Zeitschrift: IABSE proceedings = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 6 (1982)
Heft: P-55: Improved theory for thin-walled straight beams

Artikel: Théorie perfectionnée des poutres droites à parois minces
Autor: Massonnet, Ch.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36661

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Théorie perfectionnée des poutres droites à parois minces

Erweiterte Theorie der geraden Balken mit dünnwandigem Querschnitt

Improved Theory for Thin-Walled Straight Beams

Ch. MASSONNET
Professeur Ordinaire
Université de Liège
Belgique

RÉSUMÉ

La théorie classique de la flexion-torsion des pièces à parois minces néglige l'effet des déformations par cisaillement sur la répartition des contraintes normales. Le mémoire suppose, comme la Mécanique des Matériaux, que les sections droites sont indéformables, c'est-à-dire que le matériau élastique est transversalement rigide. On montre alors que la théorie de la flexion-torsion est rigoureuse pour un moment de flexion quadratiquement variable et un moment de torsion linéairement variable à condition d'adopter pour les contraintes τ celles de la Mécanique des Matériaux et d'ajouter aux contraintes de Navier des contraintes de "traînage de cisaillement réparti" $\Delta\sigma$, qui sont les mêmes dans toutes les sections. Les $\Delta\sigma$ s'obtiennent aisément et constituent de bonnes approximations des contraintes de "shear lag" discutées dans la littérature.

ZUSAMMENFASSUNG

Die klassische Theorie der Biegung mit Torsion von dünnwandigen Bauteilen vernachlässigt die Wirkung der Schubverformungen auf die Verteilung der Normalspannungen. Im Beitrag wird wie in der Festigkeitslehre angenommen, dass sich die Querschnitte in ihrer Ebene nicht verformen oder, gleichbedeutend, dass das elastische Material im Quersinne steif ist. Es wird gezeigt, dass die Theorie der Biegung mit Torsion für ein Biegemoment mit quadratischer und ein Torsionsmoment mit linearer Variation unter folgenden Bedingungen streng ist: Verwendung der Schubspannung wie in der Festigkeitslehre und Korrektur der Normalspannungsverteilung nach Navier mit Spannungen $\Delta\sigma$ infolge eines verteilten "shear lag", welche in allen Querschnitten gleich sind. Die $\Delta\sigma$ sind einfach zu erhalten und bilden eine gute Näherung der in der Literatur diskutierten "shear lag"-Spannungen.

SUMMARY

The classical theory of bending-torsion of thin-walled members disregards the effect of shear deformations on the distribution of normal stresses. The paper assumes, as in the Mechanics of Materials, that the cross sections do not deform in their plane, or, equivalently, that the elastic material is transversely rigid. It is then shown that the bending-torsion theory is rigorous for a bending moment varying quadratically or a torsional moment varying linearly: the shearing stresses τ are those of Mechanics of Materials, but the direct stresses must be corrected by stresses $\Delta\sigma$ due to "distributed shear lag" which are the same at all cross sections. These are easily calculated and represent good approximations of the shear lag stresses discussed in the literature.

1. EXAMEN CRITIQUE DE LA THEORIE DE TIMOSHENKO-VLASSOV.

La théorie de la flexion et torsion des poutres élastiques développée au siècle dernier par NAVIER et SAINT-VENANT a reçu au vingtième siècle une extension importante, due essentiellement à TIMOSHENKO [1] et VLASSOV [5] et subsidiairement à WAGNER [2], KAPPUS [3], GOODIER [4] et d'autres (voir par exemple [8] , vol.II pour l'exposé des fondements). Cette extension se situe au niveau de la théorie "technique" des poutres élastiques, dans laquelle on admet les hypothèses suivantes :

a) la poutre est prismatique et se comporte élastiquement ;
b) la section droite est indéformable dans son plan.

En 1905 [1], TIMOSHENKO a analysé,dans le cas particulier d'une poutre en double té, le gauchissement en torsion uniforme et il a développé une théorie de la torsion non-uniforme de ces poutres. Il a obtenu ainsi la loi sectorielle (pour les notations, boir figure 1.1.).

$$w = -\theta\omega \quad \text{avec } \omega = \omega_s - \bar{\omega}_s \text{ et } \omega_s = \int_0^s r ds \tag{1.1.}$$

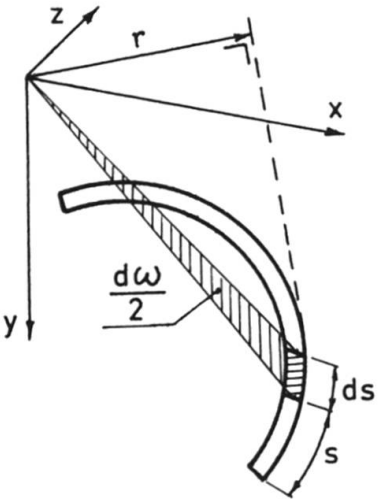
donnant le déplacement axial w. Il a postulé que cette expression restait valable pour une torsion $\theta = d\psi/dz$ variable avec z(hyp.c). WAGNER a étendu cette théorie en 1929 aux sections ouvertes de forme quelconque [2] et VLASSOV a édifié une doctrine complète de la torsion non-uniforme des poutres à parois minces à section ouverte ou fermée, en supposant que l'hypothèse (c) de TIMOSHENKO énoncée ci-dessus était valable en général. Ces auteurs déterminent la distribution des contraintes axiales σ par la loi de HOOKE

$$\sigma = E \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{1.2.}$$

à partir des gauchissements w des diverses sections, qui sont supposés varier proportionnellement à M_t. Ils déduisent des σ les τ par l'équation d'équilibre de l'élément de paroi (fig. 1.2.)

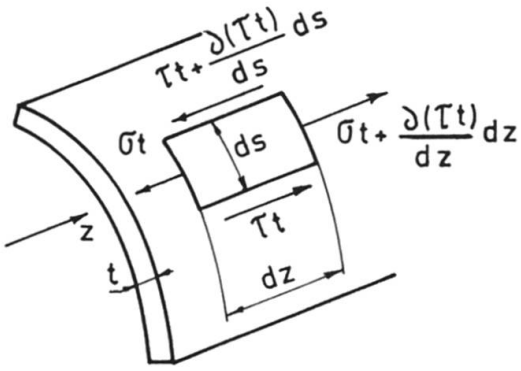
$$\frac{\partial(\sigma t)}{\partial z} - \frac{\partial(\tau t)}{\partial s} = 0, \tag{1.3.}$$

puis ils évaluent le moment de torsion de gauchissement M_{t2} comme résultante de ces contraintes tangentielles de gauchissement τ.



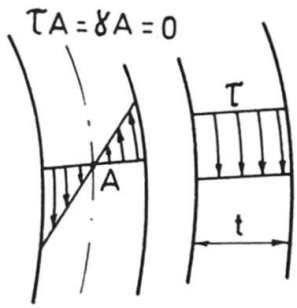
Gauchissement d'une poutre à parois minces.

Figure 1.1.



Equilibre d'un élément.

Figure 1.2.



Répartition sur l'épaisseur des contraintes tangentielles.

Figure 1.3.

Le caractère approché de cette théorie résulte du fait que les contraintes τ provoquent en fait un "traînage de cisaillement" (shear lag), c'est-à-dire influencent la répartition des contraintes axiales σ. Les déplacements de gauchissement w donnés par (1.1.) ne sont donc qu'approchés. D'ailleurs, la théorie de TIMOSHENKO-VLASSOV se met en contradiction avec elle-même, puisque la loi sectorielle (1.1.) est déduite de ce que τ, donc γ, est nul dans le feuillet moyen de la paroi (fig. 1.3.a), tandis que la théorie fournit ensuite par (1.3.) des τ de gauchissement (fig. 1.3.b) qui sont uniformément répartis sur l'épaisseur (*).

La théorie générale de VLASSOV [5] peut être résumée par les deux formules suivantes

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{B}{I_\omega} \omega \qquad (1.4.)$$

$$t_\tau = - \frac{T_x}{I_y} S_y(s) - \frac{T_y}{I_x} S_x(s) - \frac{H_\omega}{I_\omega} S_\omega (s) \qquad (1.5.)$$

où N, M_x, M_y, M_z, T_x et T_y sont les éléments de réduction classiques, B(z) est le bi-moment, ω la coordonnée sectorielle, I_ω le moment d'inertie sectoriel principal et H_ω la dérivée du bimoment B par rapport à la coordonnée longitudinale z. Ces formules ne tiennent pas compte du "shear lag". En effet, dans le cas particulier de la flexion simple, les formules ci-dessus se réduisent à :

$$\sigma = - \frac{M_y x}{I_y} + \frac{M_x y}{I_x} \qquad t_\tau = - \frac{T_x}{I_y} S_y(s) + \frac{T_y}{I_x} S_x(s), \qquad (1.6.)\ (1.7.)$$

c'est-à-dire la théorie "technique" classique des poutres droites élastiques.

2. PRISE EN COMPTE DES DEFORMATIONS PAR CISAILLEMENT ET TRAINAGE DE CISAILLEMENT.

De nombreux auteurs ont essayé de remédier au défaut fondamental de la théorie de TIMOSHENKO-VLASSOV, mais toutes ces théories, basées sur des hypothèses simplificatrices (cf. [11] à [17]), restent si compliquées qu'on ne peut guère envisager leur application en Bureau d'Etudes.

Une théorie "technique" équilibrée doit tenir compte du gauchissement de la section associée au cisaillement non-uniforme de la section droite. La prise en compte de ce cisaillement non-uniforme doit se faire en se basant sur des hypothèses simplificatrices ayant, autant que possible, le même degré d'approximation que celles de la théorie de TIMOSHENKO-VLASSOV.

Le but du présent mémoire est :

1) de présenter une théorie perfectionnée tenant compte - de manière approchée - du phénomène de traînage de cisaillement dans le cas où le moment fléchissant M varie quadratiquement ;
2) d'étendre également la théorie classique de la torsion de SAINT-VENANT au cas d'un moment de torsion linéairement variable.

(*) l'auteur ne connaît aucune étude systématique de l'erreur commise par cette hypothèse, autrement dit du degré de validité de la théorie de TIMOSHENKO - VLASSOV.

3. THEORIE TECHNIQUE DES POUTRES CONSIDEREE COMME THEORIE ELASTIQUE RIGOUREUSE POUR UN MATERIAU ORTHOTROPE ADEQUAT.

La théorie simplifiée classique, présentée dans les textes élémentaires de Mécanique des matériaux, y compris les développements que lui ont donné TIMOSHENKO et VLASSOV, diffère de la Théorie de l'Elasticité parce que :

a) elle considère la section droite comme indéformable ;

b) elles ne se préoccupe pas de la répartition détaillée des forces transversales de surface ou de volume mais envisage uniquement leur résultante, qui est généralement une force transversale uniformément répartie d'intensité p.

Cette théorie technique a ainsi l'air de différer significativement de l'ensemble de solutions obtenues par SAINT-VENANT pour les pièces longues prismatiques sollicitées à leurs extrémités. Or, on peut aisément montrer qu'elle est en réalité une théorie élastique rigoureuse pour un certain matériau élastique orthotrope. Ce fait a l'avantage de :

1) clarifier les rapports entre la théorie technique de la Mécanique des Matériaux et la Théorie de l'Elasticité ;

2) permettre d'appliquer rigoureusement à la théorie technique les théorèmes variationnels déduits des principes des déplacements et des contraintes virtuelles, ainsi que le théorème d'unicité de KIRCHHOFF, qui affirme que, quand on a trouvé une solution satisfaisante à toutes les équations de l'élasticité, c'est *la* solution du problème.

LEKHNITZKII montre que, pour un matériau orthogonalement anisotrope, on peut prendre les équations constitutives suivantes [6]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_y - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_z \\
\varepsilon_y &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_x + \frac{1}{E_2}\sigma_y - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_z \qquad (3.1.)\\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_y + \frac{1}{E_3}\sigma_z
\end{aligned}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G_{23}}\tau_{yz} \; ; \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G_{13}}\tau_{xz} \; ; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G_{12}}\tau_{xy}. \qquad (3.2.)$$

Les douze constantes élastiques E_1, E_2, E_3; G_1, G_2, G_3; ν_{12}, ν_{21}, ν_{13}, ν_{31}, ν_{23}, ν_{32} sont reliées par les trois relations de réciprocité :

$$E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12} \; ; \quad E_2\nu_{32} = E_3\nu_{23} \; ; \quad E_3\nu_{13} = E_1\nu_{31} \qquad (3.3.)$$

ce qui laisse neuf constantes indépendantes.

Pour réaliser l'hypothèse classique de la Mécanique des Matériaux, à savoir l'indéformabilité de la section droite, nous devons choisir les constantes élastiques de façon à supprimer toute déformation dans le plan de la section droite ; ceci entraîne

$$\varepsilon_x = 0 \; ; \; \varepsilon_y = 0 \; ; \; \gamma_{xy} = 0$$

et par conséquent $E_1 = E_2 = \infty$; $\nu_{31} = \nu_{32} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0$; $G_{12} = 0$

Comme d'autre part, il n'y a pas de raison de supposer G_{13} et G_{23} différents, on posera $G_{13} = G_{23} = G$ et les équations (3.1.) et (3.2.) se réduisent alors aux relations bien connues de la théorie technique :

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0 \qquad (3.4.)$$

$$\gamma_{zs} = \frac{1}{G}\tau_{zs}$$

Les modules E et G sont à présent entièrement indépendants, ce qui permet d'envisager des matériaux très déformables par cisaillement et dans lesquels le traînage de cisaillement est particulièrement important. Pour mesurer cette déformabilité par cisaillement, il est commode d'introduire le coefficient non dimensionnel k appelé *taux d'orthotropie :*

$$k = \frac{E}{G} \cdot \qquad (3.5.)$$

Dans une autre étude [20], l'auteur a montré que la théorie élastique de la flexion et torsion des barres due à SAINT-VENANT pouvait être généralisée en toute rigueur respectivement pour un effort tranchant et pour un moment de torsion linéairement variable.

Dans le présent mémoire, l'auteur n'étudie que les pièces à parois minces dont la paroi, rapportée aux coordonnées z et s, peut être considérée comme étant en état plan de contrainte. Dans ce cas, l'équation de compatibilité unique s'écrit en l'absence de forces de volume :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zs}}{\partial z\, \partial s} \cdot \qquad (3.6.)$$

En y remplaçant les ε_{ij} par leurs valeurs (3.4.) en fonction de σ et τ, on obtient l'équation de BELTRAMI-MICHELL (en posant pour simplifier $\sigma_z \equiv \sigma$, $\tau_{zs} = \tau$)

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} = k \frac{\partial^2 \tau}{\partial z \partial s} \cdot \qquad (3.7.)$$

Toute théorie "technique" satisfaisant aux équations (3.4.) et (3.7.) ci-dessus sera une théorie élastique (orthotrope) rigoureuse, si elle satisfait aussi à l'équation d'équilibre (1.3.) et aux conditions à la surface.

Sur base de quelques exemples traités plus loin, il est facile de montrer qu'on est libre d'introduire dans la théorie technique des forces de volume choisies de manière à satisfaire rigoureusement aux équations d'équilibre en x et y.

Pour terminer ce paragraphe, notons que l'énergie potentielle interne associée au matériau orthotrope "technique" défini dans le présent paragraphe a pour expression

$$U = \int_V \left(\frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G}\right) dV = \int_V \left(\frac{E\varepsilon^2}{2} + \frac{G\gamma^2}{2}\right) dV \,. \qquad (3.8.)$$

Exprimée en fonction des composantes (ε,γ) du tenseur-déformation, c'est une fonctionnelle quadratique définie positive des ε_{ij}. Par conséquent, la démonstration du théorème de KIRCHHOFF relatif à l'unicité de la solution est applicable à ce matériau. En d'autres termes, si l'on trouve une solution au problème, c'est sa solution unique.

4. EXAMEN CRITIQUE DES PRINCIPALES RECHERCHES SUR LA THEORIE COMPLETE DES POUTRES ELASTIQUES A PAROIS MINCES.

Ainsi qu'on l'a expliqué au paragraphe 1, la théorie de TIMOSHENKO-VLASSOV ne tient pas compte de l'effet des déformations γ dues aux contraintes de cisaillement τ. Un progrès considérable a été réalisé en 1947 par ARGYRIS et DUNNE [9]. Dans une série de mémoires, ils développent une théorie technique générale des tubes cylindriques et coniques soumis à flexion et torsion, qui tient compte du traînage de cisaillement. Leur approche est basée sur l'emploi d'une fonction de contrainte. Comme ils se restreignent aux tubes dont toutes les sections sont géométriquement semblables, ils peuvent séparer les variables z et s et obtenir une solution. Dans cette solution, le traînage de cisaillement apparaît sous forme de termes correctifs ajoutés aux contraintes de la théorie classique de NAVIER - SAINT-VENANT, et exprimés sous forme de séries de fonctions propres orthogonales représentant des états d'autocontrainte. Une discussion claire de ces états d'autocontrainte est présentée en 1950 par FLÜGGE et MARGUERRE [10]; elle permet de déterminer le traînage de cisaillement en torsion.

En 1951, WITTRICK [11] reprend le même problème qu'ARGYRIS et DUNNE pour un tube monocellulaire mais en supposant que la section droite de ce tube varie d'une manière arbitraire le long de l'axe. Dans ce cas, une solution par séparation des variables n'est pas possible et les fonctions propres de ARGYRIS et DUNNE n'existent pas. La même année, STÜSSI présente [12] une théorie des poutres à parois minces qui ne tient pas compte des déformations par cisaillement, puis publie en 1952 une théorie plus complète [13], qui ne se prête pourtant pas aisément à la détermination des contraintes σ et τ.

Il faut encore mentionner :

- en 1959, le mémoire de KUBITZKI [14] qui analyse la flexion et torsion des caissons à parois minces en employant la méthode des forces ainsi que celle des déplacements ;
- en 1967, le mémoire de SCHROEDER [15], qui résout le problème du traînage de cisaillement par une méthode approchée ; les déplacements longitudinaux sont supposés varier suivant des lois paraboliques dont les paramètres sont déterminés par le principe variationnel du minimum de l'énergie potentielle.

En 1970, ROIK et SEDLACEK proposent une théorie matricielle, adaptée au calcul sur ordinateur [16], dans laquelle on se donne les distributions des gauchissements élémentaires sur la base de considérations physiques. On calcule le potentiel total de la poutre et, en appliquant le principe des déplacements virtuels, on en déduit les équations d'EULER associées à ce principe variationnel, qui forment un système d'équations différentielles découplées. Cette méthode est développée davantage en 1973, par BÖGE et ROIK [17] qui idéalisent la poutre par une série d'éléments finis, en vue du calcul sur ordinateur.

Ces deux derniers mémoires sont importants pour celui qui désire automatiser la recherche des contraintes σ et τ dans les poutres à parois minces continues sur plusieurs appuis et soumises à des mises en charge complexes.

Notre but étant d'analyser le problème du traînage de cisaillement "réparti" dans des cas simples par des formules analytiques, nous ne discuterons pas davantage les mémoires [14], [15], [16] et [17].

Pour terminer cette revue des recherches existantes, mentionnons encore un mémoire remarquable de VAN DER NEUT, daté de 1970 [18], sur les caissons multicellulaires, développé sur la base de considérations physiques simples de nature intuitive, dans l'ignorance du travail de WITTRICK. Les résultats obtenus par VAN DER NEUT ne sont pas établis rigoureusement. En effet, l'équation de compatibilité, dont il sera montré plus loin que ces résultats découlent, n'est même pas formulée. Quoiqu'il en soit, VAN DER NEUT retrouve, entre autres, un des résultats fondamentaux de WITTRICK, à savoir que, pour un tube prismatique fléchi et

tordu, la distribution des contraintes de cisaillement est donnée exactement par la théorie classique, même quand l'effort tranchant et le moment de torsion varient linéairement avec la coordonnée axiale z. La distribution des contraintes normales subit alors une correction indépendante de z, dont la même pour toutes les sections.

5. ETABLISSEMENT PAR UNE METHODE SIMPLE DES PRINCIPAUX RESULTATS OBTENUS PAR WITTRICK.

5.1. Introduction.

Les résultats obtenus par WITTRICK dans son mémoire [11] à la suite de longs calculs complexes peuvent s'établir très simplement. En effet, les seules équations différentielles gouvernant le champ de contraintes sont :

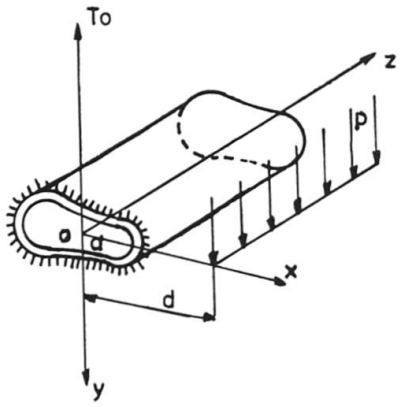
a) l'équation d'équilibre (1.3.) $$\frac{\partial(\tau t)}{\partial s} + \frac{\partial(\sigma t)}{\partial z} = 0 \; ; \qquad (5.1.)$$

b) l'équation de compatibilité (3.7.) $$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} = k \frac{\partial^2 \tau}{\partial z \partial s} \quad \text{avec} \quad k = \frac{E}{G} \; . \qquad (5.2.)$$

D'après le théorème d'unicité de KIRCHHOFF, qui, en vertu du paragraphe 3, est applicable au matériau orthotrope, il suffit d'obtenir *une* solution du problème satisfaisant (5.1.) et (5.2.) pour avoir *la solution unique* de ce problème.

Envisageons donc (figure 5.1.), une poutre tubulaire à parois minces chargée de forces transversales uniformes ayant, par rapport au centre de cisaillement O, un bras de levier d. Ces forces sont équivalentes à un moment de torsion linéairement variable

$$M_z = p \, dz \qquad (5.3.)$$



Flexion et torsion d'une poutre tubulaire.

Figure 5.1.

à un effort tranchant déduit de la formule connue $p = -\frac{dT}{dz}$ et qui vaut :

$$T = -pz + T_0 \qquad (5.4.)$$

où T_0 est l'effort tranchant dans la section z = 0 et enfin à un moment fléchissant :

$$M_x = \int T \, dz = -\frac{pz^2}{2} + T_0 z + C \qquad (5.5.)$$

où C est une constante d'intégration égale au moment M_x dans la section origine z = 0.

Comme le principe de superposition est valide dans une théorie élastique du premier ordre, on peut examiner à part la flexion simple avec effort tranchant et la torsion.

5.2. Flexion simple.

Nous allons montrer que les équations (5.1.) et (5.2.) sont satisfaites par les formules :

$$\sigma = \frac{M_x y}{I} + \Delta\sigma(x,y) \qquad (5.6.)$$

$$t\tau = \frac{TS}{I} + f_0 \; (*) \qquad (5.7.)$$

(*) f_0 représente le flux de cisaillement hyperstatique existant au point origine s = 0.

c'est-à-dire par les formules classiques de la Mécanique des Matériaux, la première d'entre elles étant corrigée par l'adjonction d'une correction $\Delta\sigma(x,y)$, indépendante de z, qui représente ce que nous appellerons les contraintes de traînage de cisaillement réparti.

En effet, comme $\Delta\sigma$ ne dépend pas de z, cette correction n'intervient pas dans l'équation d'équilibre (5.1.). Dès lors, les contraintes tangentielles sont obtenues en se servant de l'équation d'équilibre où l'on remplace σ par l'expression classique de NAVIER

$$\sigma = \frac{M_x y}{I} .$$

Comme l'équation (5.1.) intégrée depuis un bord libre où $\tau = 0$, à savoir

$$\tau\, t = \int_0^s t \frac{\partial\sigma}{\partial z}\, ds = \frac{T}{I} \int_0^s t\, y\, ds \tag{5.8.}$$

est identique à la formule élémentaire

$$\tau\, t = \frac{TS(y)}{I} + f_0 \tag{5.9.}$$

où $S(y)$ est le moment statique par rapport à l'axe neutre de flexion Ox, de la partie de la section comprise entre le point d'arc $s = 0$ et le point d'axe $s = s$, on voit que les τ obéissent à la loi élémentaire classique de la Mécanique des Matériaux.

Le champ de contraintes élémentaire ($\sigma = \frac{M_x y}{I}$, $t\tau = \frac{TS}{I} + f_0$) est donc clairement un champ statiquement admissible. Cependant, il n'est pas compatible, sans quoi ce serait le champ exact que nous cherchons. Pour trouver la correction $\Delta\sigma$ de traînage de cisaillement réparti intervenant dans (5.6.), il suffit d'exprimer que (5.6.) et (5.7.) satisfont à l'équation de compatibilité (5.2.). Comme

$$\partial^2/\partial s^2 \left(\frac{M_x y}{I}\right) = 0,$$

cette équation se réduit à :

$$\boxed{\frac{\partial^2(\Delta\sigma)}{\partial s^2} = k \frac{\partial^2}{\partial z \partial s} \left(\frac{TS}{It} + \frac{f_0}{t}\right)} \tag{5.10.}$$

Supposons pour simplifier qu'on prenne comme origine des axes s un point où le flux hyperstatique f_0 s'annule. Si la section est symétrique par rapport à Oy, on sait que ce point est le point A d'intersection de la ligne moyenne avec l'axe de symétrie (figure 5.1.).

Remarquant de plus que $\frac{\partial T}{\partial z} = -p$, on peut écrire (5.10.) sous la forme plus simple

$$\frac{d^2(\Delta\sigma)}{ds^2} = -\frac{pk}{It} S'(s). \tag{5.11.}$$

En intégrant deux fois, on trouve successivement, dans le cas où t est constant par tronçons :

$$\frac{d(\Delta\sigma)}{ds} = -\frac{pk}{It} S(s) + M. \tag{5.12.}$$

$$\Delta\sigma = -\frac{pk}{It} \int_0^s S(s)\, ds + Ms + N. \tag{5.13.}$$

Les constantes M et N se déterminent en exprimant que les $\Delta\sigma$ sont des auto-

contraintes, c'est-à-dire que

$$N(\Delta\sigma) = \int_A \Delta\sigma \, dA = 0 \qquad (5.14.)$$

$$M_x(\Delta\sigma) = \int_A \Delta\sigma \, y \, dA = 0 \, . \qquad (5.15.)$$

5.3. Torsion sous l'effet d'un moment de torsion linéairement variable.

Nous allons montrer que, dans ce cas-ci, les équations (5.1.) et (5.2.) sont satisfaites par les équations

$$\sigma = \Delta\sigma \, (x,y) \qquad (5.16.)$$

$$t\tau = \frac{M_z}{2S} \qquad (5.17.)$$

où $S = \frac{1}{2}\oint r \, ds$ est l'aire comprise à l'intérieur de la ligne moyenne de la paroi (figure 6.1.). En effet, comme, par (5.12.), $t\tau$ = constante, $\frac{\partial(\tau t)}{\partial s} = 0$ et l'équation d'équilibre (5.1.) entraîne $\frac{\partial(\Delta\sigma t)}{\partial z} = 0$, c'est-à-dire $\Delta\sigma$ indépendant de z, ce qui est conforme à (5.16.). Les corrections $\Delta\sigma$ de traînage de cisaillement réparti sont donc données par l'équation de compatibilité (5.2.), qui s'écrit à présent :

$$\frac{\partial^2 \Delta\sigma}{\partial s^2} = k \frac{\partial^2}{\partial z \partial s}\left(\frac{M_z}{2St}\right) = k \frac{M'_z}{2S} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{t}\right) \qquad (5.18.)$$

Dans le cas courant où l'épaisseur t est constante, $\partial/\partial s \left(\frac{1}{t}\right) = 0$ et (5.18.) se réduit à

$$\Delta\sigma = A s^2 + Bs + C \, . \qquad (5.19.)$$

En exprimant que les $\Delta\sigma$ sont des autocontraintes, on trouve que la constante C est nulle à cause de (5.14.). Quant aux constantes A et B, elles se déterminent par les équations de moment :

$$\int_A \Delta\sigma \, y \, dA = 0 \qquad \int_A \Delta\sigma \, x \, dA = 0 \qquad (5.20.)$$

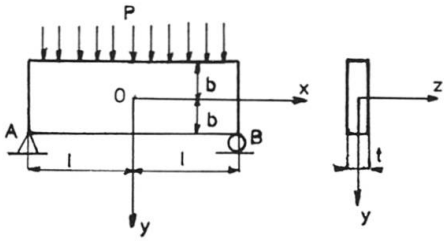
6. ILLUSTRATION SUR DES EXEMPLES SIMPLES DE LA DETERMINATION DES CONTRAINTES DE TRAINAGE DE CISAILLEMENT REPARTI.

6.1. Section rectangulaire (figure 6.1.).

Comme, dans le cas actuel, $\Delta\sigma$ doit être une fonction impaire en y, il est avantageux de prendre comme variable indépendante y plutôt que s.

L'équation (5.11.) peut s'écrire, en adoptant cette variable :

$$\frac{\partial^2(\Delta\sigma)}{\partial y^2} = -\frac{pk}{It} \frac{dS(y)}{dy} \, .$$



Section rectangulaire mince.

Figure 6.1.

Deux intégrations successives donnent respectivement :

$$\frac{\partial(\Delta\sigma)}{\partial y} = -\frac{pk}{It} S(y) + M$$

$$\Delta\sigma = -\frac{pk}{It} \int S(y)\, dy + My + N . \qquad (6.1.)$$

La fonction $\Delta\sigma$ devant être impaire, N = 0. La constante M se détermine en traduisant le fait que les $\Delta\sigma$ sont des autocontraintes, c'est-à-dire que

$$M_x (\Delta\sigma) = 0 . \qquad (6.2.)$$

La figure montre que le moment statique par rapport à l'axe Gx de la partie hachurée vaut

$$S(y) = \frac{t}{2} (b^2 - y^2) .$$

Il en résulte que

$$\int S(y)\, dy = \frac{t}{2} (b^2 y - \frac{y^3}{3})$$

et, par (6.1.)

$$\Delta\sigma = \frac{pk}{2I} (\frac{y^3}{3} - b^2 y) + My . \qquad (6.3.)$$

Remplaçant $\Delta\sigma$ par cette valeur dans la condition d'autocontrainte (6.2.), on trouve

$$\frac{pk}{2I} \int_{-b}^{+b} (\frac{y^3}{3} - b^2 y)\, y\, dy + M \int_{-b}^{+b} y^2\, dy = 0 \text{ d'où } M = \frac{2pkb^2}{5I} .$$

Remplaçant M par cette valeur dans (6.3.), nous obtenons l'expression explicite des contraintes de "shear lag réparti"

$$\Delta\sigma (y) = \frac{pk}{6I} (y^3 - \frac{3}{5} b^2 y) . \qquad (6.4.)$$

6.2. Section en té (figure 6.2.).

Conformément aux hypothèses faites par tous les auteurs qui ont analysé ce problème (cf. p. ex. [9]), nous supposons que la section est composée d'une nervure massive (figure 6.2.) où les effets de traînage de cisaillement sont négligeables, et d'une semelle très large d'épaisseur t et de largeur totale 2a.

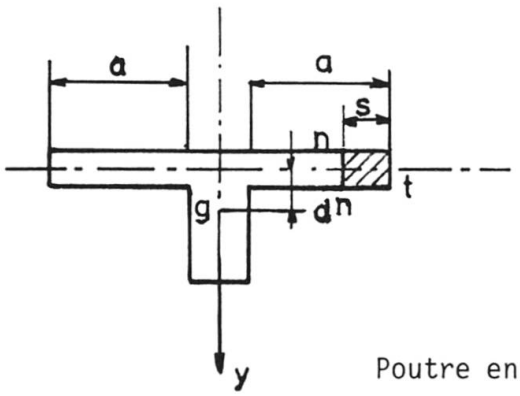
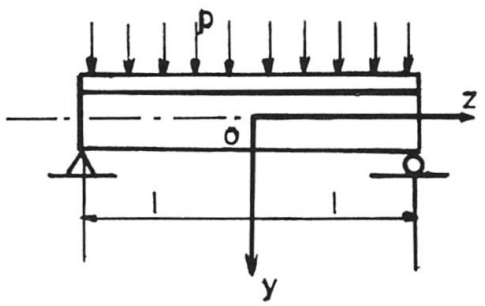


Figure 6.2.a.



Poutre en té chargée uniformément

Figure 6.2.b.

Nous supposons que la poutre en té de longueur 2l (figure 6.2.b.) est chargée de forces transversales uniformes d'intensité p. On a alors par la statique :

$$M(z) = \frac{p(l^2 - z^2)}{2} \quad \text{et} \quad T(z) = \frac{dM}{dz} = - pz \tag{6.5.}$$

Le moment statique de la partie hachurée de la semelle vaut :

$$S(s) = - std \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial S}{\partial s} = - td \tag{6.6.}$$

où d est la valeur absolue de la distance du centre de gravité de la section au plan moyen de la semelle. La Mécanique des Matériaux donne :

$$\tau(s) = \frac{TS}{It} = \frac{pzstd}{It} = \frac{pzsd}{I} . \tag{6.7.}$$

Les contraintes de traînage de cisaillement sont données par la formule (5.11.), qui s'écrit ici :

$$\frac{d^2(\Delta\sigma)}{ds^2} = - \frac{pk}{It} S'(s) = \frac{pkd}{I} . \tag{6.8.}$$

Une première intégration donne :

$$\frac{d(\Delta\sigma)}{ds} = \frac{pkds}{I} + C,$$

puis une seconde intégration fournit les contraintes de traînage de cisaillement

$$\Delta\sigma(s) = \frac{pkds^2}{2I} + Cs + C'. \tag{6.9.}$$

La constante C est nulle parce que $\Delta\sigma(s)$ doit être une fonction paire. La constante C' s'obtient en exprimant que les $\Delta\sigma$ sont des autocontraintes, dont la résultante

$$\int_{-a}^{+a} \Delta\sigma \, ds = 0. \tag{6.10.}$$

En remplaçant $\Delta\sigma$ par sa valeur (6.9.) dans (6.10.), on trouve la condition

$$\frac{kpd}{2I} \int_{-a}^{+a} s^2 \, ds + C' \int_{-a}^{+a} ds = 0,$$

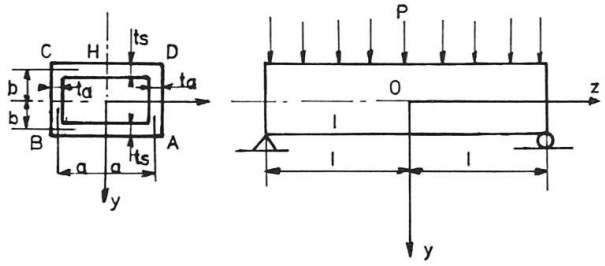
d'où l'on tire

$$C' = \frac{kpda^2}{6I}$$

et, par conséquent,

$$\Delta\sigma(s) = \frac{kpd}{6I} (3s^2 - a^2) \tag{6.11.}$$

6.3. Section en caisson.



Poutre en caisson sur deux appuis chargée uniformément.

Figure 6.3.

Le tube à section rectangulaire représenté à la figure 6.3. est librement appuyé à ses deux extrémités et chargé de forces transversales uniformes d'intensité p appliquées dans son plan de symétrie Gy. Le moment et l'effort tranchant dans la section courante valent

$$M^*(z) = \frac{p}{2}(l^2 - z^2) \quad ; \quad T^*(z) = -pz \tag{6.12.}$$

L'épaisseur des parois est t_s pour les semelles AB et CD, t_a pour les âmes BC et DA.

Par antimétrie, $\tau = 0$ aux milieux F et H des semelles. On peut donc couper la paroi en ces points parallèlement à z et considérer le problème plus simple du demi-profil en U = FADH, chargé de forces transversales p/2 qui produisent les éléments de réduction

$$M(z) = \frac{p}{4}(l^2 - z^2) \quad ; \quad T(z) = -\frac{pz}{2}\,. \tag{6.12.)'}$$

Comme, ici encore, $\Delta\sigma$ doit être une fonction impaire en y, il y a avantage à prendre comme variables indépendantes x dans la semelle AF et y dans l'âme AD.

On trouve pour l'intégrale $\int S\,ds$:

Dans la semelle : $$\int S_s\,dx = t_s\,b\,\frac{x^2}{2} + A^* \quad (0 \leqslant x \leqslant a) \tag{6.13.}$$

Dans l'âme : $$\int S_A\,dx = \left(t_s\,ab + \frac{t_a\,b^2}{2}\right) y - \frac{t_a\,y^3}{6} + M^*\,.$$

Le traînage de cisaillement vaut, par la formule (5.13.) :

Dans la semelle : $$\Delta\sigma_s = -\frac{pk_s}{2I}\,\frac{bx^2}{2} + Ax + B \tag{6.14.}$$

Dans l'âme : $$\Delta\sigma_a = -\frac{pk_A}{2It_a}\left[\left(t_s\,ab + \frac{t_a\,b^2}{2}\right)y - \frac{t_a\,y^3}{6}\right] + My + N \tag{6.15.}$$

Les constantes d'intégration A, B, M, N, se déterminent par les conditions suivantes :

1) parité en x de $\Delta\sigma$ dans la semelle : $A = 0$ (6.16.)

2) imparité en y de $\Delta\sigma$ dans l'âme : $N = 0$ (6.17.)

3) continuité de $\Delta\sigma$ en A (jonction âme-semelle) : $(\Delta\sigma_S)_{x=a} = (\Delta\sigma_A)_{y=b}$ (6.18.)

4) traduction du fait que les $\Delta\sigma$ sont des autocontraintes :

$$M_x(\Delta\sigma) = 2\,b\int_{AF}\Delta\sigma_s\,t_s\,dx + \int_{AD}\Delta\sigma_a y\,t_a\,dy = 0 \tag{6.19.}$$

Compte tenu de (6.16.) et (6.17.), les $\Delta\sigma$ s'écrivent sous forme simplifiée :

$$\Delta\sigma_s = -\frac{p\,k_s\,bx^2}{4I} + B \tag{6.20.}$$

$$\Delta\sigma_A = \left(-\frac{pk_A}{2I}\,\frac{t_s}{t_a}\,ab - \frac{pk_A\,b^2}{4I} + M\right)y + \frac{p\,k_A}{12I}\,y^3 \tag{6.21.}$$

La condition de continuité (6.18.) s'écrit :

$$-\frac{pk_s\,ba^2}{4I} + B = -\frac{pk_A\,t_s}{2I\,t_a}\,ab^2 - \frac{pk_A\,b^3}{4I} + Mb + \frac{pk_A\,b^3}{12I} \tag{6.22.}$$

La condition d'autocontrainte (6.19.) s'écrit explicitement :

$$- 2\, bt_s \int_0^a \frac{pk_s\, b}{4I}\, x^2\, dx + 2b\, Bt_s \int_0^a dx - \left(\frac{pk_A}{2I}\, t_s\, ab + \frac{pk_A\, t^2}{4I}\, t_a - Mt_a\right) \int_{-b}^{+b} y^2\, dy$$

$$+ \frac{pk_A}{12I}\, t_a \int_{-b}^{+b} y^4\, dy = 0 ,$$

ce qui se réduit à :

$$- \frac{pk_s\, b^2\, t_s\, a^3}{6I} + 2abt_s\, B - \left(\frac{pk_A\, t_s\, ab}{2I} + \frac{pk_A\, b^2\, t_a}{4I} - Mt_a\right) \frac{2b^3}{3} + \frac{pk_A\, t_a}{12I}\, \frac{2b^5}{5} = 0 \qquad (6.23.)$$

En posant

$$B = \frac{pk_s\, b^3}{I}\, \beta \quad , \quad M = \frac{pk_A\, b^2}{I}\, \mu \qquad (6.24.)$$

où β et μ sont des facteurs sans dimensions, et en introduisant le paramètre sans dimensions de MOFFATT et DOWLING :

$$\beta = \frac{at_s}{bt_a} , \qquad (6.25.)$$

on peut écrire les conditions(6.22)et(6.23.) sous la forme non dimensionnelle :

$$- \frac{a^2}{4b^2} + \gamma + \frac{k_A}{k_s}\, \beta + \frac{1}{6}\, \frac{k_A}{k_s} - \frac{k_A}{k_s}\, \mu = 0. \qquad (6.26.)$$

$$- \frac{a^2}{12b^2} + \gamma - \frac{1}{6}\, \frac{k_A}{k_s} - \frac{1}{15}\, \frac{k_A}{k_s}\, \frac{1}{\beta} + \frac{1}{3}\, \frac{k_A}{k_s}\, \frac{1}{\beta}\, \mu = 0 . \qquad (6.27.)$$

En éliminant μ entre ces équations pour en tirer γ, qui est seul utile pour l'évaluation de la largeur effective de la semelle, on trouve :

$$\gamma = \frac{a^2\, (1 + \beta)}{4b^2 (1 + 3\beta)} + \frac{1}{30}\, \frac{k_A}{k_s}\, \frac{1}{1 + 3\beta} . \qquad (6.28.)$$

La contrainte primaire de flexion, donnée par la formule de NAVIER, vaut, dans la section médiane :

$$\sigma = \frac{Mb}{I} = \frac{p\, l^2\, b}{4I}$$

où

$$I = \frac{2b^2}{3}\, (bt_a + 6\, at_s) = \frac{2}{3}\, b^3\, t_a\, (1 + 3\beta) \qquad (6.29.)$$

est le moment d'inertie du demi-profil FADH (figure 6.3.) par rapport à l'axe Gx.

En y ajoutant la correction $\Delta\sigma$ donnée par la formule (6.20.), où l'on remplace B par son expression (6.24.), on trouve pour la répartition des contraintes dans la semelle FA (figure 6.3.) l'expression :

$$\sigma_s = \frac{p\, l^2\, b}{4I}\, \left[1 - k_s\, \gamma\, \left(\frac{2b}{l}\right)^2 + k_s\, \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \qquad (6.30.)$$

où γ est donné par (6.28.).

Par un raisonnement analogue, on trouve dans l'âme :

$$\sigma_a = \frac{p\, l^2\, y}{4I}\, \left\{1 - k_A\, \left(\frac{2b}{l}\right)^2 \left[\frac{1}{12}\, \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \frac{1}{2}\, \beta - \frac{1}{4} + \mu\right]\right\} \qquad (6.31.)$$

avec

$$\mu = - \frac{a^2}{4b^2}\, \frac{k_s}{k_a} + \gamma\, \frac{k_s}{k_a} + \frac{1}{2}\, \beta + \frac{1}{6} \qquad (6.32.)$$

6.4. Section en double té (figure 6.4.).

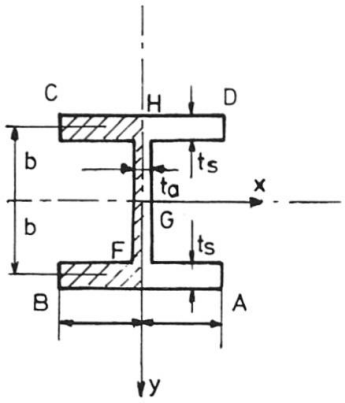


Figure 6.4.

On voit directement qu'en coupant la section droite en deux par la ligne moyenne de l'âme, on retrouve un profil en U, BFHC (figure 6.4.), identique à celui de la figure 6.3., sauf que l'épaisseur de son âme n'est plus t_a, mais $t_a/2$. Il en résulte qu'en remplaçant t_a par $t_a/2$ dans les formules (6.12.) à (6.31.), on obtient les contraintes de traînage de cisaillement réparti pour un profil en double té.

7. REMARQUE FINALE.

Le nombre de pages attribué au présent article n'a pas permis d'y inclure un résultat pratique immédiat: des formules simples donnant la largeur effective de traînage de cisaillement des quatre profils étudiés au paragraphe 6. Pour l'établissement de ces formules, le lecteur peut consulter la référence [21].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] TIMOSHENKO, S.P. : Bull. Instit.Polytechn. de Saint Pétersbourg, 1905.

[2] WAGNER, H. : Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. Festschrift 25 Jahre Technische Hochschule Danzig, 1929.

[3] KAPPUS, R. :Zentrisches und exzentrisches Drehknicken von Stäben mit offenen Profil. Der Stahlbau, N° 1, 1952, pp. 6 - 12.

[4] GOODIER, J. : Torsional and Flexural Buckling of Bars of thin-walled open Section under Compressive and Bending Loads. Journ. Appl. Mech. 1942, pp. 103 - 107.

[5] VLASSOV, V.Z. : Thin-Walled Elastic Beams. Israël Progr. f. Sc. Transl., Jerusalem, 1961.

[6] LEKHNITSKII, S.G. : Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1963.

[7] TIMOSHENKO, S.P. : Théorie de l'Elasticité, Ch. Béranger, édit., 1936.

[8] MASSONNET, Ch.: Résistance des Matériaux, Vol. I, troisième édition, 1979, Vol. II, deuxième édition, 1973, pp. 185 - 231.

[9] HADJI-ARGYRIS, J. and DUNNE, P.C. : The General Theory of Cylindrical and Conical Tubes under Torsion and Bending Loads. Journ.Roy.Aero.Soc., Parts 1-IV, février 1947, Part V, Sept.Nov. 1947, Part VI,May-June 1949.

[10] FLUGGE, W. et MARGUERRE, K. : Wölbkräfte in dünnwandigen Profilstäben. Ingenieur-Archiv, Vol. 18, cahier 1, 1950.

[11] WITTRICK, W.H. : On the problem of Shear-lag in Non-Uniform Cylindrical Tubes. Report SM 164 of the Australian Aeronautical Research Lab., 1951.

[12] STUSSI, F. : Der dünnwandige Schlanke Stahlstab mit Kastenquerschnitt. Mémoires A.I.P.C., Vol. 11, 1951, pp. 375 - 389.

[13] STUSSI, F. : Schubmittelpunkt und Torsion. Mémoires A.I.P.C., Vol. 12, 1952, pp. 259 - 267.

[14] KUBITZKI, H.H. : Biege-und Verdrehbeanspruchung unsymmetrischer Kastenträger. Technische Mitteilungen Krupp, Vol. 17, cahier 5, 1959, pp.207-229.

[15] SCHROEDER, F.H. : Die näherungsweise Berücksichtigung der mittragenden Breite bei Spannungs-, Stabilitäts, und Schwingungsproblemen. Ingenieur Archiv, vol. 36, 1967, pp. 79 - 99.

[16] ROIK, K. et SEDLACEK, G. : Erweiterung der technischen Biege- und Verdrehtheorie unter Berücksichtigung von Schubverformungen. Die Bautechnik, Heft 1, 1970, pp. 20 - 32.

[17] BÖGE, G. et ROIK, K. : Finites Verfahren zur Berechnung prismatischer Flächentragwerke unter Berücksichtigung von Schubverformungen und Anderung der Querschnittsgestalt. Die Bautechnik, 1973, pp. 227 - 235.

[18] VAN DER NEUT, A. : An extension of the Validity of Beam Theory Beyond its Classical Bounds. Aeron. Journ. of the Roy. Soc., 1970, pp. 752 - 756.

[19] CHWALLA, E. : Die Formeln zur Berechnung der "voll mittragenden Breite" dünner Gurt- und Rippenplatten, Der Stahlbau, Vol. 9, pp. 73 - 78, 1936.

[20] MASSONNET, Ch.: A New Approach (Including Shear Lag) of Elementary Mechanics of Materials. Int. Journ. Solids and Structures (à paraître).

[21] MAQUOI, R. et MASSONNET, Ch.: Une évaluation simple de la largeur effective due au traînage de cisaillement - Construction Métallique (à paraître).