

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 36 (1976)

Artikel: Das Computerprogramm FLASH

Autor: Walder, U. / Anderheggen, E. / Green, D.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-931>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Das Computerprogramm FLASH

The Computer Program FLASH

Le programme FLASH

U. WALDER

Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut
für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich

E. ANDERHEGGEN

Privatdozent an der ETH Zürich

D. GREEN

Lecturer an der Universität Glasgow

ehem. Gast am Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Schweiz

Einleitung

In diesem Artikel wird das in den letzten drei Jahren am Institut für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich entwickelte Computerprogramm FLASH (Finite Element Analysis of SHells) für die numerische Berechnung linear-elastischer Flächentragwerke nach der Methode der finiten Elemente vorgestellt.

Wozu ein weiteres Statikprogramm?

Es ist heute unbestritten, dass der an Computeranwendungen interessierte Bauingenieur in der Praxis imstande sein sollte, kommerziell angebotene Finite-Element-Programme selbstständig zu benützen. Dazu ist notwendig:

- Dass an der Hochschule die erforderlichen theoretischen Grundkenntnisse vermittelt werden (eine neue Vorlesung über Computerstatik ist z.B. zu diesem Zweck an der ETHZ vor kurzem eingeführt worden).
- Dass den Bauingenieurstudenten die Möglichkeit geboten wird, direkte Erfahrungen bei der Verwendung vorhandener Statikprogramme zu sammeln. Sie sollen mit dem Computer etwas «spielen» können, was ihnen später in der Praxis kaum mehr möglich sein wird. (Das Programm FLASH wird heute zur Durchführung von Übungen der erwähnten Vorlesung «Computerstatik» sowie auch für Semester- und Diplomarbeiten eingesetzt.)
- Dass die für die Praxis bestimmten Programme sehr leicht anzuwenden sind, wobei sie aber gleichzeitig ein breites Anwendungsspektrum haben sollen. (FLASH kann beliebige Scheiben, Platten, Schalen, Faltwerke sowie auch Rahmen berechnen. Seine Programmbeschreibung umfasst jedoch lediglich vierzig Seiten.)
- Dass möglichst geringe Rechenkosten verursacht werden. Dem Programm Benutzer muss jedoch ein Maximum an Ein- und Ausgabekomfort angeboten werden. (Zur Lösung des Gleichungssystems verwendet FLASH einen sehr

effizienten Algorithmus (die «frontal solution»), wodurch sich im Vergleich zu anderen Programmen sehr schnelle Ausführungszeiten ergeben. Beziiglich Benutzerkomfort ist in erster Linie seine formatfreie problemorientierte «Eingabesprache» zu erwähnen, deren syntaktische Struktur sich mit einem kurzen und übersichtlichen Eingabeschema in allen Details beschreiben lässt.)

Damit sollen die mit der Entwicklung des Programmes FLASH verfolgten Ziele ersichtlich sein. Gestützt auf langjährige Erfahrungen auf dem Gebiete der Statikprogramme hat man versucht ein Instrument zu schaffen, das sich sowohl für den Baustatik-Unterricht als auch für die Praxis optimal eignet. Zu erwähnen sind zudem die zahlreichen für den Theoretiker interessanten Neuerungen, die im Programm eingebaut wurden, und die seinen Anwendungsbereich in mancher Hinsicht gegenüber demjenigen anderer Programme erweitern.

Dieser Artikel richtet sich in erster Linie an den Praktiker, der schon einige Erfahrung in der Anwendung finiter Elemente besitzt. Mathematische Herleitungen sowie auch die genaue Begründung der im Programm gewählten Lösungen werden deshalb hier nicht angegeben und sollen Gegenstand einer späteren Veröffentlichung sein.

Einzig die Herleitung der elastisch gestützten hybriden Plattenelemente, welche erstmals in einem Computerprogramm verwendet werden, und die eine der wesentlichen theoretischen Neuerungen in FLASH darstellen, wird im Anhang angegeben.

Anwendungsmöglichkeiten von FLASH

FLASH berechnet nach der Theorie 1. Ordnung elastische, homogene:

- Schalen, versteift oder unversteift;
- Faltwerke;
- Platten und Rippenplatten;
- Scheiben;
- Stabtragwerke.

unter statischen Beanspruchungen.

Die folgenden Punkte sollen noch eingehender auf die vielfältigen Anwendungsbereiche hinweisen:

- Fundamentplatten auf elastischer Unterlage, elastisch gebettete Schalen sowie elastisch senkbare oder unsenkbare Stützen können dank neu entwickelten Elementen erfasst werden.
- Die Berücksichtigung des Querkrafteinflusses bei Platten- und Schalenelementen erlaubt die Berechnung relativ dicker Flächentragwerke (z.B. Bogenstaumauern).
- Elementweise konstante, linear-elastische isotrope oder orthotrope Materialeigenschaften können behandelt werden.
- Die Möglichkeit, Stabelemente exzentrisch anzuschliessen, erlaubt die Berechnung von Rippenplatten als ebenes Problem.
- Alle wünschbaren Auflager- und Randbedingungen sind erfassbar.
- Flächen- und Knotenlasten sowie Auflagerverschiebungen sind in beliebigen Richtungen möglich. Auch Temperaturlasten können behandelt werden.

- Als Resultate erhält man in den Knotenpunkten und z.T. in den Elementschwerpunkten,
 - Deformationen,
 - Reaktionen,
 - Auflagerdrücke elastisch gestützter Elemente,
 - Momente aus Plattenwirkung,
 - Spannungen aus Scheiben- und Membranwirkung,
 - Hauptspannungen und Hauptmomente,
 - Armierungsmomente.
- Im weiteren ist es möglich, Schnitte am Gesamttragwerk zu definieren, in welchen integrale Schnittkräfte berechnet werden. Dies stellt vor allem für die Bemessung eine wesentliche Hilfe dar.

Problemeingabe und Programmtechnik

Erfolg oder Misserfolg eines für praktisch tätige Ingenieure entwickelten Computerprogrammes hängen zum grossen Teil davon ab, ob es eine ihm schnell vertraute und seiner gewohnten Terminologie entsprechende Dateneingabe besitzt. Die Eingabe der Daten erfolgt bei FLASH mit Hilfe einer vorgeschriebenen Folge formatfreier, aus Worten und Problemdaten bestehender Befehle, die klar abgegrenzt nacheinander die Geometrie, Materialeigenschaften, Auflagerbedingungen, usw. definieren [1]. Hat der Ingenieur einmal ein oder zwei Probleme mittels FLASH gelöst, kann er auf die eingehende Beschreibung verzichten und sich an ein nur dreiseitiges, streng logisch aufgebautes Schema der Befehlsfolge halten. Obwohl dieses äusserst einfach und kurz ist, beinhaltet es doch einen grossen Eingabekomfort, wie z.B. das automatische Generieren von Knoten- und Elementmaschen, die Kreisgenerierung, etc.

Ebenso wesentlich wie die leichte Eingabe der Daten ist deren bequeme Kontrolle. FLASH kann ohne etwas zu rechnen die Eingabefehle auf syntaktische und logische Fehler kontrollieren. Hunderte von Fehlermeldungen helfen dabei Korrekturen rasch anzubringen. Neben einem «Echoprint» der Daten kann auch eine axonometrische Zeichnung der Elementmasche auf Film oder Papier verlangt werden.

Eine weitere Forderung, welche an ein erfolgreiches Programm gestellt wird, stellt die Einsparung von Rechenzeit dar. Tatsächlich benötigt FLASH gegenüber herkömmlichen Programmen erheblich kürzere Rechenzeiten. Die folgenden Hinweise sollen einen Eindruck der gewählten Programmtechnik im Hinblick auf die Kostensparnis geben:

- Die Steifigkeits-, Spannungs- und Lastmatrizen von Elementen gleicher Form und gleichen Materials werden nur einmal berechnet.
- Wie erwähnt, erfolgt die Lösung des Gleichungssystems nach der «frontalsolution»-Methode, d.h. das Zusammenstellen der globalen Steifigkeitsmatrix geschieht gleichzeitig mit dem Lösen der Gleichungen.
- Die Datenspeicherung erfolgt voll dynamisch, d.h. kleine Probleme belegen weniger Foldlänge im Computer und werden deshalb mit höherer Priorität und niedrigeren Einheitskosten behandelt.

- Die Problemgrösse wurde auf ca. 5000 Freiheitsgrade (= Anzahl zu lösender Gleichungen) beschränkt, um den sogenannten «overhead», d.h. die Programmteile, die nur Daten verwalten, auf ein Minimum zu reduzieren.

Die im weiteren angegebenen Beispiele sollen nicht nur die Genauigkeit der Berechnungen selbst, sondern anhand der Eingabeanweisungen und Rechenzeiten auch die Handlichkeit und Effizienz des Programmes FLASH aufzeigen.

Scheibenprobleme

Zur Lösung von Scheibenproblemen verwendet FLASH beliebig geformte dreieckige und viereckige hybride Elemente. Diese stellen eine Weiterentwicklung des ursprünglich von T.H. Pian [2] vorgeschlagenen Modelles dar. Dabei werden bekanntlich die Steifigkeitseigenschaften einzelner Elemente, d.h. deren lokale Steifigkeitsmatrizen und Lastvektoren aufgrund des Minimumsprinzips der komplementären Energie mit Hilfe elementinterner Spannungsansätze sowie kinematischer Randverschiebungsansätze bestimmt. Die Elementzusammensetzung erfolgt dann, wie bei den rein kinematischen Modellen, nach dem gewöhnlichen Matrix-Deformationsverfahren.

Als wesentliche Merkmale der FLASH Scheiben- und Schalenelemente sind die in den Knoten zusätzlich eingeführten Rotationsfreiheitsgrade R_z , welche einer Drehung um eine senkrecht zur Scheibebene stehenden Achse entsprechen sowie die numerischen Integrationsprozeduren zur Berechnung der Flächen- und Randintegrale zu erwähnen.

Abgesehen vom Befehl mit den Anweisungen FREI und NICHTFREI, welcher die Auflagerbedingungen definiert, dürfte die Befehlsfolge in Bild 1 auch dem Computerlaien verständlich sein. (Die Randbedingungen der Scheibe werden durch Festhalten oder Freilassen der Verschiebungen u und v sowie der Rotation R_z in den Auflagerknoten oder Symmetrieschnitten bestimmt.) Die Eingabebefehle sind hier in ihrer ausführlichsten Form angegeben worden. Anstelle ganzer Wörter darf auch nur der Anfangsbuchstabe stehen, einige könnten gar ganz weggelassen werden.

Die Resultate zeigen neben dem guten Übereinstimmen mit der theoretischen Lösung eine weitere positive Eigenschaft hybrider Elemente. Singularitäten erscheinen deutlich, ohne jedoch die Resultate in den umliegenden Knoten zu beeinträchtigen. Dies trifft nicht nur für die Scheibenelemente, sondern vor allem auch für die Plattenelemente zu.

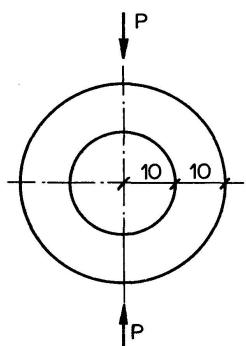
Die Scheibenelemente lassen sich auch ohne Schwierigkeiten zusammen mit Stabelementen verwenden (z.B. ebene Rahmen mit Wandaussteifungen).

Plattenprobleme

Zur Berechnung von Platten werden ebenfalls hybride dreieckige und viereckige Elemente verwendet [2]. Eine Neuentwicklung stellen die hybriden elastisch gestützten Elemente dar. Ihre theoretische Herleitung ist im Anhang angegeben. Sie erlauben eine wirklichkeitsgetreue Berechnung von Flächenlagerungen als

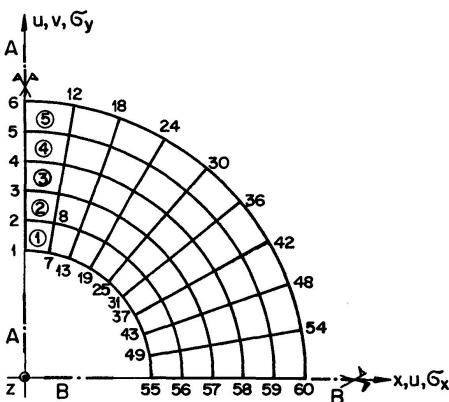
Beispiel 1: Ringspannungen.

Problem :

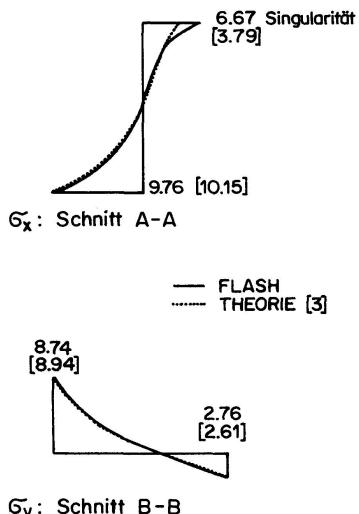


$$\begin{aligned} E &= 30000 \\ \nu &= 0. \\ t &= 1. \\ P &= 62.83185 \end{aligned}$$

Elementmasche :



Resultate :



Eingabeanweisungen :

```

BEGIENN
BEISPIEL 1: RINGSPANNUNGEN
INPLANE 60 45 45
KNOTEN 1 0. 10. PLUS 0. 2. 2 BIS 6
KNOTEN 55 10. PLUS 2. 56 BIS 60
CIRCLE 1 55 ZENTRUM 0. PLUS 8 7 BIS 49 SCHRITT 6
CIRCLE 2 56 ZENTRUM 0. PLUS 8 8 BIS 50 SCHRITT 6
CIRCLE 3 57 ZENTRUM 0. PLUS 8 9 BIS 51 SCHRITT 6
CIRCLE 4 58 ZENTRUM 0. PLUS 8 10 BIS 52 SCHRITT 6
CIRCLE 5 59 ZENTRUM 0. PLUS 8 11 BIS 53 SCHRITT 6
CIRCLE 6 60 ZENTRUM 0. PLUS 8 12 BIS 54 SCHRITT 6
*
ISOTROP 30000. 0. 1. TYP 1 BIS 45
*
MASCHE 5 9 ELEMENT 1 KNOTEN 7 8 2 1
*
TYP 1 45 ELEMENT 1 BIS 45
*
NICHTFREI FREI NICHTFREI KNOTEN 1 BIS 6
FREI NICHTFREI NICHTFREI KNOTEN 55 BIS 60
*
PLOT 1. BLICKPUNKT 0. 0. 1.
*
LASTFALL RADIALE EINZELLASTEN
KNOTENPUNKT 0. -15.708 KNOTEN 6
*
LASTFALL 1
DEFORMATIONEN $ REAKTIONEN $ SPANNUNGEN KNOTENWEISE
*
```

Rechenzeiten : (auf CDC -6500 , CP-Zeit)

Steifigkeits-, Spannungs- und Lastmatrizen	:	.21 sek / Element
Lösen des Gleichungssystems (180 Unbekannte)	:	2.38 sek
Totalle Ausführungszeit	:	20.33 sek
Totalle Rechenkosten am Rechenzentrum der ETHZ	:	~ 14.50 SFr.

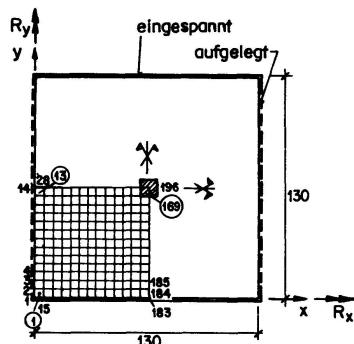
Bild 1.

mit den üblichen hybriden Plattenelementen, welche lediglich in den Knotenpunkten gestützt werden können. So lassen sich zum Beispiel die über Punktstützungen auftretenden Momentensingularitäten durch die Approximation der Stützenköpfe mit elastisch gestützten Elementen elegant vermeiden (siehe Beispiel 2). Dem gewählten Modell liegt die Annahme eines gleichmässig verteilten Reaktionsdruckes auf das Element zugrunde (Bettungszifferverfahren bei Fundamentplatten). Die Elemente bleiben frei drehbar, d.h. die Stützen weisen keine Einspannung in der Platte auf. Der Fall der nicht senkbaren Stütze kann ebenfalls behandelt werden.

Die folgenden Beispiele sollen auf die praktischen Anwendungsmöglichkeiten der elastisch gestützten Elemente hinweisen.

Beispiel 2: Flachdecke mit Mittelstütze.

Problem + Elementmasche :



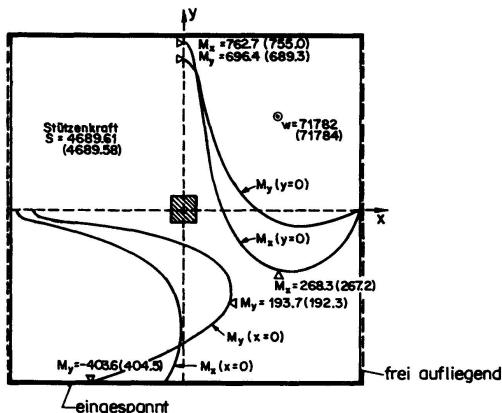
$$\begin{aligned} E &= 11.52 \\ \nu &= .2 \\ t &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Belastung:} \\ g = 1. \end{aligned}$$

Eingabeanweisungen :

```
BEGINN
DOPPELSYMMETRISCHE PLATTE MIT MITTELSTUETZE
PLATTE 196 169 2
MATRIX 14 14 KNOTEN 1 1 14 0. PLUS 0. 5. UND 5.
*
ISOTROP 11.52 .2 1. TYP 1
ISOTROP 11.52 .2 1. FEDERKONSTANTE 100.93 TYP 2
*
MASCHE 13 13 ELEMENT 1 KNOTEN 15 16 2 1 TYP 1
*
TYP 2 ELEMENT 169
*
NICHTFREI NICHTFREI NICHTFREI KNOTEN 1 BIS 183 SCHRITT 14
NICHTFREI NICHTFREI FREI KNOTEN 1 BIS 14
F N F 28 B 182 S 14
F F N 184 B 195
F N N 196
*
NO - PLOT
*
LASTFALL FLAECHENLAST
GLEICHMAESSIG -1. ELEMENTE 1 BIS 169
*
LASTFALL 1
DEFORMATIONEN $ REAKTIONEN $ AUFLAGERDRUCK$ MOMENTE KNOTENWEISE
```

Resultate :



Rechenzeiten : (auf CDC - 6500 ; CP-Zeit)

Steifigkeits-, Spannungs- und Lastmatrizen	:	1.86 sek
Lösen des Gleichungssystems (588 Unbekannte)	:	17.98 sek
Totaler Ausführungszeit	:	29.35 sek
Totaler Rechenkosten am Rechenzentrum der ETHZ	:	~ 25. — SFr.

Bild. 2.

Die Resultate in Klammern wurden mit dem PLATE-FOURIER-Programm [4] gerechnet.

Die drei Knotenfreiheitsgrade der Platte sind die senkrechte Verschiebung w und die beiden Verdrehungen R_x und R_y . Die Auflager- und Symmetriebedingungen werden wie bei den Scheiben durch Festhalten der entsprechenden Freiheitsgrade beschrieben. Dieses Festhalten braucht übrigens nicht starr zu sein; auch in den Knoten besteht die Möglichkeit einer gefederten Lagerung.

Das zweite Plattenbeispiel zeigt einen Genauigkeitsvergleich mit der bekannten Lösung der elastisch gestützten Kreisplatte unter einer Einzellast [5]. Die Voraussetzung eines gleichmässig verteilten Reaktionsdruckes unter der Kreisplatte erlaubt, unter Ausnutzung der Kreissymmetrie, die Berechnung mit einem einzigen Element durchzuführen.

Beispiel 3: Fundamentplatte unter einer Einzellast.

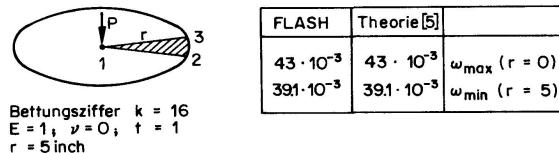


Bild 3.

Die Berechnung von Rippenplatten kann mit FLASH auf verschiedene Arten durchgeführt werden. Will man zum Beispiel eine Kassettendecke als reines Plattenproblem behandeln, können die Rippen durch exzentrisch angeschlossene Stäbe approximiert werden. Der Vorteil einer solchen Berechnungsart besteht in der geringeren Anzahl zu lösender Gleichungen (drei Freiheitsgrade pro Knoten) gegenüber einer Schalenberechnung (sechs Freiheitsgrade pro Knoten). Als Nachteil muss in Kauf genommen werden, dass sich die Platte wie auch die Rippen in Plattenebene nicht verformen können. Die Schalenberechnung berücksichtigt diese Verformung. Die Rippen können dabei ebenfalls mit exzentrisch angeschlossenen Stäben oder aber mit Flächenelementen berücksichtigt werden.

Schalenprobleme

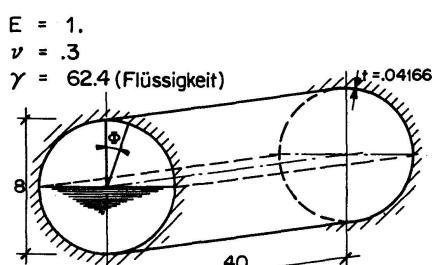
Die in FLASH verwendeten Schalenelemente sind eben und setzen sich aus je einem der vorher erwähnten Scheiben- und Plattenelementen zusammen. Die Knotenfreiheitsgrade sind die drei Verschiebungen und Verdrehungen, weshalb sich die Elemente auch beliebig in räumliche Rahmensysteme integrieren lassen. FLASH wurde mit Erfolg bereits für eine grosse Anzahl praktischer Flächentragwerksberechnungen eingesetzt (Kastenträgerbrücken, Unterführungen, Staumauern, Schalendächer, Maschinenteile, etc.). Da für solche Probleme aber keine analytischen Lösungen vorliegen, wird hier als Berechnungsbeispiel der Vergleich mit der Lösung einer Schalenaufgabe aus [6] angegeben.

Die Dateneingabe für Schalenprobleme folgt dem gleichen Schema wie für Platten und Scheiben. Nützt man alle Möglichkeiten der Knoten- und Elementmaschengenerierung aus, benötigt man zur Beschreibung des Problems des halb gefüllten Rohres nur ungefähr 40 Befehle. Am gleichen Beispiel zeigt sich auch besonders deutlich der Vorteil, die Elementsteifigkeitsmatrizen für Elemente gleicher Form und gleicher Materialeigenschaften nur einmal berechnen zu müssen. Würde man die Steifigkeitsmatrizen für jedes der 192 Elemente einzeln bestimmen, bedeutete dies eine Erhöhung der Rechenkosten um ca. 300%.

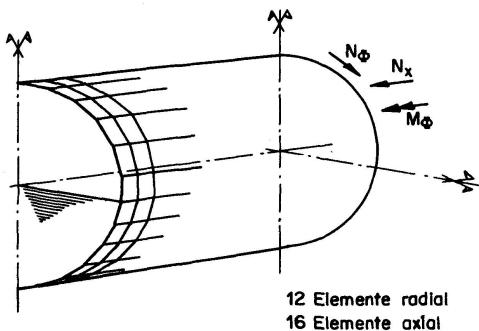
Die Möglichkeit, als Resultate nicht nur die Schnittkräfte in den Knoten und Elementschwerpunkten, sondern auch in ausgewählten Schnitten am Gesamttragwerk zu verlangen, erweist sich speziell bei der Bemessung von Schalentrag-

Beispiel 4: Halb gefülltes Rohr.

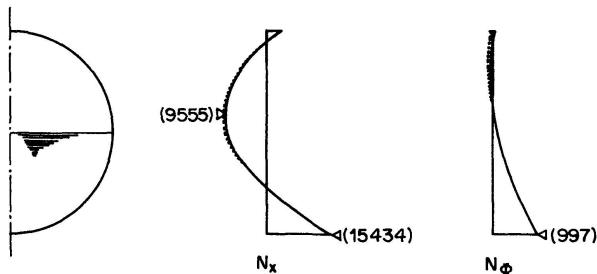
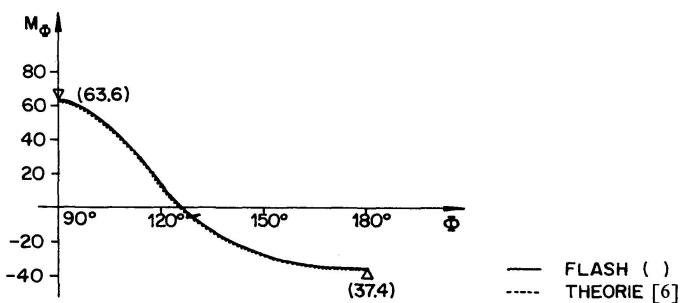
Problem :

Lagerung: ringförmig in Längsrichtung
frei verschieblich

Elementmasche :



Resultate :



Rechenzeiten : (auf CDC- 6500 ; CP - Zeit)

Steifigkeits-, Spannungs- und Lastmatrizen	:	2.2 sek !
Lösen des Gleichungssystems (1326 Unbekannte)	:	96.4 sek
Totalle Ausführungszeit	:	121.8 sek
Totalle Rechenkosten am Rechenzentrum der ETHZ	:	~95,- SFr.

Bild 4.

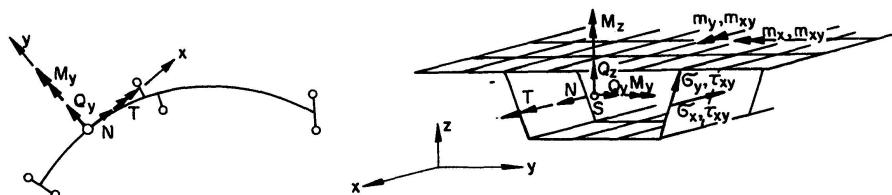


Bild. 5. FLASH liefert neben den lokalen Beanspruchungen auch globale, integrale Schnittkräfte.

werken als sehr praktisch. Die Elementschnittkräfte sind ja stets eine Summe der Beanspruchungen aus Biegung, Torsion, Normal- und Querkräften, und eine Trennung der verschiedenen Anteile ist besonders bei komplizierteren Lagerungsbedingungen nicht möglich. Die integralen Schnittkräfte geben diese Anteile und ersparen die grosse Arbeit um von den lokalen Beanspruchungen zu den für die Bemessung massgebenden Gesamtschnittkräften zu kommen (siehe Bild 5).

Stabtragwerke

Das Programm FLASH wurde nicht zu einem eigentlichen Stabtragwerksprogramm ausgebaut. Die Stabelemente stellen vor allem eine Ergänzung zu den Flächenelementen dar. Die grosse rechnerische Effizienz des Programmes kann jedoch bei sehr grossen Systemen gleichwohl eine Berechnung mit FLASH rechtfertigen. Als praktisches Beispiel sei die Berechnung von Stahlrahmen eines 64-stöckigen Hochhauses mit jeweils mehr als 1500 Stäben erwähnt. Die Rechenzeit für einen Rahmen lag unter drei Minuten auf der CDC-6500 Anlage des Rechenzentrums der ETH Zürich, was einem Kostenaufwand von ca. SFr. 200.— entsprach.

Anhang

Elastisch gestützte hybride finite Elemente

Eine Lösung für das Problem elastisch gebetteter Elemente wurde erstmals für ein Deformationsmodell in [8] angegeben.

Um den Rahmen eines Anhanges nicht zu sprengen, werden hier nur die neuen Terme der elastischen Stützung in die Variationsgleichung für das hybride Spannungsmodell eingeführt. Die Voraussetzungen und allgemeine Herleitung findet man in [7, S. 87 ff], worin auch die hier verwendete Nomenklatur erläutert wird.

Das hybride Spannungsmodell basiert auf folgender Variationsgleichung ([7, S. 91]):

$$\delta \bar{I}(\sigma, v) = \sum_e \int_{V_e} [\delta \sigma (D^{-1} \cdot \sigma - \Delta v) + \delta v (\nabla \sigma + g)] \cdot dV + \int_D \dots + \int_R \dots$$

Mit der Einführung des Stützendruckes s ergibt sich folgende erweiterte Gleichgewichtsgleichung und folgende zusätzliche kinematische Bedingung:

$$\begin{aligned} \nabla \sigma + g - s &= 0: \text{Gleichgewichtsgleichung} \\ v - \frac{1}{f} \cdot s &= 0 : \text{kinematische Bedingung} \end{aligned}$$

wobei: f = Federkonstante, d.h. Druck pro Einheitsverschiebung $v = 1$
 v = Plattendurchbiegung.

Die Variationsgleichung lautet dann wie folgt:

$$\begin{aligned} \delta \bar{I}(\sigma, v, s) = \sum_e \int_{V_e} [\delta \sigma (D^{-1} \cdot \sigma - \Delta v) + \delta v (\nabla \sigma + g - s) - \delta s (v - \frac{1}{f} \cdot s)] \cdot dV + \\ \int_D \dots + \int_R \dots \end{aligned}$$

Die Integration mit: $\delta v \cdot s + v \cdot \delta s = \delta(v \cdot s)$

und den weiteren in [7, Anhang E] gegebenen Formeln ergibt (F_e = Elementfläche):

$$\bar{I}(\sigma, v, s) = \sum_e \left(\frac{1}{2} \int_{V_e} \sigma \cdot D^{-1} \cdot \sigma \cdot dV + \frac{1}{2} \int_{F_e} \frac{1}{t} \cdot s^2 \cdot dF + \int_{V_e} v(\nabla \sigma + g - s) \cdot dV - \int_D \dots - \int_R \dots \right)$$

Die Lösung ergibt sich aus $\delta \bar{I} = 0$, d.h. aus der Bedingung, dass $\bar{I}(\sigma, v, s)$ stationär sein muss (Spezialform des Helliger-Reissner-Prinzips). Die finite Element-formulierung schreibt sich folgendermassen:

$$\begin{aligned} \bar{I}(\sigma, v, s) &= \sum_e \bar{I}_e(\sigma, v, s) = \sum_e \left(\frac{1}{2} \int_{V_e} \sigma \cdot D^{-1} \cdot \sigma \cdot dV + \frac{1}{2} \int_{F_e} \frac{1}{t} \cdot s^2 \cdot dF \right. \\ &\quad \left. + \int_{V_e} v(\nabla \sigma + g - s) \cdot dV - \int_R \dots \right) \end{aligned}$$

Hybride elastisch gestützte Plattenelemente

Es werden nur die von der allgemeinen Herleitung [7, S. 100 ff] abweichenden Ansätze für die Spannungen σ angegeben. Die Darstellung erfolgt in der gebräuchlicheren Matrixschreibweise.

lokale Spannungsansätze: $\{\sigma\} = [\psi] \{\beta\} + \{\Psi_0\}$, dh:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = [\{\psi_1\} \dots \{\psi_n\} \ \mid \ \{\psi_{n+1}\}] \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ | \\ \beta_n \\ \hline \beta_{n+1} \end{Bmatrix} + \{\Psi_0\}$$

$[\psi]$ wird dabei so gewählt (in FLASH: Polynom 2. Grades mit $n = 17$), dass

$$\begin{aligned} \{\nabla \psi_0\} &= -g \\ \{\nabla \psi_1\} \dots \{\nabla \psi_n\} &= 0 \\ \{\nabla \psi_{n+1}\} &= 1 \\ \beta_{n+1} &= s \end{aligned}$$

womit die Gleichgewichtsbeziehung der Platte:

$$m_{x,xx} + 2m_{xy,xy} + m_{y,yy} + g - s \equiv \nabla \sigma + g - s = 0$$

erfüllt ist. Die Formänderungsenergie des Elementes lässt sich dann folgendermassen schreiben:

$$\bar{I}_e(\sigma, v_R, s) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \beta \\ 1 \times (n+1) \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [F] + [F_s] \\ (n+1) \times 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ 1 \times (n+1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta \\ 1 \times (n+1) \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \{F_o\} \\ (n+1) \times 1 \end{Bmatrix} - \bar{W}_e(\sigma, v_R)$$

wobei:

$$[F] = \int_{F_e} [\psi]^T [D]^{-1} [\psi] \cdot dF \quad \text{Flexibilitätsmatrix}$$

$$\{F_o\} = \int_{F_e} [\psi]^T [D]^{-1} \{\Psi_0\} \cdot dF$$

$$[F_s] = \begin{bmatrix} 0 \\ F_e \\ f \end{bmatrix} \text{ Nullmatrix mit } F_{s_{(n+1),(n+1)}} = \frac{F_e}{f}$$

$$\left(\text{folglich: mit } \beta_{n+1} = s : \frac{1}{2} \{\beta\}^T [F_s] \{\beta\} = \frac{1}{2} \int_{F_e} \frac{s^2}{f} \cdot dF \right)$$

Die Wahl der Ansätze für die Randverschiebungen v_R ([7, S. 100 ff]), wie auch die weitere Berechnung der lokalen Steifigkeits-, Spannungs- und Lastmatrizen entspricht dem bekannten Vorgehen ([2], [7, S. 101 ff]). Den Stützdruck s erhält man aus der Bestimmung der Spannungsparameter $\{\beta\}$ ($s = \beta_{n+1}$). Auch diese Berechnung folgt dem bekannten Algorithmus ([7, S. 102 ff]). Es bleibt zu erwähnen, dass der eben dargestellte Algorithmus im Gegensatz zu dem in [8] gegebenen, auch für Dreieckselemente anwendbar ist.

Literaturverzeichnis

1. WALDER, U.: Programmbeschreibung zum Statikprogramm FLASH. Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1975.
2. PIAN, T.H.H.: Element Stiffness Matrices for Boundary Compatibility and for Prescribed Boundary Stresses. Proc. of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton/Ohio, Oct. 1965, AFFDL-TR-66-80 (Nov. 1966).
3. PESTEL, E.C., LECKIE, F.A.: Matrix Methods in Elasto-Mechanics. McGraw-Hill Co., 1963.
4. PFAFFINGER, D., THÜRLIMANN, B.: Tabellen für unterzugslose Decken. Verlags-AG der akademischen technischen Vereine Zürich, 1967.
5. TIMOSHENKO, S.P., WOINOWSKY-KRIEGER, S.: Theory of Plates and Shells. Internat. Student Edition, 2. Auflage, McGraw-Hill Co.
6. FLÜGGE, W.: Stresses in Shells, 4. Auflage, Springer-Verlag, 1967.
7. ANDERHEGGGEN, E.: Grundlagen der Computerstatik. Autographie. Institut für Baustatik und Konstruktion ETHZ, 1975.
8. ANDERHEGGGEN, E.: Programme zur Methode der finiten Elemente. Institut für Baustatik ETHZ, Bericht Nr. 23, 1969, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.

Zusammenfassung

Das Computerprogramm FLASH berechnet nach der Methode der finiten Elemente linear elastische Scheiben, Platten, Faltwerke, Schalen und Stabtragwerke unter statischen Beanspruchungen. Es zeichnet sich durch eine sehr einfache Benutzung und hohe rechnerische Effizienz aus. Anhand einiger Beispiele werden seine vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten erläutert. Das Programm verwendet hybride Finite-Element-Modelle. Auf die zum ersten Mal eingeführten «elastisch gestützten» Elemente wird im Anhang näher eingegangen.

Summary

The computer program FLASH analyzes by the finite element method linear elastic shells, folded-plates, plates in bending and stretching as well as frames under statical loads. The main characteristics of the program are its simple applica-

tion and its great numerical efficiency. The program FLASH uses a hybrid finite element model. In the appendix the derivation of "elastic-supported elements" which have been used for the first time is given in some detail.

Résumé

Avec le programme d'ordinateur FLASH on calcule les plaques, les voiles et les cadres élastiques par la méthode des éléments finis. Le programme offre une facilité d'emploi remarquable et une grande efficacité numérique. Ses applications pratiques sont démontrées par quelques exemples. FLASH utilise un modèle d'éléments finis hybrides. Dans l'appendice on décrit en détail les «éléments appuyés élastiquement» qui ont été utilisés ici pour la première fois.