

Zeitschrift: IABSE proceedings = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 1 (1977)
Heft: P-7: Moment redistribution in composite structures

Artikel: Schnittkraftumlagerung in Verbundkonstruktionen
Autor: Hitz, Werner
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-32459>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Schnittkraftumlagerung in Verbundkonstruktionen

Moment Redistribution in Composite Structures

Redistribution des efforts intérieurs dans les constructions mixtes

Werner HITZ

dipl. Ing. ETH
Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH
Zürich, Schweiz

ZUSAMMENFASSUNG

Der Autor behandelt ein Verfahren zur raschen Abschätzung der Schnittkraftumlagerung infolge Kriechen und Schwinden in statisch unbestimmten Verbundkonstruktionen. Auf die Angabe geschlossener Ausdrücke wird bewusst verzichtet; die aufgezeigte Methode beschränkt sich vielmehr auf einen leicht kontrollierbaren, iterativen Rechenablauf. Sie ist für einen vereinfachten Bauvorgang auf den beidseitig eingespannten Balken angewendet.

Die Ausweitung auf andere statisch unbestimmte Systeme sowie eine Änderung im zeitlichen Ablauf des Bauvorgangs ist jedoch leicht möglich. Ausschliessliche Querschnitts- oder Systemumlagerung sind Spezialfälle des vorliegenden Verfahrens. Die angegebenen Formeln lassen sich entsprechend vereinfachen.

SUMMARY

This paper describes an approximate procedure for the analysis of the moment redistribution due to creep and shrinkage of concrete in statically indeterminate composite structures. It was not intended to give closed expressions but to explain the iterative procedure — which is easy to check — applied on a simple span beam built in at both ends.

The application of the procedure to other statically indeterminate systems and to changes in the execution process with respect to time is easily possible. Redistribution of forces in the statical system or in the cross section alone are special cases of the proposed procedure. The corresponding equations can easily be derived.

RÉSUMÉ

L'article présente une méthode pour une estimation rapide de la redistribution des efforts intérieurs due au retrait et au fluage du béton dans les constructions mixtes hyperstatiques. La méthode consiste en un calcul itératif, facile à vérifier. Elle est applicable à une poutre simple encastree des deux côtés.

Il est facile d'appliquer ces formules à d'autres systèmes hyperstatiques ou de changer l'ordre des phases d'exécution. Les formules de la méthode proposée peuvent être simplifiées dans le cas spécial de la redistribution seule des efforts dans la section ou dans le système statique.

1. EINLEITUNG

Im Rahmen der statischen Berechnung von Verbundkonstruktionen aus Beton-Fertigteilen bzw. Stahlträgern mit Ortbeton, sind für Spannungs- und Bruchsicherheitsnachweise die Schnittkräfte infolge Kriechen und Schwinden für die massgebenden Lastfälle zu bestimmen. Insbesondere interessieren - zum Beispiel bei Spannbetonbrücken aus vorfabrizierten Trägern mit nachträglich ergänzter Fahrbahnplatte - die Zwängungsmomente über dem Auflager. Diese erlauben die Ermittlung der schlaffen Bewehrung oben und unten im Querschnitt über dem Auflager.

Die "wirklichkeitsnahe" - oder zutreffender, "rechnerisch genaue" - Erfassung dieser Schnittkräfte kann heute mit bereits vorhandenen Computer-Programmen durchgeführt werden. Die näherungsweise Ueberprüfung der aus diesen Berechnungen resultierenden Ergebnisse ist jedoch notwendig. Im Übrigen ist der Einsatz solcher Programme während der Vorprojektphase fraglich, eine kurze, grobe Abschätzung ist einer langwierigen, aufwendigen Berechnung vorzuziehen.

Zu diesem Zweck wurde ein einfaches, übersichtliches Verfahren entwickelt, welches die rasche Abschätzung der Schnittkraftumlagerung erlaubt. Die Einsatzmöglichkeiten des Verfahrens erstrecken sich auf folgende, praktisch bedeutsame Fälle für Stahlbeton- und Stahlträger-Verbundkonstruktionen:

- * Statisch bestimmte Systeme
 - Querschnittsergänzung
- * Statisch unbestimmte Systeme
 - ausschliessliche Systemänderung
 - gleichzeitige Systemänderung und Querschnittsergänzung
 - Systemänderung mit späterer Querschnittsergänzung

Das Verfahren ist hergeleitet für den allgemeinen Fall der gleichzeitigen Systemänderung und Querschnittsergänzung. Für die restlichen Fälle sind die angegebenen Ausdrücke jedoch leicht übertragbar.

2. GRUNDLAGEN UND ANNAHMEN

Der Rechenaufwand und die Genauigkeit der Ergebnisse sollen in vernünftigem Verhältnis stehen zu den recht unsicheren Ausgangswerten wie Grösse und Verlauf der Kriech- bzw. Schwinddehnungen. Der Berechnung sei deshalb folgender vereinfachter Bauvorgang zugrunde gelegt (Abb. 1):

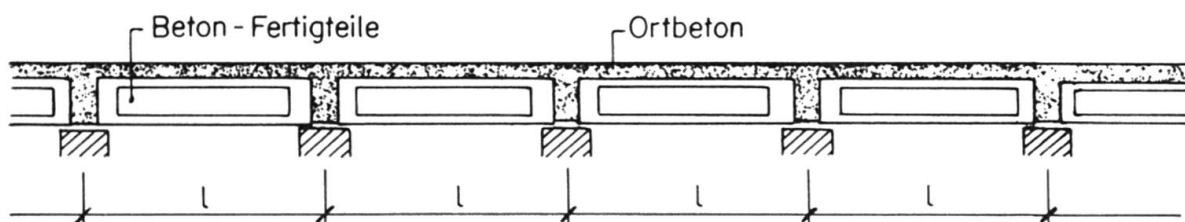
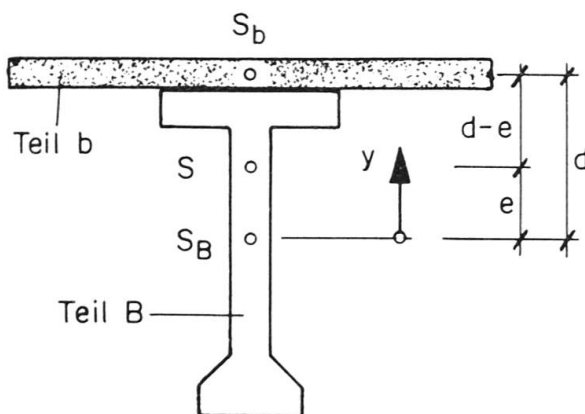


Abb. 1 Längsschnitt

Im Zeitpunkt t_0 erfolgt die Herstellung der vorfabrizierten Träger. Diese werden montiert und im Zeitpunkt t_1 durch eine Druckplatte aus Ortbeton ergänzt (Querschnittsänderung). Gleichzeitig werden die Fugen zwischen den Längsträgern geschlossen (Systemänderung).

Als Resultate interessieren in erster Linie die Schnittkräfte aus ständigen Lasten im Zeitpunkt t_∞ .



Querschnittswerte, Materialkennwerte

F = Fläche
I = Trägheitsmoment
S = Schwerpunkt

Teil b: F_b , E_b

Teil B: F_B , E_B , I_B

$$\alpha = \frac{E_b}{E_B}, \quad \beta = \frac{F_b}{F_B}, \quad \gamma = \frac{F_b \cdot d^2}{I_B}$$

$$e = \frac{d}{1 + \frac{1}{\alpha \cdot \beta}}, \quad I = I_B + F_B \cdot e^2 + \alpha \cdot F_b \cdot (d-e)^2$$

Abb. 2 Querschnitt

Das Eigenträgheitsmoment I_b der Druckplatte wird vernachlässigt und die E-Moduln E_B und E_b zeitlich konstant angenommen. Ebenso bleiben die Untersuchungen auf ein reines Betontagwerk beschränkt. Diese Annahme führt nach [4] und [5] auf zu große Schnittkräfte, da die Bewehrung das Kriechvermögen des Betons behindert. Bei kleinem Bewehrungsgehalt ist diese Behinderung für die angestrebte Genauigkeit jedoch ohne Bedeutung.

Für die Kriechfunktion wird der Ansatz von Dischinger zugrunde gelegt. Ein Ansatz, der den technologischen Gegebenheiten besser entspricht (Ansatz von Rüschi), ist im Anhang kurz behandelt.

3. SCHNITTKRAFTUMLAGERUNG MIT KRIECHEN DER UMLAGERUNGSKRÄFTE

Für die Bestimmung der Umlagerungskräfte (ΔN_b , $\bar{\Delta N}_b$, ΔN_B , etc.) wird ein Ansatz mit Differenzengleichungen gewählt [7]. Dazu ist der Kriech- bzw. Schwindablauf in n gleiche Intervalle zu unterteilen. Die Kriechzahl für ein Intervall wird zu $\Delta \varphi = \frac{\varphi}{n}$; das Schwindmaß zu $\Delta \epsilon_s = \frac{\epsilon_s}{n}$. φ und ϵ_s sind die nach der Systemänderung und Querschnittsergänzung noch zu erwartenden Restkriechzahlen bzw. Restschwindmasse für Platte und Träger. Der gesamte Betrag der Umlagerungskräfte setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, einem aus Querschnittsumlagerung und einem aus Systemumlagerung (Abb. 3).

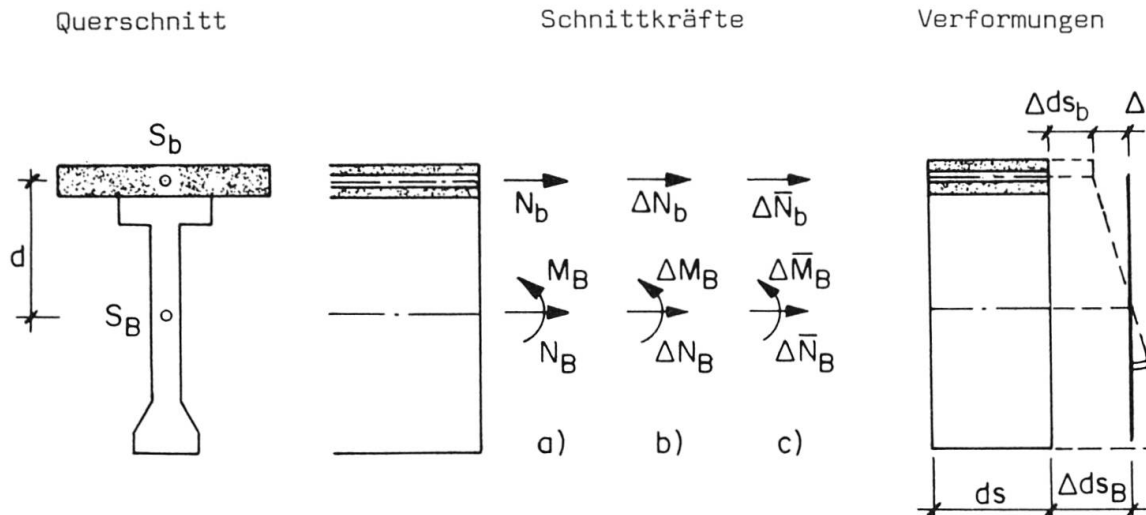


Abb. 3 Verformungen und Schnittkräfte

- a) Zu Beginn eines Intervall-Schrittes vorhandene Schnittkräfte
- b) Durch Querschnittsumlagerung erzeugte Schnittkräfte (primäre Kriech- und Schwindumlagerung)
- c) Durch Systemumlagerung erzeugte Schnittkräfte (sekundäre Kriech- und Schwindumlagerung)

3.1 Querschnittsumlagerung

Bei genügend feiner Aufteilung des Kriechablaufes wachsen die Umlagerungskräfte im betrachteten Intervall i linear von Null auf den Endwert ΔN_{bi} bzw. ΔM_{bi} an. Aus diesem Grunde rechnet man mit einem an den Kriechverformungen wirkenden, mittleren Anteil von $0.5 \cdot \Delta N_{bi}$ bzw. $0.5 \cdot \Delta M_{bi}$. Wie Abb. 3 zu entnehmen ist, gelten dann für die Verformungen am Balkenelement der Länge ds während eines Intervallschrittes folgende Differenzengleichungen:

Dehnung in der Platte:

$$\Delta ds_b = \left[\frac{N_b}{E_b \cdot F_b} \cdot \Delta \varphi_b + \frac{\Delta N_b}{E_b \cdot F_b} \cdot (1 + 0.5 \cdot \Delta \varphi_b) + \Delta \epsilon_{sb} \right] \cdot ds$$

Dehnung im Träger:

$$\Delta ds_B = \left[\frac{N_B}{E_B \cdot F_B} \cdot \Delta \varphi_B + \frac{\Delta N_B}{E_B \cdot F_B} \cdot (1 + 0.5 \cdot \Delta \varphi_B) + \Delta \epsilon_{sB} \right] \cdot ds$$

Querschnittsverdrehung im Träger:

$$\Delta d\psi_B = \left[\frac{M_B}{E_B \cdot I_B} \cdot \Delta \varphi_B + \frac{\Delta M_B}{E_B \cdot I_B} \cdot (1 + 0.5 \cdot \Delta \varphi_B) \right] \cdot ds$$

Diese drei Gleichungen eingesetzt in die Verträglichkeitsbedingung zwischen Platte und Träger

$$\Delta ds_b = \Delta ds_B - \Delta d\psi_B \cdot d$$

und in die Gleichgewichtsbedingungen

$$\Delta N_B + \Delta N_b = 0$$

$$\Delta M_B - \Delta N_b \cdot d = 0$$

ergeben nach kurzer Rechnung die Umlagerungskraft in der Platte zu

$$\Delta N_b = \frac{1}{\kappa} \cdot \left[-N_b \cdot \Delta \varphi_b + N_B \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \Delta \varphi_B - M_B \frac{\alpha \cdot \gamma}{d} \cdot \Delta \varphi_B + E_b \cdot F_b \cdot (\Delta \epsilon_{sB} - \Delta \epsilon_{sb}) \right]$$

mit $\kappa = 1 + 0.5 \cdot \Delta \varphi_b + \alpha \cdot (1 + 0.5 \cdot \Delta \varphi_B) \cdot (\beta + \gamma)$.

Weiter gilt im Symmetriefall für den Auflagerdrehwinkel aus einem Intervall

$$\Delta \psi_B = \int_0^{1/2} \Delta d\psi_B$$

3.2 Systemumlagerung

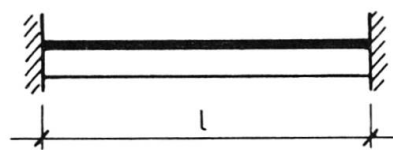
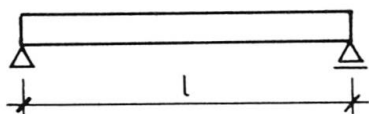
Aus dem in Abb. 1 dargestellten durchlaufenden Balken wird ein mittleres Feld untersucht.

Statisches System

im Zeitpunkt t_0

und

im Zeitpunkt t_∞



Das Zwängungsmoment $\Delta \chi$ hält den aus Querschnittsumlagerung in einem Intervallschritt resultierenden Auflagerdrehwinkel $\Delta \psi_B$ zurück (Abb. 4).

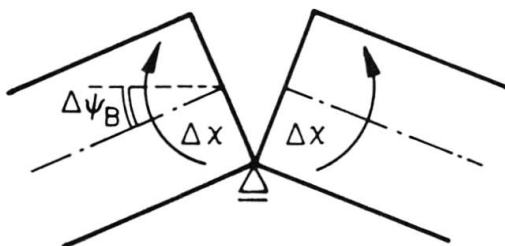


Abb. 4 Systemumlagerung



$\Delta\chi$ wirkt am Verbundquerschnitt und ist für den vorliegenden Symmetriefall über die gesamte Stablänge konstant. Es verursacht den Auflagerdrehwinkel

$$\Delta\bar{\psi}_B = \frac{\Delta\chi}{E_B \cdot I} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + 0.5 \cdot \Delta\varphi_B)$$

Die Elastizitätsgleichung

$$\Delta\psi_B + \Delta\bar{\psi}_B = 0$$

führt nach einigen Umformungen auf das aus einem Intervall-Schritt resultierende Zwängungsmoment

$$\Delta\chi = - \frac{2 \cdot I}{I_B \cdot 1 \cdot (1 + 0.5 \cdot \Delta\varphi_B)} \cdot \int_0^{1/2} E_B \cdot I_B \cdot \Delta d\psi_B$$

Schliesslich erzeugt $\Delta\chi$ am Verbundträger folgende Umlagerungskräfte:

$$\Delta\bar{N}_b = - \frac{\Delta\chi}{I} \cdot (d-e) \cdot \alpha \cdot F_b$$

$$\Delta\bar{N}_B = - \Delta\bar{N}_b$$

$$\Delta\bar{M}_B = \Delta\chi + \Delta\bar{N}_b \cdot d$$

Damit sind alle in Abb. 3 aufgeführten Schnittkräfte bekannt.

4. PRAKTISCHES VORGEHEN BEI n INTERVALL-SCHRITTEN

Die Ausgangsschnittgrössen für den ersten Schritt zum Zeitpunkt t_1 lauten N_{b0} , N_{B0} , M_{B0} . Daraus sind nach Kapitel 3 der Reihe nach die Grössen ΔN_{b1} , $\Delta\chi_1$, ΔN_{B1} , ΔM_{B1} , $\Delta\bar{N}_{b1}$, $\Delta\bar{N}_{B1}$ und $\Delta\bar{M}_{B1}$ bestimmbar. Die Ausgangsschnittgrössen für den zweiten Schritt ergeben sich dann zu

$$N_{b1} = N_{b0} + \Delta N_{b1} + \Delta\bar{N}_{b1}$$

$$N_{B1} = N_{B0} + \Delta N_{B1} + \Delta\bar{N}_{B1}$$

$$M_{B1} = M_{B0} + \Delta M_{B1} + \Delta\bar{M}_{B1}$$

Nach n Schritten heisst das Ergebnis

$$N_{bn} = N_{bn-1} + \Delta N_{bn} + \Delta\bar{N}_{bn}$$

$$N_{Bn} = N_{Bn-1} + \Delta N_{Bn} + \Delta\bar{N}_{Bn}$$

$$M_{Bn} = M_{Bn-1} + \Delta M_{Bn} + \Delta\bar{M}_{Bn}$$

$$\chi_n = \Delta\chi_1 + \Delta\chi_2 + \dots + \Delta\chi_n$$

Die genauere Untersuchung der Endgrössen der Umlagerungsschnittkräfte $S_n(N_{bn}, N_{Bn}, M_{Bn}, \chi_n)$ zeigt, dass diese folgendem Gesetz gehorchen

$$S_n = S_o + \Delta S'_1 \cdot \frac{1-\rho^n}{1-\rho}$$

worin S_0 : Ausgangsschnittgrösse
 $\Delta S'_1, \Delta S'_2$: Schnittkraftänderung im ersten, bzw. zweiten Intervall-Schritt
aus primären und sekundären Kriech- und Schwindumlagerungen
 n : Anzahl Intervall-Schritte
 $\rho = \Delta S'_2 / \Delta S'_1$

Dies heisst aber, dass zur Bestimmung der Schnittkräfte S_n von n Intervall-Schritten nur die ersten zwei vollständig durchgeführt werden müssen. Mit den daraus resultierenden Werten $\Delta S'_1, \rho$ sowie mit S_0 können die Endgrössen S_n ermittelt werden.

Die derart bestimmten Schnittkräfte führen nach Abschluss der Kriech- und Schwindumlagerungen zum Zeitpunkt t_∞ auf die Normalspannung

$$\sigma_b = \frac{N_b}{F_b} \text{ in der Platte} \quad \text{und} \quad \sigma_B = \frac{N_B}{F_B} + \frac{M_B}{I_B} \cdot y \quad \text{im Träger}$$

5. FORMELSAMMLUNG

Im folgenden sind zur Erleichterung bei praktischen Berechnungen die notwendigen Formeln zusammengestellt. Das Integral im Ausdruck für das Zwängungsmoment $\Delta \chi$ wurde zu diesem Zweck für die Lastfälle

- Eigengewicht
- "Schwinden"
- Gerades Vorspannkabel
- Parabelförmiges Vorspannkabel

gelöst und in eine leicht zu handhabende Form gebracht. Für die Formeln von ΔN_b , ΔN_B und $\Delta \chi$ gelten im übrigen die Indizes des jeweiligen Intervall-Schrittes.

Querschnittswerte, Materialkennwerte

$$F_b, E_b; F_B, E_B, I_B$$

$$\alpha = \frac{E_b}{E_B}, \beta = \frac{F_b}{F_B}, \gamma = \frac{F_b \cdot d^2}{I_B}, e = \frac{d}{1 + \frac{1}{\alpha \cdot \beta}}$$

$$I = I_B + F_B \cdot e^2 + \alpha \cdot F_b \cdot (d - e)^2$$

Kriechzahl, Schwindmass, Anzahl Intervalle

$$\varphi_b, \varphi_B, \epsilon_{sb}, \epsilon_{sB}, n$$

$$\Delta \varphi_b = \frac{\varphi_b}{n}, \Delta \varphi_B = \frac{\varphi_B}{n}, \Delta \epsilon_{sb} = \frac{\epsilon_{sb}}{n}, \Delta \epsilon_{sB} = \frac{\epsilon_{sB}}{n}$$

Ausgangsschnittgrössen für den 1. Intervall-Schritt

$$N_{bo}, N_{Bo}, M_{Bo}$$

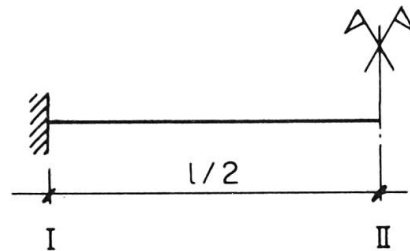


Querschnittsumlagerung

$$\kappa = 1 + 0.5 \cdot \Delta\varphi_b + \alpha \cdot (1 + 0.5 \cdot \Delta\varphi_B) \cdot (\beta + \gamma)$$

$$\Delta N_b = \frac{1}{\kappa} \cdot \left[-N_b \cdot \Delta\varphi_b + N_B \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \Delta\varphi_B - M_B \cdot \frac{\alpha \cdot \gamma}{d} \cdot \Delta\varphi_B + E_b \cdot F_b \cdot (\Delta\epsilon_{sB} - \Delta\epsilon_{sb}) \right]$$

Systemumlagerung



Für die eingangs erwähnten vier Lastfälle gilt:

$$\Delta\chi = - \frac{I}{3 \cdot I_B \cdot (1 + 0.5 \cdot \Delta\varphi_B)} \cdot \left[(M_B^I + 2 \cdot M_B^{II}) \cdot \Delta\varphi_B + (\Delta N_b^I + 2 \cdot \Delta N_b^{II}) \cdot (1 + 0.5 \cdot \Delta\varphi_B) \cdot d \right]$$

Für die Lastfälle "Gerades Vorspannkabel" und "Schwinden" sind M_B und ΔN_b über die Balkenlänge konstant. Es gilt $M_B^I = M_B^{II}$ bzw. $\Delta N_b^I = \Delta N_b^{II}$ und der Ausdruck für $\Delta\chi$ lässt sich vereinfachen zu

$$\Delta\chi = - \frac{I}{I_B \cdot (1 + 0.5 \cdot \Delta\varphi_B)} \cdot \left[M_B^I \cdot \Delta\varphi_B + \Delta N_b^I \cdot (1 + 0.5 \cdot \Delta\varphi_B) \cdot d \right]$$

Ausgangsschnittgrößen für den 2. Intervall-Schritt (analog für den 3. Schritt)

$$\Delta \bar{N}_b = -\Delta\chi \cdot \frac{F_b \cdot \alpha \cdot (d-e)}{I}$$

$$N_{b1} = N_{b0} + \Delta N_{b1} + \Delta \bar{N}_{b1}$$

$$N_{B1} = N_{B0} - \Delta N_{b1} - \Delta \bar{N}_{b1}$$

$$M_{B1} = M_{B0} + (\Delta N_{b1} + \Delta \bar{N}_{b1}) \cdot d + \Delta\chi_1$$

Endschnittgrößen S_n

$$\begin{aligned} S & \text{ steht für } \chi, N_b, N_B, M_B \\ \Delta S'_1 &= S_1 - S_0, \Delta S'_2 = S_2 - S_1, \rho = \frac{\Delta S'_2}{\Delta S'_1} \\ S_n &= S_0 + \Delta S'_1 \cdot \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} \end{aligned}$$

Normalspannungen

$$\sigma_b = \frac{N_b}{F_b}, \quad \sigma_B = \frac{N_B}{F_B} + \frac{M_B}{I_B} \cdot y$$

6. BEISPIELE UND VERGLEICHSCHEUNUNG

Das beschriebene Verfahren soll an zwei Beispielen illustriert werden. Für Beispiel 1 zeigen Tab. 1 und Abb. 8 die Gegenüberstellung der Ergebnisse mit denjenigen einer "wirklichkeitsnahen" Berechnung anhand eines Computer-Programmes (Kriechfunktion nach DIN 1045). Die Ergebnisse des 2. Beispiels sind in Abb. 10 den Zahlenwerten nach Wippel [8] gegenübergestellt.

BEISPIEL 1: SPANNBETON-VERBUNDKONSTRUKTION

Ein im Spannbett mit V_1 vorgespannter, vorgefabrizierter Betonträger wird 50 Tage (t_1) nach seiner Herstellung montiert, mit einem zusätzlichen, parabelförmigen Kabel (Vorspannkraft V_2) vorgespannt und durch die Fahrbahnplatte ergänzt. Gleichzeitig werden die Fugen zwischen den Trägern betoniert.

Die Einflüsse der Träger-Endverstärkungen sowie der schlaffen Bewehrung werden für die Vergleichsrechnung vernachlässigt.

Gesucht sind die Schnittkräfte, bzw. die Verteilung der Normalspannungen über den Querschnitt in den Schnitten I und II nach Abschluss der Kriech- und Schwindumlagerungen.

Belastungen

Eigengewicht des Trägers und der Platte: $g = 1.5 \text{ t/m'}$

Spannbett-Vorspannung: $V_1^{t_0} = 150 \text{ t}$
 Kabel-Vorspannung: $V_2^{t_1} = 70 \text{ t}$ } im Zeitpunkt $t_0 = 0$ Tage, im Zeitpunkt $t_1 = 50$ Tage

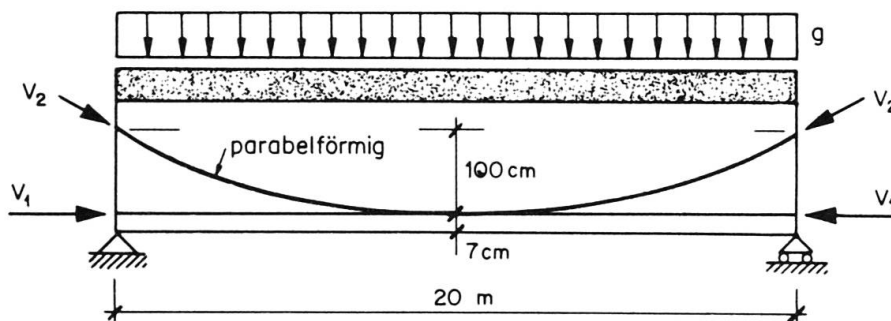


Abb. 5 Belastungen

Der Spannkraftverlust bis zum Zeitpunkt t_∞ infolge Kriechen, Schwinden und Stahlrelaxation, wird geschätzt oder nach dem bekannten Ansatz für statisch bestimmte Systeme ermittelt. Dieser gilt in guter Näherung auch für statisch unbestimmte Systeme.

Spannbett-Vorspannung: $V_1^{t_\infty} = \eta_1 \cdot V_1^{t_0}$, Kabel-Vorspannung: $V_2^{t_\infty} = \eta_2 \cdot V_2^{t_1}$

Um einen Vergleich mit den Werten der Computer-Berechnung zu ermöglichen, wurden die Faktoren η dieser Berechnung entnommen:

Spannbett-Vorspannung: $\eta \approx 0.83$ $V_1^{t_\infty} \approx 0.83 \cdot 150 \approx 125 \text{ t}$

Kabel-Vorspannung: $\eta \approx 0.93$ $V_2^{t_\infty} \approx 0.93 \cdot 70 \approx 65 \text{ t}$

Als Ausgangsgröße für den ersten Intervallschritt wird die Vorspannkraft V im Zeitpunkt t_∞ eingesetzt (V^{t_∞}). Dies führt auf plausible und genügend genaue Resultate. Eine genauere Berücksichtigung des Verlaufs der Spannkraftverluste erübrigt sich somit.



Querschnitt

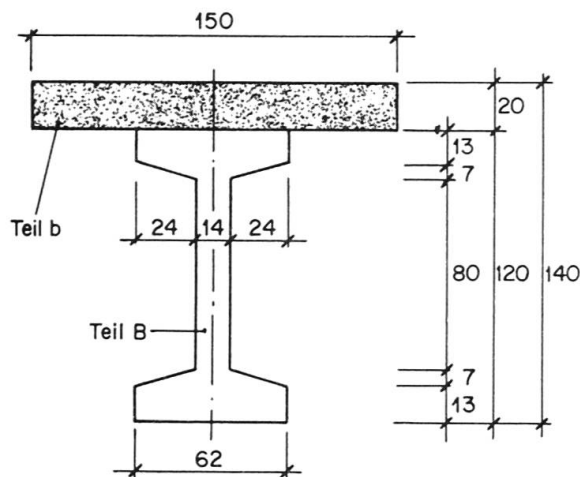


Abb. 6 Abmessungen [cm]

Querschnittswerte, Materialkennwerte

$$F_b = 0.3 \text{ m}^2, E_b = 4 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$F_B = 0.3264 \text{ m}^2, E_B = 4 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$I_B = 0.0628 \text{ m}^4, d = 0.7 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{4 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^6} = 1, \quad \beta = \frac{0.3}{0.3264} = 0.92$$

$$\gamma = \frac{0.3 \cdot 0.7^2}{0.0628} = 2.34$$

$$e = \frac{0.7}{1 + \frac{1}{1 \cdot 0.92}} = 0.34 \text{ m}$$

$$I = 0.0628 + 0.3264 \cdot 0.34^2 + 1 \cdot 0.3 \cdot (0.7 - 0.34)^2 = 0.1394 \text{ m}^4$$

Kriechzahl, Schwindmass, Anzahl Intervalle

$$\varphi_b = 3.0, \quad \varphi_B = 2.8, \quad \epsilon_{sb} = -0.2\text{‰}, \quad \epsilon_{sB} = -0.16\text{‰}, \quad n = 5$$

$$\Delta\varphi_b = \frac{3.0}{5} = 0.6, \quad \Delta\epsilon_{sb} = \frac{-0.2\text{‰}}{5} = -0.04\text{‰}$$

$$\Delta\varphi_B = \frac{2.8}{5} = 0.56, \quad \Delta\epsilon_{sB} = \frac{-0.16\text{‰}}{5} = -0.032\text{‰}$$

$$K = 1 + 0.5 \cdot 0.6 + 1 \cdot (1 + 0.5 \cdot 0.56) \cdot (0.92 + 2.34) = 5.47$$

QUERSCHNITT BEIM BALKENAUFAGER (I)

Ausgangsschnittgrößen für den 1. Intervall-Schritt

$$N_{bo}^I = 0 \text{ t}$$

$$N_{Bo}^I = -125 - 65 = -190 \text{ t}$$

$$M_{Bo}^I = -125 \cdot 0.53 + 65 \cdot 0.4 = -40.25 \text{ mt}$$

Querschnittsumlagerung

$$\begin{aligned} \Delta N_{b1}^I &= \frac{1}{5.47} \cdot \left[0 - 190 \cdot 1 \cdot 0.92 \cdot 0.56 + \right. \\ &\quad \left. + 40.25 \cdot \frac{1 \cdot 2.34}{0.7} \cdot 0.56 + \right. \\ &\quad \left. + 4 \cdot 10^6 \cdot 0.3 \cdot \left(\frac{-0.032 + 0.04}{1000} \right) \right] \\ &= -2.37 \text{ t} \end{aligned}$$

QUERSCHNITT IN BALKENMITTE (II)

Ausgangsschnittgrößen für den 1. Intervall-Schritt

$$N_{bo}^{II} = 0 \text{ t}$$

$$N_{Bo}^{II} = -125 - 65 = -190 \text{ t}$$

$$M_{Bo}^{II} = \frac{1.5 \cdot 20^2}{8} - (125 + 65) \cdot 0.53 = -25.7 \text{ mt}$$

Querschnittsumlagerung

$$\begin{aligned} \Delta N_{b1}^{II} &= \frac{1}{5.47} \cdot \left[0 - 190 \cdot 1 \cdot 0.92 \cdot 0.56 + \right. \\ &\quad \left. + 25.7 \cdot \frac{1 \cdot 2.34}{0.7} \cdot 0.56 + \right. \\ &\quad \left. + 4 \cdot 10^6 \cdot 0.3 \cdot \left(\frac{-0.032 + 0.04}{1000} \right) \right] \\ &= -7.36 \text{ t} \end{aligned}$$

Systemumlagerung

$$\Delta X_1 = - \frac{0.1394}{3 \cdot 0.0628 \cdot (1 + 0.5 \cdot 0.56)} \cdot \left[(-40.25 - 2 \cdot 25.7) \cdot 0.56 + (-2.37 - 2 \cdot 7.36) \cdot (1 + 0.5 \cdot 0.56) \cdot 0.7 \right] = 38.52 \text{ mt}$$

$$\Delta \bar{N}_{b1} = -38.52 \cdot \frac{0.3 \cdot 1 \cdot (0.7 - 0.34)}{0.1394} = -29.84 \text{ t}$$

Ausgangsschnittgrößen für den 2. Intervall-Schritt

$$N_{b1}^I = 0 - 2.37 - 29.84 = -32.21 \text{ t}$$

$$N_{B1}^I = -190 + 2.37 + 29.84 = -157.79 \text{ t}$$

$$M_{B1}^I = -40.25 + (-2.37 - 29.84) \cdot 0.7 + 38.52 = -24.27 \text{ mt}$$

Querschnittsumlagerung

$$\Delta N_{b2}^I = \frac{1}{5.47} \cdot \left[32.21 \cdot 0.6 - 157.79 \cdot 1 \cdot 0.92 \cdot 0.56 + \right. \\ \left. + 24.27 \cdot \frac{1 \cdot 2.34}{0.7} \cdot 0.56 + \right. \\ \left. + 4 \cdot 10^6 \cdot 0.3 \cdot \left(\frac{-0.032 + 0.04}{1000} \right) \right] = -1.27 \text{ t}$$

Ausgangsschnittgrößen für den 2. Intervall-Schritt

$$N_{b1}^{II} = 0 - 7.36 - 29.84 = -37.2 \text{ t}$$

$$N_{B1}^{II} = -190 + 7.36 + 29.84 = -152.8 \text{ t}$$

$$M_{B1}^{II} = -25.7 + (-7.36 - 29.84) \cdot 0.7 + 38.52 = -13.22 \text{ mt}$$

Querschnittsumlagerung

$$\Delta N_{b2}^{II} = \frac{1}{5.47} \cdot \left[37.2 \cdot 0.6 - 152.8 \cdot 1 \cdot 0.92 \cdot 0.56 + \right. \\ \left. + 13.22 \cdot \frac{1 \cdot 2.34}{0.7} \cdot 0.56 + \right. \\ \left. + 4 \cdot 10^6 \cdot 0.3 \cdot \left(\frac{-0.032 + 0.04}{1000} \right) \right] = -4.03 \text{ t}$$

Systemumlagerung

$$\Delta X_2 = - \frac{0.1394}{3 \cdot 0.0628 \cdot (1 + 0.5 \cdot 0.56)} \cdot \left[(-24.27 - 2 \cdot 13.22) \cdot 0.56 + (-1.27 - 2 \cdot 4.03) \cdot (1 + 0.5 \cdot 0.56) \cdot 0.7 \right] = 21.25 \text{ mt}$$

$$\Delta N_{b2} = -21.25 \cdot \frac{0.3 \cdot 1 \cdot (0.7 - 0.34)}{0.1394} = -16.46 \text{ t}$$

Ausgangsschnittgrößen für den 3. Intervall-schritt

$$N_{b2}^I = -32.21 - 1.27 - 16.46 = -49.94 \text{ t}$$

$$N_{B2}^I = -157.79 + 1.27 + 16.46 = -140.06 \text{ t}$$

$$M_{B2}^I = -24.27 + (-1.27 - 16.46) \cdot 0.7 + 21.25 = -15.43 \text{ mt}$$

Endschnittgrößen nach fünf Intervall-Schritten

Ausgangsgrößen für den 3. Intervall-schritt

$$N_{b2}^{II} = -37.2 - 4.03 - 16.46 = -57.69 \text{ t}$$

$$N_{B2}^{II} = -152.8 + 4.03 + 16.46 = -132.31 \text{ t}$$

$$M_{B2}^{II} = -13.22 + (-4.03 - 16.46) \cdot 0.7 + 21.25 = -6.31 \text{ mt}$$

Endschnittgrößen nach fünf Intervall-Schritten

$$\rho = \frac{21.25}{38.52} = 0.552$$

$$X_5 = 38.52 \cdot \frac{1 - 0.552^5}{1 - 0.552} = 81.58 \text{ mt}$$

$$\Delta N_{b1}^I = -32.21 - 0 = -32.21 \text{ t}$$

$$\Delta N_{b2}^I = -49.94 + 32.21 = -17.73 \text{ t}$$

$$\rho = \frac{-17.73}{-32.21} = 0.550$$

$$N_{b5}^I = 0 - 32.21 \cdot \frac{1 - 0.55^5}{1 - 0.55} = -67.98 \text{ t}$$

$$N_{B5}^I = -190 + 67.98 = -122.02 \text{ t}$$

$$\Delta N_{b1}^{II} = -37.2 - 0 = -37.2 \text{ t}$$

$$\Delta N_{b2}^{II} = -57.69 + 37.2 = -20.49 \text{ t}$$

$$\rho = \frac{-20.49}{-37.2} = 0.551$$

$$N_{b5}^{II} = 0 - 37.2 \cdot \frac{1 - 0.551^5}{1 - 0.551} = -78.64 \text{ t}$$

$$N_{B5}^{II} = -190 + 78.64 = -111.36 \text{ t}$$

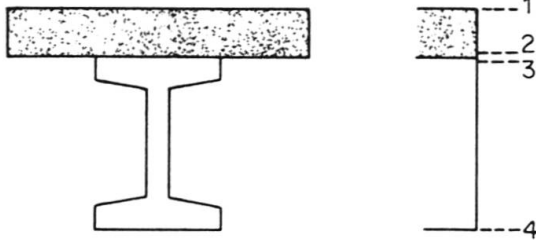
$$\Delta M'_{B1}^I = -24.27 + 40.25 = 15.98 \text{ mt}$$

$$\Delta M'_{B2}^I = -15.43 + 24.27 = 8.84 \text{ mt}$$

$$\rho = \frac{8.84}{15.98} = 0.553$$

$$M_{B5}^I = -40.25 + 15.98 \cdot \frac{1 - 0.553^5}{1 - 0.553} = -6.35 \text{ mt}$$

Berechnung der Normalspannungen



$$\sigma_1^I = \sigma_2^I = \frac{-67.98}{0.3} = -227 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_3^I = \frac{-122.02}{0.3264} - \frac{-6.35}{0.0628} \cdot 0.6 = -374 + 61 = -313 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_4^I = -374 - 61 = -435 \text{ t/m}^2$$

$$\Delta M'_{B1}^{II} = -13.22 + 25.7 = 12.48 \text{ mt}$$

$$\Delta M'_{B2}^{II} = -6.31 + 13.22 = 6.91 \text{ mt}$$

$$\rho = \frac{6.91}{12.48} = 0.554$$

$$M_{B5}^{II} = -25.7 + 12.48 \cdot \frac{1 - 0.554^5}{1 - 0.554} = 0.82 \text{ mt}$$

Abb. 7 Faserbezeichnung für die Spannungsberechnung

$$\sigma_1^{II} = \sigma_2^{II} = \frac{-78.64}{0.3} = -262 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_3^{II} = \frac{-111.36}{0.3264} - \frac{0.82}{0.0628} \cdot 0.6 = -341 - 8 = -349 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_4^{II} = -341 + 8 = -333 \text{ t/m}^2$$

	Schnitt I		Schnitt II	
	Computer-Berechnung	Handrechnung	Computer-Berechnung	Handrechnung
χ [mt]	81.6	81.6	81.6	81.6
σ_1 [t/m ²]	-246	-227	-281	-262
σ_2 [t/m ²]	-255	-227	-277	-262
σ_3 [t/m ²]	-256	-313	-286	-349
σ_4 [t/m ²]	-448	-435	-381	-333

Tabelle 1: Vergleich zwischen Computer-Berechnung und Handrechnung nach vorliegendem Verfahren.

Zwängungsmomente und Normalspannungen in verschiedenen Schnitten und Fasern. (Druckspannungen negativ)

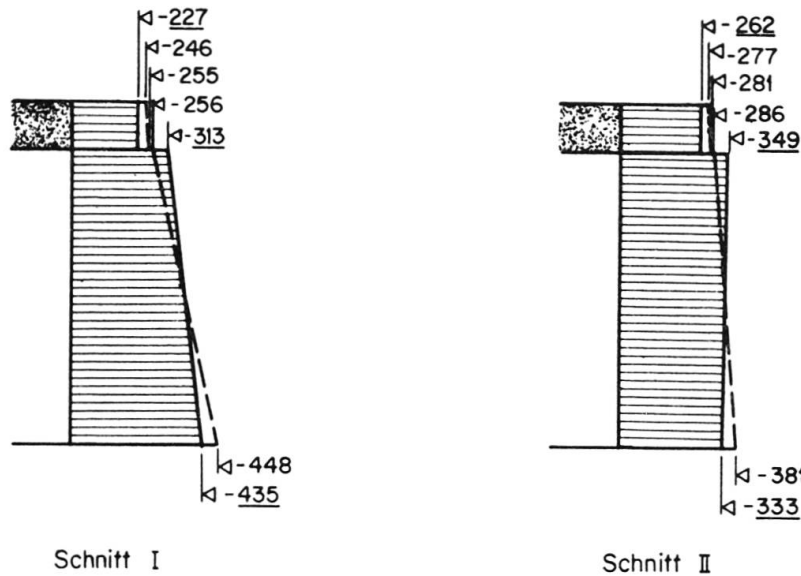


Abb. 8 Darstellung des Spannungsverlaufs im Zeitpunkt t_{∞} .

Strichpunktierete Linie: Werte aus Computer-Berechnung

Ausgezogene Linie und unterstrichene Zahlen: Werte aus Handrechnung

Kommentar zu den Ergebnissen (Tab. 1, Abb. 8)

Die Unterschiede zwischen der "wirklichkeitsnahen" Computer-Berechnung und der Handrechnung nach dem vorliegenden Verfahren sind gering. Die Differenzen der Normalspannungen in den massgebenden Fasern betragen wenige Prozente. Der Unterschied der Zwängungsmomente χ ist gar Null.

BEISPIEL 2: STAHLTRAEGER-VERBUNDQUERSCHNITT

Das System sei ein einfacher Balken, es finden also nur Querschnittsumlagerungen statt.

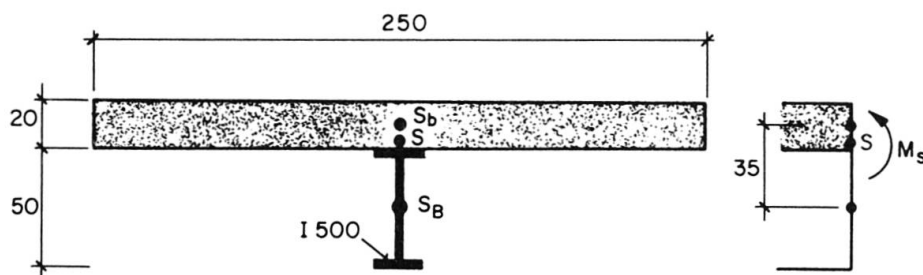


Abb. 9: Abmessungen des Verbundquerschnittes

Auf den Verbundquerschnitt gemäss Abb. 9 wirke das Biegemoment $M_s = 50$ mt. Gesucht sind die Schnittkräfte und Normalspannungen nach Abschluss der Kriech- und Schwindumlagerungen.

Querschnittswerte, Materialkennwerte

$$F_b = 0.5 \text{ m}^2, \quad E_b = 3 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2, \quad d = 0.35 \text{ m}$$

$$F_B = 0.018 \text{ m}^2, \quad E_B = 21 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2, \quad I_B = 6.874 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\alpha = 0.143, \quad \beta = 27.78, \quad \gamma = 89.1, \quad e = 0.28 \text{ m}, \quad I = 24.49 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$



Kriechzahl, Schwindmass, Anzahl Intervall-Schritte

$$\psi_b = 4, \psi_B = 0, \epsilon_{sb} = -0.25\%, \epsilon_{sB} = 0\%, n = 10$$

$$\Delta\psi_b = 0.4, \Delta\epsilon_{sb} = -0.025\%, \kappa = 17.91$$

Ausgangsschnittgrössen für den 1. Intervall-Schritt

M_s erzeugt im Verbundquerschnitt folgende Schnittkräfte:

$$N_{bo} = -M_s \cdot \frac{F_b \cdot \alpha \cdot (d-e)}{I} = -50 \cdot \frac{0.5 \cdot 0.143 \cdot (0.35-0.28)}{24.49 \cdot 10^{-4}} = -102.18 \text{ t}$$

$$N_{Bo} = -N_{bo} = 102.18 \text{ t}$$

$$M_{Bo} = M_s + N_{bo} \cdot d = 50 - 102.18 \cdot 0.35 = 14.24 \text{ mt}$$

Querschnittsumlagerung

$$\Delta N_{b1} = \frac{1}{17.91} \cdot \left[102.18 \cdot 0.4 + 0 - 0 + 3 \cdot 10^6 \cdot 0.5 \cdot \left(0 + \frac{0.025}{1000} \right) \right] = 4.38 \text{ t}$$

Ausgangsschnittgrössen für den 2. Intervall-Schritt

$$N_{b1} = -102.18 + 4.38 = -97.80 \text{ t}$$

$$N_{B1} = 102.18 - 4.38 = 97.80 \text{ t}$$

$$M_{B1} = 14.24 + 4.38 \cdot 0.35 = 15.77 \text{ mt}$$

Querschnittsumlagerung

$$\Delta N_{b2} = \frac{1}{17.91} \cdot \left[97.8 \cdot 0.4 + 3 \cdot 10^6 \cdot 0.5 \cdot \frac{0.025}{1000} \right] = 4.28 \text{ t}$$

Ausgangsschnittgrössen für den 3. Intervall-Schritt

$$N_{b2} = -97.8 + 4.28 = -93.52 \text{ t}$$

$$N_{B2} = 97.8 - 4.28 = 93.52 \text{ t}$$

$$M_{B2} = 15.77 + 4.28 \cdot 0.35 = 17.27 \text{ mt}$$

Endschnittgrössen nach zehn Intervall-Schritten

In statisch bestimmten Systemen ist - im Gegensatz zu statisch unbestimmten Systemen - ρ für N_b und M_B gleich gross. Aus Genauigkeitsüberlegungen ist die Ermittlung von ρ aus N_b vorteilhafter; insbesondere dann, wenn die Anzahl der Intervall-Schritte relativ gross ist.

$$\Delta N'_{b1} = -97.8 + 102.18 = 4.38 \text{ t}$$

$$\Delta N'_{b2} = -93.52 + 97.8 = 4.28 \text{ t}$$

$$\rho = \frac{4.28}{4.38} = 0.977$$

$$N_{b10} = -102.18 + 4.38 \cdot \frac{1 - 0.977^{10}}{1 - 0.977} = -62.65 \text{ t}$$

$$N_{B10} = 62.65 \text{ t}$$

$$M_{B10} = 14.24 + 1.53 \cdot \frac{1 - 0.977^{10}}{1 - 0.977} = 28.05 \text{ mt}$$

Normalspannungen (Faserbezeichnung vgl. Abb. 7)

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{-62.65}{0.5} = -125 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{62.65}{0.018} - \frac{28.05}{6.874 \cdot 10^{-4}} \cdot 0.25 = -6720 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_4 = \frac{62.65}{0.018} + \frac{28.05}{6.874 \cdot 10^{-4}} \cdot 0.25 = 13680 \text{ t/m}^2$$

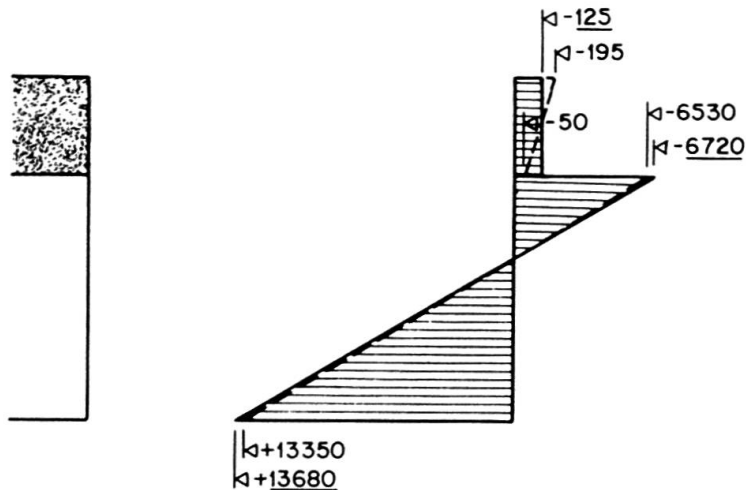


Abb. 10 Verlauf der Normalspannungen im Zeitpunkt t_∞ .

Strichpunktierte Linie: Genaue Zahlenwerte nach Wippel [8]

Ausgezogene Linie und unterstrichene Zahlen: Werte aus Handrechnung

Kommentar zu den Ergebnissen

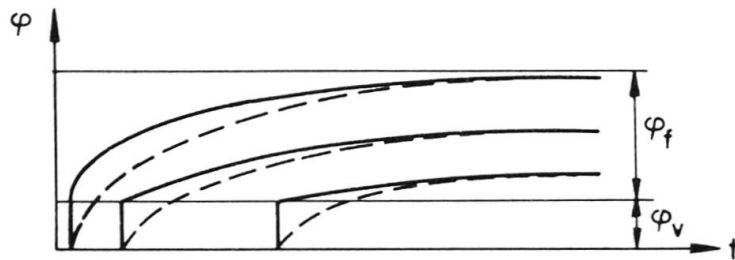
Die Abweichungen der Spannungen im Stahlträger liegen innerhalb von maximal 3% und damit in der Rechenungenauigkeit. In der Betonplatte zeigen sich Unterschiede aus der Vernachlässigung der Biegesteifigkeit I_b . Die Spannungen im Schwerpunkt S_b stimmen allerdings sehr gut überein. Im übrigen ist die praktische Bedeutung dieser Spannungen gering.

Die beiden Beispiele verdeutlichen, dass das Verfahren für praktische Berechnungen bei geringem Aufwand recht gute Resultate ergibt.

ANHANG

Ansatz von Rüsç

Mit diesem Ansatz [7],[10] ist eine bessere Annäherung an versuchsmässig ermittelte Kriechkurven zu erreichen als mit dem Ansatz von Dischinger; insbesondere ist der Einfluss des Belastungsalters besser berücksichtigt. Man wird den Ansatz von Rüsç daher überall dort anwenden, wo dieser Einfluss eine Rolle spielt, wie z.B. bei abschnittsweise hergestellten Tragwerken oder bei Tragwerken, bei denen massgebende Dauerlasten in einem späteren Zeitpunkt aufgebracht werden.



$$\varphi(t) = \varphi_v + \varphi_f(t)$$

φ_v : verzögert-elastische Verformung

$\varphi_f(t)$: sog. Fliessen (Aufbau analog Dischinger-Ansatz)

Abb. 11 Kriechfunktion

Strichpunktierte Linie: Werte aus Versuchen

Ausgezogene Linie: Werte nach Ansatz von Rüsç

Für die praktische Berechnung sind die in Kapitel 5 zusammengestellten Formeln auch für den Ansatz von Rüsç gültig. Es sind dabei lediglich einige Ausgangs-, Querschnitts- und Materialkennwerte durch die im folgenden mit einem Stern (*) bezeichneten Werte zu ersetzen.

Es gilt:

$$\text{Teil b: } \varphi_b = \varphi_{vb} + \varphi_{fb}, \quad \text{Teil B: } \varphi_B = \varphi_{vB} + \varphi_{fB}$$

und

$$E_b^* = \frac{E_b}{1 + \varphi_{vb}}, \quad E_B^* = \frac{E_B}{1 + \varphi_{vB}}, \quad \alpha^* = \frac{E_b^*}{E_B^*}$$

$$e^* = \frac{d}{1 + \frac{1}{\alpha^* \cdot \beta}}, \quad I^* = I_B + F_B \cdot e^{*2} + \alpha^* \cdot F_b \cdot (d - e^*)^2$$

$$\Delta \varphi_b^* = \frac{\varphi_{fb}}{n \cdot (1 + \varphi_{vb})}, \quad \Delta \varphi_B^* = \frac{\varphi_{fB}}{n \cdot (1 + \varphi_{vB})}$$

Die Ausgangsschnittgrössen N_{b0} , N_{B0} , M_{B0} für den 1. Intervallschritt sind zur Berücksichtigung der ersten verzögert-elastischen Verformung wie folgt zu korrigieren:

$$N_{b0}^* = N_{b0} + \Delta N_{vb} + \bar{\Delta N}_{vb}$$

$$N_{B0}^* = N_{B0} - \Delta N_{vb} - \bar{\Delta N}_{vb}$$

$$M_{B0}^* = M_{B0} + (\Delta N_{vb} + \bar{\Delta N}_{vb}) \cdot d + \chi_0$$

worin

$$\Delta N_{vb} = \frac{1}{1+\alpha^* \cdot (\beta+\gamma)} \cdot \left[-N_{bo} \cdot \frac{\phi_{vb}}{1+\phi_{vb}} + \left(N_{Bo} \cdot \alpha^* \cdot \beta - M_{Bo} \cdot \frac{\alpha^* \cdot \gamma}{d} \right) \cdot \frac{\phi_{vB}}{1+\phi_{vB}} \right]$$

$$\chi_o = - \frac{I^*}{3 \cdot I_B} \cdot \left[(M_{Bo}^I + 2M_{Bo}^{II}) \cdot \frac{\phi_{vB}}{1+\phi_{vB}} + (\Delta N_{vb}^I + 2 \cdot \Delta N_{vb}^{II}) \cdot d \right]$$

$$\Delta \bar{N}_{vb} = -\chi_o \cdot \frac{F_b \cdot \alpha^* \cdot (d-e^*)}{I^*}$$

Die weitere Berechnung erfolgt nun analog den Kapiteln 4 und 5 mit substituierten Werten (*), wobei die derart ermittelten Schnittkräfte und Spannungen den wirklichen Endgrößen entsprechen und nicht mehr zurücktransformiert werden müssen.

Beispiel 1 von Seite 9 ff ist unter der Annahme $\phi_{vb} = \phi_{vB} = 0.8$ berechnet worden. Das Zwängungsmoment χ ergab sich zu 69.9 mt, also ca. 14% kleiner als aus der Berechnung mit dem Ansatz von Dischinger.

Literaturverzeichnis

- [1] Sattler K., Theorie der Verbundkonstruktionen, Verlag Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin 1959, 2 Bände.
- [2] Mehmel A., Vorgespannter Beton, Springer Verlag, Berlin 1963.
- [3] Leonhardt F., Spannbeton für die Praxis, Verlag Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin 1962.
- [4] Rühle H., Das Problem der Zwängungsspannungen infolge Kriechen und Schwinden bei aus Stahlbetonfertigteilen hergestellten Konstruktionen und seine praktische Bedeutung, 6. Kongress IVBH, Stockholm 1960, Vorbericht.
- [5] Habel A., Zwängungsspannungen statisch unbestimmter Stahlbeton- und Spannbetonbalken, Die Bautechnik, 32. Jahrgang, Heft 7, Juli 1955.
- [6] Schneider J., Kammenhuber J., Arbeitsunterlagen für die Berechnung vorgespannter Konstruktionen, Ra-Verlag CH-8640 Rapperswil, 1974.
- [7] Birkenmaier M., Berücksichtigung der Einflüsse Kriechen und Schwinden bei der Berechnung von Betonkonstruktionen, Institut für Baustatik und Konstruktion ETH Zürich, Bericht Nr. 62, 1976. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.
- [8] Wippel H., Berechnung von Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton, Springer Verlag Berlin, 1963.
- [9] Birkenmaier M., Berechnung von Verbundkonstruktionen aus Beton und Stahl, Verlag Leemann Zürich, 1969.
- [10] Rüsch H., Jungwirth D., Hilsdorf H., Kritische Sichtung der Verfahren zur Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden des Betons auf das Verhalten der Tragwerke, Beton- und Stahlbetonbau, 68. Jahrgang, Hefte 3, 4 und 6, 1973.