line, the use of compression reinforcement. Prevention of cracking, in most cases, will be successfully achieved only by light prestressing. New rules are given for the reinforcement necessary to restrict crack widths of cracks caused by constraint. Various dangers through temperature effects are dealt with particular emphasis.

Résumé

Des influences nuisibles dues au fluage, au retrait et à la température sur des éléments en béton se manifestent par des déformations gênantes, par des fissurations, et, pour des structures hyperstatiques, par des effets secondaires dus à l'empêchement des déformations, enfin par la redistribution des réactions de coupe. Pour y remédier on devrait commencer par prendre des mesures concernant la technologie du béton en vue de la réduction de l'amplitude du retrait et du fluage; soit dit par exemple une granulométrie discontinue avec un faible dosage en ciment; un traitement efficace du béton pour l'obtention d'un durcissement élevé avant la première mise en charge; une protection contre le refroidissement avant qu'un certain degré de durcissement soit atteint. Puis comme mesures constructives sont envisageables, un choix judicieux des sections, une précontrainte modérée, et, en cas extrême, la disposition d'une armature de compression. Le plus souvent, seule une faible précontrainte permet d'éviter les fissures. Pour la limitation de l'ouverture des fissures dues aux effets secondaires, de nouvelles règles concernant l'armature sont indiquées. Certains dangers causés par les influences de la température sont spécialement mis en évidence.

Leere Seite
Blank page
Page vide

II

Konstruktive Massnahmen zur Verringerung des Einflusses von Kriechen, Schwinden und Temperatur

Constructive Measures for Reducing the Adverse Effects of Creep, Shrinkage and Temperature

Procédés de construction permettant la diminution de l'influence du fluage, du retrait et de la température

JOSEF AICHHORN
W. Hofrat Dipl. Ing.
Oesterreich

Die konstruktiven Maßnahmen zur Verringerung des Einflusses von Kriechen, Schwinden und Temperatur können in 3 Gruppen eingeteilt werden.

1) Bei der Gestaltung der Tragwerke

Kriechen, Schwinden und Temperaturänderungen verursachen im Bauwerk Formänderungen. Kriechen, Schwinden und Abkühlungen rufen Verkürzungen, Temperaturerhöhungen Verlängerungen des Bauwerkes hervor. Vor allem das Kriechen kann in ungünstigen Fällen unerwünschte Durchbiegungen nach sich ziehen.

Beim Einfeldbalken und bei Durchlaufträgern kann man durch sinnvolle Anordnung von festen, einseitig oder allseitig beweglichen Lagern erreichen, daß alle Bewegungen, abgesehen von Lagerreibungen ungehindert stattfinden können. Wird ein Bauwerk sehr lang, so müssen Dehnfugen angeordnet werden. Entweder bildet man auf einem Trennpfeiler oder auf einem Doppelpfeiler 2 Bauwerksenden mit getrennten Lagern aus, oder man stellt Gerbergelenke in der Nähe von Momentennullpunkten her. Diese Lösung ist besonders bei Taktverfahren mit Vorbaugerüsten sehr günstig.

Die Größe der Kriechverkürzung hängt von der mittigen Betonspannung ab. Eine Verringerung kann somit durch Wahl nicht allzu dünner Querschnittsabmessungen oder mittlerer Schlankheiten (etwa d/l = 1/15 bis 1/20) erreicht werden. Wesentlichen Einfluß hat der Grad der Vorspannung, welcher dem Entwurf zugrunde gelegt wird. Bei "voller Vorspannung" sind die Kriechverkürzungen und vor allem aber die Durchbiegungen sehr groß. Diese erzeugen dann oft unerwartet große Durchbiegungen der Feldmitten nach oben, welche in der Praxis dann oft Korrekturen der Nivellette erforderlich machen. Die Anwendung "beschränkter" oder gar "schwacher Vorspannung" verkleinert die Einflüsse des Kriechens.

Die jahreszeitlichen und klimatischen Veränderungen der Endkriechmaße sowie auch Änderungen der Bauprogramme und der Einbautemperaturen machen eine genaue Angabe der Größen von Restkriechen

und Restschwinden praktisch unmöglich. Es ist deshalb unbedingt notwendig, für die Bemessung der Lagerverschieblichkeiten und für die Wahl der Größe der Fahrbahnübergänge genügend Reserven einzubauen. Zu den nach den einschlägigen Normen errechneten Werten der Verschiebungen empfiehlt es sich, mindestens 50 - 100 % hinzuzugeben.

Bei Rahmenbrücken wird man versuchen, durch eine möglichst schlanke Ausbildung der Rahmenstiele z.B. als Hohlquerschnitte zu erreichen, daß möglichst viele Stiele oben und unten eingespannt werden können. Vom statischen Festhaltepunkt weiter entfernte Stützen erhalten oben oder unten Gelenke aus Beton, Stahl, Elastomere oder Ähnlichem. Wenn die Bewegungen noch größer werden, muß man bewegliche Lager oder Pendelstützen anordnen. Als Lager kommen Stahlrollenlager, sowie Neotopf- und Linienkipplager mit Teflon-Gleitschichte in Frage.

Sehr hohe schlanke Pfeiler können unter Umständen bei einer Belastung von Horizontalkräften wie Bremskraft oder Erdbeben unerwünscht große Verschiebungen des Tragwerkes hervorrufen. Zu ihrer Verkürzung werden Puffer mit Stahl- oder hydraulischer Federung eingebaut.

Bei Hochbauten können Temperatureinflüsse durch Wärmeisolierungen verkleinert werden. Auch Industriebauten wird man bei großen Temperaturunterschieden durch entsprechende Isolierungen schützen.

2) Bei der Bauherstellung

Die Ausführung großer Tragwerke in Teilabschnitten vermindert den Einfluß von Kriechen und Schwinden. Ein Extremfall davon ist der Freivorbau, bei welchem nicht nur in sehr kleinen Abschnitten gearbeitet wird, sondern es werden auch die Vorspannkräfte nur allmählich aufgebracht, sodaß die volle Vorspannkraft erst auf einen relativ alten Beton mit einem kleinen Endkriechmaß wirkt.

Bei Fertigteilbauweisen ist meistens vor dem Herstellung der Verbundwirkung ein großer Teil von Kriechen und Schwinden abgeklungen. Beim Taktschiebeverfahren wird die Vorspannung erst in einem erheblich hohen Betonalter aufgebracht.

Bei einfeldrigen Rahmen und bei einem großen Einzelfeld durchlaufender Rahmen werden Verschiebungen von Fußgelenken durchgeführt. Diese Verschiebungen werden zweckmäßigerweise in mehreren Etappen vorgenommen, weil einmalige große Verschiebungen durch das Kriechen des Betons wieder weitgehendst abgebaut werden. Zur Verringerung der Stabsteifheit der Rahmenstiele können bei felsigem Untergrund Kiespolster unter den Fundamenten eingebaut werden.

In besonderen Fällen könnte man ein Nachspannen der Spannglieder nach mehreren Monaten oder Jahren in Aussicht nehmen. Bei sehr schlanken Konstruktionen entstehen in den Feldmitten an der Trägerunterkante beim Vorspannen sehr hohe Betondruckspannungen. Durch Aufbringen einer Auflast können diese und mit Ihnen die Kriechverluste verringert werden.

Bei massiven Bauwerken wie z.B. Reaktorbauten wird versucht, die Abbindewärme durch ein Kühlsystem zu reduzieren.

3) Von der Materialseite her

Bei Spanngliedern aus sehr hochwertigen Stählen sinkt der Anteil der Kriech- und Schwindverluste von der Vorspannkraft. Hohe Betongüten mit großem Elastizitätsmodul verringern ebenfalls die Kriech- und Schwindverluste in den Spanngliedern. Diese hohen Betongüten versucht man mit besonderen Zuschlagstoffen, mit hochwertigem Zementen, kleinen Wasserzementfakroten, mit Trassbeigaben und Zusatz von Verflüssigern zu erreichen.

Zusammenfassung

Die konstruktiven Maßnahmen zur Verringerung des Einflusses von Kriechen, Schwinden und Temperatur werden in 3 Gruppen eingeteilt:

1) Bei der Gestaltung der Tragwerke wird der Einfluß der Querschnittswahl, der Schlankheit, der Lagerung, der Stützenausbildung bei Rahmenbrücken, des Vorspanngrades sowie von Wärmeisolierungen beschrieben.

2) Bei der Bauherstellung können die Einflüsse vermindert werden durch Fertigteilbauweise, Freivorbau, Taktschiebeverfahren, langzeitiges Nachspannen der Spannglieder, Lagerverschiebungen, Spannauflasten sowie Betonkühlung.

3) Von der Materialseite her kann der Konstrukteur die Einflüsse durch die Wahl besonders hochwertiger Spannstähle und hoher Betongüten verringern.

Summary

The constructive measures which may be applied to decrease the unfavourable effects of creep, shrinkage and temperature are divided into three groups:

1) The influence of various details of design is discussed, such as: types of cross section, slenderness ratios, support conditions, stanchion design in frame-work bridges, magnitude of prestressing forces and thermal insulation.

2) During erection, creep and shrinkage effects may be reduced by the use of: prefabricated elements, cantilever construction, the so called "multiple-cycle assembling", long time post-tensioning of prestressing elements, support displacement, additional loads during tensioning and concrete cooling.

3) As to the choice of materials, it is pointed out that adverse effects can be decreased by using high grade steel and concrete for the prestressing elements.

R é s u m é

Les procédés de construction pouvant diminuer l'influence du fluage,du retrait et de la température seront répartis en trois groupes:

1) A la formation de l'ouvrage, il est décrit l'influence que jouent le choix de la section, de l'élancement, de la disposition, de la construction des piliers pour les ponts en cadre, du degré de précontrainte de même que l'isolation à la chaleur.

2) A la construction, toutes les influences peuvent être réduites par la construction en éléments préfabriqués, par le montage en encorbellement, pour le procédé d'assemblage et de poussée dit "progressif", par la mise en charge tardive des éléments précontraints, par le déplacement des appuis, par la charge de précontrainte, ainsi que par le refroidissement du béton.

3) Du côté des matériaux, le constructeur peut diminuer cette influence par le choix d'aciers précontraints spéciaux, de même que par un des meilleurs bétons.

II

On the Design Provisions for Thermal Stresses

A propos des réserves de configuration des tensions thermiques

Über Vorkehrungen beim Entwurf für thermische Spannungen

KAZUO OHNO MAMORU OBATA
Professor Associate Professor
Faculty of Engineering
Hokkaido University
Japan

I. General feature of the thermal stresses in rectangular rigid frames with uniform spans and heights

1) Introduction

When some temperature difference occurs between the overground frames and footing tie-beams, both of the beams and footing tie-beams will be subjected to certain axial forces, because they are mutually constrained by being rigidly connected to the columns. These axial forces increase with the increase of the number of spans and with the increase of relative stiffness of columns, and cause the secondary length change of beams and footing tie-beams. It is evident that the axial forces of beams and footing tie-beams in the vicinity of the central part of frames will be larger than those of the external part of the frames, and that the "slopes" and the "deflections" of members would be different at each frame joint.

Some analyses of these kinds of thermal stresses were developed by the authors under the following assumptions:

(i) the structures consist of rectangular rigid frames with uniform spans and heights, and the beams and the columns have the respectively same dimension for the same story.

(ii) the whole members of the overground frames are exposed to the same temperature and a certain temperature difference exists between the overground parts of frames and underground parts.

(iii) the length change of columns is neglected, because the axial stress of the column caused by thermal deformation is usually very small. And also the length change of members caused by shearing stress and bending moment is neglected.

2) Effect of relative stiffness ratio of beam on the thermal bending moments

The thermal bending moments of one-storied frames of 1~8 spans, the columns of which are perfectly fixed on the ground,

are theoretically derived after the "slope-deflection method". The thermal bending moments can be expressed as a function of the following terms:

k_b = relative stiffness ratio of beam,
$B = 6K_0 l/Ah^2$,
$C = 6EK_0 \alpha t_e l/h$,

where

K_0 = stiffness of column (taken as the standard stiffness),
l = length of beams and footing tie-beams,
A = sectional area of beam including floor slab,
h = length of column,
E = elastic modulus of the material of frame,
α = thermal expansion coefficient of material,
t_e = effective temperature difference between the overground frame and its footing or footing tie-beam.

In the case of a frame without floor slab,
$B = (d/h)^2 / 2k_b$, where d = depth of beam.

Several examples of the relation between M/C and k_b are obtained by taking d/h as a parameter. When the length change of beam due to an axial force is not taken into consideration, d/h must be zero. In this case, M/C shows the largest value, if k_b is kept equal. It is also found that the value of M/C increases with the increase of the value of k_b. And M/C has a tendency to converge to a certain value for each frame, when k_b becomes comparatively large.

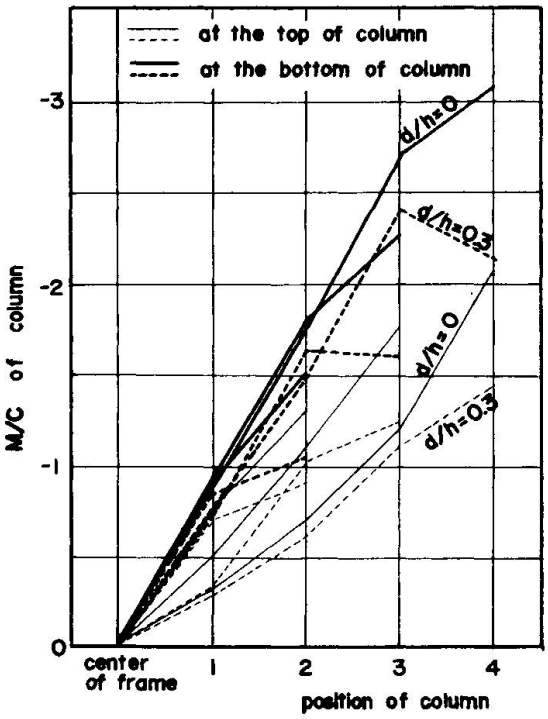


Fig.1 M/C of each column of 1-storied frames of 2 ~ 8 spans.

Fig.1 shows an example of the feature of thermal bending moments of each column of those frames analyzed here. When the other conditions are equal, the larger the number of spans, the larger the thermal bending moments of the columns. In the case of 8-spanned frames, the bending moments in columns excepting two columns at the end show approximately a linear variation. Further, the bending moment in each column tends to change by the value of d/h. The value of M/C of the end column would not always be the largest for a certain value of d/h.

Since the thermal stresses are deeply related with the stiffness of members as is described above, the partitions and the walls with openings which are usually treated not to share the force, must also be taken into consideration in the case of the accurate calculation.

3) The effect of the numbers of stories

Another theoretical analysis is attempted for frames with two spans and 2~4 stories, according to the "slope-deflection method". The thermal bending moments are also expressed as the functions of k_b, d/h and C, by neglecting the presence of floor slab. Some examples of the relation between M/C and k_b are shown in Fig.2. The results of analyses show that:

(i) thermal bending moments of beams and columns are the largest at the first story and decrease rapidly toward upper stories, and they can be practically neglected for the stories upper than the third floor,

(ii) in the most external column, the sign of shearing force in the second story is opposite to that in the first story,

(iii) when the number of story is larger than three and k_b is larger than about 1.0, the magnitude of thermal bending moments of beams and columns at the first and second stories do not vary so much.

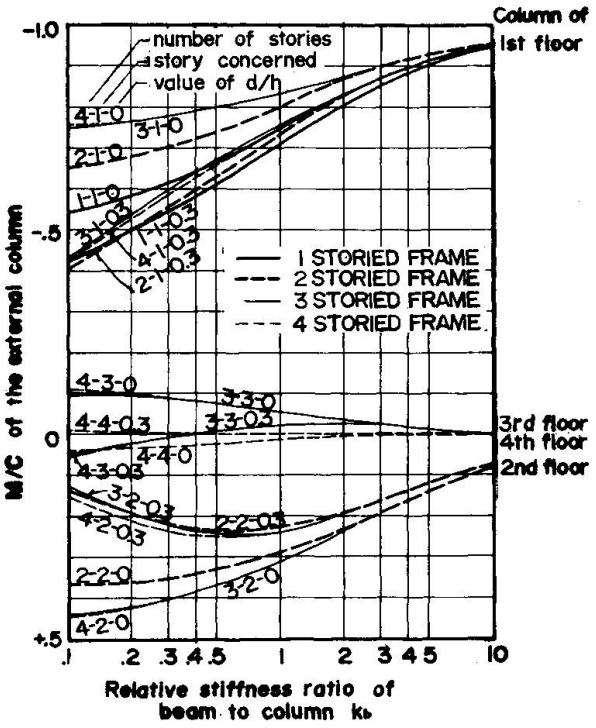


Fig.2 M/C of each column-bottom of 2~4 storied frames of 2 spans.

Consequently, it is comfirmed that the features of thermal bending moments of multi-storied frames are approximately represented by those of the two-storied frames.

TABLE 1. Shearing forces of columns of one-storied frame (ton)

condition of footing	column				
	center	No. 2	No. 3	No. 4	external
I perfectly fixed	1.16 (1.52)	2.39 (1.45)	3.75 (1.44)	5.52 (1.37)	5.45 (1.74)
II semi-fixed	1.085 (1.41)	2.228 (1.35)	3.443 (1.32)	5.513 (1.28)	4.033 (1.29)
III movable in horizontal direction	0.770 (1.00)	1.047 (1.00)	2.609 (1.00)	4.040 (1.00)	3.128 (1.00)
IV movable in any direction	0.0001 (0.0001)	0.0002 (0.0001)	0.0013 (0.0005)	0.0304 (0.0075)	0.2909 (0.093)

dimension of frame: $l = 6.5$ m $h = 3.0$ m
column 50×50 cm² $E = 210\,t/cm^2$
beam 30×50 cm² $\alpha = 12\times10^{-6}$
footing beam 30×70 cm² $t = 10°C$

The figures in the blackets show the ratios of shearing forces by taking (III) case as a standard.

Fig.2 can be also applied for the top story, the roof floor of which is subjected to a different temperature.

4) The effect of the fixing conditions of foundation

The authors' observation on the movement of an actual one-storied building showed a considerable amount of displacement of foundation. A theoretical analysis is attempted on four kinds of fixing conditions of foundation:

(i) footing is perfectly fixed,
(ii) footing cannot move, but can rotate corresponding to the stiffness of footing tie-beam (semi-fixed condition),
(iii) footing can move in the horizontal direction and can rotate in the same way as (ii),
(iv) footing can move in any direction and can rotate in the same way as (ii).

Table 1 shows the results of numerical computations with the theoretical formulae under these four conditions. It can be seen that the thermal bending moments would remarkably decrease with the decrease of restraint of the footing. The semi-fixed condition is recommended for the practical estimation of the thermal bending moments.

II. The charts for estimating thermal bending moments

The thermal bending moments of 240 rectangular frames of two-storied buildings were numerically computed for various parameters: total number of spans, span length, story height, k_b, k_f (relative stiffness ratio of footing tie-beam), B and M/C. The charts for practical estimation of thermal bending moments are prepared in Fig.3 based on these results. In the charts, bending moments at the third floor are neglected, since they are very small.

For the application of the charts, determine the parameters k_b, k_f, k_f/k_b, B and C at first. Second, determine the coefficients η_1, η_2, from the charts.

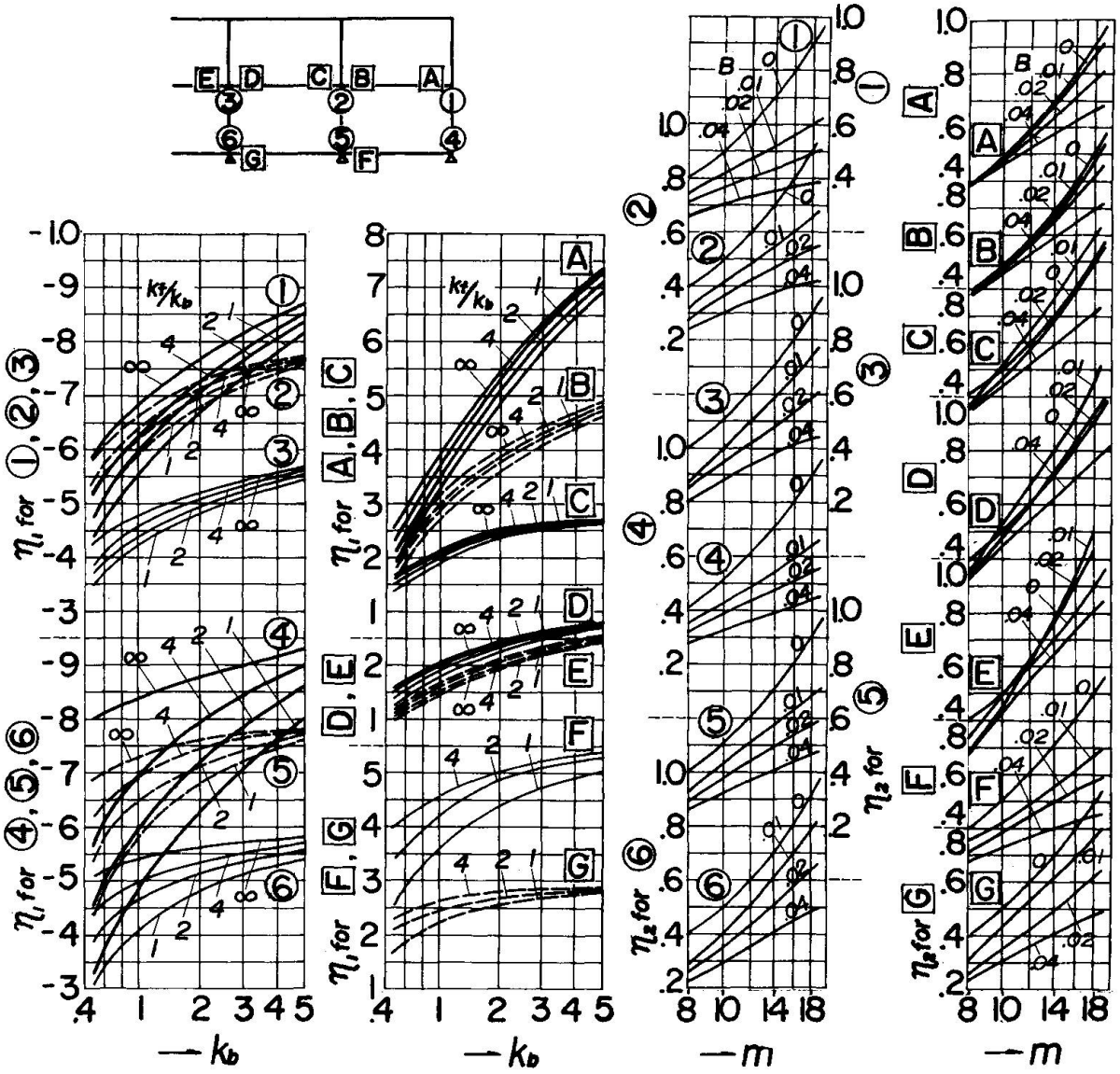
Then, the bending moment will be given by

$$M = \eta_1 \times \eta_2 \times C$$

The bending moments at the outside end of footing tie-beams and those at the column bottoms in the second story can be determined according to the equilibrium of moment at each joint.

In the case of the frames with an even number of spans, the moment of center columns must be zero. In the case of the frames with an odd number of spans, the bending moments of members excepting the two columns at the end span can be determined under the assumption that their magnitudes are in proportion to the distance from the imaginary center column which will be conveniently assumed to exist at the midpoint of the frame.

When one intends to estimate the bending moments of one-storied frames, the coefficients η_1 and η_2 for two-storied frames with the same number of spans in the charts must be applied. Calculate all of the bending moments. Then distribute again the obtained bending moment at the column bottom in the second story to the beams connected at the joint proportionally to the respective stiffness ratio.



The charts for η_1 The charts for η_2

Fig.3 Charts for estimating the thermal bending moments

M = $\eta_1 \times \eta_2 \times C$: thermal bending moment
B = $6K_0 l/Ah^2$
C = $6EK_0\alpha te\, l/h$
kb = relative stiffness ratio of beam
kf = relative stiffness ratio of footing tie-beam
m = number of spans

Note: For the columns of the 2nd story,
(i) bottom moment must be determined by the equilibrium at each joint,
(ii) top moment can be neglected.

III. The temperature difference to be employed for design

It is already known by theoretical analysis on structures of perfect elasto-plastic material that a structure does not collapse due to a monotonous increase or decrease of temperature so far as the temperature difference is not large. On the other hand, it has also been reported that a repetition of temperature changes may sometimes cause a cyclic collapse or incremental collapse of structures. Therefore, the value of amplitudes of repeating temperature changes are most important for elasto-plastic structures.

In the case of reinforced concrete structures, it has been proved experimentally that the elasto-plastic theory can be applied under some limited conditions. However, the theory can not be applied when a local failure of concrete structure would be caused by the shear failure. In such a case, the absolute value of temperature change, which gives the maximum stresses in the frame, becomes important.

In respect to the temperature difference for practical design, the concept of effective temperature, which is derived by the results of observations on the actual structures, is recommended. Probably in summer or in winter the mean temperature of structural members of the building which has not air conditioning in rooms would almost be equal to the mean atmospheric temperature. On the other hand, the result of the observation shows that the maximum magnitude of daily movement of the reinforced concrete building corresponds to the value estimated for about two-thirds of the daily difference of atmospheric temperature. Therefore, the "effective temperature" in annual range may be expressed by the following form (Fig.4):

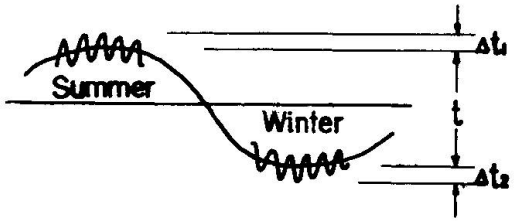


Fig.4

$$t_e = t + 2(\Delta t_1 + \Delta t_2)/3$$

where, t : the largest annual amplitude of daily mean temperature,
Δt_1 : one half of the daily amplitude at the annual maximum point of daily mean temperature,
Δt_2 : one half of the daily amplitude at the annual minimum point of daily mean temperature.

From summer to winter, the structures tend to contract following the fall of temperature, and the axial stresses of beams also shift to tension. In the case of reinforced concrete, tensile cracks will occur in the beams and floors in this process and the deformation of the structure will be somewhat relaxed. Dry shrinkage of concrete would further this tendency of cracking.

On the other hand, the stresses due to a temperature change in a long term or the stresses caused by dry shrinkage should be affected by the creep properties of concrete. When the effects of creep of concrete is taken into account, the stress analysis for

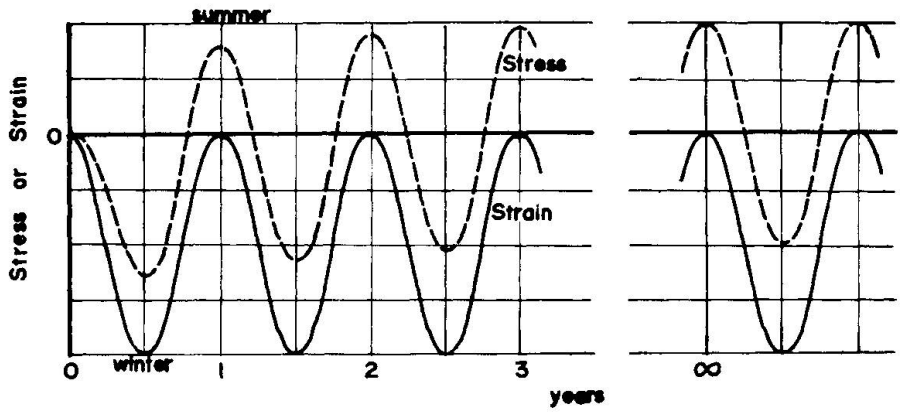


Fig.5

repeating temperature changes lead to the conclusion that the thermal stresses of buildings will approach to the values which can be obtained from the elastic analysis for one half of the effective temperature as is shown in Fig.5. A large part of this process is attained in the first year after construction.

When both of the stresses due to dry shrinkage and the temperature difference are to be taken into consideration, the following two kinds of stresses must be superposed:

(i) the stresses due to dry shrinkage including the effects of creep,

(ii) the thermal stresses for one half of the effective temperature.

Summary

General features of thermal stresses of the rectanglar rigid frames to be caused by a temperature difference between the overground part and the foundation is described. Some charts for estimation of thermal bending moments were proposed. Also, the temperature which should be applied for the computation of thermal stresses is discussed based on the measurements of thermal length change of the actual buildings.

Résumé

Nous avons décrit les caractéristiques générales des forces thermiques agissant dans un cadre rigide rectangulaire et causées par une différence de température entre la partie supérieure et la fondation. Quelques diagrammes se rapportant à l'estimation des moments de flexion dus à la température sont présentés. Aussi la température qui devrait être appliquée pour le calcul des forces thermiques est soumise à une analyse basée sur les mesures des variations thermiques de longueur dans les constructions actuelles.

Zusammenfassung

Es werden die Hauptmerkmale thermischer Spannungen rechteckiger, steifer Rahmen beschrieben, welche aus Temperaturdifferenz zwischen Ueber- und Unterbau entstehen. Für die Schätzung der thermischen Biegemomente werden einige Schaubilder vorgeschlagen. Ebenso wird die für die Rechnung der thermischen Spannungen anzunehmende Temperatur anhand von Messungen an bestehenden Brücken diskutiert.

II

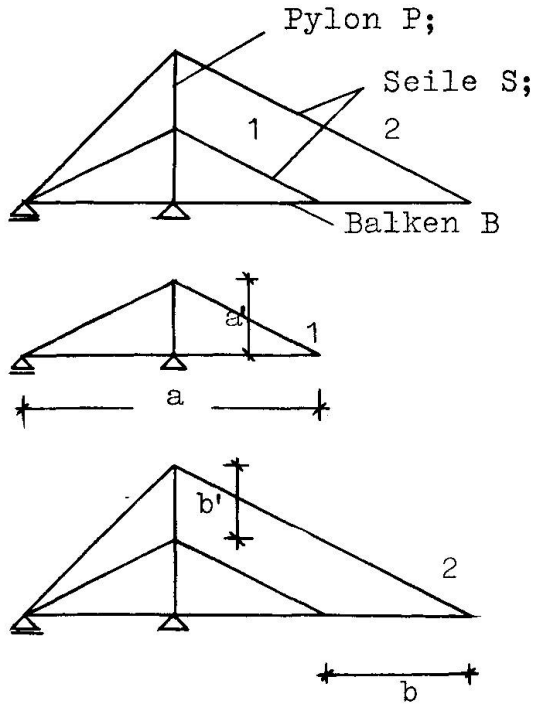
Einfluss von Schwinden und Kriechen auf seilabgespannte Betonbalken

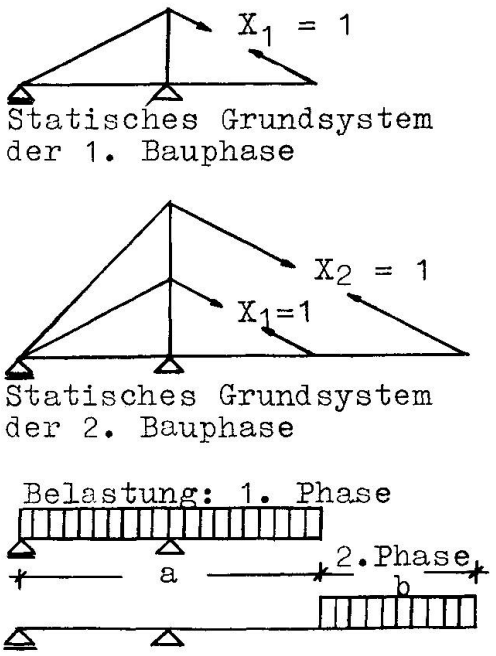
Influence of Shrinkage and Creep on Concrete Beams Suspended from Inclined Cables

Influence du retrait et du fluage sur les poutres en béton, suspendues par des câbles inclinés

F. BAUER
Dipl.Ing.Dr.techn.o.Prof.
Technische Hochschule Graz
Oesterreich

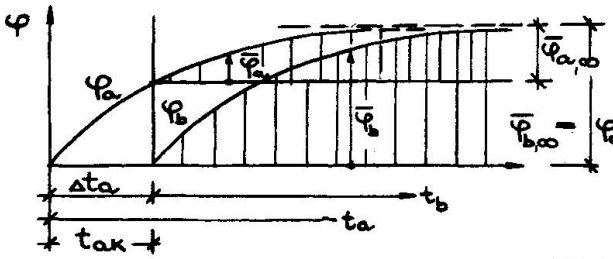
Werden Stahlbeton- oder Spannbetonbalken zur Erzielung großer Spannweiten mit Schrägseilen aus Stahl abgespannt, so treten durch die Kriecherscheinungen des Betons Veränderungen der Schnittkräfte infolge der ständigen Belastung auf. Zur Veranschaulichung der Verhältnisse wird ein einfaches, zweifach statisch unbestimmtes System gewählt. Die gewonnenen Ergebnisse werden dann verallgemeinert.





Die Seile gleiten am Pylon, sodaß im Pylon, wenn man von Reibungskräften absieht, keine Biegemomente entstehen. Das System wird abschnittweise hergestellt, zuerst die Abschnitte a und a' und dann werden die Teile b und b' angefügt. Zwischen der Herstellung der Balkenteile a und b und auch der Pylonenabschnitte a' und b' bestehe die Zeitdifferenz Δt. Die gleiche Zeitdifferenz bestehe zwischen dem Zeitpunkt der Lastaufbringung bzw. dem Anspannen der Seile.

Der Beton habe in den Abschnitten a und b, bzw. a' und b' die gleichen Eigenschaften. Hinsichtlich der Kriechfunktion gelte:



Beginn des Schwindens und Kriechens falle mit dem Zeitpunkt der Lastaufbringung $t_a=0$ bzw. $t_b=0$ zusammen.

Die Kriechfunktion sei $\varphi(t)=\varphi_\infty\cdot\varsigma(t)$ und gelte für den ganzen Träger. Wenn die beiden Abschnitte a und b zum Zeitpunkt $t_a=t_{ak}$ bzw. $t_b=t_{bk}$ miteinander verbunden werden, so gelte für das nach diesem Zeitpunkt noch vorhandene Kriechvermögen

$$\bar{\varphi}(t)= \varphi(t) - \varphi(t_k)$$

für den Balkenabschnitt a $\bar{\varphi}_a = \varphi_\infty\left[\varsigma(t_a)- \varsigma(t_{ak})\right]$

und für den Abschnitt b $\bar{\varphi}_b = \varphi_\infty\left[\varsigma(t_b)- \varsigma(t_{bk})\right]$

Nun ist $t_a=t_b+\Delta t_a$

$$\frac{\bar{\varphi}_a}{\varphi_b} = \frac{\varsigma(t_a)-\varsigma(t_{ak})}{\varsigma(t_b)} = \frac{\varsigma(t_b+\Delta t)-\varsigma(\Delta t_a)}{\varsigma(t_b)}$$

wird für $\varsigma(t)=1-e^{-\beta t}$ gewählt, so ist

$$\varsigma(t+\Delta t)=1-e^{-\beta\Delta t}\cdot e^{-\beta t} =1-ke^{-\beta t}$$

mit $k=e^{-\beta\cdot\Delta t}$

und es wird $\frac{\bar{\varphi}_a}{\varphi_b} = k_a = e^{-\beta\cdot\Delta t_a}$

Diese einfache Beziehung die eine weitere analytische Untersuchung bei Zeitdifferenzen der Abschnitte ermöglicht, wird nur mit dem Gesetz $\varsigma(t)=1-e^{-\beta t}$ erhalten. Für das Verhältnis $\frac{\varphi_{b,\infty}}{\varphi_{a,\infty}}$ wird $\frac{\varphi_{b,\infty}}{\varphi_{a,\infty}} = \gamma$ gesetzt.

Es werden nun folgende Belastungszustände untersucht:

1) Ständige Last g
2) Zwangskräfte $X_{i,z}$ (Seilverkürzungen)
3) Schwinden des Balkens und des Pylons

Am System der 1. Bauphase gilt:

Belastung $X_1=1$: $\delta_{11} = \delta_{11,a} + \delta_{11,a'} + \delta_{11,s_1}$

Belastung g: $\delta_{1g} = \delta_{1g,a} + \delta_{1g,a'}$ (Momente und Längskräfte berücksichtigt)

Seilverkürzung (Zwang): $\delta_{1z} = \delta_{1z,s_1}$

Schwinden (affin zum Kriechen): $\delta_{1s} = \frac{\delta_{13,\infty}}{\varphi_\infty} \cdot \varphi_a$

φ_a ist die Kriechzahl des Bauabschnittes a von der Zeit der Lastaufbringung an gerechnet. Zum Zeitpunkt $t_a=0$ ist:

$X_{1g,0} = -\frac{\delta_{1g}}{\delta_{11}}$; $X_{1z,0} = -\frac{\delta_{1z}}{\delta_{11}}$; $X_{1s,0}=0$;

Die gegenseitige Verschiebung der Schnittufer bei 1 am statisch bestimmten Grundsystem ist nun bei Berücksichtigung der Kriecheinflüsse und unter Bedachtnahme darauf, daß die statisch unbestimmte Größe X_1 zeitabhängig ist, da nur der Pylon und Balken, nicht aber die Seile kriechen:

$$\bar{\delta}_{1,g+z+s} = \delta_{1g,a}(1+\varphi_a) + \delta_{1g,a'}(1+\gamma\cdot\varphi_a) + \delta_{1z} + \frac{\delta_{13,\infty}}{\varphi_\infty}\cdot\varphi_a + \int_{\tau=0}^{t} \frac{dX_1(\tau)}{d\tau}\cdot\{\delta_{11} + \delta_{11,a}[\varphi_a(t)-\varphi_a(\tau)] + \delta_{11,a'}\cdot\gamma[\varphi_a(t)-\varphi_a(\tau)]\}d\tau$$

In jedem Zeitintervall dt_a muß die Klaffung verschwinden. Es muß somit $\frac{d\bar{\delta}_1}{dt_a}\cdot dt_a = 0$ sein.

$$\frac{d\bar{\delta}_1}{dt} = \delta_{1g,a}\frac{d\varphi_a}{dt} + \delta_{1g,a'}\cdot\gamma\cdot\frac{d\varphi_a}{dt} + \frac{\delta_{13,\infty}}{\varphi_\infty}\frac{d\varphi_a}{dt} + X_1(t_a)[\delta_{11,a}+\gamma\cdot\delta_{11,a'}]\frac{d\varphi_a}{dt} + \frac{dX(t)}{dt}\cdot\delta_{11} = 0$$

Daraus erhält man die Diff.-Gleichung für $X_1(t)$

$$\frac{dX_1}{d\varphi_a} + \frac{\delta_{11,a}+\gamma\cdot\delta_{11,a'}}{\delta_{11}}\cdot X_1 + \frac{\delta_{1g,a}+\gamma\cdot\delta_{1g,a'}}{\delta_{11}} + \frac{\delta_{13,\infty}}{\varphi_\infty\cdot\delta_{11}} = 0$$

Die Lösung dieser Diff.-Gleichung ist

$$X_1 = C\cdot e^{-\lambda\varphi_a} - \frac{\delta_{1g,a}+\gamma\cdot\delta_{1g,a'}+\frac{\delta_{13,\infty}}{\varphi_\infty}}{\delta_{11,a}+\gamma\cdot\delta_{11,a'}} \text{ ; mit } \lambda = \frac{\delta_{11,a}+\gamma\cdot\delta_{11,a'}}{\delta_{11}}$$

Zur Zeit $t_a=0$ ist $X_1=X_{1,0}$; somit $C=X_{1g,0}+X_{1z,0}+\frac{\delta_{1g,a}+\gamma\cdot\delta_{1g,a'}+\frac{\delta_{13,\infty}}{\varphi_\infty}}{\delta_{11,a}+\gamma\cdot\delta_{11,a'}}$

Für die 1. Bauphase gilt:

$$X_1(t_a) = \left(X_{1g,0} + \frac{\delta_{1g,a}+\gamma\cdot\delta_{1g,a'}+\frac{\delta_{13,\infty}}{\varphi_\infty}}{\delta_{11,a}+\gamma\cdot\delta_{11,a'}} + X_{1z,0}\right)\cdot e^{-\lambda\varphi_a} - \frac{\delta_{1g,a}+\gamma\cdot\delta_{1g,a'}+\frac{\delta_{13,\infty}}{\varphi_\infty}}{\delta_{11,a}+\gamma\cdot\delta_{11,a'}} \qquad (1)$$

Bringt man zum Zeitpunkt $t_a=0$ eine Zwangskraft durch Verkürzung des Seiles 1 $X_{1z,0}$ auf, welche den Wert

$$X_{1z,0} = -X_{1g,0} - \frac{\delta_{1g,a}+\gamma\cdot\delta_{1g,a'}+\frac{\delta_{13,\infty}}{\varphi_\infty}}{\delta_{11,a}+\gamma\cdot\delta_{11,a'}}$$ hat,

dann treten keine Schnittkraftumlagerungen im Balken auf, da der Wert in der Klammer der Beziehung (1) verschwindet. Führt man die

Bezeichnungen ein:

$$-\frac{\delta_{1g,a}+\gamma\cdot\delta_{1g,a'}}{\delta_{11,a}+\gamma\cdot\delta_{11,a'}}=\bar{X}_{1g}\;;\quad -\frac{\delta_{1s,\infty}}{\delta_{11,a}+\gamma\cdot\delta_{11,a'}}=\bar{X}_{1s}$$

so wird

$$X_1(t_a)=(X_{1g,0}-\bar{X}_{1g}-\frac{1}{\varphi_\infty}\bar{X}_{1s}+X_{1z,0})\cdot e^{-\lambda\varphi_a}+\bar{X}_{1g}+\frac{1}{\varphi_\infty}\cdot\bar{X}_{1s}$$

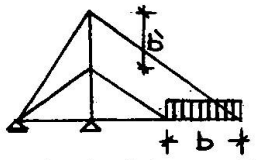
wobei $\bar{X}_{1g}$ und $\bar{X}_{1s}$ jene Werte sind, welche man als statisch überzählige Größen bei starrem Seil ($\delta_{11,s}=0$) erhielte. Für den Lastfall g allein würde dies die starre Stützung des Balkens (Durchlaufträger) bedeuten, wenn die Verformungen aus den Längskräften vernachlässigt werden. Der Zwang (Verkürzung), der aufzubringen wäre, um X_1 zeitunabhängig zu erhalten ist

$$X_{1z,0}=\bar{X}_{1g}+\frac{1}{\varphi_\infty}\bar{X}_{1s}-X_{1g,0}$$

Alle Zustände, welche von diesem Zwang abweichen, werden bei diesem einfachen System nach der Funktion $e^{-\lambda\varphi}$ abgebaut und die Überzählige nähert sich dem Wert $\bar{X}_{1g}+\frac{1}{\varphi_\infty}\bar{X}_{1s}$, wenn $t_a\to\infty$ und $\lambda\varphi_a\to\infty$ geht. Das heißt je größer das Kriechvermögen und je steifer die Seile sind, desto eher wird dies erreicht.

Nun zurück zum allgemeinen Fall. Zum Zeitpunkt $t_a=t_{ak}\equiv t_b=0$ hat X_1 den Wert $X_{1,tka}$ erreicht, der aus (1) berechnet werden kann.

Für die zweite Bauphase, bei welcher im Balkenteil b und Pylonenteil b' die Belastung aufgebracht wird, erhalten wir



$$b\delta_{1g}=b\delta_{1g,a}+b\delta_{1g,a'}+b\delta_{1g,b}+b\delta_{1g,b'}$$

$$b\delta_{2g}=b\delta_{2g,a}+b\delta_{2g,a'}+b\delta_{2g,b}+b\delta_{2g,b'}$$

wobei diese Verformungswerte nur für die Belastung im Abschnitt b und b' am statisch bestimmten Grundsystem zu ermitteln sind.

Die Systemwerte am neuen statisch bestimmten Grundsystem (a+b) sind:

$$\begin{aligned}\delta_{11}&=\delta_{11,a}+\delta_{11,a'}+\delta_{11,b}+\delta_{11,b'}+\delta_{11,s_1}\\ \delta_{12}&=\delta_{12,a}+\delta_{12,a'}+\delta_{12,b}+\delta_{12,b'}+\delta_{12,s_1}\\ \delta_{22}&=\delta_{22,a}+\delta_{22,a'}+\delta_{22,b}+\delta_{22,b'}+\delta_{22,s_2}\end{aligned}\qquad(3)$$

Für eine zusätzliche Verkürzung des Seiles 1 erhält man die Verformung δ_{1z} und für eine Verkürzung des Seiles 2 δ_{2z}. Die Klaffungen infolge Schwinden als Funktion von φ bzw. t werden erhalten zu

$$\begin{aligned}\delta_{1s}&=\frac{\bar{\varphi}_a}{\varphi_\infty}(\delta_{1s,a}+\gamma\cdot\delta_{1s,a'})+\frac{\bar{\varphi}_b}{\varphi_\infty}(\delta_{1s,b}+\gamma\cdot\delta_{1s,b'})\\ \delta_{2s}&=\frac{\bar{\varphi}_a}{\varphi_\infty}(\delta_{2s,a}+\gamma\cdot\delta_{2s,a'})+\frac{\bar{\varphi}_b}{\varphi_\infty}(\delta_{2s,b}+\gamma\cdot\delta_{2s,b'})\end{aligned}\qquad(4)$$

oder $\delta_{13} = \frac{\bar{\varphi}_b}{\bar{\varphi}_\infty}\left[k_a \cdot \delta_{13,a} + \gamma \cdot k_a \cdot \delta_{13,\dot{a}} + \delta_{13,b} + \gamma \cdot \delta_{13,\dot{b}}\right]$

$\delta_{23} = \frac{\bar{\varphi}_b}{\bar{\varphi}_\infty}\left[k_a \cdot \delta_{23,a} + \gamma \cdot k_a \cdot \delta_{23,\dot{a}} + \delta_{23,b} + \gamma \delta_{23,\dot{b}}\right]$

Allgemein erhält man für ein n-fach statisch unbestimmtes System mit ${}_b\delta_{ig}$ und ${}_b\delta_{iz}$ als Belastungsglieder aus den Belastungen des zuletzt angefügten Abschnittes b die n Bedingungsgleichungen:

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \cdot \delta_{ik} + {}_b\delta_{ig} + {}_b\delta_{iz} = 0 \qquad (5)$$

aus welchen die Größen ${}_bX_{1,0}$, ${}_bX_{2,0}$ ----- ${}_bX_{n,0}$ bestimmt werden. Diese Werte sind den Werten $X_{i,tka}$ (i=1,2 .....), welche am vorhergehenden System ermittelt wurden, hinzuzufügen. Diese Summe bildet dann die Anfangswerte zur Zeit $t_b=0$ und diese Größen werden weiterhin $X_{1,0}$, $X_{2,0}$ ----- $X_{n,0}$ genannt.

Schreibt man die gegenseitigen Verschiebungen an den Schnittstellen i = 1 und 2 für ein 2-fach statisch unbestimmtes System (n=2) an, so erhält man nun für die Gesamtbelastung am Grundsystem als Funktion der Zeit bzw. von $\bar{\varphi}_b$

$$\bar{\delta}_{1,g+s+z} = \delta_{1g,a}(1+k_a\bar{\varphi}_b) + \delta_{1g,\dot{a}}(1+\gamma\cdot k_a\cdot\bar{\varphi}_b) + \delta_{1g,b}(1+\bar{\varphi}_b) + \delta_{1g,\dot{b}}(1+\gamma\cdot\bar{\varphi}_b) + \delta_{1z} + \frac{\bar{\varphi}_b}{\bar{\varphi}_\infty}\left[k_a\cdot\delta_{13,a}+\right.$$

$$\left.+\gamma\cdot k_a\cdot\delta_{13,\dot{a}}\right] + \frac{\bar{\varphi}_b}{\bar{\varphi}_\infty}\left[\delta_{13,b}+\gamma\cdot\delta_{13,\dot{b}}\right] + \int_{\tau=0}^{t}\frac{dX_1}{d\tau}\,\delta_{11}\left\{1+\frac{k_a\cdot\delta_{11,a}+\gamma\cdot k_a\cdot\delta_{11,\dot{a}}+\delta_{11,b}+\gamma\cdot\delta_{11,\dot{b}}}{\delta_{11}}\left[\bar{\varphi}_b(t)-\bar{\varphi}_b(\tau)\right]\right\}d\tau +$$

$$+\int_{\tau_0}^{t}\frac{dX_2}{d\tau}\,\delta_{12}\left\{1+\frac{k_a(\delta_{12,a}+\gamma\cdot\delta_{12,\dot{a}})+\delta_{12,b}+\gamma\cdot\delta_{12,\dot{b}}}{\delta_{12}}\left[\bar{\varphi}_b(t)-\bar{\varphi}_b(\tau)\right]\right\}d\tau$$

Differenziert man nach dt_b, so ergibt dies und Null gesetzt:

$$\frac{d\bar{\delta}_1}{dt_b} = \left[k_a(\delta_{1g,a}+\gamma\delta_{1g,\dot{a}})+\delta_{1g,b}+\gamma\cdot\delta_{1g,\dot{b}}\right]\frac{d\bar{\varphi}_b}{dt} + \frac{1}{\bar{\varphi}_\infty}\left[k_a(\delta_{13,a}+\gamma\cdot\delta_{13,\dot{a}}+\delta_{13,b}+\gamma\cdot\delta_{13,\dot{b}}\right] + \frac{dX_1}{dt}\delta_{11} +$$

$$+X_1\left[k_a(\delta_{11,a}+\gamma\delta_{11,\dot{a}})+\delta_{11,b}+\gamma\cdot\delta_{11,\dot{b}}\right] + \frac{dX_2}{dt}\delta_{12} + X_2\left[k_a(\delta_{12,a}+\gamma\cdot\delta_{12,\dot{a}})+\delta_{12,b}+\gamma\cdot\delta_{12,\dot{b}}\right] = 0$$

Führt man folgende Bezeichnungen, nun für ein n-fach statisch unbestimmtes System erweitert, ein

$$\begin{aligned}
\delta^*_{ig} &= k_a(\delta_{ig,a}+\gamma\cdot\delta_{ig,\dot{a}}) + k_b(\delta_{ig,b}+\gamma\cdot\delta_{ig,\dot{b}}) + \text{-------}\delta_{ig,\dot{s}} + \gamma\cdot\delta_{ig,\dot{s}} \\
\delta^*_{is} &= k_a(\delta_{is,a}+\gamma\cdot\delta_{is,\dot{a}}) + k_b(\delta_{is,b}+\gamma\cdot\delta_{is,\dot{b}}) + \text{------}\delta_{is,\dot{s}} + \gamma\cdot\delta_{is,\dot{s}} \\
\delta^*_{ik} &= k_a(\delta_{ik,a}+\gamma\cdot\delta_{ik,\dot{a}}) + k_b(\delta_{ik,b}+\gamma\cdot\delta_{ik,\dot{b}}) + \text{------}\delta_{ik,\dot{s}} + \gamma\cdot\delta_{ik,\dot{s}}
\end{aligned} \qquad (6)$$

so erhält man die n Diff.-Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{dX_k}{d\bar{\varphi}_b}\cdot\delta_{ik} + X_k\cdot\delta^*_{ik}\right) + \delta^*_{ig} + \delta^*_{is} = 0 \qquad (7)$$

Der homogene Teil dieses Gleichungssystems wird erfüllt mit dem Ansatz $X_i = C_{im}e^{-\lambda_m\cdot\bar{\varphi}_b}$; $\frac{dX_i}{d\bar{\varphi}_b} = -\lambda_m\cdot C_{im}\cdot e^{-\lambda_m\bar{\varphi}_b}$ (8)

Dies in die vorhergehende Gleichung eingesetzt ergibt für den homogenen Teil die Gleichungsgruppe: $\sum_{i,k=1}^{n} C_{k,m}(-\lambda_m\delta_{ik}+\delta^*_{ik}) = 0$ (9)

Von Null verschiedenen Lösungen für C_{km} bestehen, wenn die Koeffizientendeterminante zu Null wird, $\det|\Delta^*-\lambda\Delta| = 0$ mit

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} \delta_{11}^* & \delta_{12}^* & \dots & \delta_{1n}^* \\ \delta_{21}^* & \delta_{22}^* & \dots & \delta_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1}^* & \delta_{n2}^* & \dots & \delta_{nn}^* \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix}$$

Aus dem Nullsetzen der Determinante folgen die n Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ und mit ihnen aus dem homogenen Gleichungssystem die Verhältnisse der Koeffizienten zueinander $\frac{C_{km}}{C_{im}}$.

Dieses Verhältnis kann auch als Quotient von Minoren der Matrix des homogenen Gleichungssystems berechnet werden. Es ist

$\frac{C_{km}}{C_{im}} = \frac{M_{kk}}{M_{ik}} = \frac{M_{ki}}{M_{ii}}$,wobei M_{ik} der zum Element-$\lambda_m \delta_{ik} + \delta_{ik}^*$ gehörende Minor der Matrix-$\lambda_m \Delta + \Delta^*$ ist. Eine partikuläre Lösung der Diff.-Gleichungen ist $X_i = D_i$ (zeitunabhängig), $\frac{dD_i}{d\varphi} = 0$. Die Größen D_i müssen die Gleichungen erfüllen

$$\sum_{k=1}^{n} D_k \cdot \delta_{ik}^* + \delta_{iq}^* + \delta_{is}^* = 0 \qquad (10)$$

und werden aus ihnen gewonnen.

Nun müssen noch die Konstanten C_{im} bestimmt werden, denn erst dann kann eine statisch überzählige Größe ermittelt werden.

$$X_i = C_{i1} e^{-\lambda_1 \bar{\varphi}_b} + C_{i2} e^{-\lambda_2 \bar{\varphi}_b} + \dots C_{in} e^{-\lambda_n \bar{\varphi}_b} + D_i \qquad (11)$$

Zur Zeit $t_b = 0$ erhält man aus dieser Gleichung mit $\varphi_b = 0$ n-Bedingungsgleichungen

$$X_{i0} = \sum_{m=1}^{n} C_{im} + D_i \qquad (12)$$

aus welchen im Verein mit den schon bekannten Verhältnissen C_{im}/C_{km} alle C_{im} berechnet werden können.

Fragt man nun wieder nach einem Zustand, für welchen die Schnittgrößen durch Kriecherscheinungen nicht verändert werden, so müßte nach (11) jeweils $C_{i1} e^{-\lambda_1 \bar{\varphi}_b} + C_{i2} e^{-\lambda_2 \bar{\varphi}_b} + \dots C_{in} e^{-\lambda_n \bar{\varphi}_b} = 0$ sein. Diese Bedingung ist für alle t-Werte nur erfüllt, wenn die Konstanten $C_{im} = 0$ sind. Das heißt jedoch, daß dann nach (12) $\bar{X}_{i,0} = D_i$ sein müßte. Da dies von vornherein aus dem Aufsummieren der einzelnen Bauzustände nicht der Fall sein wird, müssen zu den zur Zeit $t_j = 0$ vorhandenen Größen $X_{i,0}$ noch Zwangskräfte (Vorspannkräfte durch Seilverkürzungen) $\bar{X}_{iz,0}$ hinzugefügt werden, $\bar{X}_{iz,0} = D_i - X_{i,0}$ damit die Bedingung $\bar{X}_{i,0} = D_i$ erfüllt ist. Diese Korrektur muß jedesmal beim Anfügen eines neuen Abschnittes vorgenommen werden und zwar so, daß die statisch unbestimmten Größen (Seilkräfte) die Werte D_i annehmen, die sich dann bis zum Hinzufügen des nächsten Abschnittes nicht ändern.

Betrachtet man den Sonderfall, daß zwischen den Bauabschnitten keine Zeitdifferenz besteht und nimmt man weiters an, daß der Pylon das gleiche Kriechvermögen wie der Balken aufweist, dann

erhält man $\delta_{ik}^{*} = \delta_{ik,\text{Beton}}$ und $\delta_{ig}^{*} = \delta_{ig,\text{Beton}}$ am ganzen System. Da in den Bedingungsgleichungen (10) die Verformungswerte der Abspannseile nicht aufscheinen, entsprechen die $\delta_{ik,\text{Beton}}$ und $\delta_{ig,\text{Beton}}$ Werte den Verformungsgrößen bei starren Seilen und Herstellung der Betonteile in einem Guß (Lehrgerüstzustand ohne Zeitdifferenz der einzelnen Teile). Die D_i sind dann die statisch überzähligen Seilkräfte bei starren Seilen. Durch Zwangskräfte (Vorspannkräfte) kann dieser Zustand $X_i = D_i$ erreicht werden, wenn $X_{i,0} \neq D_i$ ist.

Berücksichtigt man in diesem Sonderfall nur die Verformungen aus den Momenten, dann werden die lotrechten Komponenten der Seilkräfte $S_{i,L} = D_i$ infolge der ständigen Lasten den Auflagerkräften eines in den Aufhängepunkten der Seile starr gestützten Durchlaufbalkens gleich.

Bei den vorliegenden Untersuchungen wurde angenommen, daß der Elastizitätsmodul des Betons konstant bleibt. K. Sattler und G. Nitsiotas haben einen Weg gewiesen, wie ein Anstieg des E-Moduls berücksichtigt werden kann. Der Weg der Berechnung bleibt grundsätzlich gleich wie hier gezeigt, doch muß ein anderer Ansatz zur Lösung der ähnlich gebauten Differentialgleichungen gewählt werden. Zu sehr brauchbaren Näherungswerten kommt man, wenn man die Differentialgleichungen mit folgenden Ansätzen umgeht, aus welchen sich sehr einfach die zusätzlichen zeitlichen Änderungen der Überzähligen über bestimmte Zeiträume ermitteln lassen.

$$\delta_{ig}^{*} \cdot \bar{\varphi} + \frac{\delta_{i0}^{*}}{\varphi_{\infty}} \bar{\varphi} + \sum_{K=1}^{n} X_{K,0} \delta_{iK}^{*} \cdot \bar{\varphi} + \sum_{K=1}^{n} X_{Kt} \left(\delta_{iK}^{*} \frac{\bar{\varphi}}{2} + \delta_{iK} \right) = 0$$

Auch hieraus sieht man, daß ein Zustand erreicht wird, dessen Schnittkräfte unverändert bleiben, wenn die Gleichungen

$\delta_{ig}^{*} + \frac{\delta_{i0}^{*}}{\varphi_{\infty}} + \sum_{1}^{n} X_{K,0} \cdot \delta_{iK}^{*} = 0$ erfüllt sind. (Siehe Gleichung (10)).

$X_{i,t}$ bedeutet hier, abweichend von den früheren Untersuchungen, nur die zeitliche Veränderung von X_i, nicht den Gesamtwert.

Noch bessere Werte erhält man nach K. Sattler mit dem Ansatz

$$\delta_{ig}^{*} \cdot \bar{\varphi} + \frac{\delta_{i0}^{*}}{\varphi_{\infty}} \bar{\varphi} + \sum_{K=1}^{n} X_{K,0} \delta_{iK}^{*} \bar{\varphi} + \sum_{K=1}^{n} X_{Kt} \left(\delta_{iK}^{*} \psi \bar{\varphi} + \delta_{iK} \right) = 0$$

mit

$$\psi = \frac{\bar{\varphi} - (1 - \bar{e}^{\bar{\varphi}})}{\bar{\varphi} (1 - \bar{e}^{\bar{\varphi}})} \approx 0{,}5 + 0{,}08 \bar{\varphi}$$

Literatur: B.Baule: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, 3. Auflage Hirzel, Leipzig 1944
R.Zurmühl: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, 3. Auflage, Springer Berlin 1961
K.Sattler: Theorie der Verbundkonstruktionen, Wilhlem Ernst und Sohn, Berlin 1959
H. Schmitz und R.Jetter: Planung und Bauausführung der Schiffahrtsöffnungen der Maracaibo Brücke in Venezuela, Der Bauingenieur 1963, Seite 283
F.Bauer: Zeitliche Änderungen der Schnittkräfte infolge Kriecherscheinungen bei Herstellung eines Bauwerkes in Abschnitten, Der Bauingenieur 1966, Seite 133
G.Nitsiotas:Kriechen und Schwinden bei statisch unbestimmten Betonkonstruktionen mit Tragteilen aus Stahl, Ingenieur Archiv 1954, Seite 323
E.Dimel: Schrägseilbrücken aus Beton als Sonderfall vorgespannter Betonkonstruktionen, IV.FIP-Kongreß, Kongreßbericht, Bd. 1, Thema II, Paper 20, Seite 400

Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, wie die Einflüsse von Schwinden und Kriechen des Betons auf die Beanspruchung eines mit Schrägseilen abgespannten Stahlbeton- oder Spannbetonbalkens ermittelt werden können. Weiters wurde ermittelt, wie die Schrägseile zu spannen sind, um Spannungszustände im Betonbalken zu erhalten, welche durch die Schwind- und Kriecherscheinungen nicht verändert werden.

Summary

It was shown how to determine the effects of concrete shrinkage and creep on the stress exerted on reinforced or prestressed concrete beams suspended from inclined cables. It was further examined how the inclined cables must be tensioned to obtain states of stress in the concrete beam which are not changed by the shrinkage and creep phenomena.

Résumé

Il a été montré de quelle manière on peut déterminer les influences du retrait et du fluage du béton sur les efforts exercés dans les poutres en béton armé et en béton précontraint, suspendues par des câbles inclinés. En outre, il a été étudié de quelle manière les câbles inclinés doivent être tendus afin d'obtenir dans la poutre en béton, des états de tension, qui restent constants malgré les phénomènes de retrait et de fluage.

II

Non-Uniform Drying Shrinkage in Reinforced Concrete

Retrait non uniforme dans le béton armé

Ungleichmässiges Schwinden im Stahlbeton

B. BRESLER D. HELMICH L.V. RAMAKRISHNA
USA

INTRODUCTION

Effects of shrinkage and creep in the design of reinforced concrete structures must be given proper consideration. Shrinkage and creep, as well as loading history, significantly influence cracking patterns and consequently affect the distribution of moments and forces in frames. Also, with increasing height of buildings, differential shortening of columns can have considerable effect on the bending moments in the connecting beams and slabs, particularly in the upper stories (1).

In most cases shrinkage is assumed uniformly distributed throughout the section of the member (2, 3). Actually, shrinkage is closely related to moisture diffusion with drying and therefore it varies throughout the section, particularly for large size members in which drying is confined to the exterior portion of the section (4).

The method presented here takes into account non-uniform shrinkage and provides a more accurate evaluation of the effects of member size and shape, and of varying load history on stresses and deformations. The distribution of non-uniform shrinkage is evaluated using diffusion as a mathematical model. Elastic and creep properties of concrete are taken from experimental data. Effects of shrinkage in plain and reinforced concrete prisms calculated by the method presented here agree well with experimental results. A summary of analytical results obtained from a study of shrinkage effects in reinforced concrete columns, in which the principal variables were column size, amount of reinforcement, and loading history, is presented. It is shown that non-uniform shrinkage must be considered if a reasonable evaluation of tension stresses in concrete is desired. Also, restrictions on minimum size and minimum and maximum amounts of reinforcement for concrete columns which are specified to control shrinkage effects are discussed.

EVALUATION OF STRESSES AND DEFORMATIONS

Numerical procedures for evaluating time-dependent internal stresses and deformations are based on geometric discretization of reinforced concrete

structural system, material behavior laws, and time-step incremental method of analysis (5, 6, 7, 8, 9, 10). A structural system is subdivided into segments which in turn are subdivided into elements of concrete and reinforcing steel. Initially a stress-free plane strain condition is considered. During a given time-step the increments of "free deformation" due to shrinkage, creep and temperature in each element may violate the plane strain condition as the free deformations are allowed to develop without any restraint from steel reinforcement or adjacent concrete elements. At the end of the time-step four conditions must be satisfied: (1) plane strain, (2) compatibility of all steel and concrete elements and of all segments, (3) equilibrium of internal and external forces, and (4) no tension on the cracked elements. This is accomplished by a set of correction stresses to all the elements and segments which are assumed to be applied instantaneously at the end of each time-step.

In each time-step the increment of "free deformations" in the elements represent the incompatibilities and are removed by applying forces ΔP_i such that the plane deformation which existed at the beginning of the time interval is reinstated. For each element the compatibility correction force is calculated using the known incompatibility deformation, the instantaneous modulus of the material and the effective area of the element. These correction forces disturb equilibrium which is restored by applying correction stresses to both concrete and steel acting in a composite fashion. The equilibrium correction stress-resultant must balance the sum of the compatibility correction resultant and the increment in the external loading. Stresses and deformations associated with the equilibrium correction are calculated using conventional methods.

The stresses and deformation at a given time are determined by summing up all the incremental values in the preceding time intervals. If calculated tensile stress in any concrete element exceeds the cracking limit value, then the element is assumed to crack and henceforth cannot carry any tensile stress. Another cycle of calculations at the end of the time-step must account for removal of tension from all "cracked" elements.

MATERIAL BEHAVIOR AND ENVIRONMENT

In calculating "free" deformations during a given time-step a material behavior model must be used which accounts for the effects of humidity and temperature. Bazant (11) proposed a thermodynamic theory for concrete deformation at variable temperature and humidity, which is the most general model proposed to date. However, lacking experimental data and confirmation, it could not be used in the present study. Therefore, in this study the following assumptions have been made regarding material behavior and the exposure conditions: (1) all elements are maintained at constant temperature throughout the intervals of time considered here (heat of hydration and other transient temperature conditions are neglected); (2) for a given time period the element is cured at 100% relative humidity during which no shrinkage or swelling takes place (thereafter the element is exposed to drying in a constant humidity environment); (3) concrete deforms as a linear viscoelastic material, exhibiting strong ageing in creep deformation and weak ageing in elastic deformation, and the principle of superposition is used to evaluate time-dependent deformation; (4) steel reinforcement behaves as a linear elastic material; and (5) free shrinkage of concrete can be calculated using mathematical model of diffusion.

SHRINKAGE DIFFUSION

Carlson (4) and Pickett (12) proposed that free shrinkage of concrete be treated as a "substance" obeying laws of diffusion, and that the amount of

free shrinkage at any given time be determined by the "shrinkage diffusivity" of the material, the shape of the body, the boundary conditions defined by the surface factor, and the initial and the final state of the body. Pickett emphasized that diffusion theory for free shrinkage of concrete is not based on a physical model of shrinkage, but he suggested that shrinkage might be closely predictable by this mathematical model if the material and ambient conditions are characterized by properly selected values of diffusivity and surface factor.

For a rectangular prism drying from four faces but not from the ends the diffusion equation is as follows:

$$K \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial S}{\partial t} \qquad 1$$

where K = diffusivity coefficient of shrinkage in square inches per day, S = free unrestrained unit linear shrinkage strain under constant ambient conditions, and x, y = rectangular coordinates. The exposed faces of the prism are the planes $y = \pm b$, and $x = \pm c$, and the boundary conditions then become:

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \pm \frac{f}{K} (S_\infty - S) \qquad @ \quad y = \pm b \qquad 2a$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \pm \frac{f}{K} (S_\infty - S) \qquad @ \quad x = \pm c \qquad 2b$$

where S_∞ = final unrestrained shrinkage strain under constant ambient conditions, i.e. value of S when $t = \infty$, and f = surface factor, characteristic of the material and the boundary conditions, in inches per day. The solution satisfying equations 1 and 2 are given in (12).

As drying proceeds the value of K, the coefficient of shrinkage diffusivity, decreases and based on Pickett's study it can be approximated as follows:

$$K = 0.10 \sqrt{\frac{2}{2+t}} \text{ sq. in./day.} \qquad 3$$

This coefficient is not the same for all concretes and all exposure conditions, and its variation requires further study. However, for temperatures of about 70°F and atmospheric exposure of about 50 percent relative humidity the values obtained using equation 3 gave reasonably good results in this study as well.

The boundary conditions describe the shrinkage gradient at the boundary. When $S = S_\infty$ the gradient is zero; when $S = 0$ the gradient is proportional to S_∞. The surface factor f also decreases as drying proceeds, although the precise nature of this variation is difficult to determine. Assumption that f is directly proportional to K greatly simplifies the solution of the diffusion equation, and is justified as it apparently provides reasonably good agreement with experimental data. The following equation of proportionality has been used in this study.

$$f = 1.67 \text{ K in./day} \qquad 4$$

The shrinkage S is "free shrinkage" not the "apparent" or "restrained" shrinkage observed in a drying concrete prism. The observed deformation of an unloaded drying prism is the result of "free shrinkage" combined with deformations developing as a result of internal stresses induced by the non-uniform shrinkage.

ELASTIC AND CREEP PROPERTIES OF CONCRETE

Experimental evidence indicates that within the working stress range concrete in compression exhibits essentially linear load-deformation characteristics both with respect to instantaneous and time-dependent deformations. However, during the initial months (often 6 to 9 months) of service these characteristics, particularly creep, are strongly dependent on ageing. Also, experimental evidence indicates that "superposition principle" gives a reasonably good approximation of concrete even under variable loading (13, 14). A mathematical model of this behavior is usually represented by an integral equation:

$$\varepsilon(t) = \int_{t_o}^{t} C(t, \tau)\, d\sigma(\tau) \qquad 5$$

where t_o is the time of initial loading, i.e., the concrete is stress free prior to t_o, $\varepsilon(t)$ is the accumulated strain observed at time t due to a variable stress $\sigma(\tau)$, and the function $C(t, \tau)$ is a characteristic of the material independent of loading.

Experiments performed at University of California, Berkeley, in which cylindrical concrete specimens (6 in. diameter, 18 in. long) were loaded at different ages and the instantaneous and long-time deformations were measured, provided the data for which the following expression gives a close fit and is used in the present study.

$$C(t, \tau) = \left[\frac{0.333\times10^{-3}}{t} - \frac{0.306\times10^{-4}}{\sqrt{t}} + 0.221\times10^{-3}\right] + \left[0.1096 - \frac{0.1715}{\tau^{0.85}} + \frac{34.4316}{\tau^{1.7}} - \frac{433.9611}{\tau^{2.55}} + \frac{1260.859}{\tau^{3.40}}\right]$$
$$\cdot\left\{0.991\left[1 - e^{-0.2(t-\tau)}\right] + 2.06\left[1 - e^{-0.02(t-\tau)}\right] + 1.125\left[1 - e^{-0.002(t-\tau)}\right]\right\} \times 10^{-3} \qquad 6$$

COMPUTER PROGRAM

A program has been written for a CDC 6400 computer for evaluation of stresses and strains in steel and concrete in square columns symmetrically reinforced subjected to time-variable axial load. The input data consists of concrete and steel material properties, specified number of days per time-step, number of time intervals over which the analysis is carried out, size of column, number of elements into which the cross section is divided, area of steel reinforcement, load history and duration of initial curing period. Calculation of relative values of free shrinkage, (S/S_∞), is carried out using a computer program sub-routine based on a diffusion model with drying on four faces. A quadrant of a square section is subdivided into 25 elements and shrinkage values are calculated at the node points of the elements, midway between these, and at the center of each area. The computer output prints out stresses and strains in concrete and steel at each time interval.

COMPUTER SOLUTIONS AND EXPERIMENTAL RESULTS

Plain Concrete Prisms

Free Shrinkage (calculated values). Free shrinkage values were calculated at 5-day intervals up to 185 days after concrete was exposed to drying at age of 15 days. Square sections with 6, 10, 16, and 20 inch sides were investigated. Values of (S/S_∞) along the y-axis (x = 0) and the face of the section (y = b) are shown in Table 1 for 6 in. and 20 in. sections at 5, 35, and 185 days after drying.

Table 1. Relative Values of Free Shrinkage S/S_∞

Location	Prism Axis (x = 0)						Prism Face (y = b)					
Prism Size, in.	6			20			6			20		
Days After Drying	5	35	185	5	35	185	5	35	185	5	35	185
Age, Days	20	50	200	20	50	200	20	50	200	20	50	200
(y/b) or (x/c)												
0.0	.000	.031	.280	.000	.000	.000	.531	.684	.809	.531	.679	.774
0.2	.000	.045	.302	.000	.000	.000	.532	.689	.815	.532	.679	.774
0.4	.004	.095	.369	.000	.000	.001	.534	.705	.832	.532	.679	.774
0.6	.035	.207	.479	.000	.001	.023	.548	.741	.867	.532	.680	.779
0.8	.175	.403	.629	.002	.058	.201	.614	.805	.901	.533	.698	.820
1.0	.531	.684	.809	.531	.679	.774	.781	.897	.949	.780	.897	.945

It is noteworthy that after 5 days drying shrinkage proceeds only to about 1.5 inches from the surface in both 6 and 20 inch prisms. At the age of 200 days substantial drying shrinkage exists over the entire section of the 6-in. prism but in the 20-in. prism only the outer 5 in. of concrete has experienced shrinkage. The shrinkage of the concrete on the surface of the prism initially proceeds very rapidly: in 5 days more than half of the ultimate shrinkage takes place in both the 6-in. and 20-in. prism surfaces. In the interior shrinkage takes place more slowly: for example in the 20-in. prism in the 50 to 200 day interval shrinkage extended a distance about 0.1b, from about 4 inches to about 5 inches from the surface.

Restrained Shrinkage (calculated and observed values). Using equation 6 for the elastic and creep characteristics of concrete and free shrinkage calculated by diffusion equation, values of apparent (restrained) shrinkage were calculated for 6-in. prisms using $S_\infty = 1000 \times 10^{-6}$ and the computer program described above. These were compared with the shrinkage values measured on the unloaded 6-inch cylindrical specimens used as controls for the study of deformation under load. The calculated and observed results are shown in Fig. 1 and seem to be in good agreement. Consequently, the values of diffusivity K and of surface factor f defined by equations 3 and 4 are considered appropriate for the concrete used in this study.

Reinforced Concrete Columns

Calculated and Observed Values. Results obtained analytically for 6-in. square column with 1.17 percent and 4.67 percent reinforcement, cured wet for 28 days and subjected to 0.93 the allowable load at age 28 days are compared in Fig. 2 with the experimental results (15) for 6-in. diameter columns with the same percentages of reinforcement, curing period, and loading conditions. Comparison is made in terms of the load carried by concrete. Considering the differences between the shapes of the specimens and the probable differences in material properties of test specimens and the properties assumed in this study, the agreement appears to be good. Unfortunately no data are available regarding appropriate values of K, f, S_∞, and $C(t, \tau)$ for the test specimens, so that a more reliable evaluation of the analytical method is not possible.

Influence of Column Size, Amount of Reinforcement, and Different Load Histories. Influence of several variables on the stresses in and deformations of square reinforced concretes columns due to non-uniform shrinkage and different load histories was investigated analytically. The principal variables were colum size, amount of reinforcement and loading history. Four column

sizes were studied: 6-in., 10-in., 16-in. and 20-in. For each of these sizes two percentages of reinforcement were used (2% and 8%) and two loading histories were considered for each of these eight columns. In one case no external load was imposed on the section up to 200 days, but the columns were exposed to drying at the age of 15 days. This is a condition which may occur in a precast column which is wet cured for 15 days and then stored under drying conditions for a period of time up to 200 days. In the second case one-half of the allowable axial compression load (based on ACI WSD criteria) was applied at the age of 20 days and sustained up to the age of 200 days. The case of incremental increase in external load (9, 15) was not considered in this study, but it is clear that it would give results somewhere in between the two loading cases considered here provided that the maximum sustained load did not exceed the value used in this study.

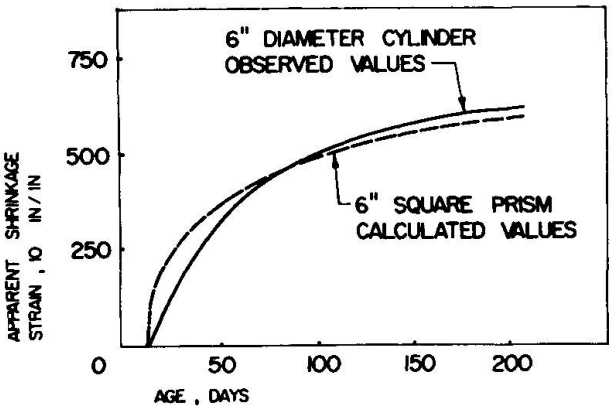


FIG. 1

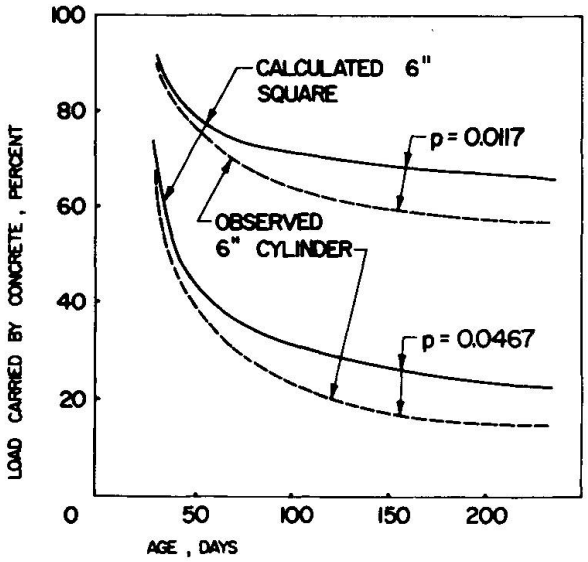


FIG. 2

The effects of cracking were neglected in this study. Members subjected to axial compression may develop tension stresses due to shrinkage over a relatively small portion of the outer perifery of the cross-section. It is assumed that either these stresses are sufficiently small so that no cracking occurs, or if cracking occurs over a small area, then its overall effect is small.

The steel reinforcement was assumed to have a yield strength of 40 ksi and elastic modulus of 29,000 ksi. The concrete deformation properties based on experimental data regarding creep, were characterized by $C(t, \tau)$ defined by equation 6.

For the square columns used in the study the following variables were examined: (a) stresses in the concrete face, (b) stresses in the concrete core, (c) stresses in steel reinforcement, and (d) deformation (shortening). Typical results are shown in Table 2.

CONCLUDING REMARKS

Free shrinkage of concrete associated with moisture diffusion during drying occurs primarily in the outer periphery of the section. The non-uniform distribution of this free shrinkage and the requirement for plane strain deformation induce tensile and compressive stresses in concrete prisms. The uniform

"apparent" shrinkage is the combined result of the free shrinkage and the instantaneous and creep deformations caused by the induced stresses.

Table 2. Stresses and Deformations in Reinforced Concrete Columns

(+) is tension, elongation (-) is compression, shortening

Loading	No External Load				0.5 Allowable Load			
Column Size, in.	6		20		6		20	
Reinforcement Ratio	0.02	0.08	0.02	0.02	0.02	0.08	0.02	0.08
Age*, days	Stresses (ksi) in concrete face (x = 0.1c, y = 0.9b)							
20	+ 1.64	+ 1.80	+ 0.41	+0.43	+ 1.00	+ 1.07	- 0.23	- 0.29
50	+ 0.85	+ 1.07	+ 0.71	+0.77	+ 0.29	+ 0.58	+ 0.15	+ 0.28
200	+ 0.54	+ 0.83	+ 0.75	+0.85	+ 0.03	+ 0.42	+ 0.24	+ 0.45
	Stresses (ksi) in concrete core (x = 0.1c, y = 0.1b)							
20	- 0.58	- 0.42	- 0.09	-0.07	- 1.22	- 1.15	- 0.73	- 0.79
50	- 0.44	- 0.21	- 0.16	-0.09	- 0.99	- 0.70	- 0.71	- 0.59
200	- 0.10	+ 0.19	- 0.21	-0.11	- 0.61	- 0.22	- 0.72	- 0.52
	Stresses (ksi) in steel reinforcement							
20	- 4.10	- 2.99	- 0.64	-0.47	- 8.64	- 8.14	- 5.18	- 5.62
50	- 8.17	- 4.86	- 2.29	-1.38	-16.96	-12.93	-11.08	- 9.45
200	-12.48	- 6.74	- 4.15	-2.27	-23.58	-15.90	-15.20	-11.40
	Unit strain (10^{-6}) in column							
20	-141.5	-103.0	- 22.0	-16.1	-297.9	-280.7	-178.7	-193.7
50	-281.8	-167.5	- 79.0	-47.7	-584.9	-445.9	-382.0	-326.0
200	-430.7	-232.7	-143.0	-78.3	-809.6	-548.4	-525.0	-394.0

*Loading and drying commences at age 15 days.

Neglecting stresses due to non-uniform shrinkage implies that plain concrete undergoing drying is stress-free, and does not indicate the magnitude of true stresses in concrete. Realistic prediction of crack initiation on the basis of tensile stress in concrete requires evaluation of the tension stresses due to non-uniform shrinkage as well as stresses due to the particular loading history.

Restrictions on minimum size and minimum and maximum amounts of reinforcement for concrete columns in the current codes should be reexamined with due consideration given to the effects of the duration of curing, environmental exposure, loading history, and properties of concrete. Based on the limited study reported here it appears that 6-in. square columns with 2 to 8 percent reinforcement exposed to drying would develop tension stresses which would cause the concrete to crack. While the compression load bearing capacity of such sections might not be significantly impaired, their stiffness in bending would be significantly reduced. If these members were used in a frame, the distribution of bending moments would be significantly influenced by the cracking of the small size members. Increasing the size of the column restricts tension stresses to the exterior portion of the concrete and for the 20-inch columns, cracking may not develop at all, or be limited to the exterior 1 or 2 inches of concrete and thus have a less significant influence on stresses in and stiffness of the members.

In prisms with least dimension greater than 10 inches the inner portion of the concrete acts as a restraint on the shrinkage of the exterior portion in a manner similar to steel reinforcement. Assumption of uniform shrinkage distri-

bution overemphasizes the role of reinforcing steel as a shrinkage restraining device. Thus, the limit on the maximum amount of reinforcement in large columns may not be realistic, as the inner portion of the concrete seems to play a dominant role in restraining the shrinkage of the exterior. It appears that large columns using high strength steel reinforcement in excess of 8 per cent may be used economically without significant adverse effects due to shrinkage.

REFERENCES

1. M. Fintel and F.R. Khan, Effects of Column Creep and Shrinkage in Tall Structures - Prediction of Inelastic Column Shortening, Journal ACI Proc. v. 66, December 1969.
2. A.D. Ross, Shape, Size and Shrinkage, Concr. and Constr. Eng. (London) v. 39, No. 8, Aug. 1944.
3. T.C. Hansen and A.H. Mattock, Influence of Size and Shape of Member on the Shrinkage and Creep of Concrete, Journal ACI, v. 63, Feb. 1966.
4. R.W. Carlson, Drying Shrinkage of Large Concrete Members, Journal ACI, Proc. v. 33, Jan.-Feb. 1937.
5. B. Bresler, Some Factors in the Investigation of Long Term Behavior of Reinforced Concrete Structures, Dept. of Sci. and Ind. Res., Road Research Lab., LN/150/BB, 1962.
6. G.L. England and A.D. Ross, Reinforced Concrete Under Thermal Gradients, Mag. of Concr. Res., v. 14, No. 40, Mar. 1962.
7. B. Bresler and L.G. Selna, Analysis of Time-Dependent Behavior of Reinforced Concrete Structures, ACI Spec. Publ. No. 9, Symposium on Creep of Concrete, 1964.
8. Z. Bazant, The Analysis of Creep and Shrinkage of Nonhomogeneous Concrete Structures, Prelim. Publ. VII Congress IABSE, Rio de Janeiro, 1964.
9. L.G. Selna, Time-dependent Behavior of Reinforced Concrete Structures, Struct. and Mat. Res. Report No. 67-19, University of California, Berkeley, 1967.
10. L.G. Selna, Creep, Cracking, and Shrinkage in Concrete Frame Structures, Journ. Struct. Div. ASCE, Proc. v. 95, No. ST12, Dec. 1969.
11. Z. Bazant, Thermodynamic Theory of Concrete Deformation at Variable Temperature and Humidity, Struct. and Mat. Res. Report No. 69-11, University of California, Berkeley, 1969.
12. G. Pickett, Shrinkage Stresses in Concrete, Journal ACI, Proc. v. 42, Jan.-Feb. 1946.
13. D. McHenry, A New Aspect of Creep in Concrete and Its Application to Design, Proc. ASTM, 1943.
14. A.D. Ross, Creep of Concrete Under Variable Stress, Journal ACI, Proc. v. 54, March 1958.
15. D.W. Pfeifer, Reinforced Lightweight Concrete Columns, Journ. Struct. Div. ASCE, Proc. v. 95, No. ST1, Jan. 1969.

SUMMARY

An analysis to determine the stresses and deformations in symmetrically reinforced concrete columns is presented which takes into account non-uniform distribution of shrinkage throughout the section, creep in concrete, and axial loading history. Comparison with experimental results indicates reasonable agreement.

RESUME

Il est décrit un procédé pour déterminer les tensions et les déformations dans les piliers en béton armé dont il est pris en valeur le retrait inégal sur la section, le fluage dans le béton et les caractéristiques de la charge centrale. Une comparaison avec les résultats expérimentaux indique une concordance vague.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird ein Verfahren zur Bestimmung der Spannungen und Verformungen in symmetrischen Stahlbetonstützen gezeigt, welches ungleichmässiges Schwinden über dem Querschnitt, Kriechen im Beton und zentrische Belastungsgeschichte berücksichtigt. Vergleiche mit den Experimenten sind zufriedenstellend.

Leere Seite
Blank page
Page vide

II

Prestressed Concrete Columns under Long-time Loading

Poteaux de béton précontraint sous charge permanente

Vorgespannter Betonpfeiler bei Dauerbelastung

KRISTER CEDERWALL
Assistant Professor
Tekn. lic.

LENNART ELFGREN
Research Assistant
Civilingenjör SVR

ANDERS LOSBERG
Professor
Tekn. Dr

Division of Concrete Structures
Chalmers University of Technology
Gothenburg, Sweden

1. Introduction

The use of prestressed concrete columns is of a more recent date than prestressed concrete beams. The first reports on prestressed columns were published in USA in the early 1950's. The research in this field has mainly been concentrated to USA and Australia [1], [2]. With the exception of a few series of tests reported from Russia, only short-time loading has been dealt with.

Whereas the constructional advantages of prestressing beams are obvious, it is more questionable to use prestressing for concrete columns. To artificially introduce a compressive force into a member which at a later stage mainly will be loaded with compressive forces, seems at a first glance very objectionable. However, with the exception of thick centrically loaded columns prestressing seems to increase the carrying capacity for short-time loading. This beneficial effect is more accentuated for eccentrically loaded slender columns. The prestressing also means increased stiffness as long as the columns works in the uncracked stage but for long-time loading this advantage is somewhat reduced by the increased creep-deformation due to the higher stress-level. Another advantage is that a suitable prestressing force can eliminate the risk of cracking during handling a transportation. Many of these advantages have been appreciated by the prefabrication industry in Sweden and nowadays prestressed columns are often used.

The object of this investigation is to find a calculation routine which makes it possible to predict the behaviour of long-time loaded columns.

The analysis of the columns has been made with one *general method*, which can be used for all kinds of reinforced concrete columns and with one *special method* the use of which is more restricted to fully prestressed columns. This special method is based upon the observations that tensile cracking means a radical change in behaviour. It could be observed in the tests that cracking meant a rapid increase in deflection and within a short time final collapse. As a start for the long-time analysis the short-time analysis is discussed and compared with some test results.

2. Test program

The investigation consists of two series A and B. The section area and the reinforcement arrangement have been varied in the two series according to Fig. 1. The reinforcement consisted of two and four high tensile steel wires,

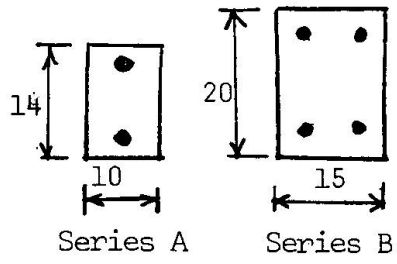


Fig. 1. Dimensions and reinforcement arrangement for columns in series A and series B.

respectively. The amount of prestress σ_p (= prestressing force divided with concrete area), the length of the columns L, and the eccentricity e of the normal force are presented in Table 1.

The concrete was proportioned for a cube strength (15 × 15 cm) of 400 kp/cm^2. Together with each column was also made a couple of testprisms of the same sectional-dimension as the column and a number of test-cubes. Some of the prisms were used to determine the stress-strain relationship and some to evaluate the shrinkage.

Table 1. Outline of test program

Column No.[1]	σ_p kp/cm^2	L cm	e cm	Column No.[1]	σ_p kp/cm^2	L cm	e cm	Column No.[1]	σ_p kp/cm^2	L cm	e cm
A-1 L	100	390	1,5	B-1 S	100	480	2,5	B-6 S	160	390	5,0
A-2 L	100	390	3,0	B-2 S	100	480	5,0	B-7 L	100	480	2,5
A-3 L	160	390	1,5	B-3 S	160	480	2,5	B-8 L	100	480	5,0
A-4 L	160	390	3,0	B-4 S	160	480	5,0	B-9 L	160	480	2,5
A-5 S	100	390	1,5	B-5 S	160	390	2,5	B-10 L	160	480	5,0

1) L = columns under long-time loading
S = columns under short-time loading

3. Analysis of short-time loading

3.1 Outline of analysis

The analysis can be summarized according to Fig. 2, where the operations numbered means the following:

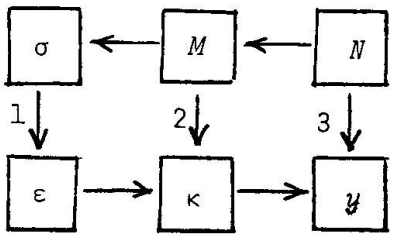


Fig. 2. Operational routine for analysis of short-time loaded columns.

1: Evaluation of stress-strain relationships for steel and concrete (σ-ε diagram).

2: Calculation of the relationship between bending moment M and curvature κ for a small column element (M-κ diagram).

3: Calculation of the relationship between external normal force N and mid-point deflection y. Stability analysis for the whole column.

Some points of interest in this analysis will be somewhat more commented.

3.2 Stress-strain relationship

It was found during the analysis that the σ-ε relationship evaluated from the prism-tests had to be adjusted due to the time-effect of the prestress. This correction has been made according to H.J. Brettle [3] and implies an increase in the modulus of the elasticity. This phenomenon could perhaps be compared with the consolidation effect of clays.

No special tension tests were made but from observations of the columns themselves it could be concluded that tensile cracking occurred at $\varepsilon_t \approx 0{,}40$ °/oo and the calculations are based on this value together with a triangular stress-strain relationship with σ_t = 50 kp/cm^2. (σ_t = tensile strength).

3.3 Moment-curvature relationship

For this operation a program has been made which makes it possible to treat materials with an arbitrary stress-strain relationship.

3.4 Stability analysis

For the calculation of the buckling load three methods have been used. One of these methods (method I) is very accurate and is based upon numerical integration along the column, whereby the column is divided into a number of finite elements. The other two methods are approximate and in this analysis the deflection-curve is assumed to be a part of a half cosine-wave (method II) or exactly half a cosine-wave (method III) [2].

No significant difference was obtained between method I and II. Method II is more accurate than method III but method III which is the most simple, seems to be accurate enough for practical calculations. Some theoretical results are compared with tests in Table 2.

Table 2. Comparison between theoretical and experimental buckling loads.

Column No.	Buckling load, Mp		
	Tested	Calculated N°_{calc}	
	N°_{test}	Method II	Method III
A-2	10,6	9,8	9,5
A-5	12,0	11,0	11,7
B-1	25,9	21,4	20,5
B-2	17,4	16,5	15,5
B-4	23,6	24,5	26,0
B-6	28,0	31,8	33,5

The agreement between tested and calculated buckling loads is in most cases satisfactory. Some disagreement can be explained by the choice of the σ-ε relationship which for these analysed columns is obtained with prism-tests performed under shorter time than the column-tests. The successful performance of this theoretical analysis is very sensitive to the choice of the stress-strain relationship (the nature of all buckling problems) and it is recommended to choose values on the safe side in practical problems.

4. Analysis of long-time loading

4.1 Creep-function

The creep-function for uniaxial compression has been evaluated from strain measurements in the column ends. Measurements on the shrinkage prisms have made it possible to separate creep ε_c and shrinkage ε_s. The creep-function is thus defined by the ratio

$$\phi = \varepsilon_c / \varepsilon_{el} \tag{1}$$

where ε_{el} = elastic strain.

Some adjustments have been made to compensate for small time-dependent movements of the neutral axis x, see Fig. 3.

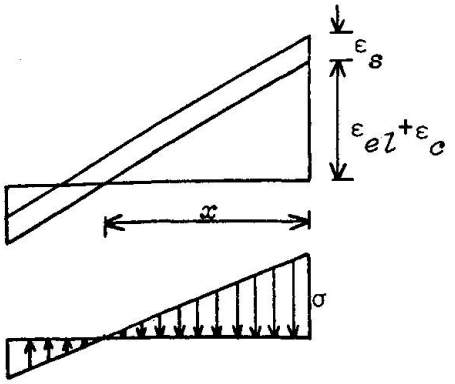


Fig. 3. Separation of shrinkage and creep. Evaluation of ϕ from measurements in the column ends.

The appearance of the creep-function is given in Fig. 4 for column A-2. An analytical expression for the creep-function ϕ can be rather well adapted to the test results:

$$\phi = \phi_{\infty} \frac{t}{T + t} \tag{2}$$

where ϕ_{∞} = final creep value
t = loading time
T = loading time for $\phi = \phi_{\infty}/2$

In Fig. 4 two curves of the form (2) have been drawn. The upper curve corresponds to $\phi_{\infty} = 1{,}6$ and $T = 4$ days. The creep-deformations are rather rapid because of the small dimensions of the specimens.

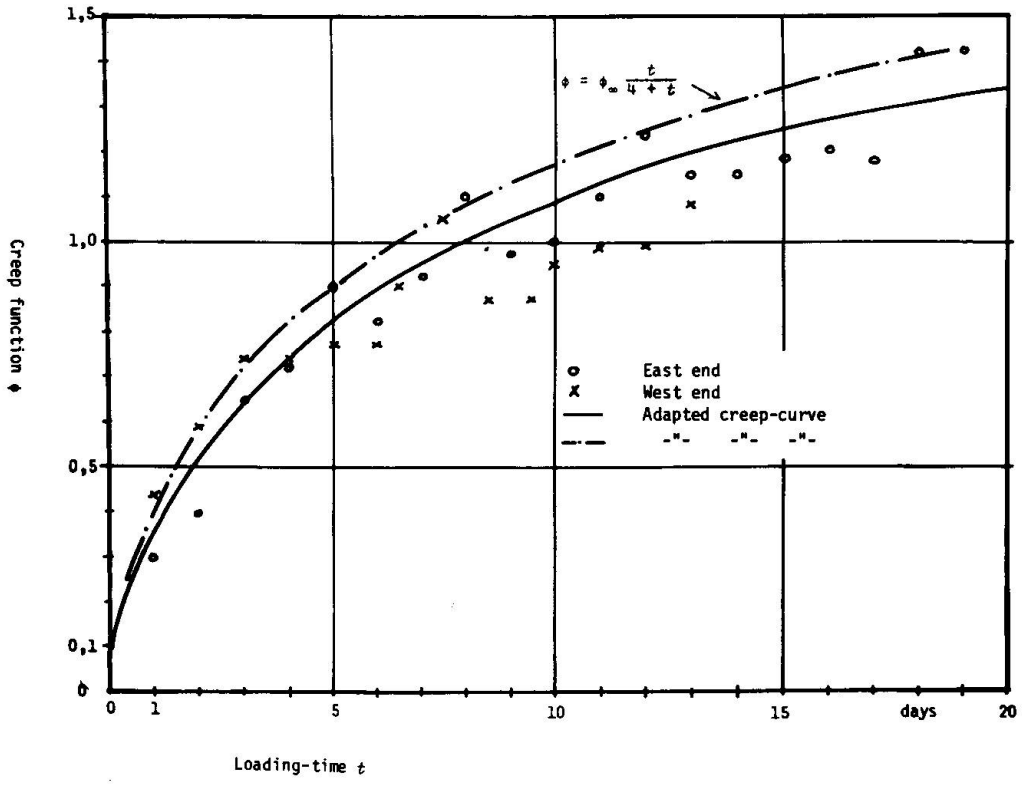


Fig. 4. Column A-2. Creep-function ϕ.

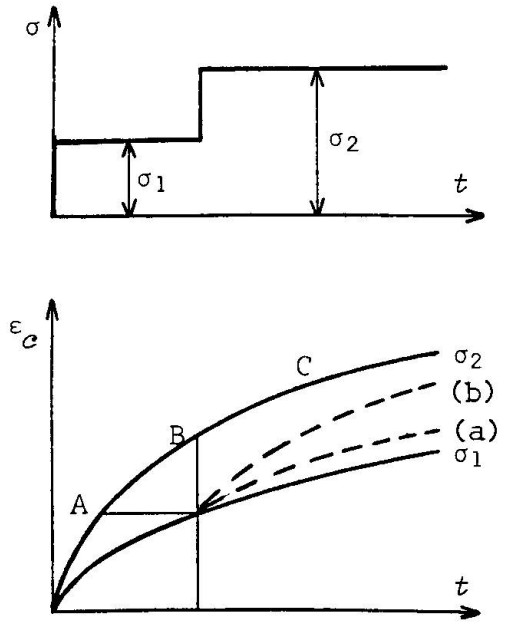


Fig. 5. A sudden increase of the stress level from σ_1 to σ_2 gives a strain increase following (a) when (3) is used. For concrete it would be more correct if the strain increase followed (b). Curve (a) is parallell to BC (time--hardening) and curve (b) is parallell to AB (strain-hardening).

4.2 Rheological model

In this paper it has been chosen to use a Maxwell body with time-dependent (growing) viscosity. The relationship between uniaxial strain and stress can be formulated as:

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \frac{\sigma}{E}\frac{d\phi}{dt} + \frac{d\sigma}{E} \qquad (3)$$

The equation (3) is known as Dischingers basic equation [4].

The use of (3) implies that at a sudden increase of the stress level from σ_1 to σ_2 according to Fig. 5 the time-dependent strain increase follows curve (a). For concrete it would be more correct if the strain increase followed the curve (b). In the general method presented below, measures are taken to compensate for the error introduced by (3). Equation (3) is justified because of its mathematical simplicity.

4.3 General method

As mentioned in the introduction this procedure can be used for concrete columns with all kinds of reinforcement. The application will here be demonstrated on fully prestressed columns.

The stress-strain relationship obtained from the prism-tests represents the curve $\phi = 0$ in Fig. 6. From this basic curve the curves $\phi = 0{,}2$, $\phi = 0{,}4$ etc. (representing steps in the calculation routine) have been constructed according to Fig. 6. Thus the curve $\phi = \phi_1$ represents the stress-strain relationship after a loading time:

$$t_1 = T \frac{\phi_1/\phi_\infty}{1-\phi_1/\phi_\infty} \tag{2a}$$

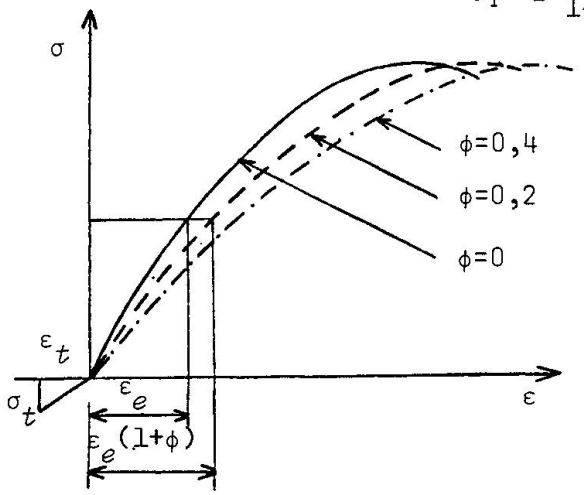


Fig. 6. Construction of stress-strain relationship for different loading times.

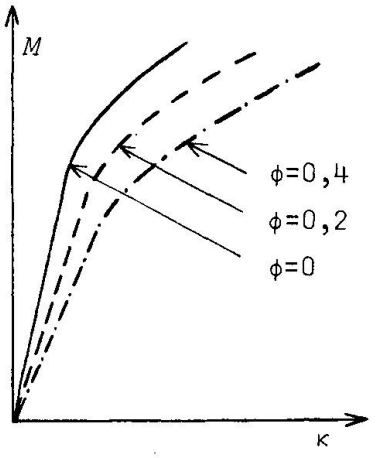


Fig. 7. Moment-curvature relationship for different loading times for a constant external normal force N.

The creep of concrete in tension has been neglected. Observations from the column tests seem to justify this.

With the described σ-ε diagrams as a basis moment-curvature diagrams have been drawn according to Fig. 7. All curves in Fig. 7 represent the same external normal force N (but different loading times and different prestressing forces due to shrinkage losses).

The calculation procedure is divided in the following steps:

(a) Elastic initial deflection y in the middle section is calculated according to method III, described in section 3.4 above:

$$y = e \frac{N}{N_E - N} \quad \text{where} \quad N_E = \pi^2 EI/L^2 \tag{4}$$

The stiffness EI is obtained from the curve $\phi = 0$ in Fig. 7 as $EI = dM/d\kappa$ at the point where $M = N(e + y)$.

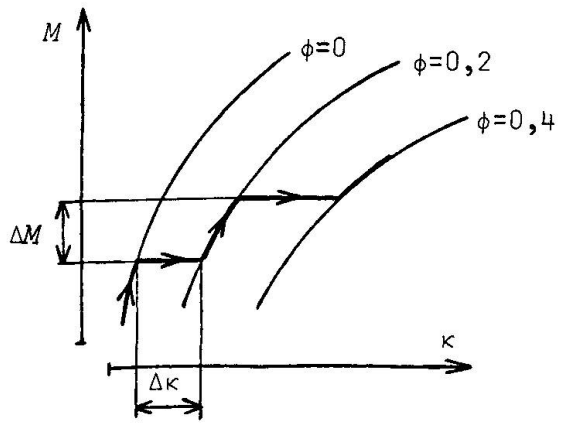


Fig. 8. Stepwise calculation of the additional time-dependent midpoint deflection.

(b) The time-dependent additional deflection Δa obtained during a short time Δt represented by $\Delta\phi = 0{,}2$ is calculated. This additional deflection Δa consists of two parts $\Delta a = \Delta e + \Delta y$. One part Δe corresponds the creep deflection under a constant bending moment $M = N(e + y)$. On account of creep one obtains an increase in the curvature $\Delta\kappa$ according to Fig. 8. This curvature increase corresponds to a midpoint deflection:

$$\Delta e = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \Delta\kappa \tag{5}$$

Δe according to (5) can be interpreted as an additional initial deflection.

The deflection Δe means an increase

in the lever arm for the force N and this gives an additional elastic deflection Δy. This is the other part of the additional deflection. Δy can be written:

$$\Delta y = \Delta e \frac{N}{N_{E,\phi} - N} \tag{6}$$

where

$$N_{E,\phi} = \frac{\pi^2}{L^2} \left(\frac{dM}{d\kappa}\right)_{\phi \equiv 0,2} \tag{7}$$

The stiffness has thus been taken from the curve $\phi = 0,2$ in Fig. 8. According to (3) one should take the stiffness from the curve $\phi = 0$, but in order to compensate for the error introduced by (3) and mentioned above, it has been considered more correct to use the stiffness for the curve $\phi = 0,2$. Numerical experiments have shown that only a minor error is introduced by this routine when it is assumed that the column obtains creep deflection for a constant bending moment under a short time-element Δt.

(c) At the loading time represented by $\Delta\phi = 0,2$ the moment has increased with the amount $\Delta M = N\Delta a = N(\Delta e + \Delta y)$ according to Fig. 8. The procedure is repeated until $\phi = \Sigma\Delta\phi = \phi_\infty$ or stopped when the moment has increased to a point where the ultimate moment-carrying capacity of the column is reached at the axial load N considered. In this latter case the lifetime of the column can be estimated. In general it can be concluded that the accuracy in the first case is greater than in the latter since a rheological model of this kind is not valid close to crushing failure. An alternative way of calculating the long-time buckling load is presented in section 4.4 below.

A comparison between calculated and measured deflection is presented in Fig. 9. The upper curve corresponds to the upper adapted creep-function in Fig. 4 and vice versa. The agreement is very good.

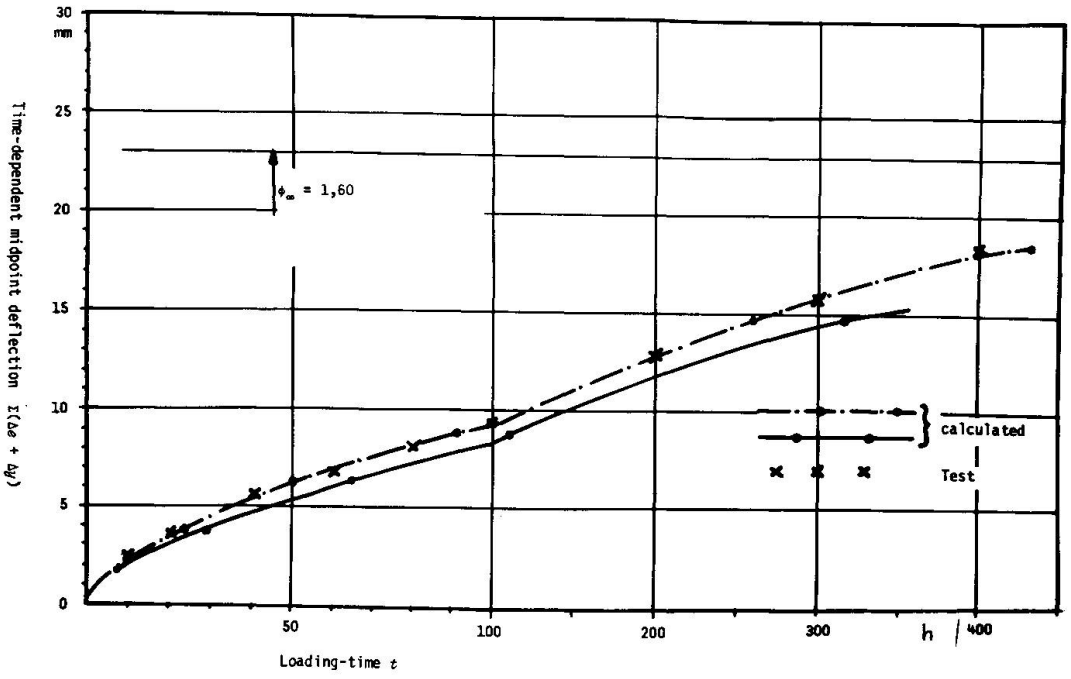


Fig. 9. Comparison between calculated and measured deflections for column A-2.

In Fig. 10 a load-deflection diagram for the same column has been drawn. It is clear that the tested load N_{test} = 4,36 Mp gives a total deformation smaller than the critical.

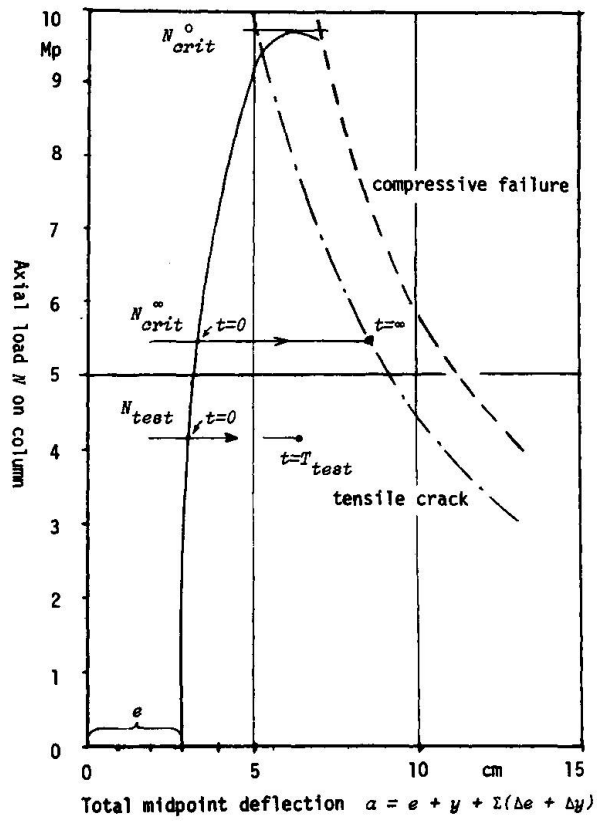


Fig. 10. Load-deflection diagram. Column A-2.

. It is concluded that the described method for calculation of time-dependent deflections is sufficiently accurate for practical application.

4.4 Special method

The study of the behaviour of the tested fully prestressed columns has resulted in a formula for calculating the long-time buckling load. It has already been mentioned in the introduction that the transition from uncracked to cracked stage means a radical change in behaviour and it therefore seems reasonable to take this transition stage as a failure criteria. In Table 3 below the loading time has been presented for cracking, T_{crack}, and for final collapse, T_{fail}. In some cases the final failure will not come directly after cracking but the deflections increase rapidly.

For a constant stiffness EI equation (3) can be integrated and gives for the total deflection a the expression:

$$a = a(t) = e + y + \Sigma(\Delta e + \Delta y) = e \frac{\nu}{\nu-1} 2{,}718^{\frac{\phi}{\nu-1}} \qquad (8)$$

where $\nu = N_E/N$ (formal buckling safety) and 2,718 is the base in the natural logarithm system.

Equation (9) is valid at cracking

$$\sigma = -\frac{P_\phi}{A} - \frac{N}{A} + \frac{Na}{W} = \sigma_t \qquad (9)$$

where P_ϕ = prestressing force with regard to losses at the time represented by ϕ and A^ϕ = sectional area, W = bending resistance, and σ_t = tensile strength. With $\phi = \phi_\infty$ and a according to (8) it is possible to calculate the long-time buckling load N^{∞}_{crit}:

$$N^{\infty}_{crit} = \frac{W(\sigma_t + P_\phi/A)}{e \frac{\nu}{\nu-1} 2{,}718^{\frac{\phi_\infty}{\nu-1}} - \frac{W}{A}} \qquad (10)$$

N^{∞}_{crit} according to (10) has been calculated for some tested columns and theoretical and calculated loads have been compared in Table 3. The loading time for the tested columns is of course smaller than the theoretical infinite loading time and in order to make the comparison more relevant equation (10) has also been used with the values of ϕ, that corresponds to the real loading time $t = T_{crack}$ for the tested columns. The comparison has been made with two values on ϕ_∞ namely $\phi_\infty = 1{,}6$ and $\phi_\infty = 2{,}0$ ($\phi_\infty = 1{,}6$ agrees more closely with the tests). These calculated values N^{t}_{crit} for $t = T_{crack}$ should be compared with the test results N_{test}.

Table 3. Comparison between tested and calculated long-time buckling loads.

Column No.	*Experimental*			*Calculated*	
	N_{test}	T_{crack}	T_{fail}	N^{∞}_{crit}	N^{t}_{crit}
	Mp	days	days	Mp	Mp
A-1	8,72	5,0	5,5	7,7 7,0	9,0 8,4
A-2	4,36	--	--	6,1 5,6	-- --
A-3	12,35	1,7	2,8	8,8 8,2	12,1 11,6
A-4	5,81	40	62	5,9 5,5	6,0 5,6

The agreement is satisfactory and the method could possibly be used for calculating the long-time buckling load for prestressed columns.

References

[1] Aroni, Samuel: Slender Prestressed Concrete Columns, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 94, No. ST 4, Proc Paper 5886, April, 1968, pp 875-904. The paper summarizes Aroni's thesis "Slander Prestressed Concrete Columns", 318 p., presented to the Univ. of California, at Berkeley, Calif., in September, 1966, in partial fulfillment of the requirements for the Degree of Doctor of Philosophy.

[2] Kabaila, A P and Hall, A S: Analysis of Instability of Unrestrained Prestressed Concrete Columns with End Eccentricities, *Symposium on Reinforced Concrete Columns*, Sp - 13, American Concrete Institute, Detroit, 1966, pp 157-178.

[3] Brettle, H J: Increase in Concrete Modulus of Elasticity Due to Prestress and its effect on Beam Deflections, *Constructional Review (Sydney)*, Vol. 31, No. 8, Aug, 1958, pp 32-35.

[4] Dischinger, Fr: Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken, *Der Bauingenieur*, Vol. 18, No. 33/34, 20. Aug 1937, pp 487-520, No. 35/36, 3. Sept 1937, pp 539-552 and No. 39/49, 1. Oct 1937, pp 595-621. See also Dischinger, Fr: Elastische und plastische Vorformungen der Eisenbetontragwerke und inbesondere der Bogenbrücken, *Der Bauingenieur*, Vol. 20, No. 5/6, 10. Feb 1939, pp 53-63, No. 21/22, 2. June 1939, pp 286-294, No. 31/32, 11. Aug 1939, pp 426-437 and No. 47/48, 5. Dec 1939, pp 563-572.

SUMMARY

This report deals with an experimental and theoretical investigation of slender, excentrically loaded, prestressed concrete columns under both short--time and long-time loading.

A theoretical analysis for the behaviour of the columns under both short--time and long-time loading has been worked out. The theoretical analysis gives a realistic description of the behaviour of the columns over the full range of loading and loading time.

RESUME

La présente communication traite d'une étude expérimentale et théorique de poteaux élancés en béton précontraint soumis à une charge excentrique soit de courte durée, soit permanente.

Les auteurs présentent une analyse théorique du comportement des poteaux s'appliquant aussi bien aux charges de durée prolongée qu'aux charges de brève durée. Cette analyse comporte une description réaliste du comportement des poteaux pour toute la gamme d'importance et de durée des charges.

ZUSAMMENFASSUNG

Dieser Bericht behandelt experimentelle und theoretische Untersuchungen schmaler exzentrisch belasteter vorgespannter Betonpfeiler sowohl bei kurzwährender Belastung als auch bei Dauerbelastung.

Eine theoretische Analyse über das Verhalten der Pfeiler sowohl bei Kurz- als auch bei Dauerbelastung wurde ausgearbeitet. Die theoretische Analyse gibt eine realistische Beschreibung des Verhaltens der Pfeiler für die gesamte Belastungssteigerung und die Belastungszeit.

Leere Seite
Blank page
Page vide

II

Folgerungen aus Theorien und Versuchen für die baupraktische Untersuchung von Kriech- und Relaxationsproblemen in Spannbetontragwerken

Calculation of Creep and Relaxation Effects in Prestressed Concrete Structures

Conséquences des théories et des expériences permettant des recherches efficaces se rapportant au fluage et à la relaxation dans les constructions en béton précontraint

HEINRICH TROST
Dr.-Ing. Prof.
Technische Universität Hannover
Deutschland

Neben der Gewährleistung einer ausreichenden Sicherheit gegen kritische Zustände muß man bei Spannbetontragwerken die Spannungs- und Verformungszustände unter Gebrauchsbeanspruchung untersuchen. Im Gebrauchsbereich kann der Stahl als ein elastischer Festkörper angesehen werden, für den das Hookesche Gesetz gilt; dagegen zeigt der Beton neben elastischen Eigenschaften ein zeitabhängiges Verhalten. Bekanntlich nähern sich aber sowohl die Kriechverformung (unter konstanter Spannung σ_0) als auch die Spannungsrelaxation (bei konstanter Dehnung ε_0) festen Endwerten, die unter anderem vom Belastungsalter des Betons abhängig sind; deshalb kann man den Beton physikalisch als einen viskoelastischen Festkörper mit zeitabhängigen Materialkennwerten bezeichnen.

Wenn Stahl und Beton in einem Verbundquerschnitt zusammenwirken, ergeben sich außer den nachträglichen Verformungen zeitabhängige Änderungen der Last-,Eigen-und Zwängspannungen. Zu ihrer Ermittlung muß man also die Beziehungen zwischen Spannung, Dehnung und Zeit bei den einzelnen Baustoffen Stahl und Beton kennen sowie die Verträglichkeitsbedingungen des ebenbleibenden Verbundquerschnitts und eventuell des statisch unbestimmten Tragsystems beachten.

1. Zeitabhängige lineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons

Als allgemeine Grundlage in der Theorie des linearen Kriechens dient das Superpositionsprinzip, nach dem bei viskoelastischen Werkstoffen mehrere Spannungszustände unter Berücksichtigung der Zeitdauer ihrer Einwirkung und des Zeitpunktes ihres Beginns überlagert werden dürfen. Im Gebrauchsbereich ergibt sich danach für einen einachsig beanspruchten Betonstab, auf den mehrere Spannungsstufen zu verschiedenen Zeiten t_i aufgebracht werden, die gesamte Dehnung als Summe der jeweiligen elastischen und Kriechdehnung sowie des Schwindens nach [1] bis [4] zu

$$(1)\qquad \varepsilon(t) = \varepsilon_{el}(t_0)\left[1+\varphi(t,t_0)\right] + \sum_{t_i=0}^{t} \varepsilon_{el}(t_i)\left[1+\varphi(t,t_i)\right] + \varepsilon_s(t)$$

$$= \frac{\sigma_0}{E_{b0}}\left[1+k_0\varphi_N f(t)\right] + \sum_{t_i=0}^{t} \frac{\Delta\sigma(t_i)}{E_b(t_i)}\left[1+k_i\varphi_N f(t-t_i)\right] + \varepsilon_{s\infty} f(t).$$

Das Normkriechmaß φ_N und das Endschwindmaß $\varepsilon_{s\infty}$ sind entsprechend den Bauwerksbedingungen (klimatische Verhältnisse, Körpergröße, Betonkonsistenz) im allgemeinen in Vorschriften angegeben; der Einfluß des Belastungsalters (Koeffizient k) auf das Kriechen ist aus Fig. 1 und der zeitliche Verlauf des Kriechens wie auch des Schwindens ist aus Fig. 2 zu entnehmen, die als statistische Mittelwerte für Normalbetone in [1] enthalten sind. Die Ausgangskriechfunktion $\varphi(t,t_0)=k_0\varphi_N f(t)$ ist als Kurve 1 und die zur Spannungsstufe $\Delta\sigma(t_i)$ gehörige Kriechfunktion $\varphi(t,t_i)=k_i\varphi_N f(t-t_i)$ ist als Kurve 2 in Fig. 3 dargestellt.

Mit der zeitabhängigen linearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung (1) muß man sowohl die Kriechprobleme – die Ermittlung der Formänderung bei bekanntem Verlauf der Spannungen – als auch die Relaxationsprobleme – die Bestimmung der Spannungsänderungen unter vorgegebenen Formänderungsbedingungen – unter denselben Annahmen für die Kriechfunktionen lösen können.

Nach Abschluß des Kriechens und Schwindens erhält man den Endwert der Dehnung bei einer gegebenen Folge von Laststufen mit

$$(2)\qquad \varepsilon(t)_{t=\infty}=\varepsilon_\infty=\frac{\sigma_0}{E_{b0}}\left(1+k_0\varphi_N\right)+\sum_{t_i=0}^{\infty}\frac{\Delta\sigma(t_i)}{E_b(t_i)}\left(1+k_i\varphi_N\right)+\varepsilon_{s\infty}$$

Wenn die linke Seite mit einer Dehnungsbedingung vorgegeben ist, enthält der 2. Summand auf der rechten Seite die gesuchte Spannungsänderung $\sigma_\infty-\sigma_0=\int d\sigma(t_i)=\sum\Delta\sigma(t_i)$, die im Anschluß an eine elastisch ermittelte Ausgangsspannung σ_0 eintritt. Mit der üblichen Annahme eines konstanten Elastizitätsmoduls des Betons wird (2) in der Form

$$(3)\qquad \varepsilon_\infty=\frac{\sigma_0}{E_b}\left(1+k_0\varphi_N\right)+\frac{\sigma_\infty-\sigma_0}{E_b}\left(1+k_0\varphi_N\sum_{t_i=0}^{\infty}\frac{\Delta\sigma(t_i)}{\sigma_\infty-\sigma_0}\frac{k_i}{k_0}\right)+\varepsilon_{s\infty}$$

$$=\frac{\sigma_0}{E_b}\left(1+\varphi_\infty\right)+\frac{\sigma_\infty-\sigma_0}{E_b}\left(1+\varphi_\infty\cdot S\right)+\varepsilon_{s\infty}$$

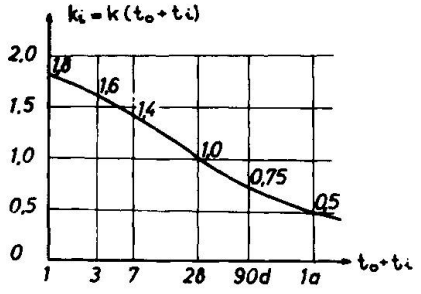


Fig. 1 Einfluß des Belastungsalters auf das Kriechen

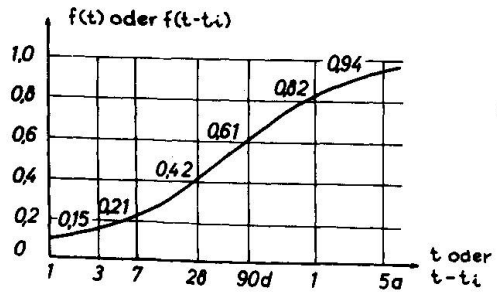


Fig. 2 Zeitlicher Verlauf der Kriech- und Schwindverformung

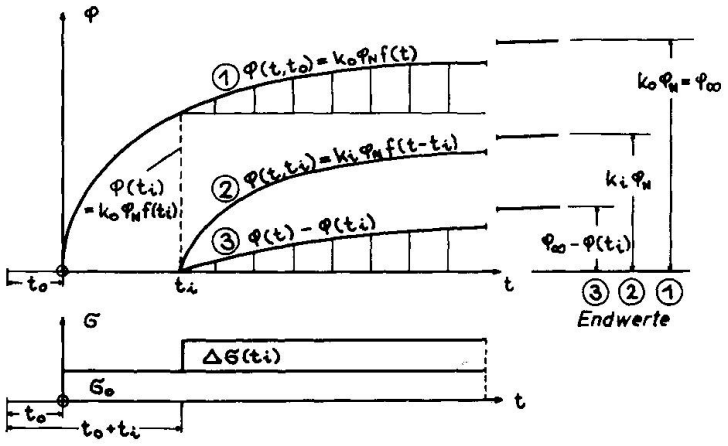


Fig. 3 Vergleich verschiedener Kriechkurven

① *Ausgangskriechkurve* $\varphi=\varphi(t,t_0)$ *für* σ_0

② *Reale Kriechfunktion* $\varphi(t,t_i)$ *für* $\Delta\sigma(t_i)$

③ *Idealkurve nach Withney/Dischinger für* $\Delta\sigma(t_i)$

ausgedrückt; hierbei ist mit $\varphi_\infty = k_0 \varphi_N$ die maßgebende Endkriechzahl für die beim Belastungsalter t_0 eingeleitete Beanspruchung σ_0 bezeichnet und zur Abkürzung der in [4] ausführlich erörterte

(4) Relaxationskennwert $$\varrho = \sum_{t_i=0}^{\infty} \frac{\Delta\sigma(t_i)}{\sigma_\infty - \sigma_0} \frac{k_i}{k_0} = \sum_{t_i=0}^{\infty} \Delta F(t_i) \frac{k_i}{k_0}$$

eingeführt. Der Zahlenwert $\varrho\varphi_\infty$ läßt sich als abgeminderte Endkriechzahl für die im Laufe der Zeit eingetretene Spannungsänderung auffassen. Obwohl die absolute Größe der Spannungsänderung $\sigma_\infty - \sigma_0$ selbst noch unbekannt ist, kann der zeitliche Verlauf der Relaxation

(5) $$\frac{\sigma(t)-\sigma_0}{\sigma_\infty - \sigma_0} = F(t) = \sum_{t_i=0}^{t} \Delta F(t_i) = \sum_{t_i=0}^{t} \frac{\Delta\sigma(t_i)}{\sigma_\infty - \sigma_0}$$

bei einem bekannten Verlauf der Kriechfunktion $\varphi(t,t_0)$ aus Grenüberlegungen direkt angegeben werden (vgl.hierzu [4] und Fig. 4).

Für den Einfluß des Belastungsalters nach Fig. 1 und den zeitlichen Verlauf des Kriechens nach Fig. 2 sind die Zahlenwerte von ϱ in Fig. 5 dargestellt. Wenn nach den örtlichen Gegebenheiten zwar die quantitativen Angaben in Fig. 1 und 2 zu korrigieren sind, aber der qualitative Verlauf erhalten bleibt, ergeben sich nach entsprechender Auswertung der Formel (4) nur kleinere Zahlenkorrekturen.

Analog zur Gleichung (3) erhält man mit hinreichender Genauigkeit (vgl. Fig. 4) für die Zeit $0 \le t \le \infty$ in dem Ausdruck [4;5]

(6) $$\boxed{\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_b}(1+\varphi) + \frac{\sigma(t)-\sigma_0}{E_b}(1+\varrho\cdot\varphi) + \varepsilon_s(t) \quad \text{mit } \varphi = \varphi(t,t_0)}$$

eine einfache Normalform der zeitabhängigen linearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons unter Gebrauchsbeanspruchung. Diese zweckmässige Umwandlung der Integralbeziehung (1) enthält sowohl die bekannte Aussage für das Kriechen bei konstanter Spannung als auch die stetige Spannungsänderung $\sigma(t) - \sigma_0$, die bei einer gegebenen Dehnung ε (t) im Anschluß an eine Ausgangsbeanspruchung σ_0 eintritt.

Die bekannte Kriechdifferentialgleichung von Dischinger

(7) $$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_b}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{E_b}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{mit } \varphi = \varphi(t,t_0)$$

ergibt sich nach [4;6] aus der Integralbeziehung (1) in der Alterungstheorie unter Annahme der Withney-Idealkurven (vgl.Kurven 3 in Fig.3)

$$\varphi(t,t_i) = \varphi(t,t_0) - \varphi(t_i,t_0) \mathrel{\widehat{=}} \varphi(t) - \varphi(t_i)$$

Damit wird das bei Entlastung zu beobachtende Rückkriechen nicht berücksichtigt, sondern jede Kriechverformung als rein plastisch angesehen. Daraus resultiert auch die häufig benutzte Kennzeichnung des Betons als elasto-plastischer Festkörper.

Eine andere Grenzannahme ergibt sich bei Vernachlässigung der weiteren Betonalterung nach Aufbringen von σ_0 durch Verschieben der Ausgangskriechkurve entlang der Zeitachse mit

$$\varphi(t,t_i) = \varphi_\infty f(t-t_i) = k_0 \varphi_N f(t-t_i)$$

Hierbei ist $k_i = k_0$ angenommen und nach (4) wird $\varrho = 1$. Damit erhält man aus (6) eine vereinfachte σ-ε-Beziehung

(8) $$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_b}(1+\varphi) + \varepsilon_s(t) \quad \text{mit } \varphi = \varphi(t,t_0),$$

wobei man $\frac{E_b}{1+\varphi}$ als ideellen E-Modul oder Verformungsmodul bezeichnet.

Die Folgerungen aus diesen unterschiedlichen Annahmen für die Kriechfähigkeit bei Spannungsänderungen zeigen sich bei Lösung der Relaxationsprobleme. Für die Dehnungsbedingung $\varepsilon(t) = const = \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_b}$ erhält man die Spannungsrelaxation (vgl. auch Fig.4b, 4d und 6a)

(9) $\sigma(t) = \sigma_0 \left(1 - \frac{\varphi}{1+\varrho\varphi}\right)$ aus Formel (6) mit Relaxationskennwert,

(10) $\sigma(t) = \sigma_0 \cdot e^{-\varphi}$ aus Formel (7) nach Dischinger,

(11) $\sigma(t) = \sigma_0 \frac{1}{1+\varphi}$ aus Formel (8) mit ideellem E-Modul. [3]

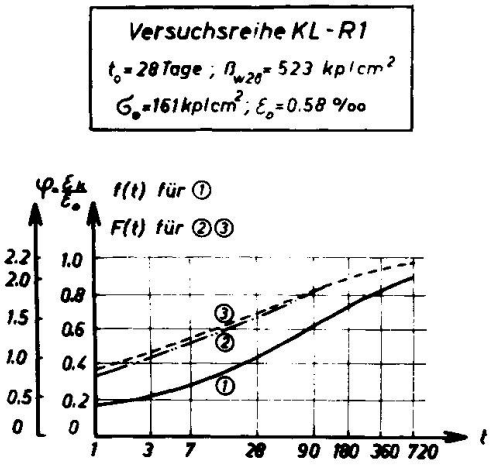


Fig. 4a

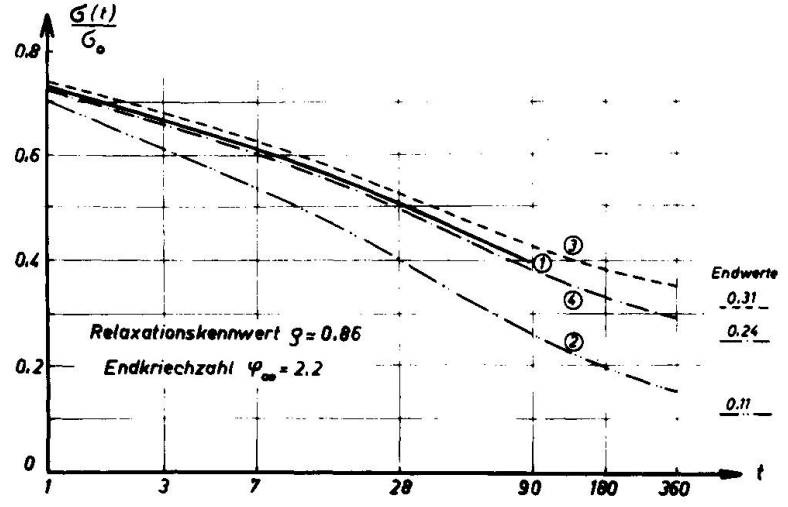


Fig. 4b

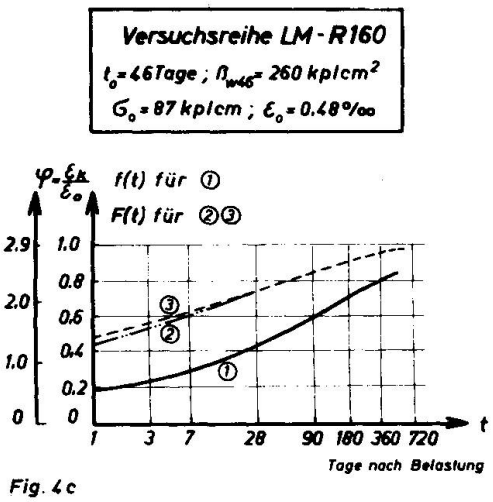


Fig. 4c

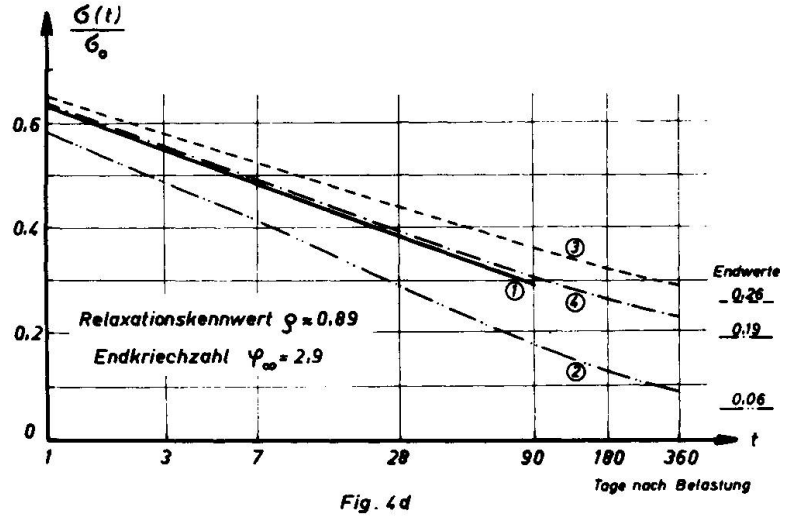


Fig. 4d

① Gemessener Kriechverlauf $f(t) = \frac{\varphi}{\varphi_\infty} = \frac{\varepsilon(t)-\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}$

Zugehörige Relaxationsverläufe $F(t) = \frac{\sigma(t)-\sigma_0}{\sigma_\infty - \sigma_0}$

② nach Dischinger $F(t) = \frac{1-e^{-\varphi}}{1-e^{-\varphi_\infty}}$

③ mit ideellem E-Modul $F(t) = \frac{1+\varphi_\infty}{1+\varphi_\infty f(t)} f(t)$

① Gemessene Relaxtionskurve $\frac{\sigma(t)}{\sigma_0}$

Theoretische Relaxationskurven:

② nach Dischinger $\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = e^{-\varphi}$

③ mit ideellem E-Modul $\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{1+\varphi}$

④ mit Relaxationskennwert $\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = 1 - \frac{\varphi}{1+\varrho\varphi}$

Fig. 4 Vergleich von theoretischen Relaxationskurven mit Kriech-und Relaxationsversuchen der TH München

2. Auswertung von Kriech- und Relaxationsversuchen

An der TH München +) wurden an gleichartigen Betonprismen ⌀ 2ocm, Höhe 8o cm jeweils Kriech=und Relaxationsversuche vorgenommen, deren Durchführung in [7] und [8] beschrieben wurde. Die Ausgangsbeanspruchung σ_o betrug dabei etwa 1/3 der Würfeldruckfestigkeit. Die Meßwerte der Versuchsreihe LK-R1 sind in Fig. 4a, 4b und der Versuchsreihe LM-R16o sind in den Fig. 4c, 4d aufgetragen und durch die angegebenen Daten näher erläutert. Die Stauchung der Relaxationsproben wurde automatisch um das Schwindmaß eines unbelasteten Vergleichskörpers gesteigert.

In Fig. 4a, 4c sind mit den gemessenen Kriechverformungen in der Kurve 1 der zeitliche Verlauf des Kriechens als $f(t)$ aufgetragen sowie in den Kurven 2 und 3 diejenigen Zeitfunktionen F (t) der Relaxation angegeben, die aus den im 1.Abschnitt erörterten Grenzannahmen für die Kriechfähigkeit bei Spannungsänderungen nach Dischinger und mit dem ideellen E-Modul errechnet sind. Diese Kurven 2 und 3 stimmen praktisch überein und überdecken auch die tatsächliche Zeitfunktion F (t), die man aus den Relaxationsmessungen erhalten würde.Nach Formel (4) erfolgte dann die Ermittlung des Relaxationskennwertes durch die numerische Integration der Teilprodukte, die sich aus den Stufen der Zeitfunktion F (t) und den Einflußwerten des Belastungsalters aus Fig. 1 ergeben.

In Fig. 4b, 4d sind in der Kurve 1 die Ergebnisse der Relaxationsversuche als Verhältniswert $\sigma(t):\sigma_o$ aufgetragen. Sie lassen deutlich erkennen, daß der Relaxationsvorgang wesentlich schneller als der Kriechvorgang abläuft: Nach einem Tag ist praktisch nur noch 2/3 der Ausgangsspannung σ_o vorhanden, die durch die Zwängsverformung ε_o hervorgerufen wurde. Aus den zum Vergleich eingetragenen theoretischen Relaxationskurven ist zu entnehmen, daß man den Abbau von Zwängspannungen mit Kurve 2 nach Dischinger überschätzt und nach Kurve 3 mit dem ideellen E-Modul unterschätzt; dagegen zeigen die mit dem Relaxationskennwert errechneten Kurven 4 gute Übereinstimmung mit diesen Versuchswerten.

3. Anwendungen auf Spannbetontragwerke

3.1 Systemzwängungen

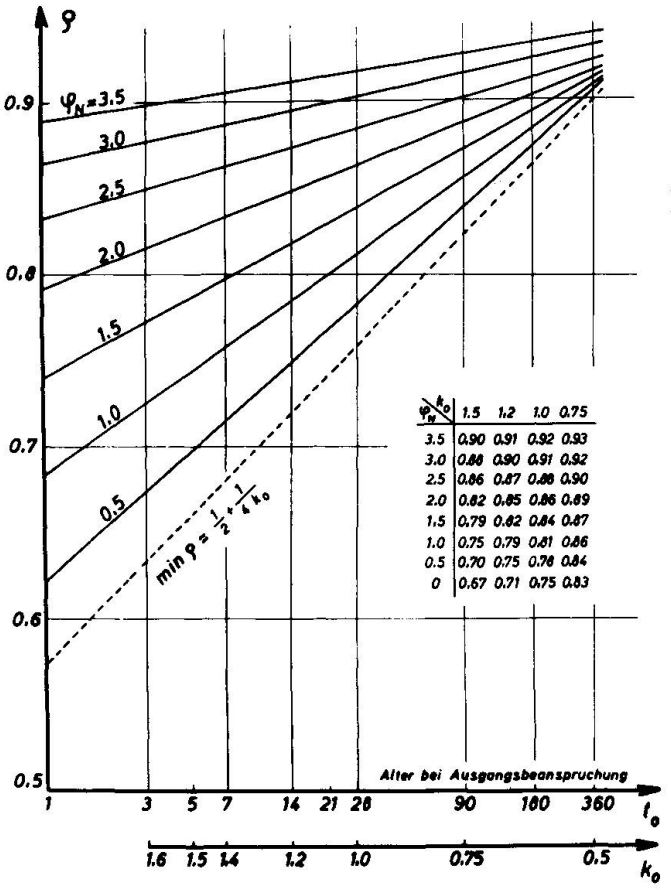
Infolge des viskoelastischen Verhaltens des Betons werden die durch Systemzwängungen ausgelösten Schnittgrößen erheblich geändert gegenüber dem elastisch ermittelten Kräftezustand. In statisch unbestimmt gelagerten Systemen können durch Auflagerverschiebungen solche Zwängungen hervorgerufen werden. Bei homogenen Betontragwerken und Vernachlässigung der Bewehrung ist die Biegelinie durch Größe und Richtung der Zwangsverformung festgelegt.

Bei einer plötzlichen Stützensenkung liegt ein Relaxationsproblem mit zeitunabhängiger Zwängung vor. Für Biegezwängungen an durchlaufenden Trägern ist das Verhältnis der Schnittgrößen gleich dem der Spannungen in Formel (9) und man erhält

$$(12) \qquad \frac{M(t)}{M_o} \triangleq \frac{\sigma(t)}{\sigma_o} = 1 - \frac{\varphi}{1+\varrho\varphi}$$

Fig. 6a gibt die Verhältnisse der Endwerte zu den elastischen Anfangswerten (to = 28 Tage) für verschiedene Normkriechmaße φ_N an.Man beachte die Unterschiede, die sich bei Anwendung der verschiedenen σ-ε-Beziehungen (6), (7) und (8) ergeben.

+)Diese Versuchsergebnisse wurden von Herrn Prof.Rüsch freundlicherweise zur Verfügung gestellt, wofür der Verfasser danken möchte.



φN \ k0	1.5	1.2	1.0	0.75
3.5	0.90	0.91	0.92	0.93
3.0	0.88	0.90	0.91	0.92
2.5	0.86	0.87	0.88	0.90
2.0	0.82	0.85	0.86	0.89
1.5	0.79	0.82	0.84	0.87
1.0	0.75	0.79	0.81	0.86
0.5	0.70	0.75	0.78	0.84
0	0.67	0.71	0.75	0.83

Fig. 5 Relaxationskennwerte ρ

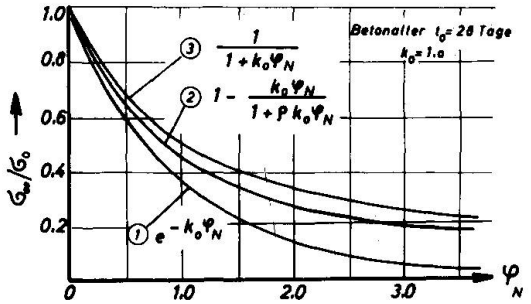


Fig. 6a $\frac{\sigma_\infty}{\sigma_0}$ bei zeitunabhängigen Zwängungen

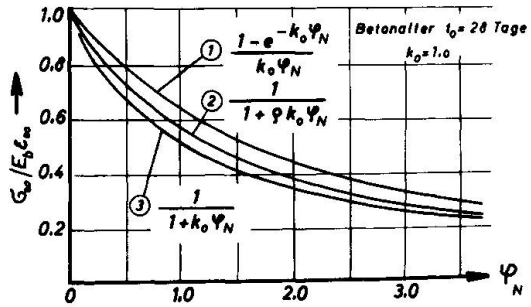


Fig. 6b $\frac{\sigma_\infty}{E_b \varepsilon_\infty}$ bei zeitabhängigen Zwängungen, die affin zum Kriechen erfolgen

Fig. 6 Endwerte von Zwängspannungen

① nach Dischinger
② mit Relaxationskennwert
③ mit ideellem E-Modul

Bei einer allmählichen Stützensenkung, die ab t_0 affin zum Kriechen erfolgt, erhält man das Verhältnis der wirklich eintretenden Größen zu den elastisch ermittelten Werten aus Formel (6) mit $\sigma_0 = 0$ und gegebenem $\varepsilon(t) = \varepsilon_\infty f(t)$ zu

$$(13) \qquad \frac{M(t)}{M_{el}(t)} \cong \frac{\sigma(t)}{E_b \varepsilon(t)} = \frac{1}{1+\rho\varphi}$$

und für t_0 = 28 Tage die in Fig. 6b dargestellten Endwerte.

Beim biegesteifem Zusammenschluß von gleichalten Teiltragwerken verursachen die mit dem geänderten System unverträglichen Schnittgrößen ebenfalls eine zeitunabhängige Zwängung, deren Relaxation wie nach Formel (12) erfolgt. Die Ermittlung der Kräfteumlagerungen in abschnittsweise hergestellten Brückentragwerken ist in [9] behandelt.

Die Veränderungen der im Abschnitt 3.1 erörterten Systemzwängungen können also mit der σ-ε-Beziehung (6) in einfacher Weise errechnet werden. Wenn unmittelbar die Betondehnungen bzw. Formänderungen der Betontragwerke ohne Bewehrungseinfluß vorgegeben sind, kann man für die normalen Verhältnisse den Relaxationskennwert (vgl. Fig. 5) hinreichend genau mit $0{,}8 < \rho < 0{,}9$ annehmen. Die möglichen Spannungsänderungen sollte man immer für denkbare Grenzwerte bei der Endkriechzahl $\varphi_\infty = k_0 \varphi_N$ abschätzen.

3.2 Zeitabhängige Formänderungen und Spannungsumlagerungen.

Nach Fig. 7 würden sich bei Lösen des Verbundes zwischen Stahl und Beton die nachträglichen Betonverformungen als Summe der φ-fachen elastischen Verformung aus Dauerlasten und Vorspannung und der Schwindverformung ergeben, die in dem ebenbleibenden Verbundquerschnitt durch den Stahl behindert werden. Die dadurch entstehenden

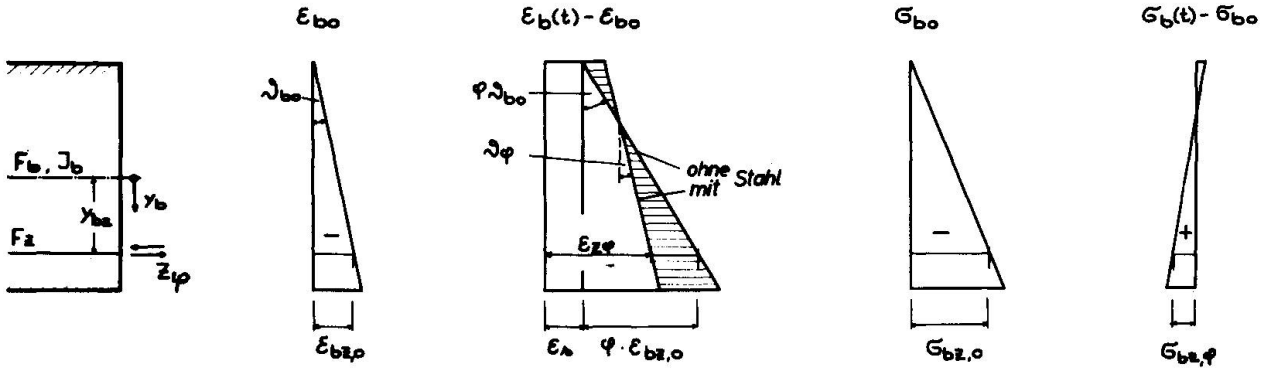


Fig. 7 Verformungen und Spannungen im Querschnitt

Spannungsänderungen bilden einen Eigenspannungszustand und sind aus Verträglichkeitsbedingungen zu errechnen. Für den in Fig. 7 dargestellten Querschnitt mit einem exzentrischen Spannglied gilt die Dehnungsbedingung in der Verbundfaser y_{bz}

$$(14)\qquad \varepsilon_z(t)-\varepsilon_{z0}=\varepsilon_{z\varphi}\equiv\varepsilon_{bz,\varphi}=\varepsilon_{bz}(t)-\varepsilon_{bz,0}.$$

Aus dem Hookeschen Gesetz für den Stahl (Index z) und der $\sigma-\varepsilon$-Beziehung (6) für den Beton (Index b) erhält man mit der Spannungsänderung des Betons in der Stahlfaser $\sigma_{bz}(t)-\sigma_{bz,0}=\sigma_{bz,\varphi}$

$$\frac{\sigma_{z\varphi}}{E_z}=\frac{\sigma_{bz,0}}{E_b}\varphi+\frac{\sigma_{bz,\varphi}}{E_b}(1+\varrho\varphi)+\varepsilon_s$$

und mit $n = E_Z : E_b$ nach Umformen die Gleichung

$$(15)\qquad \sigma_{z\varphi}\left[1-n\frac{\sigma_{bz,\varphi}}{\sigma_{z\varphi}}(1+\varrho\varphi)\right]=n\varphi\,\sigma_{bz,0}+E_z\varepsilon_s.$$

Das Verhältnis der Eigenspannungen $\sigma_{bz,\varphi} : \sigma_{z\varphi}$ ist nur von der Bewehrungsanordnung im Querschnitt abhängig und beträgt

$$(16)\qquad \frac{\sigma_{bz,\varphi}}{\sigma_{z\varphi}}=-\frac{F_z}{F_b}\left(1+y_{bz}^2\frac{F_b}{J_b}\right).$$

Mit (16) ergibt sich die Spannungsänderung im Stahl aus Formel (15) zu

$$(17)\qquad \frac{Z_\varphi}{F_z}=\sigma_{z\varphi}=\frac{1}{1+n\frac{F_z}{F_b}\left(1+y_{bz}^2\frac{F_b}{J_b}\right)(1+\varrho\varphi)}\left(n\varphi\sigma_{bz,0}+E_z\varepsilon_s\right)$$

In (17) ist $\varrho=\frac{1}{2}+\frac{1}{4k_0}$ einzusetzen [5] und entspricht dem Wert $\min\varrho$ in Fig. 5, da die Spannungsänderung praktisch mit der Zeitfunktion f (t) des Kriechens eintritt. Der normalerweise zwischen 1,2 und 1,7 schwankende Nenner läßt unmittelbar den Einfluß des Bewehrungsgehaltes und der Stahlanordnung im Querschnitt erkennen. Diese Formel (17) zur Bestimmung der sogenannten Spannkraftverlustes Z_φ infolge Kriechen und Schwinden bei einlagiger Vorspannung gilt auch für statisch unbestimmte Träger, sofern wie üblich der Bewehrungseinfluß [10] auf die Größe der Auflagerreaktionen zur Zeit $0\le t\le\infty$ vernachlässigt wird. Mit Z_φ aus (17) ergibt sich nach Fig.7 die Spannungsänderung im Beton

$$(18)\qquad \sigma_b(t)-\sigma_{bo}=\sigma_{b\varphi}=-\frac{Z_\varphi}{F_b}\left(1+y_{bz}\frac{F_b}{J_b}\cdot y_b\right)$$

und die nachträgliche Verdrehung des Querschnitts beträgt

$$(19)\qquad \vartheta_\varphi=\varphi\vartheta_{bo}-\frac{1}{E_bJ_b}Z_\varphi y_{bz}(1+\varrho\varphi).$$

Literaturverzeichnis:

[1] C.E.B. - Empfehlungen zur Berechnung und Ausführung von Spannbetonbauwerken 1966

[2] Rüsch: Einfluß von Kriechen und Schwinden des Betons auf die Schnittgrößen und Spannungen, TH München 1966

[3] Guyon: Construction en béton précontraint, Paris 1966

[4] Trost: Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme. Beton- und Stahlbetonbau 62 (1967) H.1o/11

[5] Zerna: Spannungs-DehnungsBeziehung für Beton bei einachsiger Beanspruchung. Franz - Festschrift Berlin 1969

[6] Pucher: Lehrbuch des Stahlbetonbaues. 3.Aufl.Wien 1961

[7] Hilsdorf: Versuchstechnische Probleme beim Studium der Verformungseigenschaften des Betons. Materialprüfung 5 (1963)

[8] Rüsch: Die wirklichkeitsnahe Bemessung für lastunabhängige Spannungen. Vorträge Betontag 1965, Wiesbaden.

[9] Trost/Wolff: Beanspruchungen in abschnittsweise hergestellten Spannbetontragwerken. Der Bauingenieur 45 (197o) H.5

[1o] Mehmel: Vorgespannter Beton. 2.Aufl. Berlin 1963

Zusammenfassung:

Zunächst wird eine zweckmässige Formänderungsbeziehung des Betons erörtert, die auf den in [1] enthaltenen physikalischen Grundlagen beruht und mit gleichartigen Kriech- und Relaxationsversuchen verglichen wird. Dann wird ihre baupraktische Anwendung zur Ermittlung der Verformungs- und Spannungsänderungen im Beton und Stahl an ausgewählten Beispielen erläutert. Hierbei läßt sich der Einfluß der Ausgangsparameter wie Kriechzahlen, Belastungsalter und Bewehrungsanordnung im Verbundquerschnitt übersichtlich verfolgen.

Summary:

An appropriate time-dependent constitutive relation for concrete, based on the physical principles described in Ref. 1, is first discussed and compared with suitable creep and shrinkage test results. The practical use of the relation for evaluating changes in stress and strain in concrete and steel is demonstrated by the use of selected structural examples. In this way the influence of various parameters, such as the creep coefficient, age at loading and arrangement of steel reinforcement in composite sections, can be clearly observed.

Résumé:

Il est avant tout analysé une relation utile de déformation-contrainte du béton provenant des principes physiques contenus dans [1] avec comparaison simultanée des essais de fluage et de relaxation. Alors on en explique son emploi pratique dans la construction par des exemples choisis afin de calculer les variations de déformation et de contrainte dans le béton et l'acier. De plus, l'influence des paramètres initiaux, comme les valeurs de φ, la date de la mise en charge et la disposition de l'armature dans la section mixte se font observer de manière simple et claire.

II

Creep Effects in Continuous Reinforced Concrete Beams

Effets du fluage dans les poutres continues en béton armé

Kriechen in durchlaufenden Stahlbetonbalken

CHARLES A. MILLER
USA

Introduction

It has long been recognized (Ref. 1) that creep effects are important in an evaluation of the stiffness of concrete structures. Until the recent interest in slender and continuous concrete structures however an accurate treatment of a concrete structure's stiffness has not been important since designs were usually stress limited. An "Equivalent Modulus" method (Ref. 2) has been the accepted method of checking deflections for these designs. This method is based upon an elastic analysis employing a modulus variable in time to account for the reduced stiffness of a member as creep occurs.

The writer and Guralnick (Ref. 3 and 4) have shown that this method is only adequate in predicting peak deflections of statically determinate reinforced concrete beams subjected to a sustained loading. Errors were found to result in the application of this method to the prediction of deformation histories or the behavior of a beam subjected to cyclic loading. A numerical method was presented in Ref. 3 which was based upon a viscoelastic solution; results obtained by this method were found to be in agreement with experimental data for statically determinate beams subjected to cyclic loading. The objective of this paper is to present results based upon this procedure and to apply these results to hyperstatic structures.

The engineering significance of the effect of creep on indeterminate reinforced concrete beams was clearly established in an experimental study conducted by Washa and Fluck (Ref. 5). During this study two span continuous reinforced concrete beams were subjected to a sustained uniform loading for a period of two and one half years. Over this period 5 percent increases in the center reaction were observed. This change in reaction corresponds to a 15 percent decrease in the maximum positive moment for the beam and a 25 percent increase in the maximum negative loading moment at the center support. Bending moment changes of this order of magnitude are clearly of concern to the designer.

Analytical Model

The theory developed in Ref. 3 is summarized here for ease of reference. Bernoulli-Euler beam theory is assumed to apply throughout creep and the conventional reinforced concrete beam assumptions relating to zero tensile strength concrete, and perfect bond are made.

The stress-strain behavior of the plain concrete is represented with a viscoelastic model consisting of a linear spring in series with a single Kelvin-Voigt element. For a singly reinforced rectangular cross section the governing equations are then of the form:

$$\frac{1}{\bar{R}} = \bar{\sigma}^{+} + \frac{\exp(-Kt/\phi)}{\phi} \int_0^t E_c\, \bar{\sigma}^{+} \exp(K\tau/\phi)\, d\tau \qquad (1)$$

$$\frac{k^2 \bar{\sigma}^{+}}{2} + \frac{pn}{\bar{R}} (k-1) = 0$$

$$\frac{k^3 \bar{\sigma}^{+}}{3} + \frac{pn}{\bar{R}} (k-1)^2 = \bar{M}$$

and

$$\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{x}^2} = \left(\frac{L}{d}\right)^2 \frac{1}{\bar{R}}$$

Closed form solutions to this system of equations are not possible because of the time dependence of the neutral axis location. An iterative numerical solution was outlined in Ref. 3. The computational procedure is carried out for a complete range of parameters of practical interest with a constant load maintained on the beam.

A review of the numerical solutions indicates that the peak values of curvature, stress, and neutral axis locations are functions of the parameter (E_c/K) and (pn) only and are independent of the parameter (K/ϕ).

The ratios of peak value of deflection, concrete stress, and neutral axis location to corresponding initial values are shown in Fig. 1 through 3. For many practical problems, these charts are sufficient in themselves. It is of considerable importance to note from Fig. 3 that the neutral axis undergoes a considerable shift with time. Hence creep theories based upon the assumption that the neutral axis location remains invariant with time may be expected to err considerably when utilized for deflection or stress predictions.

It has been found that neutral axis location, stress and curvature are each different functions of time and that each of these functions of time is influenced by all three of the beam parameters (i.e., K/ϕ, pn, and E_c/K). It is possible, however, to fit the computed data with exponential expressions. To this end the following functional forms are assumed:

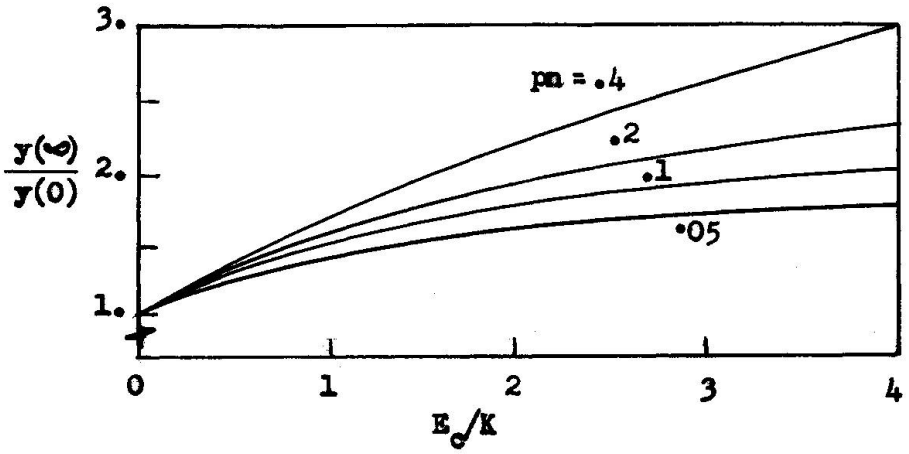


Fig.1 PEAK CREEP DEFLECTION

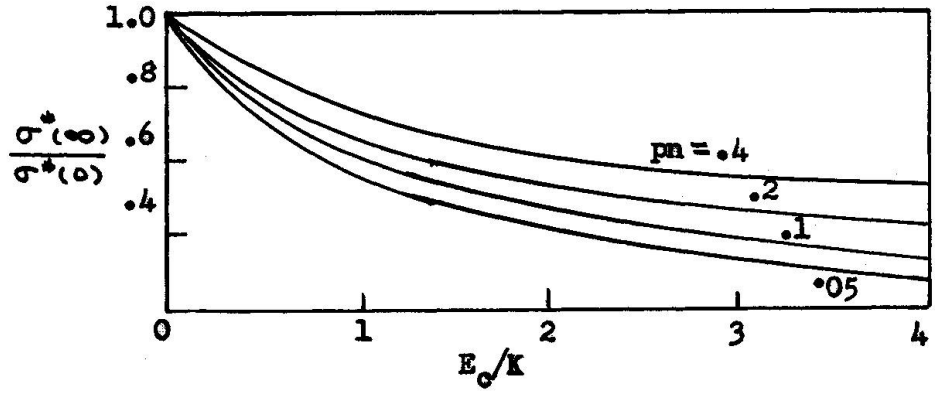


Fig.2 PEAK CREEP STRESS

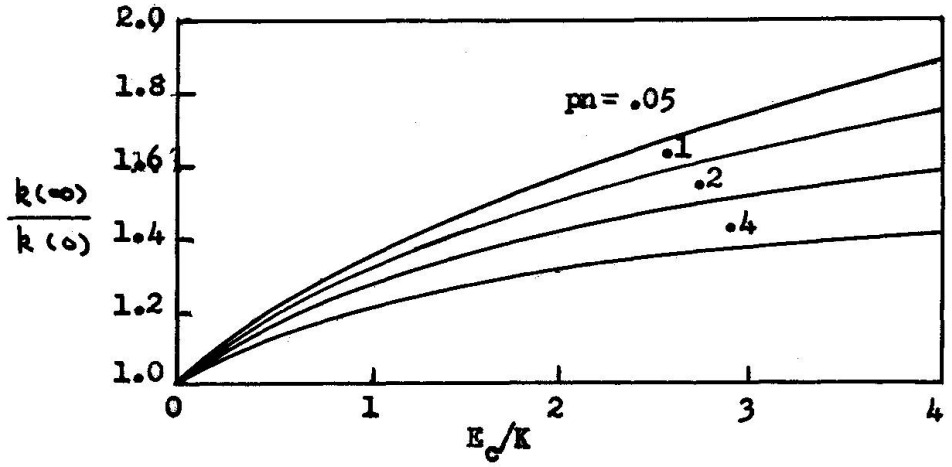


Fig.3 NEUTRAL AXIS LOCATION

$$\frac{k(t)}{k(0)} = 1 + \left[\frac{k(\infty)}{k(0)} - 1\right]\left[1 - \exp(-i_k t)\right]$$

$$\frac{\bar{\sigma}^*(t)}{\bar{\sigma}^*(0)} = 1 - \left[1 - \frac{\bar{\sigma}^*(\infty)}{\bar{\sigma}^*(0)}\right]\left[1 - \exp(-i_\sigma t)\right] \qquad (2)$$

$$\frac{y(t)}{y(0)} = \frac{\bar{R}(0)}{\bar{R}(t)} \cdot 1 + \left[\frac{y(\infty)}{y(0)} - 1\right]\left[1 - \exp(-i_R t)\right]$$

in which,

i_k, i_σ, i_R are the parameters to be determined. A least squared-error criterion is used to compute values of the parameters i_K, i_σ, and i_R which best fit the numerical solutions for each combination of the beam parameters.

Values of the exponents can be conveniently presented in chart form as shown in Fig. 4 through 6. Note that the exponent for the curvature variations (i_R) is generally similar to the exponent for plain concrete strains (K/ϕ) while the stress and neutral axis exponents are dissimilar.

Application to Continuous Beams

Creep effects in continuous beams may be approached in the same way as that discussed above for determinate beams. The only difference now would be that a set of Eqs. (1) at discrete points along the beam would have to be solved simultaneously at each time step.

A promising alternate approach, however, is to consider a solution based upon modified slope deflection equations. A general expression of the slope deflection equation is

$$\bar{M} = C\left(2\theta_1 + \theta_2 - 3\Delta/L\right) \qquad (3)$$

where $\theta_1, \theta_2, \Delta$ = rotations and relative displacement of end points of beam

C = flexural stiffness of beam

The last of Eq. 2 indicates that the stiffness of the beam varies with time according to

$$C = \frac{C_o}{1 + \left[\frac{y(\infty)}{y(0)} - 1\right]\left[1 - \exp(-i_R t)\right]} \qquad (4)$$

where C_o = initial elastic stiffness

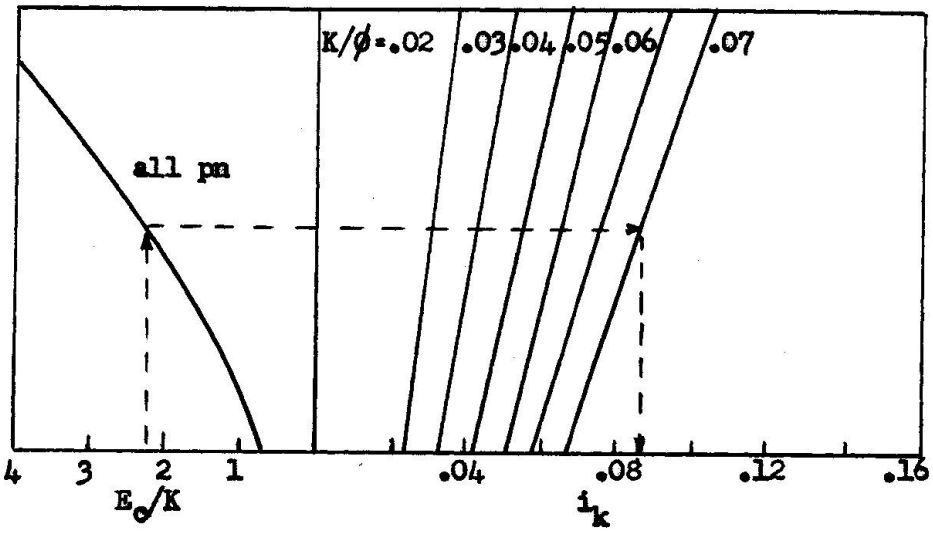


Fig.4 TIME VARIATION OF NEUTRAL AXIS LOCATION

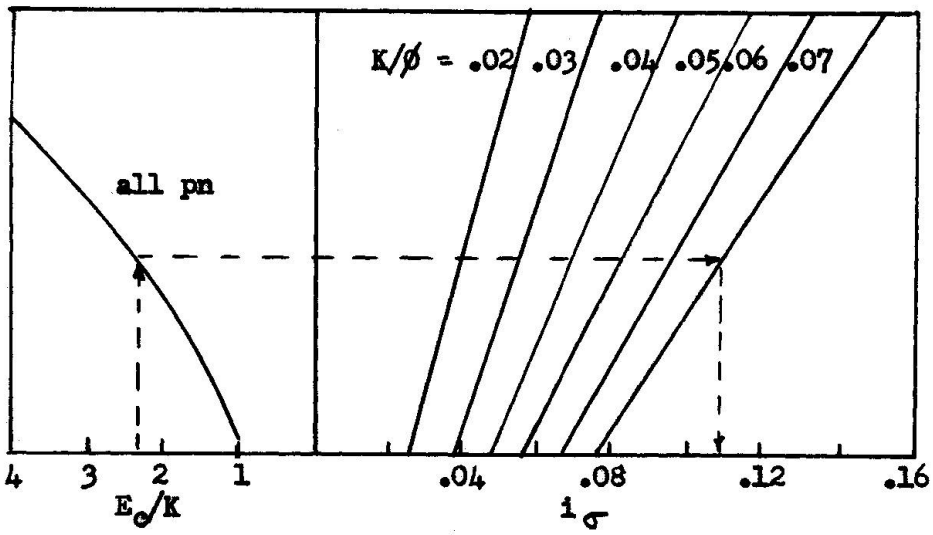


Fig.5 TIME VARIATION OF STRESS

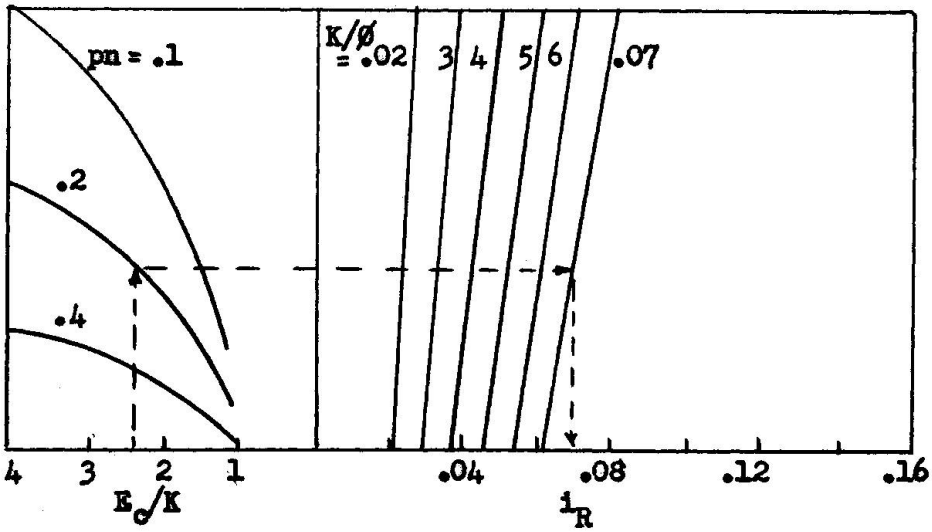


Fig.6 TIME VARIATION OF CURVATURE

One may use Eq. (3) in the same way that classical slope deflection equations are used to analyze hyperstatic elastic beams. Applying the modified slope deflection equations to the analysis of a continuous beam is tantamount to analyzing a beam whose stiffness varies with time thereby causing a continuous distribution of moments with time.

The creep deformation of hyperstatic structures tends to change the end moment of the beams. As an example of the effect of creep on the response of a statically-indeterminate beam, consider a two span beam which is subjected to a single end moment. The slope deflection equations for this beam are,

$$M_{AB} = \bar{M}_o = C_1 (2\theta_A + \theta_B)$$
$$M_{BA} + M_{BC} = 0 = C_1 (\theta_A + 2\theta_B) + C_2 (2\theta_B + \theta_C) \qquad (5)$$
$$M_{CB} = 0 = C_2 (2\theta_C + \theta_B)$$

Equations (5) have the solution

$$\theta_A = \frac{\bar{M}_o}{6C_1} \frac{(4+3\xi)}{(1+\xi)}$$
$$\theta_B = -\frac{\bar{M}_o}{3C_1} \frac{1}{(1+\xi)} \qquad (6)$$
$$\theta_C = \frac{\bar{M}_o}{6C_1} \frac{1}{(1+\xi)}$$

where $\xi = C_2/C_1$ = ratio of flexural stiffness span 1 to span 2

The moment at the center support is then

$$\bar{M}_s = \bar{M}_o \xi / 2(1+\xi) \qquad (7)$$

Using Eq. (2) the ratio of final to initial value of $\bar{M}_s$ is,

$$\frac{\bar{M}_s(\infty)}{\bar{M}_s(0)} = \frac{\alpha (1 + C_{o_2}/C_{o_1})}{1 + \alpha C_{o_2}/C_{o_1}} \qquad (8)$$

where

$$\alpha = \left[y(\infty)/y(0) \right]_1 / \left[y(\infty)/y(0) \right]_2$$

C_{o_1}, C_{o_2} = elastic flexural stiffness of beam 1 and 2

Consider the case where both spans are equal except that the second span has been poured later than the first. In the first span then $\frac{E_c}{K}$ may equal 2 and $\frac{E_c}{K}$ equal 4 in the second span. Then from Fig. 1, $\alpha = 0.8$ and $\bar{M}_s(\infty)/\bar{M}_s(o) = 0.89$. Of course more severe

redistributions may occur for larger differences in the properties of the two spans.

BIBLIOGRAPHY

1. Woolson, Ira H., "Some Remarkable Tests Indicating Flow of Concrete Under Pressure", Engineering News Record, V. 54, 1905, P. 459.

2. "Effect of Plastic Flow and Volume Change on Design", Report of American Concrete Institute Committee 313, Journal, American Concrete Institute, Detroit, Michigan, Vol. 33, Dec. 1936, pp. 123-128.

3. Miller, C.A. and Guralnick, S.A., "Reinforced Concrete Beams Subjected to Repeated Loads", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, No. 515, Proc. Paper 5489, October 1967, pp. 67-84.

4. Guralnick, S.A. and Miller, C.A., "Behavior of Reinforced Concrete Beams Subjected to Repeated Cycles of Loading", Final Report (Part A) for National Science Foundation by Illinois Institute of Technology on Grant No. 54506, January 1966.

5. Washa, G.W., and Fluck, P.G., "Plastic Flow (Creep) of Reinforced Concrete Continuous Beam", Journal, American Concrete Institute, Detroit, Michigan, V. 27, No. 5, January 1956, p. 549-561.

NOMENCLATURE

b = Width of Beam (inches)

d = Depth of beam to centroid of steel (inches)

E_c = Young's modulus of concrete (psi)

k = Depth of neutral axis from outermost fiber in compression/d

K = Spring constant in Kelvin-Voight model of concrete (psi)

L = Beam span (inches)

$\bar{M}$ = Bending moment/$E_c bd^2$

n = Ratio of steel to concrete moduli

p = Area of steel reinforcement/bd

$\bar{R}$ = Radius of curvature/d

t = Time after loading (days)

$\bar{x}$ = Coordinate along length of beam/L

$\bar{y}$ = Beam deflection/d

$\bar{\sigma}$* = Ratio of stress to distance from neutral axis times d/E_c

ϕ = Constant of proportionality for dashpot of Kelvin-Voight unit (psi per day)

ACKNOWLEDGMENT

This study was aided in part by a research grant awarded to The City University of New York by the National Science Foundation. The support of research provided by the grant is gratefully acknowledged.

SUMMARY

Procedures are developed in this paper for calculating the deformation and stress histories in reinforced concrete beams including the effects of concrete creep.

Beam deflection is found to be a minimum at the time of initial loading and may increase by a factor of three with time. The steel stress is at a minimum initially and may increase by 15 percent. Flexural normal stresses in the concrete of a beam may reduce to 30 percent of initial values with time.

RESUME

Dans ce mémoire, on présente une méthode permettant le calcul de la variation des déformations en fonction du temps et des contraintes sollicitant des poutres en béton armé, tout en tenant compte du fluage du béton.

La flèche de la poutre est minimale au moment même de la mise en charge et peut augmenter avec le temps d'un facteur allant jusqu'à trois. Les contraintes des armatures sont minimales au début et peuvent, par la suite, augmenter de 15 %. Les contraintes de flexion dans le béton peuvent être réduites, avec le temps, de 30 % par rapport aux valeurs initiales.

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Beitrag wird eine Prozedur entwickelt, welche die Berechnung der Verformung und der Spannungsgeschichte in Stahlbetonbalken einschliesslich Kriechen erlaubt.

Es ergab sich, dass die Durchbiegung im Zeitpunkt der Anfangsbelastung am kleinsten ist und mit der Zeit dreimal anwächst. Die Stahlspannung, am Anfang am kleinsten, wächst hingegen nur um 15 %. Die Biegenormalspannungen im Beton können um 30 % gegenüber dem Ursprungswert mit der Zeit abfallen.

II

Effect of Creep on the Flexural Strength and Deformation of Structural Concrete

Influence du fluage sur la résistance et déformation en flexion des ossatures en béton armé

Der Einfluss des Kriechens auf die Biegefestigkeit und die Verformung von Stahlbetontragwerken

S.K. GHOSH
Research Assistant
Civil Engr. Department

M.Z. COHN
Professor and Chairman
Solid Mechanics Division

University of Waterloo, Waterloo, Ont., Canada

1. INTRODUCTION

A considerable amount of basic research on the creep laws and factors affecting it has been conducted to-date (1). Comparatively less work has been devoted to the effect of long-term loading on the strength and deformations of beams, columns and frames (2), (3), (4), (5).

Recently various aspects of the non-linear response of structural concrete, including creep, have been investigated both theoretically and experimentally at the University of Waterloo (6), (7), (8), (9), (10). The paper develops an approach to the non-linear analysis of structural concrete (6), (7), with particular reference to the strength and deformations of reinforced concrete beams and long columns under long-term loading. The study is based on a time-dependent stress-strain relation for concrete, in which the creep, lateral reinforcement and strain-gradient are some of the major factors considered. A computer program is used in order to develop a general time-dependent moment-curvature relation, which subsequently is used for the prediction of the long-term load, moments and deflections of beams and slender columns.

2. STRESS-STRAIN RELATIONS FOR CONCRETE AND STEEL

2.1 Time-Dependent Stress-Strain Relation for Concrete in Compression

The main factors affecting the concrete behavior are the concrete strength, lateral reinforcement, creep, strain gradient, size of

specimens and type of loading. A stress-strain relation for concrete in compression, proposed by Sargin (6), takes all these factors into account by a proper choice of five governing parameters: the concrete cylinder strength f'_c, the initial Young modulus, E_c, the ratio of maximum stress to cylinder strength, k_3, the strain corresponding to maximum stress, ε_o, and a parameter, D, that affects the descending branch of the stress-strain curve. By denoting $A = E_c \varepsilon_o / k_3 f'_c$ and $x = \varepsilon / \varepsilon_o$ Sargin's relation is expressed as:

$$\sigma_c = k_3 f'_c \frac{A x + (D - 1) x^2}{1 + (A - 2) x + D x^2} \qquad (1)$$

In creep analysis the major factors are the rate of loading, loading duration and age of concrete at the time of loading. Because the control of the rate of loading is very difficult in actual structures, a conventional loading rate has to be adopted. A practical proposal, due to Rüsch (2), is to assume the load is applied in about 20 minutes at constant rates and sustained subsequently up to failure. The loading duration and the concrete age at the time of loading are reflected through parameters E_c, k_3 and ε_o, whose expressions are detailed in (6) and are not reproduced here, for the sake of brevity.

Typical stress-strain relations of concrete cylinders loaded in compression at 28 days are shown in Fig. 1 for three loading durations. As Rüsch has shown (2), the changes in concrete under long-term loads consist of the continued cement hydration and the effects of sustained loads. While an advanced hydration results in a strength increase, sustained load effects result in a reduction of strength and an increase of deformation. Because the influence of f'_c on ε_o is negligible, the values of ε_o in Fig. 1 increase in time, due to the sustained load effects. However, the values of k_3 decrease initially due to these effects, but increase subsequently, when the effect of the continued cement hydration is prevailing.

2.2 Time-Dependent Stress-Strain Relation for Concrete in Tension

The behavior of concrete in tension is represented by the following elastic-brittle relations:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= E_c \varepsilon \quad (\text{for } \varepsilon < \varepsilon_t) \\ \sigma_t &= 0 \quad\;\; (\text{for } \varepsilon > \varepsilon_t) \end{aligned} \qquad (2)$$

where $\varepsilon_t = \sigma_{tr} / E_c$ is the cracking strain and σ_{tr} is the concrete modulus of rupture. The stress-strain relation (2) is time-dependent because E_c and σ_{tr} are defined in terms of the duration of loading and concrete age at the time of loading.

2.3 Stress-Strain Relations for Reinforcing Steels

The stress-strain relations of most reinforcing steels consist of three branches corresponding to the elastic, yield and strain-hardening

ranges, respectively. The following idealized relations, considered applicable to most American steel grades with a yield limit not in excess of 75 ksi, are adopted in this study:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= E_s \varepsilon \qquad (\text{for } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_y) \\ \sigma_s &= f_y \qquad (\text{for } \varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_h) \\ \sigma_s &= f_y + E_h (\varepsilon - \varepsilon_h)[1 - E_h(\varepsilon - \varepsilon_h)/4(\sigma_{su} - f_y)] \qquad (\text{for } \varepsilon > \varepsilon_h) \end{aligned} \tag{3}$$

where E_s is the Young modulus for steel, f_y is the yield limit, ε_h is the strain at the onset of hardening, E_h is the strain-hardening modulus and σ_{su} is the ultimate stress. Typical stress-strain curves for steel, Eqs. (3), are illustrated in Fig. 2.

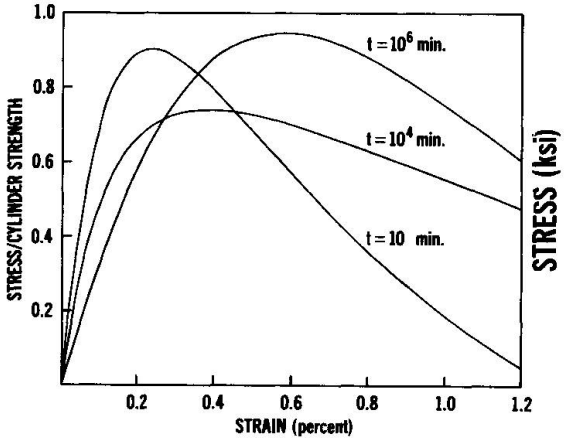


Fig. 1

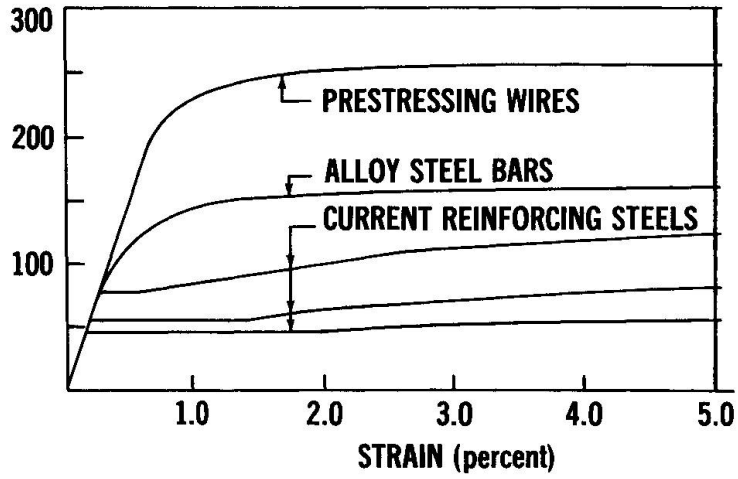


Fig. 2

For high strength steels (alloy steel bars, pre-stressing wires) other equations consisting of an initial linear range and a subsequent non-linear range, can be introduced, without any change in the analysis.

3. NON-LINEAR ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE SECTIONS AND MEMBERS

3.1 Section Analysis

With the notations and assumptions in Fig. 3 the force and moment equations of equilibrium for a reinforced concrete section symmetrical about the vertical axis, can be written as follows:

$$\int_0^{kd} \sigma(\varepsilon) b(y)\,dy + A_s' \sigma_s' - \int_0^{kd} \sigma_t(\varepsilon) b(y)\,dy - A_s \sigma_s = P \tag{4}$$

$$\int_0^{kd} \sigma(\varepsilon) b(y)(d - kd + y)\,dy + A_s' \sigma_s' (d - d') - \int_0^{kd} \sigma_t(\varepsilon) b(y)(d - kd - y)\,dy = Pe + M \tag{5}$$

where σ_s is the stress in the compression steel.

The assumption of linear strain distribution implies:

$$\frac{\varepsilon_c}{kd} = \frac{\varepsilon_s}{kd-d'} = \frac{\varepsilon_s}{d-kd} = \frac{\varepsilon}{y} = \frac{\varepsilon_t}{y_t} \qquad (6)$$

Eqs. (1), (2), (3) are used to eliminate σ_c, σ_t, σ_s and σ'_s, respectively, and Eqs. (6) to eliminate y and y_t from Eqs. (4) and (5). A numerical method is developed to solve Eqs. (4) and (5) simultaneously in the following steps (Fig. 4a.):

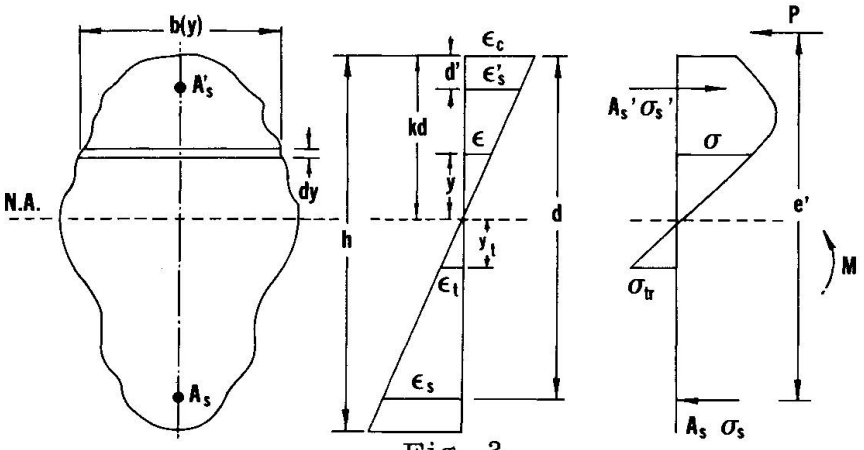


Fig. 3

(a) Starting from zero increase ε_c at some chosen interval.

(b) For any given value of ε_c find a value of k by successive approximations such that Eq. (4) be satisfied within a specified tolerance.

(c) Solve Eq. (5) for M with the known values of ε_c, k and the given P.

(d) Calculate all other behavior parameters ϕ, EI, etc.

(e) Continue to increase ε_c up to the value ε_u at which the moment reaches a maximum. This is the ultimate of the section.

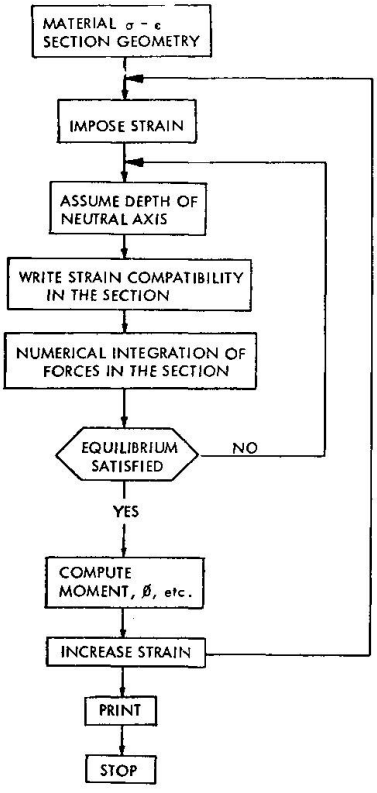


Fig. 4(a)

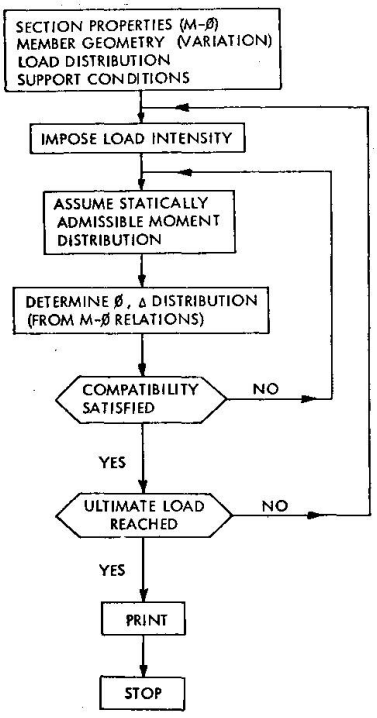


Fig. 4(b)

3.2 Member Analysis

The non-linear analysis of reinforced concrete members can be performed by following the steps outlined in the diagram, Fig. 4b. Loads of some known intensity are first imposed on the member and a statically admissible moment field is assumed. The associated curvature field is computed by using the moment-curvature relations derived as indicated in Section 3.1. Slopes and deflections along the member are calculated from the known curvature field and the boundary conditions are checked. A statically admissible moment field that satisfies all boundary conditions is found by trial and error. The intensity of imposed loads is increased at desired intervals and the above process is repeated until the ultimate moment capacity is reached in at least one section along the member.

4. TIME-DEPENDENT MOMENT-CURVATURE RELATIONS FOR REINFORCED CONCRETE SECTIONS

The moment-curvature relation of a rectangular singly reinforced concrete section in pure bending has been derived for six different loading durations by using the approach of section 3.1. The results, plotted in Fig. 5, show five sets of curves, each corresponding to a particular steel percentage. It is noted that larger durations of loading have a more favorable effect on the ductility than on the strength of reinforced concrete sections.

The maximum moment, M_u, and the associated curvature, ϕ_u, are plotted against the time in Figs. 6 and 7, respectively, where each line corresponds to a set of curves in Fig. 5. These diagrams show that time has but a minor influence on the ultimate moments and curvatures. Fig. 6 illustrates the initial stress drop due to sustained load effects and the subsequent stress increase that occurs when the continued hydration of the cement paste becomes predominant. However, from Fig. 7, it is seen that the peak curvatures tend to increase in time because of the sustained load effects.

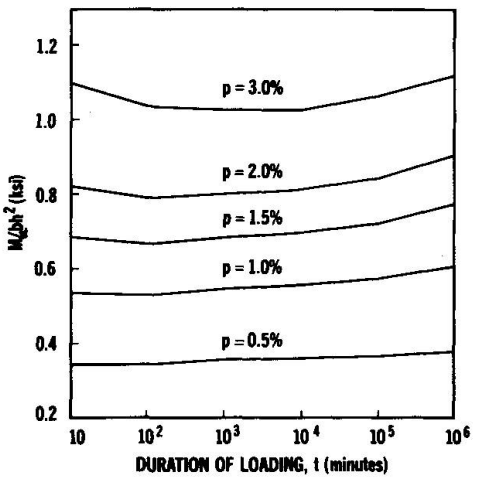


Fig. 6

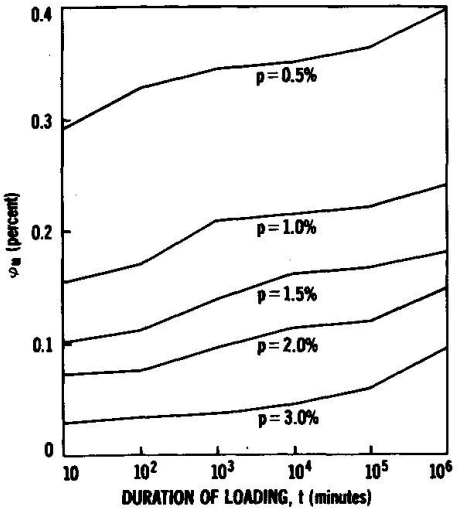


Fig. 7

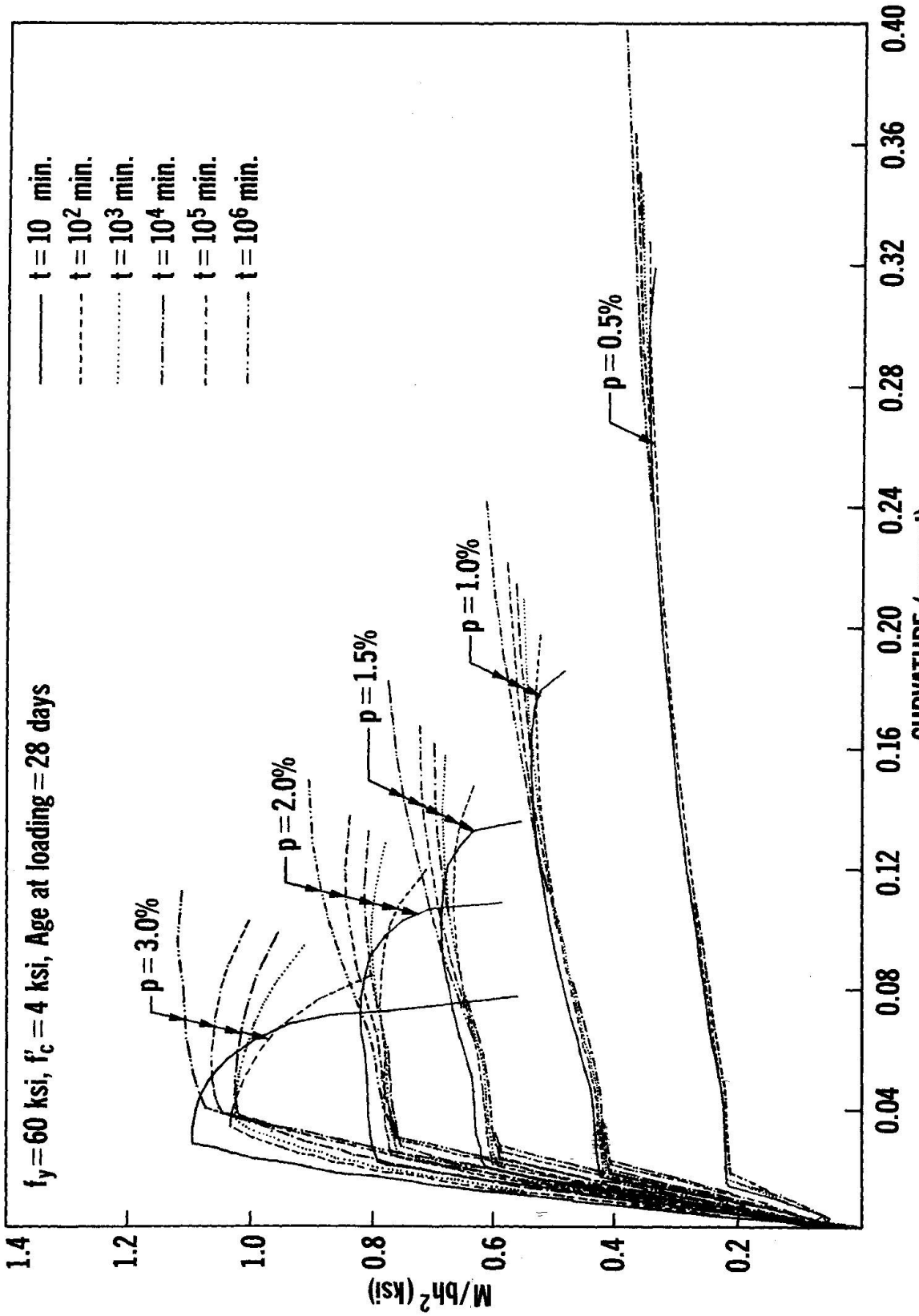

$f_y = 60$ ksi, $f'_c = 4$ ksi, Age at loading = 28 days
t = 10 min.
t = 10^2 min.
t = 10^3 min.
t = 10^4 min.
t = 10^5 min.
t = 10^6 min.
p = 3.0%
p = 2.0%
p = 1.5%
p = 1.0%
p = 0.5%
M/bh^2 (ksi)
CURVATURE (percent)
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.04
0.08
0.12
0.16
0.20
0.24
0.28
0.32
0.36
0.40

Fig. 5

5. TIME-DEPENDENT BEHAVIOR OF A REINFORCED CONCRETE CONTINUOUS BEAM

The analysis described in Section 3 was applied to predict the long-term behavior of a two-span continuous beam previously studied both theoretically (7) and experimentally (9) for short-time loading. The section sizes, steel reinforcing and other details are the same as in Ref. (9). The deflected shape of the beam under service loads is shown in Fig. 8 for loading durations of 10 minutes, approximately one week and two years.

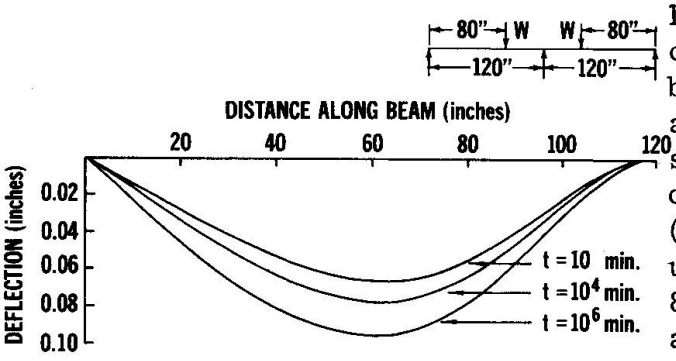


Fig. 8

Assuming the service load to correspond to about one third of the theoretical ultimate load, it is seen from Fig. 8 that the maximum deflection after two-years of loading is about 50% higher than the short-time maximum deflection.

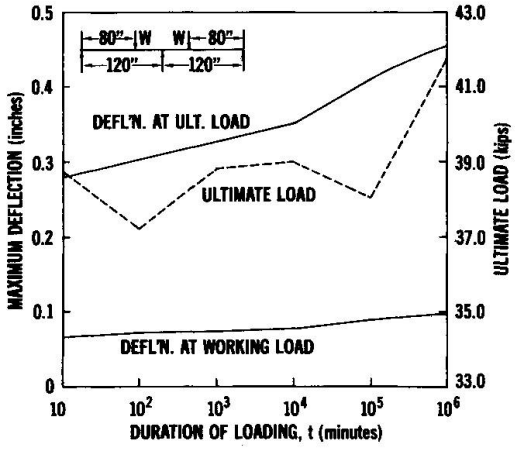


Fig. 9

The maximum deflections at service and ultimate loads as well as the ultimate load of the beam investigated are plotted against the load duration in Fig. 9. It is seen that whereas the ultimate load is negligibly affected by creep, the deflections at both service and ultimate loads increase considerably in time.

6. TIME-DEPENDENT BEHAVIOR OF A LONG REINFORCED CONCRETE COLUMN

Fig. 10 shows the deflected shapes of a long reinforced concrete column corresponding to loading durations of 40 minutes, 5 days and 70 days. The applied concentric load is 15% of the ultimate load computed by the ACI 318-63 code formula. The geometry, concrete sizes, steel reinforcement and detailing are the same as those used in Hellesland's tests (10), the results of which are represented by dots in Fig. 10. It is seen that the agreement between theoretical and experimental data is very good.

A similar correlation is noted in the comparison of analytical and test data of mid-height deflections, illustrated in Fig. 11. The maximum deviation between predicted and measured deflections does not exceed 10%.

7. CONCLUSIONS

A general, non-linear analysis program, based on a realistic time-dependent stress-strain relation for concrete, was used to predict the behavior of reinforced concrete structures under long-term loading.

The study confirms that creep has little effect on the strength of flexural members and illustrates its major influence on the deflections and strength of slender columns.

Consideration of adequate bond characteristics, and extensions to structures with higher degrees of static indeterminacy, appear to be significant potential developments of the analytical approach presented in the paper.

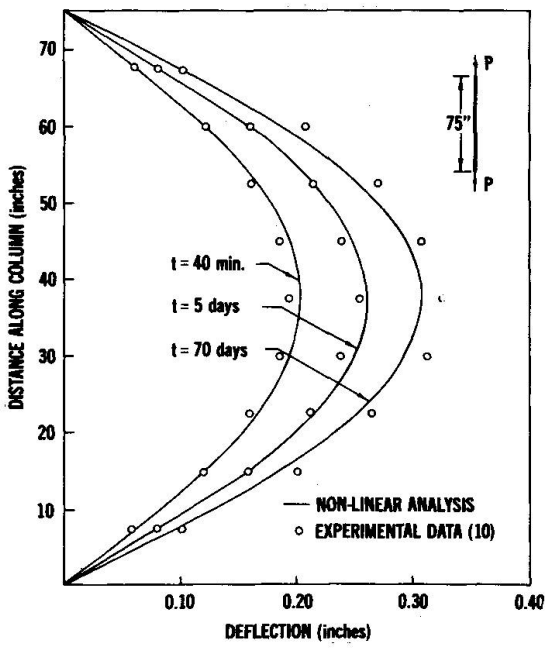


Fig. 10

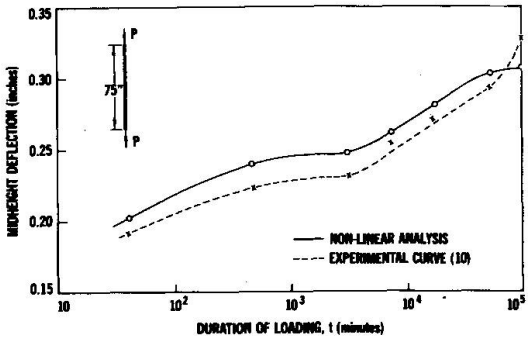


Fig. 11

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are indebted to Dr. M. Sargin, formerly a Post-Doctoral Fellow at the University of Waterloo, for his contribution in the early stages of this work. Also, thanks are offered to Mr. S. Srivastava and Dr. J. Hellesland, of the University of Waterloo, for providing some data of their M.A. Sc. and Ph.D. dissertations, which were used in Figs. 8-9 and 10-11, respectively.

The work reported in the paper is part of a comprehensive investigation on the "Inelastic Behavior of Reinforced Concrete Structures", in progress at the University of Waterloo with the financial support of the National Research Council of Canada, under Grant A-4789.

REFERENCES

(1) I. ALI and C.E. KESLER: "Rheology of Concrete: A Review of Research", Bull Eng. Exp. Sta. No. 476, Univ. of Illinois, Urbana, Illinois. March 1965.

(2) H. RÜSCH: "Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete", Journal ACI, Vol. 57, No. 7, July 1960, pp. 1-28.

(3) H. GESUND: "Shrinkage and Creep Influence on Deflections and Moments of Reinforced Concrete Beams", Journal ACI, Vol. 59, No. 5, May 1962, pp. 687 - 704.

(4) W.G. CORLEY and M.A. SOZEN: "Time-Dependent Deflections of Reinforced Concrete Beams", Journal ACI, Vol. 63, No. 3, March 1966, pp. 373 - 386.

(5) L.G. SELNA: "Creep, Cracking and Shrinkage in Concrete Frame Structures", Proc. ASCE, Vol. 95, No. ST. 11, Dec. 1969, pp. 2743 - 2761.

(6) M. SARGIN: "Stress-Strain Relationship for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections", Ph.D. Thesis, Univ. of Waterloo, Waterloo, Ont., March 1968.

(7) M. SARGIN and M.Z. COHN: "Analysis of Structures Made of Non-Linear Composite Materials", Proc. Second Canadian Congr. Appl., Mech., University of Waterloo, Waterloo, Ont., April 1969.

(8) S.K. GHOSH: "A Study on the Effectiveness of Cover and the Effects of Strain Gradient on Concrete Stress-Strain Relationships", M.A. Sc. Thesis, Univ. of Waterloo, Waterloo, Ont., May 1969.

(9) S.K. SRIVASTAVA: "Moment Redistribution in Over-Reinforced Concrete Continuous Beams", M.A. Sc. Thesis, Univ. of Waterloo, Waterloo, Ont., Sept. 1969.

(10) J. HELLESLAND: "Long-Term Behavior of Eccentrically Loaded Long Columns", Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ont. May 1970.

SUMMARY

A non-linear analysis of structural concrete is developed on the basis of a time-dependent stress-strain relation of concrete, in which creep is a major factor, along with the lateral reinforcement, strain-gradient, etc.

A computer program enables the flexural strength and deformation of reinforced concrete sections and moment-curvature relationships under long-term loading to be predicted.

The analytical procedure is applied to the investigation of the creep effects on reinforced concrete beams and columns and corresponding results are compared with some recent experimental data.

RESUME

En partant d'une relation contrainte-déformation dont les principaux facteurs sont: fluage, armature transversale, gradient de déformation etc., on présente une méthode d'étude du comportement non linéaire des ossatures en béton armé.

La résistance et la déformation à la flexion des sections en béton armé ainsi que les relations moment-courbure sous charge de longue durée sont obtenues à l'aide d'un programme d'ordinateur.

La méthode est appliquée à l'analyse du fluage sur les poutres et poteaux en béton armé et les résultats sont comparés avec quelques données expérimentales récentes.

ZUSAMMENFASSUNG

Ein nichtlineares Berechnungsverfahren für Stahlbetonbauwerke ist entwickelt worden aufgrund einer zeitabhängigen Spannung-Dehnungs-Beziehung des Betons, in welcher das Kriechen die Hauptvariabel neben der Schubbewehrung, dem Dehnungsgradienten usw. darstellt.

Zur Ermittlung der Biegefestigkeit und -verformung der Stahlbetonquerschnitte sowie der Moment-Krümmungs-Beziehungen unter Langzeitbelastung ist ein elektronisches Rechenprogramm ausgearbeitet worden.

Das Berechnungsverfahren wird für die Untersuchung der Kriechwirkung von Stahlbetonbalken und -stützen angewendet, und die Ergebnisse sind mit vorliegenden Versuchsdaten verglichen worden.

II

Time-dependent Deformation in Prestressed Concrete

Déformation dépendant du temps dans le béton précontraint

Zeitabhängige Verformung im Spannbeton

M.A. SAEED
M.A.Sc., Research Assistant

J.B. KENNEDY
Ph.D., Professor and Department Head

Department of Civil Engineering, University of Windsor, Windsor, Ont., Canada

1. INTRODUCTION

A fictitious modulus of elasticity for concrete was first introduced by Dischinger [1], and was later revised by Fritz [2] who included the effect of reinforcing. The application of this fictitious modulus of elasticity and the two-fibre method of Busemann [3] and Habel [4] lead to the determination of rotation and deflection of a section in a prestressed concrete structure. In this work the effect of creep and shrinkage of concrete on deformation is taken into account in such a way that the resulting deformations are in terms of initial design parameters.

A time-dependent modulus of deformation E_e is introduced which accounts for deformation and hence stress redistribution due to creep in the concrete. Thus, such modulus of deformation can be utilized together with initial material and geometrical properties and initial moments to yield rotations and deflections. The use of E_e may be also extended to treat more realistically stability problems which would involve, in general, orthotropic analysis.

2. ANALYTICAL APPROACH

The derivation of an expression for the effective modulus of elasticity is based mainly on Busemann's two fibre method [3], [4] as applied to simply supported beams. It is assumed that: For short term loading the modulus of elasticity of concrete, E_{c0}, remains constant; plane sections remain plane after deformation; creep deformation is linearly proportional to the stress level i.e. it follows hooke's law; curves of creep factor versus time and shrinkage strain

versus time are similar to one another; and, in multi-layer prestressing (more than two layers of steel) the stresses in the various layers are linearly related.

2.1. THEORETICAL BACKGROUND

Considering a cross-section of a prestressed concrete beam such as shown in Fig. 1, a bed-force F_1^o (or an external force) is applied at point P_1 of such magnitude that the resulting stress at point P_2 is zero. Let the component of F_1^o carried by the concrete be denoted by F_{c1}. If y_{c1} is the distance from the point of application of F_{c1} to the centroid of the concrete, c.g.c., then y_{c2}, the distance of the fibre with zero stress to c.g.c., is found from:

$$\frac{y_{c1}F_{c1}}{I_c}y_{c2} - \frac{F_{c1}}{A_c} = 0. \quad \text{With} \quad I_c = A_c r_c^2, \text{ it follows that } y_{c1}y_{c2} = r_c^2$$

where A_c is the concrete cross-sectional area and r_c is the radius of gyration of the concrete about the c.g.c. y_{c2} can also be found graphically [5]. By Betti's reciprocal theorem it can be readily observed that an external force F_2^a applied at P_2 will produce zero stress at P_1. Thus the fibres at P_1 and P_2 deform independently of each other, irrespective whether such deformations are elastic or plastic due to creep and shrinkage. From geometry, Fig. 1,

$$\sigma_{c1} = c\sigma_c/y_{c2} = cF_{c1}/A_c y_{c2}. \quad \text{Or } \sigma_{c1} = F_{c1}/A_{c1}$$

where $A_{c1} = A_c y_{c2}/c$ and $c = y_{c1} + y_{c2}$.

Similarly, for the force F_2^a applied at P_2 the stress at P_2 will be

$$\sigma_{c2} = F_{c2}/A_{c2} = F_2^a/A_{c2}, \text{ since } F_2^a = F_{c2} + F_{s2}(=0), \text{ where } A_{c2} = A_c y_{c1}/c.$$

It is evident that $A_{c1} + A_{c2} = A_c$. Thus the equivalent areas A_{c1} and A_{c2} are fractions of A_c distributed to points P_1 and P_2 according to the lever-arm principle. Whence the stresses can be readily computed when the concrete cross-section is visualized as two independent columns concentrically loaded. Furthermore, an applied moment, M^a, can be made equivalent to a couple of two equal but opposite forces acting at P_1 and P_2 with magnitude M^a/c.

Due to the presence of steel, the effective equivalent areas, A_{e1} and A_{e2}, and axial stiffness coefficients, α_1 and α_2 of the columns become:

For point P_1: $A_{c1} = A_c\, y_{c2}/c$, $A_{s1} = A_{sp}$, $A_{e1} = A_{c1} + nA_{sp}$,

$$\alpha_1 = \frac{E_s A_{s1}}{E_{c0}A_{c1} + E_s A_{s1}}$$

For point P_2: $A_{c2} = A_c y_{c1}/c$, $A_{s2} = 0$, $A_{e2} = A_{c2} + A_{s2} = A_{c2}$ (since $A_{s2} = 0$ in this case.) Putting $n = E_s/E_{c0}$ and $u_1 = A_{s1}/A_{c1}$, yield $\alpha_1 = \dfrac{n\,u_1}{1 + n\,u_1}$.

For the general case where there are a number of prestressing tendons as

well as non-tensioned steel in the section, Fig. 2, the following procedure is followed: Let E_{sp} = modulus of elasticity of prestressing steel; E_{s0} = modulus of elasticity of non-tensioned steel; $n_o = E_{s0}/E_{c0}$; $n_p = E_{sp}/E_{c0}$; $n_s = E_{sp}/E_{s0} \leq 1.0$

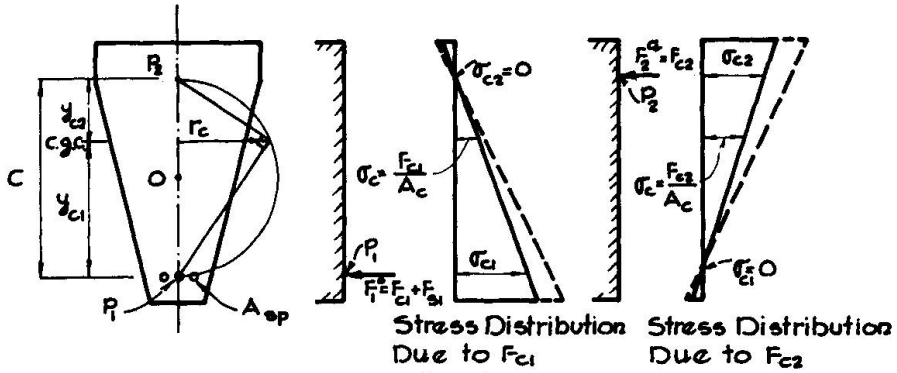


Fig. 1

(in case of wire-rope tendons); I_c = moment of inertia of concrete only about c.g.c.; I_s = moment of inertia of all steel about c.g.s. = $\Sigma n_s A_{sp} y_{sp}^2 + \Sigma A_{s0} y_{s0}^2$ where y_{sp} and y_{s0} are the distances of the individual prestressing and non-tensioned steels from the c.g.s.; and, total area of steel, $A_s = A_{s0} + n_s A_{sp}$, then $y_{c1} y_{c2} = r_c^2$ where $r_c^2 = I_c/A_c$, and $y_{s1} y_{s2} = r_s^2$ where $r_s^2 = I_s/A_s$.

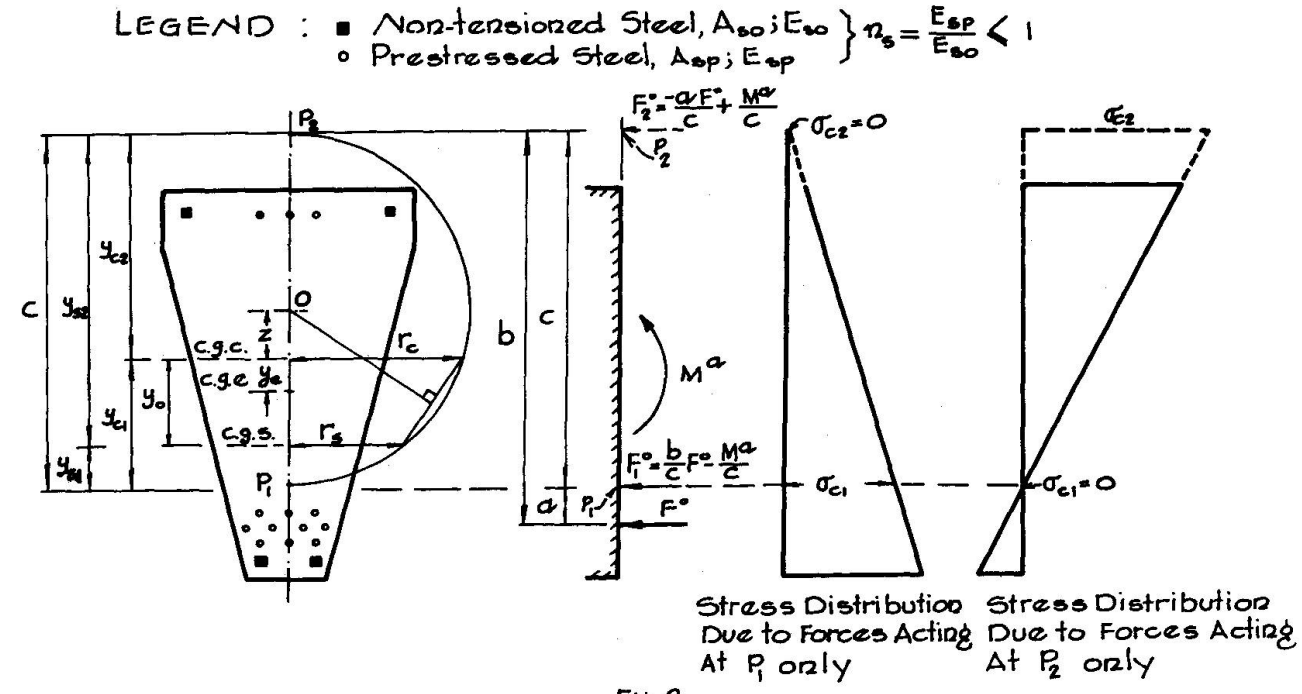


Fig. 2

y_{c1}, y_{c2}, y_{s1}, and y_{s2} can be obtained graphically [5], or by geometry from, for example: $y_{s1} = \frac{r_s^2 - r_c^2 - y_0^2}{2y_0} \pm \sqrt{r_s^2 + \left(\frac{r_s^2 - r_c^2 - y_0^2}{2y_0}\right)^2}$ where y_0 is the distance between the c.g.c. and c.g.s.

Thus, considering the concept of concentrically loaded columns at P_1 and P_2, the expressions for the effective equivalent areas and stiffness coefficients are as follows:

For Point P_1: $A_{c1} = A_c y_{c2}/c$, $A_{sp1} = A_{sp}\, y_{s2}/c$, $A_{s01} = A_{s0}\, y_{s2}/c$,

$$A_{e1} = A_{c1} + n_0(A_{s01} + n_s A_{sp1}) = A_{c1} + n_0 A_{s1}$$

where $A_{s1} = A_{s01} + n_s A_{sp1}$

$$\alpha_1 = E_{s0}A_{s1}/(E_{c0}A_{c1} + E_{s0}A_{s1}) = n_0 u_1/(1 + n_0 u_1)$$

where $u_1 = A_{s1}/A_{c1}$.

For Point P_2: $A_{c2} = A_c y_{c1}/c$, $A_{sp2} = A_{sp} y_{s1}/c$

$$A_{s02} = A_{s0} y_{s2}/c, \quad A_{e2} = A_{c2} + n_0(A_{s02} + n_s A_{sp2}) = A_{c2} + n_0 A_{s2}$$

where $A_{s2} = A_{s02} + n_s A_{sp2}$

$$\alpha_2 = E_{s0}\, A_{s2}/(E_{c0}A_{c2} + E_{s0}A_{s2}) = n_0 u_2/(1 + n_0 u_2)$$

where $u_2 = A_{s2}/A_{c2}$.

Thus, referring to Fig. 2, $\sigma_{c1} = F_1^o/A_{e1}$ and $\sigma_{c2} = F_2^o/A_{e2}$. In general, one can write, for any one fibre, the stress at time t, accounting for creep, as $\sigma_{ct} = \sigma_{c0}\, e^{-\alpha\phi}$. Similarly, accounting for shrinkage in a creeping concrete section the stress at time t is given by $\sigma_{cs} = (1 - e^{-\alpha\phi})\, \varepsilon_s E_{c0}/\phi$

where ϕ is the creep factor and ε_s is the shrinkage strain. The strain in concrete will be increased under sustained stress due to creep phenomenon. Fritz [2] has accounted for this phenomenon by introducing fictitious moduli of elasticity accounting for stresses induced by sustained loads and shrinkage of concrete. For creep, he introduced $E_{cf} = \alpha E_{c0}/(\alpha + e^{\alpha\phi} - 1) = E_{c0}\beta$

where $\beta = \alpha/(\alpha + e^{\alpha\phi} - 1)$. Fig. 3 gives values of β for various ϕ and α. Similarly, for shrinkage in a creeping concrete section, Fritz gave the following expression for the fictitious modulus of elasticity,

$$E_{cfs} = E_{c0}/[1 + \phi e^{\alpha\phi}/(e^{\alpha\phi} - 1) - 1/\alpha].$$

2.2 REDUCTION FACTORS DUE TO CREEP AND SHRINKAGE

The strain at any fibre of a section subjected to sustained loading can be expressed as:

$$\varepsilon_{ct} = \sigma_{ct}/E_{cf} \quad \text{or} \quad \varepsilon_{ct} = \sigma_{c0}/\gamma E_{c0}$$

where $\gamma = \alpha/(1 - e^{-\alpha\phi} + \alpha e^{-\alpha\phi})$. One can, therefore, define the effective modulus of elasticity of the fibre at time t in the following manner: $E_e = E_{c0}\gamma$

γ, being the reduction factor for the short-term-loading modulus of elasticity

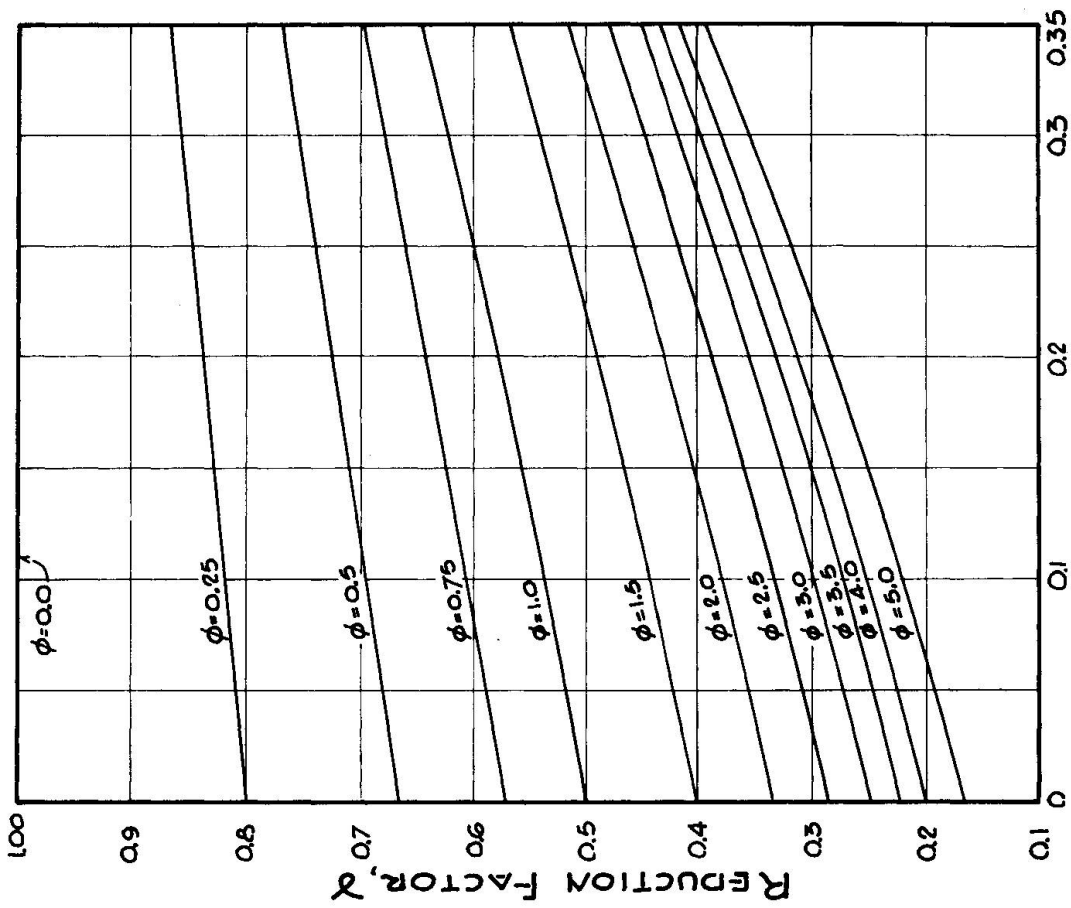

REDUCTION FACTOR, β
STIFFNESS COEFFICIENT, α
ϕ=0.0
ϕ=0.25
ϕ=0.5
ϕ=0.75
ϕ=1.0
ϕ=1.5
ϕ=2.0
ϕ=2.5
ϕ=3.0
ϕ=3.5
ϕ=4.0
ϕ=4.5
ϕ=5.0

Fig. 3

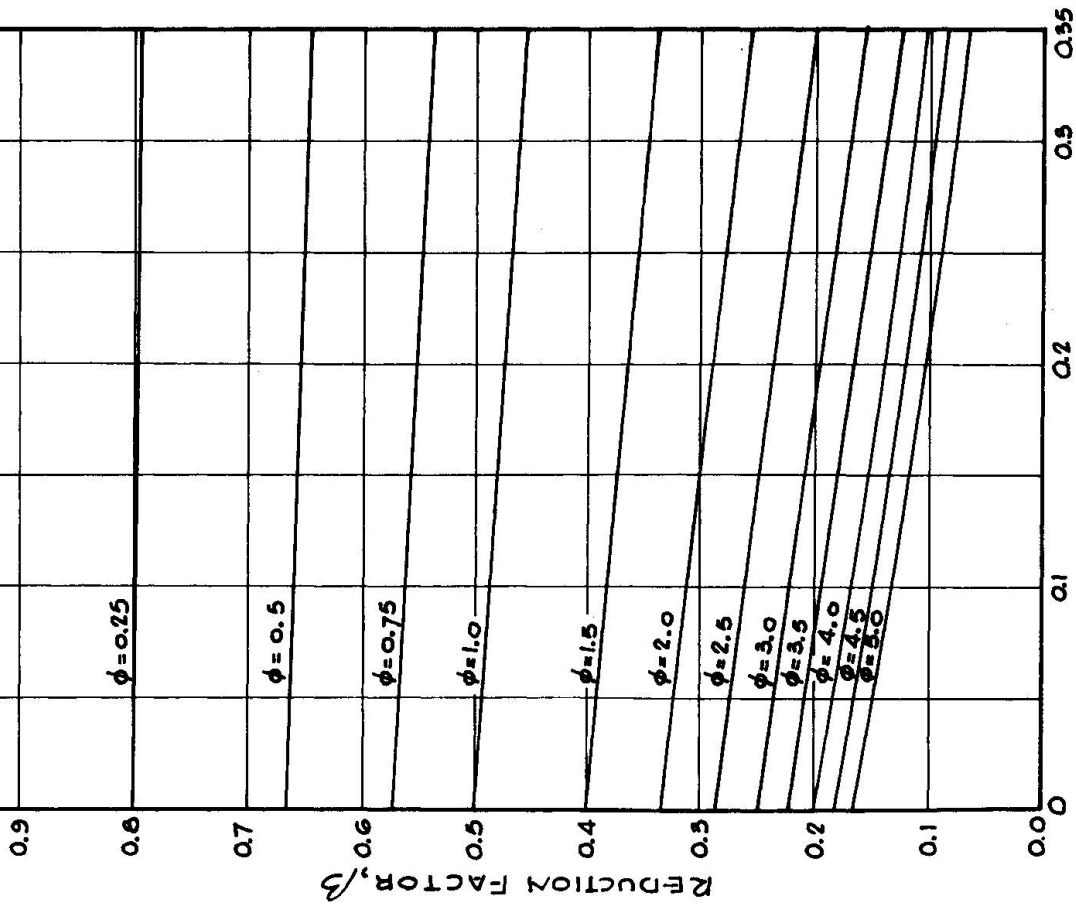

REDUCTION FACTOR, λ
STIFFNESS COEFFICIENT, α
ϕ=0.0
ϕ=0.25
ϕ=0.5
ϕ=0.75
ϕ=1.0
ϕ=1.5
ϕ=2.0
ϕ=2.5
ϕ=3.0
ϕ=3.5
ϕ=4.0
ϕ=4.5
ϕ=5.0

Fig. 4

due to creep; values of γ for various ϕ and α are shown in Fig. 4. It should be noted that since α in general varies from fibre to fibre, so does γ.

The constraining shrinkage strain in a concrete fibre due to the presence of reinforcing is defined as $\varepsilon_{st} = \sigma_{cs}/E_{cfs}$. The net remaining strain is

$$(\varepsilon_s - \varepsilon_{st}) = \varepsilon_s \eta$$

where $\eta = (1 - \alpha)(1 - e^{-\alpha\phi})/\alpha\phi$.

The values of η for various ϕ and α are plotted in Fig. 5. Here also η varies from fibre to fibre since α, the stiffness coefficient, is a function of position.

Once the deformations of the fibres at P_1 and P_2 are determined, the strains and stresses in the concrete at other fibres as well as the rotation of the section can be found by employing the accepted assumption of plane sections remaining plane.

2.3. TRANSFER OF FORCES TO FIBRES P_1 AND P_2

(a) Prestressing Force: At time $t = 0$, the prestressing bed force F^o can be transferred to points P_1 and P_2 as F_1^o and F_2^o respectively, Fig. 2; such forces will act concentrically on the equivalent areas at these points. The concrete stress at P_1 will be $\sigma_{cl(0)} = F_1^o/A_{el} = F_1^o/(A_{cl} + n_0 A_{sl})$.

At any given time t the concrete stress will be

$\sigma_{cl(t)} = \sigma_{cl(0)} e^{-\alpha_1\phi}$. The stress loss at time t is

$\Delta\sigma_{cl} = \sigma_{cl(0)} - \sigma_{cl(t)} = \sigma_{cl(0)}(1 - e^{-\alpha_1\phi})$. The loss in the Force F_1^o will be

$$\Delta F_1 = A_{cl}(\Delta\sigma_{cl}) = A_{cl}\,\sigma_{cl(0)}(1 - e^{-\alpha_1\phi}) = A_{cl}F_1^o\,(1 - e^{-\alpha_1\phi})/(A_{cl} + n_0 A_{sl}).$$

The net remaining force will be

$$F_{1(t)} = F_1^o - \Delta F_1 = F_1^o\,[1 - (1 - e^{-\alpha_1\phi})/(1 + n_0 u_1)] = F_1^o(n_0 u_1 + e^{-\alpha_1\phi})/(1+n_0 u_1).$$

Similarly, for point P_2,

$$F_{2(t)} = F_2^o(n_0 u_2 + e^{-\alpha_2\phi})/(1 + n_0 u_2).$$

In practice, many structures are post-tensioned and grouted immediately after tensioning to establish bond between concrete and steel tendons. Let the initial prestressing force in the tendon be F (jack force) with components F_1 and F_2 at points P_1 and P_2 respectively. For such cases, it is more advantageous to consider the part of the force F_1 (or F_2) carried by the concrete alone at P_1 (or P_2). Considering point P_1 at time $t = 0$: $\sigma_{cl(0)} = F_1/(A_{cl} + n_0 A_{s01})$.

Now $F_1 = F_{cl} + F_{sl} = A_{cl}\,\sigma_{cl(0)} + n_0\,\sigma_{cl(0)}\,A_{s01}$. It can be readily shown that

$F_{cl} = F_1/(1 + n_0 u_{sl})$ where $u_{sl} = A_{s01}/A_{cl}$. After time t, the reduction in

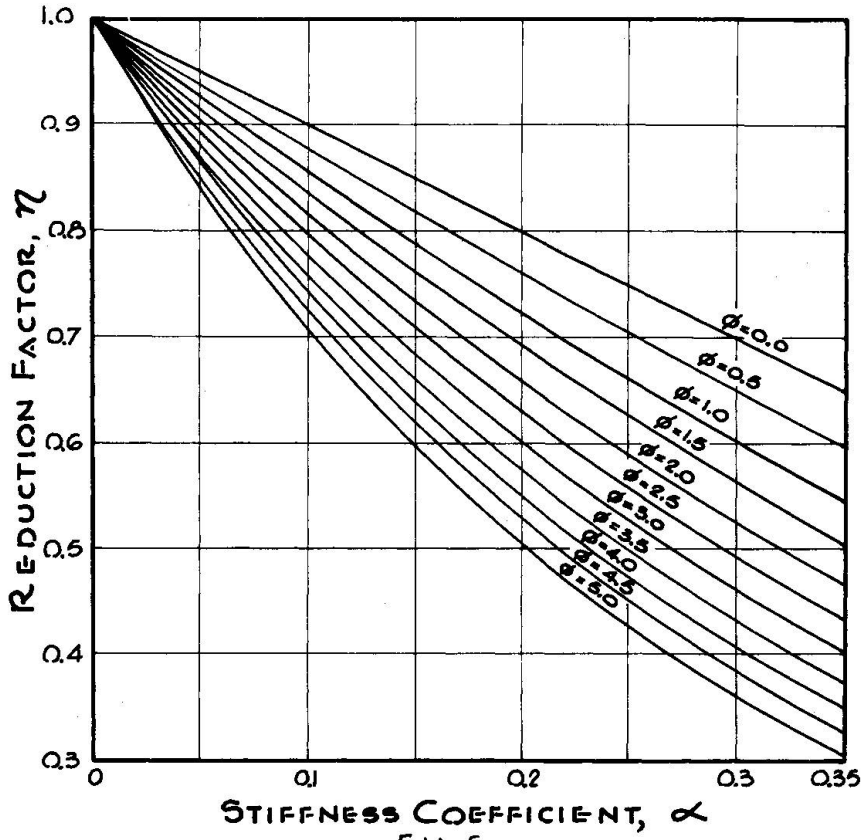

REDUCTION FACTOR, η
STIFFNESS COEFFICIENT, α
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0
0.1
0.2
0.3
0.35
Ø=0.0
Ø=0.5
Ø=1.0
Ø=1.5
Ø=2.0
Ø=2.5
Ø=3.0
Ø=3.5
Ø=4.0
Ø=4.5
Ø=5.0

Fig. 5

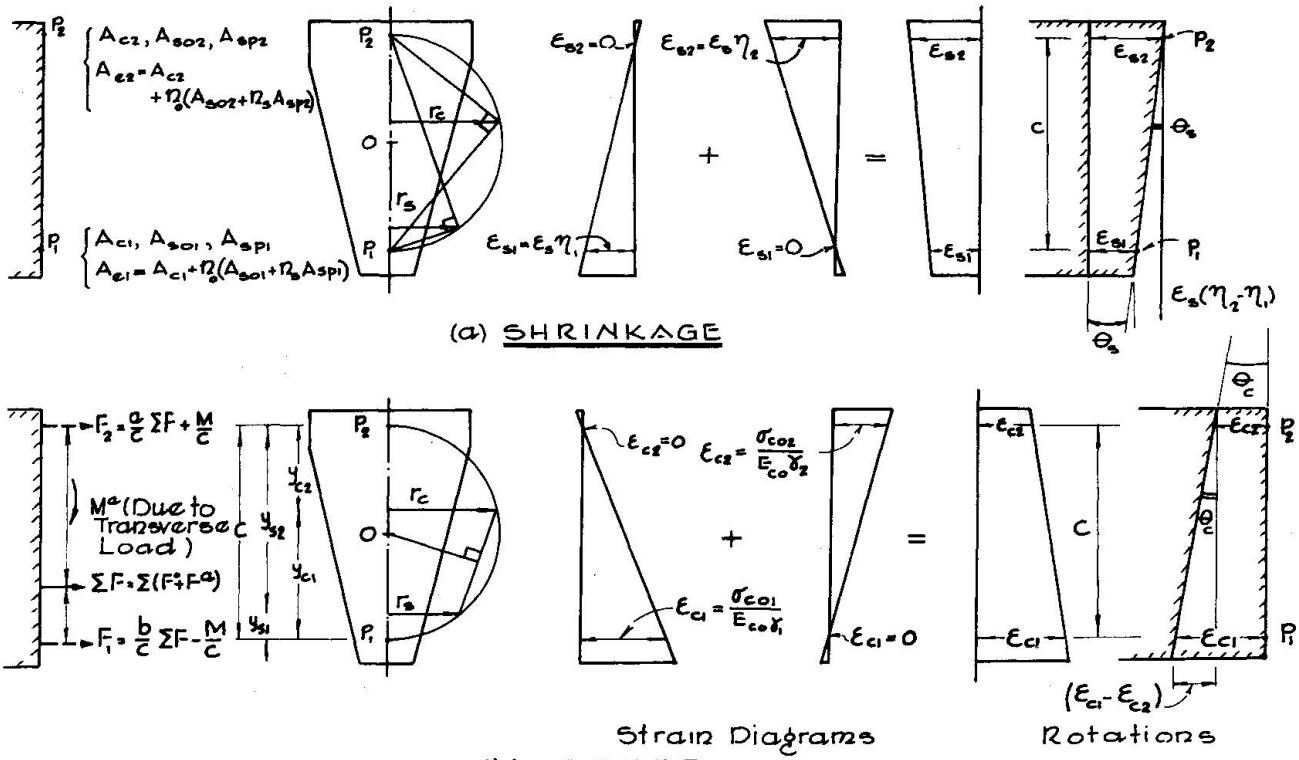

(a) SHRINKAGE
(b) CREEP
Strain Diagrams
Rotations

Fig. 6

the force carried by the concrete will be $\Delta F_{c1} = A_{c1}\,\sigma_{c1(0)}(1 - e^{-\alpha_1\phi})$. Thus

$F_{c1(t)} = F_{c1} - \Delta F_{c1} = F_1\, e^{-\alpha_1\phi}/(1 + n_0\, u_{s1})$. Similarly, for point P_2,

$F_{c2(t)} = F_2\, e^{-\alpha_2\phi}/(1 + n_0\, u_{s2})$ where $u_{s2} = A_{s02}/A_{c2}$.

(b) Externally Applied Longitudinal Force: In this case, the force, being invarient with time, can be readily transferred to points P_1 and P_2 by means of the lever arm principle. See Figs. 2 and 6.

(c) Externally Applied Transverse Forces: Such forces will produce a moment on any one section; this moment can be replaced by a couple formed from two equal and opposite forces applied at P_1 and P_2 (See Figs. 2 and 6). Such forces are also invarient with time.

2.4. MOMENTS ON A SECTION AT TIME t

(a) Due to Prestressing:

Pre-tensioned Case - Here the moment on the whole section, based on the bed force F^o, is given by:

$$M_{(t)} = F_{1(t)}(y_{c1} - y_{e(t)}) - F_{2(t)}(y_{c2} + y_{e(t)})$$

$$= F^o\{(\frac{n_0u_1 + e^{-\alpha_1\phi}}{1 + n_0u_1})(y_{c1} - y_{e(t)})b - (\frac{n_0u_2 + e^{-\alpha_2\phi}}{1 + n_0u_2})(y_{c2} + y_{e(t)})a\}/c$$

where $y_{e(t)}$ is the distance of the effective centroid of the whole section from the c.g.c. at time t, and will be deduced later on.

Post-tensioned Case - The moment on the concrete part alone, given in terms of the initial jack force F, will be:

$$M_{c(t)} = F_{c1(t)}\, y_{c1} - F_{c2(t)} y_{c2} = F\,(\frac{e^{-\alpha_1\phi}\, y_{c1}}{1 + n_0\, u_{s1}} b - \frac{e^{-\alpha_2\phi}\, y_{c2}}{1 + n_0\, u_{s2}} a)/c$$

(b) Due to Externally Applied Longitudinal Force: For a force F^a, applied below the c.g.c., the moment $M_t^a = F^a\,[y_{c2} - a - y_{e(t)}]$, and for the force F^a applied above the c.g.c., the moment is $M_t^a = F^a\,[y_{c1} - b + y_{e(t)}]$ where a = distance from the applied load to P_1 (a is -ve in Fig. 2), and b = distance from the applied load to P_2.

(c) Due to Externally Applied Transverse Forces: The moment produced by such forces on any section will remain constant for any time.

2.5 SECTION PROPERTIES AT TIME t

Since concrete creeps under sustained load resulting in a reduced modulus

of elasticity, the position of the effective centroid of the whole section changes with time. Considering the axial stiffness of the concrete one can intuitively relate the stiffness components at P_1 and P_2 to the overall stiffness of the concrete at the c.g.c. Thus, $E_{cf} A_c = A_{c1} E_{cf1} + A_{c2} E_{cf2}$.

Or, $E_{cf}A_c = (\frac{y_{c2}}{c} A_c)\beta_1 E_{c0} + (\frac{y_{c1}}{c} A_c)\beta_2 E_{c0}$.

Hence $E_{cf} = E_{c0}(y_{c2}\beta_1 + y_{c1}\beta_2)/c = \beta_0 E_{c0}$ where $\beta_0 = (y_{c2}\beta_1 + y_{c1}\beta_2)/c$

(a) Effective Centroid - Taking the c.g.c. as a datum, the distance of the effective centroid of the whole section at time t = 0 from the c.g.c. will be (see Fig. 2): $y_{e(0)} = n_0 A_s y_0/(A_c + n_0 A_s)$. After time t due to creep in concrete the effective centroid will shift toward the c.g.s. By taking moments about the c.g.c. the distance of the effective centroid from the c.g.c. at time t becomes $y_{e(t)} = E_s A_s y_0/(E_{cf} A_c + E_s A_s) = n_0 A_s y_0/(\beta_0 A_c + n_0 A_s)$. Thus the shift in the effective centroid at time t will be $e = y_{e(t)} - y_{e(0)}$.

(b) Effective Moment of Inertia - the effective moment of inertia of the whole section at time t = 0, I_0, based on the short-term-loading modulus of elasticity of concrete E_{c0}, is given by:

$$I_0 = I_c + A_c y_{e(0)}^2 + n_0 \{I_s + A_s [y_0 - y_{e(0)}]^2\}.$$

Similarly, the effective moment of inertia at any time t, based on the fictitious modulus of elasticity of the creeped concrete, E_{cf}, can be shown to be:

$$I_t = I_c + A_c y_{e(t)}^2 + n_0\{I_s + A_s [y_0 - y_{e(t)}]^2\}/\beta_0.$$

2.6. ROTATION AND DEFLECTION

Figure 6 shows the strains and rotations of the section taking into account shrinkage and creep of concrete. From Fig. 6 (a), the rotation due to shrinkage of a small element of length Δx is:

$$\theta_s = (\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{s1})\Delta x/c = (\varepsilon_s \eta_2 - \varepsilon_s \eta_1)\Delta x/c$$

Or, $\theta_s = \varepsilon_s(\eta_2 - \eta_1)\Delta x/c$.

The curvature of a creeped section under sustained load is [See Fig. 6(b)]:

$\theta_c/\Delta x = (\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{c2})/c = (\frac{\sigma_{c01}}{\gamma_1} - \frac{\sigma_{c02}}{\gamma_2})/(E_{c0}\, c)$. Thus the total rotation Θ and deflection y of any section of a structure subjected to creep and shrinkage can be found by numerical integration of the well known equations -

$$\Theta = \int \theta \, dx, \text{ and } y = \int\int \theta \, dx \, dx$$

Values of γ and η are given for various α and ϕ in Figs. 4 and 5 respectively. It is worthwhile to note that the above deduced expressions for rotation and hence deflection depend solely on the initial values of stresses and the

short-term-loading modulus of elasticity, E_{c0}, as well as on the assumed shrinkage strain in an unreinforced concrete section.

2.7. MODULUS OF DEFORMATION OF SECTION

By relating curvature to the moment on a section at any time t, one can deduce an expression for the modulus of deformation, E_e, based on the initial design parameters at time t = 0. Mathematically

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_t = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_t = M_t/I_t E_{cf} = M_0/I_0 E_e$$

where $E_e = (I_t/I_0)(M_0/M_t)E_{cf}$

The ratios (I_t/I_0) and (M_0/M_t) are obtained by substituting the appropriate design parameters for time t = 0 and t = t in the expressions derived earlier except for the post-tensioned case. It should be noted that for this case the expression for E_e reduces to $E_e = [M_{c(0)}/M_{c(t)}]E_{cf}$ with the substitution of the appropriate parameters at time t = 0 and t = t.

3. CONCLUDING REMARKS

The influence of shrinkage and creep on rotation and deflection of prestressed uncracked simply supported structures can be readily estimated from the pertinent design parameters at time t = 0. The expressions derived are applicable within the elastic range of the materials considered.

The analytical results, with the aid of a computer, may be extended to treat realistically stability problems, taking into account, of course, the problem of orthotropy.

REFERENCES

1. Dischinger, F.: "Elastische und plastische Verformung der Eisenbetontragwerke". Bauingenieur 20 (1939) H. 5/6, S 53-63; H. 21/22, S. 286-294.
2. Fritz, B.: "Verbundträger, Berechnungsverfahnen für die Brückenbaupraxis". Springer-Verlag, Berlin, 1961.
3. Busemann, R.: "Kriechberechnung von Verbundträgen unter Benutzung von zwei Kriechfasern". Bauingenieur 25 (1950) H. 11, S. 418-420.
4. Habel, A.: "Berechnung von Querschnitten mit mehrlagiger Spannbewehrung nach dem Verfahren von Busemann". Beton-und Stahlbetonbau 49 (1954) H.2, S. 25-31.
5. Leonhardt, F.: "Prestressed Concrete-Design and Construction". Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1964.

SUMMARY

The two-fibre method of Busemann and Habel together with Fritz fictitious modulus of elasticity are utilized to yield rotation and deflection of simply supported prestressed concrete structures accounting for creep and shrinkage in concrete. Furthermore, expressions for a modulus of deformation for various loading cases are derived. These derivations are in terms of pertinent design parameters at time t = 0.

RESUME

La méthode des deux fibres de Busemann et Habel, en conjonction avec le module fictif d'élasticité de Fritz est utilisée pour déterminer la rotation et la flèche des ouvrages à armature simple, en béton précontraint, rendant compte des forces de fluage et de retrait. De plus, des expressions pour un module de déformation sont dérivées pour différents états de charge. Ces dérivations se réfèrent à des termes des paramètres du projet respectif, au temps t = 0.

ZUSAMMENFASSUNG

Das Zwei-Fasern-Verfahren von Busemann und Habel zusammen mit dem von Fritz entwickelten fiktiven Elastizitätsmodul des Betons ist zur Bestimmung des Drehwinkels und der Durchbiegung der frei aufliegenden Spannbetontragwerke unter Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens des Betons verwendet worden. Ferner sind Ausdrücke für den Verformungsmodul für verschiedene Belastungsfälle abgeleitet worden. Diese Ableitungen beziehen sich auf die betreffenden Anfangswerte des Schnittes, d.h. zur Zeit t = 0.

Leere Seite
Blank page
Page vide

II

Influence of Creep and Shrinkage on the Behaviour of Reinforced Concrete Beams

Influence du fluage et du retrait sur le comportement de poutres en béton armé

Der Einfluss des Kriechens und Schwindens auf das Verhalten von Stahlbetonbalken

R.F. WARNER
Australia

1. INTRODUCTION

Recent experimental work in Australia has emphasized the importance of creep and shrinkage effects on the long-term behaviour of concrete structures. In field tests conducted in Melbourne on an experimental lightweight concrete flat plate structure, Blakey (1) has observed long-term deflections which were seven times the initial deflections. In Sydney, Taylor (2) has measured long-term deflections of from six to eight times the initial deflections in several in-service flat plate and flat slab structures. These figures are much in excess of the often quoted and often used value of 3.0 for the long-term deflection multiplying factor for concrete flexural members.

In an attempt to provide a theoretical framework for the study of creep and shrinkage effects in reinforced concrete members, a theoretical study has recently been made of the time-varying stresses and strains in a cracked beam section subjected to sustained moment (3). This analysis has also served as a basis for the theoretical investigation of long-term deflections (4).

The method of analysis of a cracked section is indicated briefly in the present paper and some results of the analysis, in particular concerning stress redistribution and increase in beam deflection with time, are summarized.

2. BASIC ANALYSIS

A rectangular, cracked, doubly reinforced section is considered with section width b, and the depths to the tension and compression steel areas of d and αd, respectively. The proportion of tensile steel is p and the ratio of compression steel to tension steel is r. From equilibrium requirements at a typical time instant t, together with the usual assumptions of perfect bonding and linear distribution of stress and strain, expressions can be obtained for the extreme fibre concrete compressive stress, $\sigma_1(t)$, and for the tensile and compressive steel stresses, $\sigma_s(t)$ and $\sigma'_s(t)$, in terms of the constant applied moment M and the parameter k(t) defining the time-varying position of the neutral axis of stress,

$$\sigma_1(t) = +6\frac{M}{bd^2}\frac{1-k(t)-r(k(t)-\alpha)}{k(t)P_1} \qquad ....(1)$$

$$\sigma_s(t) = -6\frac{M}{bd^2}\frac{1-k(t)}{2pP_1} \qquad ....(2)$$

$$\sigma'_s(t) = +6\frac{M}{bd^2}\frac{k(t)-\alpha}{2pP_1} \qquad ....(3)$$

In these equations P_1 is a polynomial in k(t),

$$P_1 = 3-4k(t)+k(t)^2+r\{3\alpha^2-4\alpha k(t)+k(t)^2\} \qquad ....(4)$$

If the simplifying assumption (3) is made that the neutral axes of stress and strain coincide, the corresponding strains become,

$$\varepsilon_1(t) = +6\frac{M}{bd^2}\frac{k(t)}{2pP_1E_s} \qquad ....(5)$$

$$\varepsilon_s(t) = -\frac{1-k(t)}{k(t)}\varepsilon_1(t) \qquad ....(6)$$

$$\varepsilon'_s(t) = +\frac{k(t)-\alpha}{k(t)}\varepsilon_1(t) \qquad ....(7)$$

Viscoelastic behaviour of the concrete is taken into account by applying a version of the Dischinger equation of state to the outermost compressive concrete fibre,

$$\dot{\varepsilon}_1(t) = \frac{\dot{\sigma}_1(t)}{E_c} + \dot{\phi}\{\frac{\sigma_1(t)}{E_c} + \frac{\varepsilon_{sn}}{\phi_n}\} \qquad ....(8)$$

Expressions for $\sigma_1(t)$ and for the time derivatives $\dot{\sigma}_1(t)$ and $\dot{\varepsilon}_1(t)$ are obtained from Eqs. 1, 4 and 5 and substituted into Eq. 8 to give a first order, non-linear differential equation in k,

$$\frac{dk}{d\phi} = \frac{2npkP_1(P_2+P_1S)}{k^2(P_1-P_3)+2np\{(1+r)kP_1+P_2P_4\}} \quad ....(9)$$

In Eq.9 $k=k(t), \phi = \phi(t)$ and the additional polynomials in k are,

$$P_2 = 1-k-r(k-\alpha) \quad ...(10)$$

$$P_3 = 2k\{k-2+r(k-2\alpha)\} \quad ...(11)$$

$$P_4 = 3-8k+3k^2+r(3\alpha^2-8\alpha k+3k^2) \quad ...(12)$$

The constant term S includes both the loading effect M and the shrinkage quantity ε_{sn},

$$S = \frac{1}{6}\frac{bd^2}{M}\frac{\varepsilon_{sn}E_c}{\phi_n} \quad ...(13)$$

The term n is the modular ratio for instantaneous loading, E_s/E_c.

Analytic solutions of Eq. 9 can be obtained (3). Alternatively, a simple, second order Runge-Kutta method can be used to evaluate a sequence of k values $k_o, k_1, k_2, \ldots k_i, \ldots k_n$, corresponding to a sequence of ϕ values of 0, $\Delta\phi$, $2\Delta\phi$, $i\Delta\phi, \ldots \phi_n$.

The recursion equation is

$$k_{i+1} = k_i + \frac{\Delta\phi}{2}\{f(k_i,\phi_i) + f(k_i+\Delta\phi f(k_i\phi_i),\phi_i+\Delta\phi)\} \quad ...(14)$$

in which $f(k,\phi)$ is the right hand side of Eq. 9. The initial value at time zero, for $\phi_o = 0$, is given by modular ratio theory as

$$k_o=\sqrt{p^2(n+(n-1)r)^2 + 2p(n+\alpha(n-1)r)} - p(n+(n-1)r) \quad ...(15)$$

3. TYPICAL STRESS REDISTRIBUTION

It is intuitively clear that an unloading of the compressive concrete occurs with time, with a corresponding increase in the steel compressive stress. The extent of this unloading, as predicted by the above analysis, can be surprisingly large. In many not unusual circumstances, a complete unloading of the compression concrete is predicted, with a subsequent development of concrete tensile stress in the "compression" zone above the neutral axis.

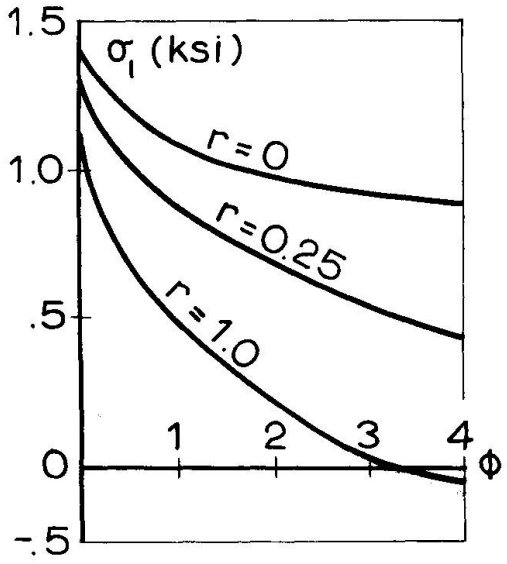


Fig. 1

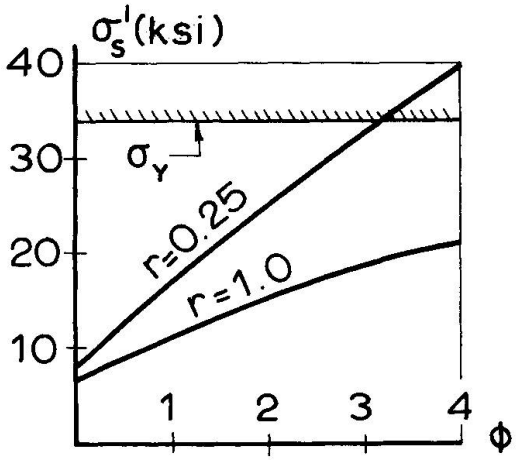


Fig. 2.

Unloading of the compressive concrete is most severe when the terms r and S are both large; that is, when the section contains large amounts of compression steel, when the concrete shrinkage strains are large, and when, at the same time, the applied moment is relatively small.

In Fig. 1 the concrete stress σ_1 is plotted against ϕ (which may be regarded as a transformed time scale) for three different r values of zero, 0.25, and 1.0. The curves are plotted for p = 0.015, for a moment of $M=0.25bd^2$ ksi, and for material properties of n=10, $\phi_n=4.0$ and $\varepsilon_{sn}=0.0006$. For the case r=1.0, it is seen that σ_1 reduces from an initial value of 1,100 psi compression to 96 psi tension. Some experimental confirmation of such extreme redistributions of internal stresses has been found in published test data (3).

In sections containing smaller amounts of compression steel, the reduction in σ_1 is not so extreme; however, the compressive steel stress σ_s' becomes larger as r decreases. Yielding under sustained service loading must be accepted as a normal occurrence when r is in the order of 0.25. This is shown in Figs. 1 and 2. In singly reinforced beams, r=0, the change in magnitude in σ_1 is less significant, as shown in Fig. 1. The time variation in the tensile steel stress σ_s is seen in Fig. 3 to be relatively slight.

4. LONG-TERM DEFLECTIONS

The analysis described in Section 2 allows the radius of curvature at the cracked section,

$$\rho(t) = d/(\varepsilon_1(t)-\varepsilon_s(t)) \qquad \ldots(16)$$

to be determined at any time instant t. A useful measure of the increase in

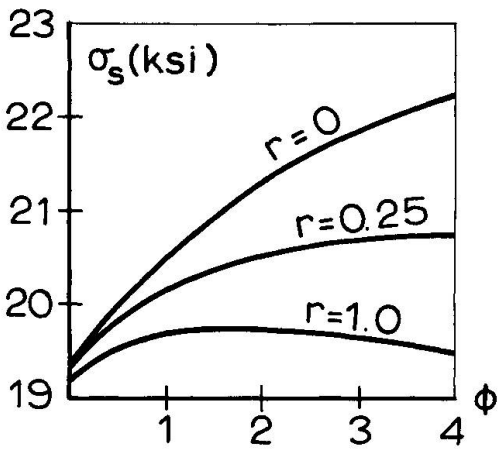


Fig. 3.

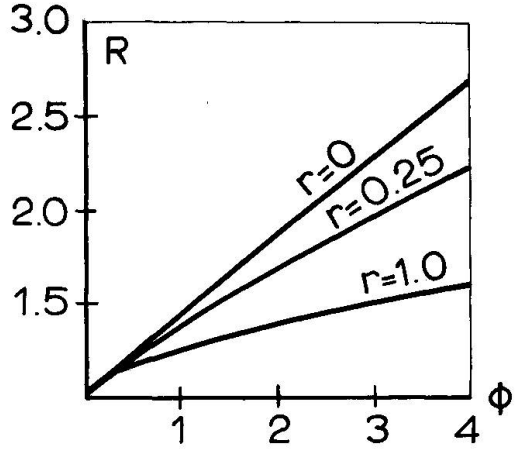


Fig. 4.

curvature in the section with time is provided by the curvature ratio,

$$R(t) = \frac{\rho_o}{\rho(t)} = \frac{\varepsilon_1(t)-\varepsilon_s(t)}{\varepsilon_1(o)-\varepsilon_s(o)} \qquad \ldots(17)$$

in which ρ_o is the initial curvature at the time of load application. A more convenient expression in terms of k_o and $k(t)$ is obtained from Eqs. 5, 6 and 17,

$$R(t) = \frac{3-4k_o+k_o^2+r\{3\alpha^2-4\alpha k_o+k_o^2\}}{3-4k(t)+k(t)^2+r\{3\alpha^2-4\alpha k(t)+k(t)^2\}} \qquad \ldots(18)$$

In Fig. 4 the variation in R with increasing ϕ is shown for the sections considered previously in Figs. 1, 2 and 3. Although the presence of compression steel causes unloading of the compression concrete, it is seen also to be very effective in controlling the increase in curvature and hence in reducing long-term deflections.

In a reinforced concrete beam under sustained loading the radius of curvature ρ is a function of both time t and distance x along the span. It is therefore necessary to write $\rho(x,t)$ and $R(x,t)$. The deflection curve at time t is

$$y(x,t) = \int\int \frac{1}{\rho(x,t)}\,dx\,dx = \int\int R(x,t)\,\frac{1}{\rho_o(x)}\,dx\,dx \qquad \ldots(19)$$

If the simplifying assumption can be made that the curvature ratio is independent of moment, and hence of x, Eq. 18 reduces to the very convenient form,

$$y(x,t) = R(t)y_o(x) \qquad \ldots(20)$$

in which $y_o(x)$ is the initial deflection curve at time of loading and R(t) is, in effect, a time-increasing deflection multiplying factor. (It is tacitly assumed that the bending moment diagram does not change; i.e., the loading remains constant and there is no significant moment redistribution in time).

The above derivation of Eq. 20 draws attention to an important assumption underlying the use of deflection multiplying factors, namely that the curvature ratio R at any section is independent of, or at least insensitive to, the applied moment M. Inspection of Eqs. 9 and 18 shows that R can be independent of M only when the term S, defined by Eq. 13, is zero; non-zero values of S in Eq. 9 imply that k(t) is a function of M for all t > 0.

The term S provides a measure of the relative effect of shrinkage (load independent) deformations and creep and elastic (load dependent) deformations on long-term deflections. Since S is zero only when ε_{sn} is zero, it can be concluded that the use of deflection multiplying factors can be strictly valid only when shrinkage strains are zero. Nevertheless, it also follows that multiplying factors should give reasonably accurate results provided the long-term increase in deflection is caused primarily by creep effects rather than by shrinkage effects, i.e. provided S remains small.

The simplified form of Eq. 20 allows the deflection multiplying factor for a beam to be calculated by carrying out an analysis of time-varying behaviour, as described in Section 2 of this paper, on a typical section (for example, the section of maximum moment). Numerous computer calculations have been made for a variety of sections and material properties (4). The results substantiate the above conclusion that R is insensitive to M provided S remains small. The results further show that R becomes particularly insensitive to M as the amount of compression reinforcement in the section increases. Average values of R_n, the long-term deflection multiplying factor (or, more correctly, the long-term curvature ratio), have been taken from these calculations and are presented in Table 1.

One final note of warning is warranted. In many practical situations shrinkage can have a decisive effect on long-term deflections, thus invalidating the use of multiplying factors. Often, for example, the sustained loading on a beam is a small proportion of the full service load. Not infrequently (particularly in Australia) concretes with comparatively high shrinkage characteristics are used in construction. In such instances, calculations based on long-term deflection multiplying factors can seriously underestimate long-term deflections. The experimental work of Blakey (1) and Taylor (2) provides adequate proof of this.

Table 1: LONG-TERM DEFLECTION MULTIPLYING FACTORS

	Singly Reinforced Beams r = 0			Doubly Reinforced Beams			
	Values of p:			Values of r:			
ϕ_n	.01	.02	.03	.25	.50	.75	1.0
2	2.0	2.4	2.8	2.1	1.9	1.7	1.6
4	2.4	3.1	3.6	2.4	2.0	1.8	1.6
6	2.9	3.7	4.4	2.7	2.1	1.8	1.6

5. ACKNOWLEDGMENT

The work described in this paper forms part of a general study of creep and shrinkage effects in concrete structures. The initial phase of the investigation has been carried out in the School of Civil Engineering, University of New South Wales, under the sponsorship of the Building Research Division of the CSIRO. The help and assistance of Mr. T.W. Leong, Research Assistant, is gratefully acknowledged.

The author also wishes to acknowledge with thanks a research stipendium provided by the Alexander von Humboldt Foundation, which has enabled work on the investigation to be continued during 1970 at the Technological University, Braunschweig.

6. REFERENCES

1. Blakey. F.A., "Deformations of an Experimental Lightweight Flat Plate Structure", Civ. Engg. Trans., Institution of Engineers, Australia, Vol. CE3, No. 1, March, 1961.
2. Taylor, P.J., "Initial and Long-Term Deflections of a Reinforced Concrete Flat Plate Structure", Conference on the Deformation of Concrete and Concrete Structures, Brisbane, Institution of Engineers, Australia, September, 1969.
3. Leong, T.W., Warner, R.F., "Creep and Shrinkage Effects in Reinforced Concrete Beams', UNICIV Report No. R-40, Univ. of New South Wales, School of Civ.Eng.,Sydney, February, 1969.
4. Leong T.W., Warner, R.F., "Long-Term Deflections of Reinforced Concrete Beams", Conference on the Deformation of Concrete and Concrete Structures, Brisbane, Institution of Engineers, Australia, September, 1969.

SUMMARY

A theoretical analysis of the time-varying stresses and deformations in a cracked, reinforced concrete beam section subjected to sustained moment is briefly described. Numerical calculations indicate that the stress redistribution which occurs with time in doubly reinforced sections can be very considerable. In not unusual circumstances the initial compressive stresses in the concrete above the neutral axis can reduce to zero and even become tensile. The theoretical analysis also provides a means of evaluating long-term deflections for reinforced concrete beams under sustained loading.

RESUME

L'auteur décrit brièvement une analyse théorique de la variation en fonction du temps des tensions et des déformations dans une poutre en béton armé fissurée et soumise à un moment constant. Des calculs numériques montrent que la redistribution des tensions qui apparaît avec le temps dans des sections doublement renforcées peut être considérable. Dans des circonstances normales, les tensions de compression au-dessus de l'axe neutre peuvent être réduites jusqu'à zéro et même devenir négatives (traction). L'analyse théorique permet aussi l'évaluation à long terme de la flexion pour des poutres en béton armé sous charge permanente.

ZUSAMMENFASSUNG

Eine theoretische Untersuchung der zeitabhängigen Spannungen und Deformationen in einem gerissenen Stahlbetonquerschnitt unter konstantem Moment wird kurz beschrieben. Numerische Beispiele zeigen beträchtlich grosse Spannungsumlagerungen mit der Zeit, besonders in Querschnitten, die Druckarmierung erhalten. In nicht ungewöhnlichen Fällen können die Druckspannungen im Beton über der Nullinie vollkommen verschwinden und sogar negativ (Zug) werden. Die zeitabhängigen Durchbiegungen in Stahlbetonträgern unter Dauerlast werden auch kurz behandelt.

II

Influence du fluage sur les phénomènes d'instabilité

Der Kriecheinfluss auf das Phänomen der Unstabilität

Influence of Creep on Instability Phenomena

PIERRE FAESSEL
Ingénieur
Professeur au C.H.E.C.
France

0 - INTRODUCTION -

Les problèmes d'instabilité de forme sont fréquents dans les constructions en béton , et souvent difficiles à résoudre .

Nous montrerons que , pratiquement , tous les poteaux , élancés ou non , périssent par flambement si on les essaie sous charge croissante . Mais de nombreux autres types d'ouvrages sont intéressés par ces problèmes :

- Les arcs , et spécialement les grandes couvertures: le rayon de giration de la section des couvertures est directement fixé par leur résistance au flambement en deux ondes sous leur propre poids .
- Les grandes structures en coque mince . Par exemple les réfrigérants à tirage naturel , dont les contraintes critiques sont très faibles , en particulier pendant la construction , étant donnée l'extrême finesse de ces ouvrages .
- Les éléments de coques constituant les couvertures : voûtes minces classiques entre arcs raidisseurs , coques autoportantes entre tympans .
- Les poutres préfabriquées précontraintes , dont il faut vérifier la sécurité au déversement depuis leur mise en précontrainte jusqu'à leur entretoisement mutuel .

Dans tous ces cas , le fluage joue un rôle d'autant plus important que les charges sont souvent supportées par un béton très jeune , parfois âgé de quelques jours seulement .

Rappelons que nous avons vu en France la rupture d'une coque autoportante , 9 ans après sa construction , et le déversement d'une très grande poutre préfabriquée , au moment de sa pose , par une splendide journée d'été .

Mais le fluage , dont la valeur dépend de l'âge de chargement , de la température , de l'hygrométrie de l'atmosphère , nous rend infiniment plus ardus encore ces problèmes d'instabilité , qui l'étaient déjà par la complexité des structures .

Il est donc normal qu'on ait cherché à schématiser quelque peu les phénomènes pour essayer de les dominer . Mais n'oublions pas cette boutade de Paul Valéry "tout ce qui est simple est faux ; tout ce qui est vrai est incompréhensible " .

1. Etude critique de la théorie de Monsieur Franco Lévi

1.0 - Généralités .

Une théorie est une méthode de travail fondée sur des hypothèses qui sont une représentation toujours simplifiée de la réalité .

C'est pourquoi il est important que ces hypothèses soient bien explicitées , pour qu'on puisse en contrôler le degré d'approximation dans chaque cas particulier . Si elles ne l'étaient pas , nous aurions trop tendance à croire à leur valeur absolue .

Il est utile aussi de connaître la dispersion des résultats d'une théorie en fonction de la variation des hypothèses . Dans le cas où une théorie est sensible à cette variation , le contrôle expérimental de ses résultats est plus que jamais nécessaire . La rigueur mathématique d'une démonstration n'est donc pas une preuve suffisante de sa vérité physique .

Dans la deuxième partie de cette étude , nous discuterons l'hypothèse qui a été faite de la relation linéaire entre les contraintes et les déformations , qu'elles soient instantanées ou différées .

Dans la première partie , nous l'accepterons provisoirement .

1.1 – Dégagement d'une deuxième hypothèse fondamentale non formulée

Rappelons les notations utilisées (1) :

- ε_T – déformation totale unitaire dans la direction longitudinale
- $\bar{\varepsilon}_o(t)$ – déformation unitaire spécifique de fluage à l'instant t
- σ – tension normale dans la direction longitudinale
- ε – déformation élastique unitaire dans la direction longitudinale
- E – module d'élasticité de Young
- $\bar{\varepsilon}_f(t)$ – déformation unitaire de fluage à l'instant t

et les relations entre ces notations :

Si une fibre est soumise à une tension σ depuis l'origine des temps , on aura à l'instant t :

$$\bar{\varepsilon}_f(t) = \sigma\, \bar{\varepsilon}_o(t) \qquad (1)$$

Si , par contre , la tension varie elle-même avec le temps , il faudra écrire :

$$\bar{\varepsilon}_f(t) = \int_o^t \sigma\, \bar{\varepsilon}_o'(t)\, dt \qquad (2)$$

Définir ces notations et écrire la deuxième relation donnant $\bar{\varepsilon}_f(t)$ en fonction d'une contrainte variable est l'équivalent de l'hypothèse suivante :

La fonction est considérée comme unique et indépendante de la fonction $\sigma(t)$ Cela signifie par exemple que si cette fonction est la somme de contraintes σ_i constantes appliquées à des temps t_i , chacune d'entre elles donne lieu à une déformation différée : $\bar{\varepsilon}_f(t_i,\infty) = \int_{t_i}^{\infty} \sigma_i\, \bar{\varepsilon}_o'\, dt = \sigma_i [\bar{\varepsilon}_o(\infty) - \bar{\varepsilon}_o(t_i)]$

D'où le fluage spécifique correspondant : $\bar{\varepsilon}_o(\infty) - \bar{\varepsilon}_o(t_i)$

Ceci se représente graphiquement de la manière suivante :

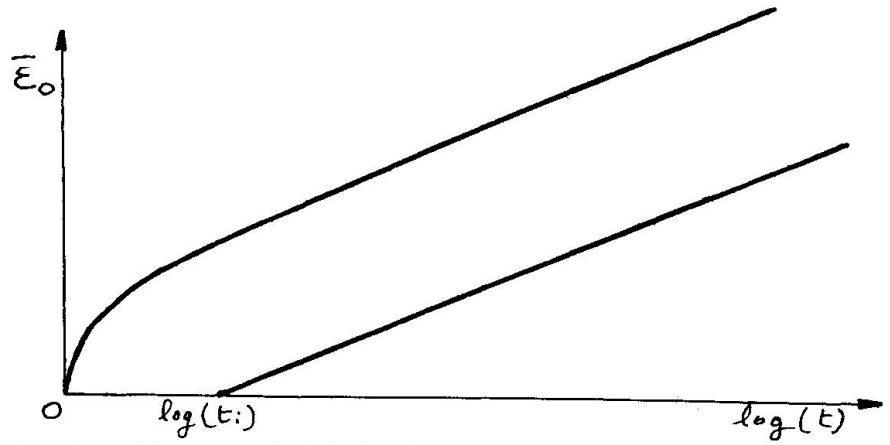


fig. 1 . Fluage spécifique d'une contrainte σ_i appliquée à un temps t_i d'après l'hypothèse implicite contenue dans la relation (2) .

1.2 - Discussion de cette hypothèse .

La logique de cette hypothèse est séduisante : on pouvait penser en effet que des éprouvettes identiques , fabriquées le même jour , chargées à des contraintes égales à des âges différents , présentent après chargement et aux mêmes dates des variations de longueur identiques.

L'observation des mesures montre que cette hypothèse est vérifiée après un certain temps de chargement : alors , les courbes de fluage peuvent se déduire l'une de l'autre par translation . Mais dans une première période , variant de quelques semaines à quelques mois , le fluage est plus rapide sur l'élément chargé récemment que sur les éléments anciennement chargés .

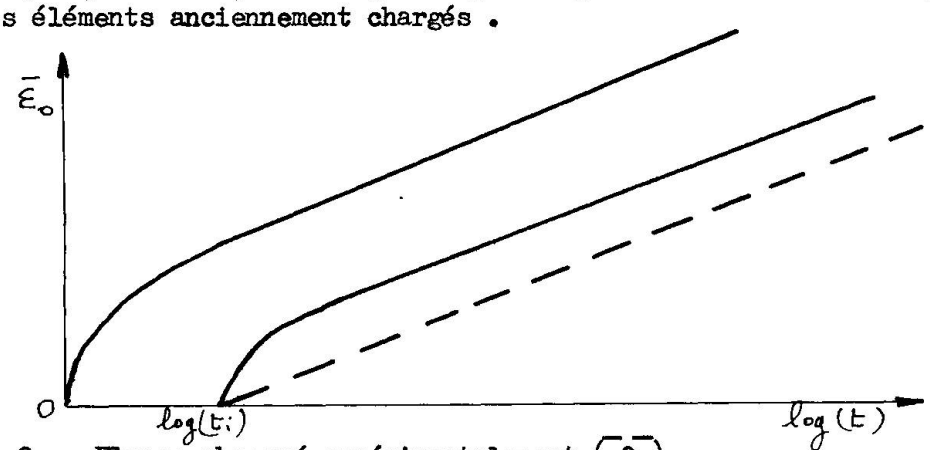


fig. 2 . Fluage observé expérimentalement (2)

Ceci pourrait s'exprimer de la manière suivante , to étant l'âge du premier chargement , ti étant un âge de chargement quelconque :

$$d\bar{\varepsilon}_o(t_i, t) = d\bar{\varepsilon}_o(t_o, t) + d\bar{\varepsilon}_i(t - t_i)$$

$d\bar{\varepsilon}_i$ est une fonction de l'âge de chargement qui s'annule rapidement .

A la fin de son cours au Centre des Hautes Etudes de la Construction à Paris , Monsieur Franco Lévi exprime la même idée . C'est ce qu'il appelle l'exaspération du fluage lorsque la contrainte augmente . Il en conclut à très juste raison qu'il ne faut accorder qu'une confiance relativement limitée aux résultats des calculs .

Or , l'ensemble de cette théorie conduit à énoncer que le fluage ne modifie pas la valeur de la charge critique . Il ne ferait qu'augmenter l'amplification de l'excentricité initiale . Par exemple , pour un coefficient de sécurité de 3 vis à vis de la charge critique calculée avec le module dynamique , et un coefficient de fluage $\varphi = E\bar{\varepsilon}_o = 2$ le calcul nous donne :

$$u = a \sin \frac{\pi z}{\ell} \cdot K/(K-1) \cdot e \cong 4\, a \sin \frac{\pi z}{\ell}$$

Ainsi , avec une excentricité suffisamment faible , on aurait toute sécurité dans ce cas .

Nous pensons qu'une telle conclusion est dangereuse .

2. Essai d'une meilleure compréhension physique du flambement des éléments en béton armé

2.0 - Généralités .

Comme on le sait , la loi contraintes-déformations du béton n'est pas linéaire . En flexion , la loi moments-courbures l'est encore moins, du fait de la fissuration progressive des sections , qui entraine une diminution correspondante de leur inertie .

C'est pourquoi , tout calcul destiné à faire apparaître la sécurité d'un élément en béton armé au flambement doit obligatoirement être un calcul à rupture , c'est à dire sous des efforts majorés , avec des excentricités initiales également majorées

et une résistance du béton minorée . Dans un chargement de longue durée , les excentricités et les moments augmentent encore au fur et à mesure du fluage .

On voit donc qu'il n'est pas possible de fonder une étude du flambement sur une théorie linéaire .

2.1 – Représentation graphique du flambement d'un élément en béton armé d'élancement connu , sous une charge de courte durée .

Cette représentation est basée sur la loi réelle déformation-contraintes du béton et sur l'hypothèse de non-résistance du béton à la traction . L'élément considéré(fig.3) est un poteau de section rectangulaire armé de 0,5% d'acier écroui (σ_e =4.200 Kg/cm2) et constitué d'un béton à 300 Kg/cm2 de résistance (accourcissement correspondant à la contrainte maximale : 0,002) .

Les différentes courbes de la figure 3 représentent , pour des efforts normaux constants , l'excentricité des forces internes en fonction de la courbure médiane du poteau . Elles sont calculées par ordinateur .

Une droite représente , pour un élément géomètrique donné (l/h)et une excentricité initiale donnée (e_o) , l'excentricité des forces externes en fonction de la même courbure (1 / r) dans l'hypothèse d'une déformée sinusoïdale .

Le croisement d'une droite et d'une courbe représente un état d'équilibre stable si la courbe a une pente plus grande que la droite , instable dans le cas contraire . Un point de tangence représente un état critique .

Quand on charge avec une excentricité initiale un poteau en béton armé par un effort normal croissant , le point représentant successivement les divers états d'équilibre , se déplace sur la droite

$$e = e_o + l^2/\pi^2 \times 1/r \quad \text{ou} \quad e/h = e_o/h + \frac{l^2}{h^2\pi^2} \cdot \frac{h}{r}$$

jusqu'au point d'équilibre critique .

La charge critique correspond à la courbe tangente à cette droite .

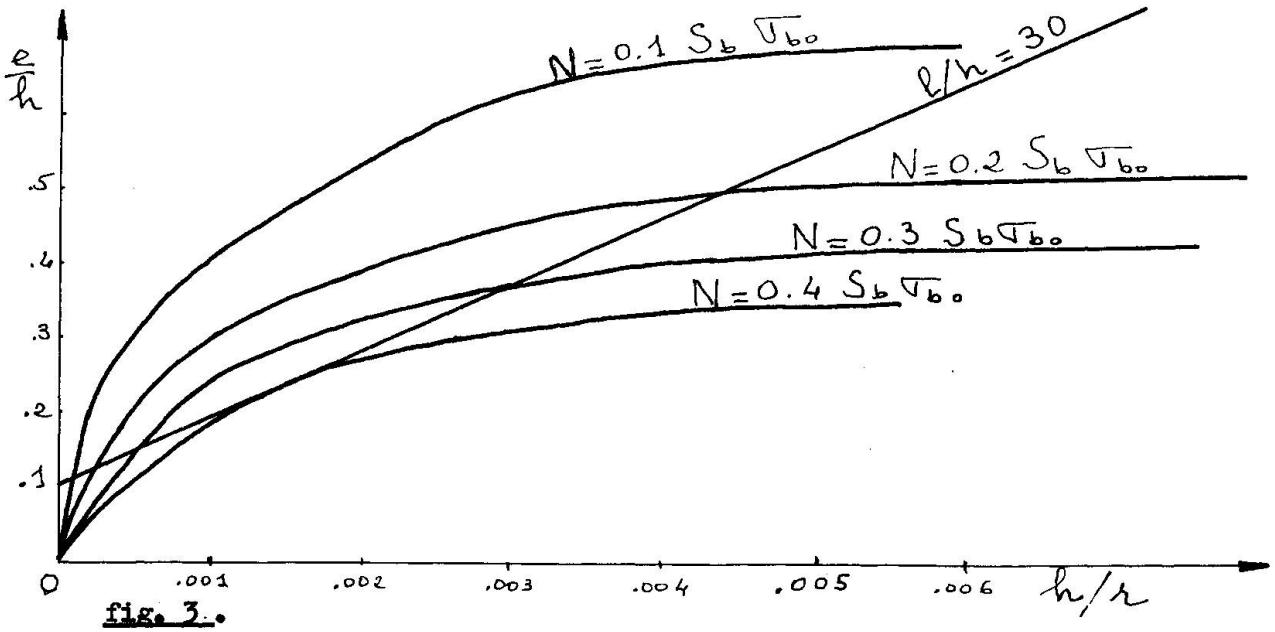


fig. 3 .

L'exemple choisi sur la figure 3 est celui d'un élancement géomètrique l/h = 30 et d'une excentricité initiale e_o = 0,1 h.

Si l'on calcule la charge critique élastique d'un tel poteau , on trouve :

$$N_E = \pi^2 E i / l^2 = 0.92\, S_b\, \sigma_{bo}$$

(avec E = 300.000 Kg/cm2)

alors que la charge critique réelle lue sur le graphique est : $N_c = 0.4\, S_b\, \sigma_{bo}$

Dans un calcul classique cet effort aurait présenté un coefficient de sécurité au flambement égal à 0,92 / 0,4 = 2,3 .

Cette représentation montre bien que la prise en compte du diagramme réel contraintes-déformations du béton et de la diminution de la section au fur et à mesure de la progression de la fissuration est obligatoire pour faire un calcul correct de la charge critique . Cette méthode de calcul a été vérifiée par le dépouillement de tous les essais mondiaux connus des poteaux en béton armé . Elle permet de prévoir parfaitement la charge critique et la flèche correspondante (3)

2.2 - Essais de compréhension du flambement sous charge de longue durée .

1. Dans le domaine linéaire .

En utilisant la même représentation, on obtient , sous un chargement de courte durée , avec un coefficient de sécurité au flambement de 3 , un état d'équilibre représenté par le point A (figure 4) .

Soit un fluage tel que $\varphi = E\bar{\varepsilon}_0 = 2$. Si ce fluage était constant quelle que soit la date d'apparition des contraintes , la droite D_1 se transformerait progressivement en la droite D_2 (à pente divisée par $1 + \varphi = 3$) et le point A partirait à l'infini .

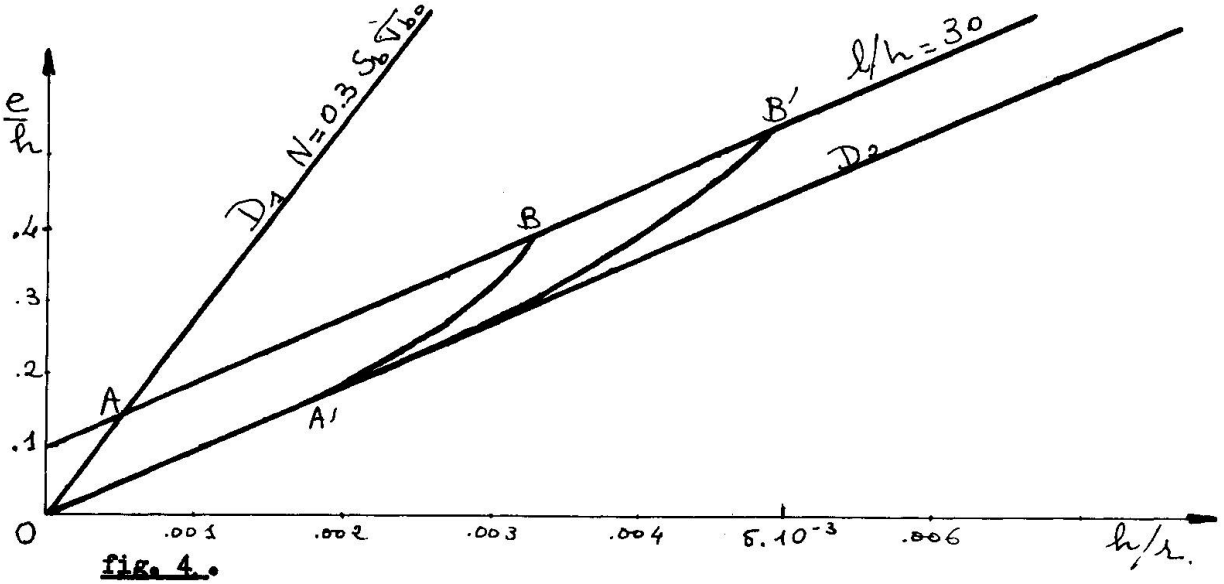


fig. 4 .

D'après l'hypothèse implicite faite par Monsieur Franco Lévi sur la variation du fluage en fonction de l'âge de chargement , la droite D_1 se transforme en la courbe C et le point B représente l'état d'équilibre correspondant .

Si l'on tient compte de l'augmentation de la vitesse de fluage après chaque variation de contrainte (figure 2) , le point représentatif de l'état d'équilibre se déplace de B en B' .

2. Dans le domaine non linéaire .

Nous sommes à notre tour obligés de faire ici une hypothèse simplificatrice . Nous supposerons que le diagramme contraintes-déformations différées peut se déduire du diagramme sous charges instantanées par une affinité , dans la direction des déformations , de rapport $1 + \varphi$, et cela sans tenir compte de la date d'arrivée des contraintes au cours du flambement .

Ce schéma est donc légèrement défavorable .

Le diagramme obtenu permet de faire les mêmes calculs que dans le cas des charges instantanées , en particulier de construire les courbes moments-courbures à effort normal constant .

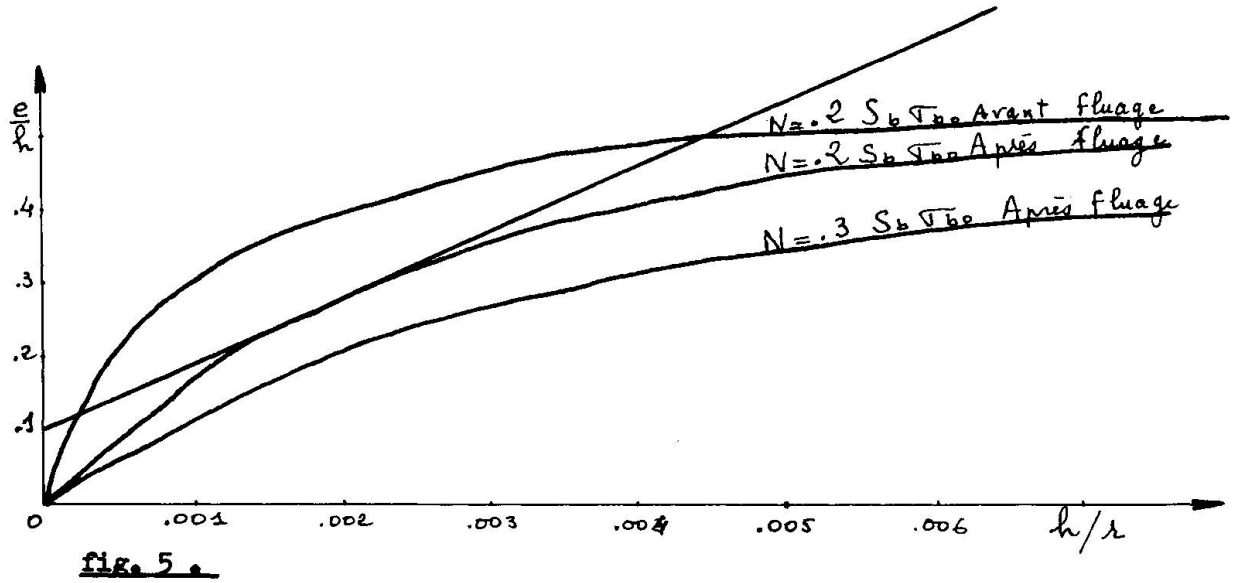


fig. 5 .

Sur la figure 5 nous avons représenté la courbe $N = .2$ sous charge instantanée et la courbe $N = .2$ sous charge de longue durée (avec un coefficient de fluage égal à $1 + \varphi = 3$)

Dans le cas de l'élancement géométrique de 30 et d'une excentricité égale à $e_o = 0{,}1\ h$, cet effort normal est critique .

Quant à l'effort normal $N = 0.3$ pris comme exemple dans le paragraphe étudiant le domaine linéaire , il est ici nettement surcritique .

On voit donc que le passage du domaine linéaire au domaine non linéaire transforme complètement les conditions d'équilibre .

Dans le calcul classique , l'effort $N = 0.2$ aurait présenté un coefficient de sécurité égal à 4,6

3. Vérification par les essais existants .

3.1 – Dans le domaine linéaire .

En 1960 , nous avons fait à l' I.R.A.B.A. des essais de flambement sous charges de longue durée (4) . Les éléments , placés sous charge constante étaient très élancés ($l / h = 50$) . Ainsi les contraintes de compression étaient assez faibles (33 Kg/cm2) pour que nous soyions sûrs d'être dans la partie quasi linéaire du diagramme contraintes-déformations . Les excentricités initiales étaient également très faibles . Nous avons mesuré des amplifications de ces excentricités initiales doubles de celles prévues par lé théorie de Monsieur Franco Lévi .

Il serait intéressant de reprendre de tels essais en hygrométrie contrôlée .

3.2 – Dans le domaine non linéaire .

Nous ne connaissons actuellement que les essais de K. GAEDE (3) . L'élancement géométrique des poteaux était voisin de 30 et l'excentricité initiale égale à 0,2 h.

Les résultats expérimentaux confirment la méthode donnée en.2.2

4 – CONCLUSION –

Nous serions heureux de ne plus jamais entendre " le flambement est un phénomène brutal et instantané ; les charges critiques doivent toujours être calculées avec un module instantané " .

S'il nous fallait résumer en quelques phrases nos connaissances en cette matière, nous le ferions de la manière suivante :

1. Quand on est certain de rester dans le domaine linéaire , même dans les conditions défavorables du calcul à la rupture , c'est à dire , dans ces dites conditions , avec une section non fissurée et des contraintes relativement faibles , on peut calculer les charges critiques avec un module apparent obtenu en divisant le module dynamique par $1 + \lambda\varphi$

2. Quand la section reste non fissurée mais que les contraintes augmentent, il faut utiliser un module apparent , obtenu en divisant le module tangent par $1 + \varphi$

3. Quand la fissuration est possible , seul un calcul assez complexe peut nous conduire à la connaissance de la charge critique . S'il n'est pas fait , la plus grande prudence s'impose .

Si les règlements font souvent preuve d'une telle prudence dans le calcul des éléments comprimés les plus courants , les poteaux , les ingénieurs continuent à rester seuls responsables pour toutes les autres structures dont nous avons donné quelques exemples dans l'introduction . Nous espérons que cette modeste mise au point , qui concerne uniquement le choix du module de déformation , évitera aux ingénieurs , particulièrement aux plus jeunes d'entre eux , de mal poser l'énoncé des problèmes d'instabilité , qui restent encore parmi les plus difficiles .

REFERENCES

(1) F. LEVI et G. PIZETTI : Fluage - Plasticité - Précontrainte (Dunod 1951)

(2) M.M. MAMILLAN : Evolution du fluage et des propriétés du béton (Supplément aux Annales de l'I.T.B.T.P. octobre 1960)

(3) J.R. ROBINSON et S.S. MODJABI : La prévision des charges de flambement des poteaux en béton armé par la méthode de M.P. FAESSEL (Supplément aux Annales de l'I.T.B.T.P.septembre 1968)

(4) G. LACOMBE et P. FAESSEL : Flambement d'éléments minces en béton armé sous charge de longue durée (Supplément aux Annales de l'I.T.B.T.P octobre 1961) .

RESUME

Les problèmes d'instabilité sous charges permanentes sont très nombreux dans la construction . Ils ont été étudiés d'une manière un peu abstraite , conduisant à des conclusions dangereuses . En réalité le flambement n'est pas un phénomène brutal et instantané et le fluage du béton diminue nettement les charges critiques .

ZUSAMMENFASSUNG

Die Probleme der Unstabilität unter ständiger Last sind sehr zahlreich im Bauwesen. Sie wurden auf abstrakte Weise studiert, die zu gefährlichen Entscheidungen führen können. In Wirklichkeit ist die Knickung kein augenblickliches Phänomen und das Kriechen des Betons verringert stark die kritische Last.

SUMMARY

Problems of instability due to sustained loading are numerous in the field of Structural Engineering. These problems have in the past been studied in a somewhat abstract manner, and this has led to dangerous conclusion. In reality, instability is not a sudden and catastrophic phenomenon; however, concrete creep sharply diminishes the critical load.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Effets du retrait et du fluage dans les ponts en béton précontraint à poutres préfabriquées rendues continues

Wirkung des Kriechens und Schwindens in Spannbetonbrücken bestehend aus durchlaufenden, vorfabrizierten Trägern

Effect of Creep and Shrinkage in Prestressed Concrete Bridges Composed of Continuous, Prefabricated Girders

JACQUES FAUCHART
Ingénieur des Ponts et Chaussées
Professeur au Centre de Hautes Etudes de la Construction
Paris (France)

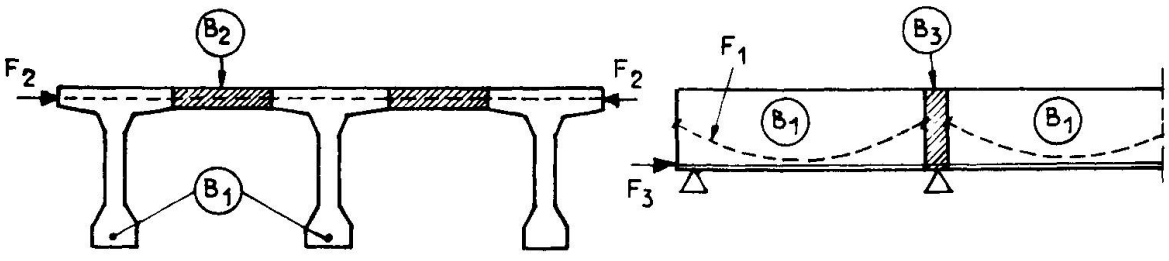
I - DESCRIPTION

I. 1 - Les ouvrages considérés sont réalisés à l'aide de poutres indépendantes préfabriquées au temps 0 (section B_1), précontraintes au temps t_1 (effort P_1), puis mises à leur emplacement définitif.

Au temps t_2, l'ouvrage est complété par bétonnage, insitu, des bandes intermédiaires du hourdis supérieur (B_2), puis précontrainte transversale.

Au temps t_3, les différentes travées indépendantes successives sont rendues continues, par bétonnage du béton B_3 et précontrainte longitudinale P_3.

Le temps t_3 peut être inférieur ou supérieur au temps t_2.



Coupe transversale — Coupe longitudinale

Fig. 1

I. 2 - Les divers bétons B_j ont des âges, des taux et des temps de chargement différents ; s'ils étaient indépendants, il subiraient donc progressivement des déformations différentes par suite de leur retrait et de leur fluage. Mais leurs liaisons mutuelles s'y opposent. L'égalisation des déformations est obtenue par l'adaptation, c'est-à-dire l'apparition progressive d'efforts supplémentaires internes (constituant un système de forces identiquement nul).

I. 3 - La structure initialement isostatique (B_1) devient finalement hyperstatique et d'une double manière : interne ($B_1 - B_2$) et externe ($B_{12} - B_3$). Il y a donc 3 phénomènes d'adaptation à considérer :

a. 1 - à l'intérieur d'une même section droite : adaptation des contraintes entre B_1 et B_2 (cf § II.2 et 3).

a. 2 - phénomène annexe au précédent : à partir du temps t_3, les liaisons hyperstatiques imposées par la continuité des travées s'opposent à la libre déformation des poutres que provoque le phénomène précédent (cf § II.4).

b - en élévation, l'ouvrage commence à se déformer (déformation instantanée et début de fluage) librement, suivant le schéma isostatique de travées indépendantes. Mais ce schéma devenant, au temps t_3, hyperstatique (poutre continue) ne permet pas au fluage de s'achever en affinité des déformations isostatiques précédentes. D'où l'adaptation progressive des efforts, par développement de réactions d'appui hyperstatiques (cf § III).

I. 4 - Les calculs suivants sont basés sur l'hypothèse, très simplifiée, du fluage linéaire.

I. 5 - Rappelons que les charges appliquées après réalisation du schéma statique définitif (soit, suivant le cas, après t_2 ou t_3) ne développent aucun phénomène d'adaptation. Elles ne sont donc pas considérées ici.

I. 6 - Notations

Modules de déformation du béton : instantanée : E_i ; totale : $E_d = \left(\frac{E_i}{1+\varphi}\right)$ où φ est le coefficient de fluage (rapport entre les déformations différée finale et instantanée sous compression constante).

II - REDISTRIBUTION DES CONTRAINTES NORMALES AGISSANT SUR UNE SECTION DROITE (adaptation entre les bétons B_1 et B_2)

II. 1 - Généralités :

La section B_1 des poutres préfabriquées reçoit l'indice 1 ; celle du hourdis complémentaire (B_2), l'indice 2. La section totale est dépourvue d'indice.

Pour chaque partie, j, B_j, désigne l'aire de la section, G_j son centre de gravité, I_j son moment d'inertie :

$$B = B_1 + B_2;\ a = \overline{G_1 G_2};\ b_1 = \overline{G_1 G} = a\,\frac{B_2}{B};\ I = I_1 + I_2 + a^2\,\frac{B_1 B_2}{B}$$

Les ordonnées Y sont mesurées à partir de G.

II. 2 - Effet isostatique du retrait

Au temps t_2, B_1 a déjà achevé la partie $K.\varepsilon_r$ de son retrait ($0<K<1$), alors que B_2 a encore à en effectuer l'intégralité (ε_r).

B_2 voudrait donc se raccourcir davantage que B_1. Il entraîne ce dernier, qu'il comprime au taux $\Delta\sigma_1$. Mais, à l'inverse, B_1 freine B_2 qui, ne pouvant se raccourcir autant qu'il l'aurait voulu, reste tendu au taux $\Delta\sigma_2$.

En supposant que les bétons se comportent de façon élastique, et que les sections droites restent planes, les diagrammes des $\Delta\sigma_j$ sont rectilignes et parallèles : mais il sont séparés d'une quantité correspondant à la différence de variation de longueur : $K\varepsilon_r$, qui s'est produite librement entre les 2 bétons, soit, au bout d'un temps infini :

$$\Delta\sigma_1(\infty) - \Delta\sigma_2(\infty) = K\varepsilon_r E_d = \sigma_r$$

D'où les valeurs finales des contraintes dues au retrait

$$\Delta\sigma_1(\infty) = \sigma_r \left(1 + \frac{aB_1 Y}{I}\right) \frac{B_2}{B}$$

$$\Delta\sigma_2(\infty) = -\sigma_r \left(1 - \frac{aB_1 Y}{I}\right) \frac{B_1}{B}$$

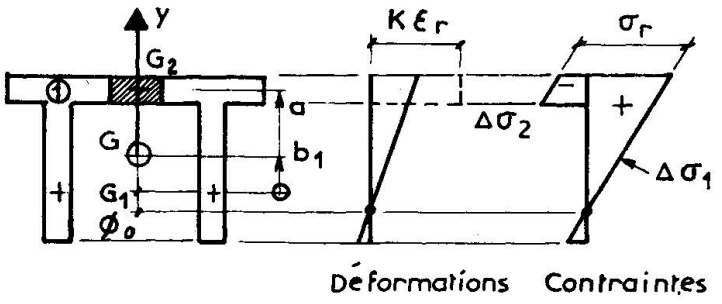


Fig. 2

II. 3 - Effet isostatique du fluage

Au temps t_2, B_1 est soumis en permanence à l'effort normal N et au moment fléchissant M, développés par le poids propre du béton et par la précontrainte (P_1). B_1 est soumis à la contrainte $\sigma_1(t_2)$; il a effectué la K^{e} partie de son fluage ($0<K<1$). Son raccourcissement relatif vaut donc :

$$\varepsilon_1(t_2) = \frac{\sigma_1(t_2)}{E_i}(1 + K\varphi)$$

Le béton B_2, qui vient d'être coulé n'est encore soumis à aucun effort : $\sigma_2(t_2) = 0$; $\varepsilon_2(t_2) = 0$.

Par la suite, B_1 se raccourcit en achevant son fluage : il entraîne B_2 qui est comprimé au taux $\sigma_2(t)$. Mais B_2 freine le raccourcissement de B_1 dont la compression $\sigma_1(t)$ décroît progressivement. Les compressions émigrent donc progressivement de B_1 vers B_2 : leurs valeurs tendent à s'uniformiser. Le béton peu sollicité B_2 soulage peu à peu le béton plus comprimé B_1.

Dans l'hypothèse du fluage linéaire, au bout d'un temps infini :

$$\varepsilon_j(\infty) = \frac{1+\varphi}{E_i}\sigma_j(\infty)$$

Posons : $\lambda = \frac{\varphi(1-K)}{1+\varphi}$; d'où :

$$\sigma_1(\infty) = (1-\lambda)\sigma_1(t_2) + \lambda\left(\frac{N}{B} + \frac{M - Nb_1}{I}Y\right) \quad ; \quad \sigma_2(\infty) = \lambda\left(\frac{N}{B} + \frac{M - Nb_1}{I}Y\right)$$

Où la valeur à considérer pour P_1 est la valeur stabilisée, définitive = P_1 (∞)

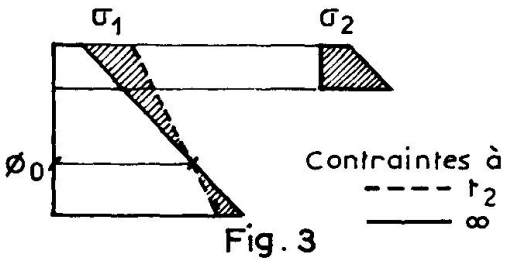


Fig. 3

Remarques :

a - $(M-Nb_1)$ est le moment fléchissant constant agissant sur la section totale B.

b - Exemple : K = 0; $\varphi = 2$. Les contraintes finales $\sigma_j(\infty)$ sont alors égales à la somme du tiers des contraintes élastiques initiales et des deux tiers des contraintes qui agiraient sur la section totale B, si celle-ci avait été réalisée, d'emblée, sous sa forme définitive.

c - Les contraintes dues au retrait (§ II. 2) et au fluage (§ II. 3) différentiels entre B_1 et B_2 ont des signes opposés. Elles se compensent donc en partie.

d - En général, I_2 est négligeable devant I. Alors σ_1 reste constant, dans le temps, quels que soient le retrait et le fluage des 2 bétons, sur la fibre Φ_0 d'ordonnée : $Y_0 = -\frac{I}{aB_1}$.

II. 4 - Effets hyperstatiques complémentaires

a - La redistribution de contraintes, entre B_1 et B_2, qui vient d'être étudiée, serait le seul phénomène qui se produirait si la structure restait extérieurement isostatique (telle qu'une travée indépendante).

Mais ainsi sollicitées, les poutres se déforment.

Comme à partir du temps t_3, elles deviennent hyperstatiques, elles ne peuvent plus le faire librement : alors se développent des réactions d'appui hyperstatiques chargées de maintenir les liaisons imposées, et dont l'effet s'ajoute aux "actions isostatiques" précédentes.

b - Ainsi, le retrait différentiel entre B_1 et B_2 (§ II.2) donnerait à une travée indépendante de section constante la courbure constante :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{E}\frac{\Delta\sigma_1}{(Y-Y_0)} = \frac{\sigma_r}{E}\frac{aB_1B_2}{BI} = \frac{K\varepsilon_r}{a}\left(1-\frac{I_1+I_2}{I}\right)$$

Dans le cas réel de la poutre continue, les appuis développent des réactions (formant au total un système nul) chargées d'annuler les flèches à leur droit. Ces réactions engendrent des moments négatifs le long de la poutre.

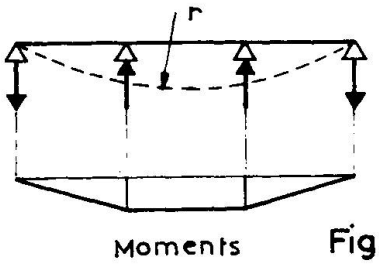


Fig. 4

c - De même, le fluage différentiel entre B_1 et B_2 (§ II.3) donnerait, en chaque section, la courbure : $(1-\lambda)\frac{1}{r_1} + \lambda \frac{1}{r}$, où: $\frac{1}{r_1} = \frac{M}{EI_1}$ désigne la courbure de la poutre préfabriquée, si elle était restée isolée, et $\frac{1}{r} = \frac{M-Nb_1}{EI}$, celle de la section totale $(B_1 + B_2)$ si elle avait été réalisée d'emblée dans sa totalité.

III - ADAPTATION DES EFFORTS DANS LA STRUCTURE DEVENUE CONTINUE (adaptation entre les bétons B_{12} et B_3)

III. 1 - Généralités

Si les diverses travées successives étaient restées indépendantes, leurs sections extrêmes en regard, de part et d'autre de l'appui A_j, auraient progressivement subi des rotations relatives: $\Delta\omega_j(t)$

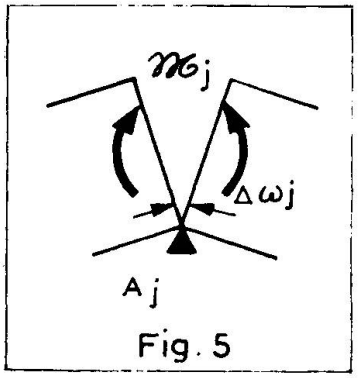


Fig. 5

La continuité des travées s'y oppose à partir du temps t_3. En A_j se développe donc progressivement un "moment de fluage" $\mathfrak{M}_j(t)$ chargé d'annuler la rotation : $[\Delta\omega_j(t) - \Delta\omega_j(t_3)]$

Si la structure avait été réalisée d'emblée (au temps t_1) sous sa forme continue définitive, elle aurait été soumise, sous l'action des charges q réellement appliquées avant t_3 (poids propre et précontrainte P_1) aux moments M_j^* dans les sections A_j.

En supposant le fluage linéaire, la valeur définitive du moment de fluage vaut : (1)

$$\mathfrak{M}_j(\infty) = M_j^* \cdot \psi(t_3 - t_1)$$

Les moments de fluage sont développés par des réactions concentrées des appuis A_j. Leurs valeurs varient donc linéairement entre les appuis successifs, à partir de zéro sur les appuis extrêmes.

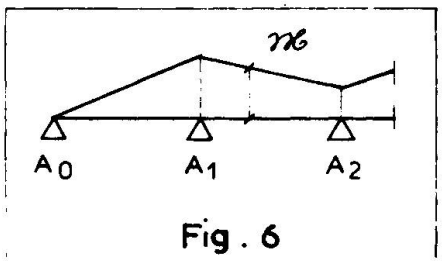


Fig. 6

III. 2 - Mode pratique de calcul :

Les valeurs définitives (à $t\infty$) des moments de fluage $\mathfrak{M}_j$, dans les sections de continuité j, sont donc égales à celles des moments que développeraient, dans les mêmes sections de la poutre continue définitive les charges fictives : $q^* = q \cdot \psi(t_3 - t_1)$, où q désigne les charges réellement appliquées avant le temps t_3.

---

(1) cf. = COURBON : Annales de l'I.T.B.T.P. Février 1968.

(Poids propre des poutres et charges de précontrainte, soit : efforts concentrés sous ancrages, et "poussée au vide" centripéte, répartie avec la densité $\frac{P_1}{r}$, où r désigne le rayon de courbure du câble).

Les calculs littéraux sont généralement basés pour des raisons de facilité mathématique, sur la loi de fluage : $\varepsilon_f = \varepsilon_i \cdot \varphi (1 - e^{-\gamma t})$.

Alors, $\psi(t_3 - t_1) = \frac{\varphi}{1+\varphi} e^{-\gamma(t_3 - t_1)}$

Mais l'expression analytique de la loi de fluage reproduisant au mieux les résultats expérimentaux (FIP-CEB) est de la forme :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_i \cdot \varphi (1 - e^{-\beta\sqrt{t}})$$

D'où notre suggestion de prendre en compte dans les calculs :

$$\psi(t_3 - t_1) = \frac{\varphi}{1+\varphi} e^{-\beta\sqrt{t_3 - t_1}}$$

III. 3 - Remarque sur la valeur de la précontrainte P_1

La valeur de la précontrainte P_1 à introduire dans les calculs est celle qui agit au temps t_3 où l'on réalise la continuité.

Ensuite, la tension des câbles diminue de ΔP_1. Mais cette perte de précontrainte s'effectue sur la structure rendue continue ; elle développe donc des effets hyperstatiques.

L'effet de la perte ΔP_1 est en affinité non pas de l'effet initial réel (isostatique) de P_1, mais de celui que provoquerait l'application directe de P_1 à la structure hyperstatique définitive.

IV. - EXEMPLES

IV. 1 - Réalisations françaises (I968)

a - Poutre porteuse de l'aérotrain (I8 Km de long, par éléments continus de 6 travées de 20 m de long).

b - Viaduc de pénétration de l'Autoroute de Nord dans la ville de MARSEILLE (20 travées d'environ 29 m de portés, larges de 27 m, à 4 poutres caissons).

IV. 2 - Projet des viaducs d'accès au pont de Calix à CAEN

Ils comprendront des suites de 6 travées de 36 m de portée, à 6 poutres préfabriquées, en forme de double-té, chacune.

Les poutres, précontraintes à une semaine, sont rendues continues à 9 semaines. Le béton B_1 a alors effectué 30 % de son retrait et 25 % de son fluage. Alors sont coulés les hourdis intermédiaires.

Caractéristiques des sections :

B_1 = 4,64 m2 - B_2 = I,67 m2 - B = 6,32 m2 - I_1 = 3,I7 m4 - I_2 = 0,005 m4

I = 4,I9 m4 - a = 0,904 m - $\varepsilon_r = 3.10^{-4}$ - $\varphi = 2$ - $\beta = 0{,}25$

(le temps étant exprimé en mois).

Le tableau suivant donne, à titre d'exemple, les valeurs (en kg/cm2) des contraintes dues aux divers phénomènes d'adaptation dans la section médiane de la 2ème travée. Les compressions sont comptées positives.

Cas (cf.I.3)		a.1		a.2		b	
Contraintes sur la fibre		retrait isostatique	fluage	défo corrélative retrait	fluage	adaptation par fluage	Total
supérieure	B_1	4,6	- 5,3	- I,6	I,8	- I,7	- 2,2
	B_2	-5,3	4,9				- I,9
inférieure	(B_1)	-1,5	1,7	3,3	-3,7	3,5	3,3

On remarque que les effets du fluage et du retrait s'équilibrent à peu près, et que les tractions totales sont très faibles : elles seront en pratique aisément contre-balancées, en travée, par les compressions développées par la mise en place des surcharges permanentes (superstructures).

RESUME

On étudie les effets du retrait et du fluage du beton dans les ponts à poutres multiples préfabriquées, puis rendues continues.

Les phénomènes d'adaptation qui se produisent sont dûs à la double hyperstaticité: interne d'une part, externe d'autre part, de ces structures.

ZUSAMMENFASSUNG

Untersucht wird die Wirkung des Kriechens und Schwindens des Betons in Brücken aus mehreren vorfabrizierten, durchlaufenden Balken. Die auftretenden Phänomene ergeben sich aus der doppelt statischen Unbestimmtheit: innerlich und äusserlich.

SUMMARY

An investigation is made of the effects on concrete creep and shrinkage in bridges consisting of a number of prefabricated, continuous girders. The phenomena come into play as a result of both the internal and the external statical indeterminacy of the system.

Leere Seite
Blank page
Page vide