Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 36 (1976)

Artikel: Eléments spatiaux de barres courbes
Autor: Derron, M.H. / Jirousek, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-924

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Eléments spatiaux de barres courbes

Räumlich gekrümmte Balkenelemente

Space-curved Rod Elements

M.-H. DERRON J. JIROUSEK, Dr es sc.
Professeurs à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Suisse

Introduction

Bien que la méthode des éléments finis soit aujourd'hui très élaborée dans le domaine des milieux continus (parois, dalles, coques, structures massives), il n'a été accordé jusqu'ici que relativement peu d'attention à l'étude de systèmes comprenant des éléments spatiaux de barres courbes. Le champ d'application des études antérieures (voir [7] par exemple) est le plus souvent limité par de sérieuses restrictions d'ordre géométrique. Dans notre étude, nous avons cherché à développer des éléments très généraux satisfaisant les conditions suivantes:

— La géométrie de l'élément doit permettre de réaliser avec une précision suffisante une courbe axiale aussi compliquée qu'on le désire et un taux quelconque de variation de la section le long de l'axe. Par ailleurs, il faut pouvoir tenir compte de l'excentricité éventuelle des nœuds par rapport à l'axe de l'élément.

— En vue de l'application au calcul des coques nervurées, le développement de la matrice de rigidité de l'élément doit être basé sur la méthode directe des rigidités plutôt que sur l'inversion de la relation déplacements-forces. Un choix convenable de fonctions paramétriques de déplacements généralisés permettra de satisfaire automatiquement les conditions de continuité aux interfaces des éléments.

— L'élément doit s'appliquer sans restrictions à tous les rapports entre la hauteur de la section et la longueur de la barre. En plus des déformations dues aux moments fléchissants et aux moments de torsion, il doit par conséquent tenir compte également des déformations dues aux efforts normaux et aux efforts tranchants.

Ci-après, nous proposerons deux familles d'éléments spatiaux courbes du type superparamétrique. La première est une famille d'éléments de section rectangulaire qui peut être représentée avec un minimum de données. La seconde est une famille d'éléments de section quelconque, pour autant que le centre de torsion de cette dernière se confond (au moins approximativement) avec le centre de gravité.

1. Considérations géométriques

1. Définition d'une famille d'éléments de section rectangulaire variable

La figure 1 montre deux membres typiques de la famille d'éléments étudiée dans ce paragraphe. Chaque élément sera défini par une correspondance biunivoque entre les coordonnées globales x, y, z et les coordonnées curvilignes ξ, η, ζ. En pratique, il est commode d'établir ces relations de telle façon que les coordonnées ξ, η, ζ varient entre -1 et $+1$ sur les diverses faces de l'élément (voir figures 1Ab et 1Bb, où l'on a choisi pour des raisons pratiques des échelles différentes pour la coordonnée ξ et les coordonnées η et ζ).

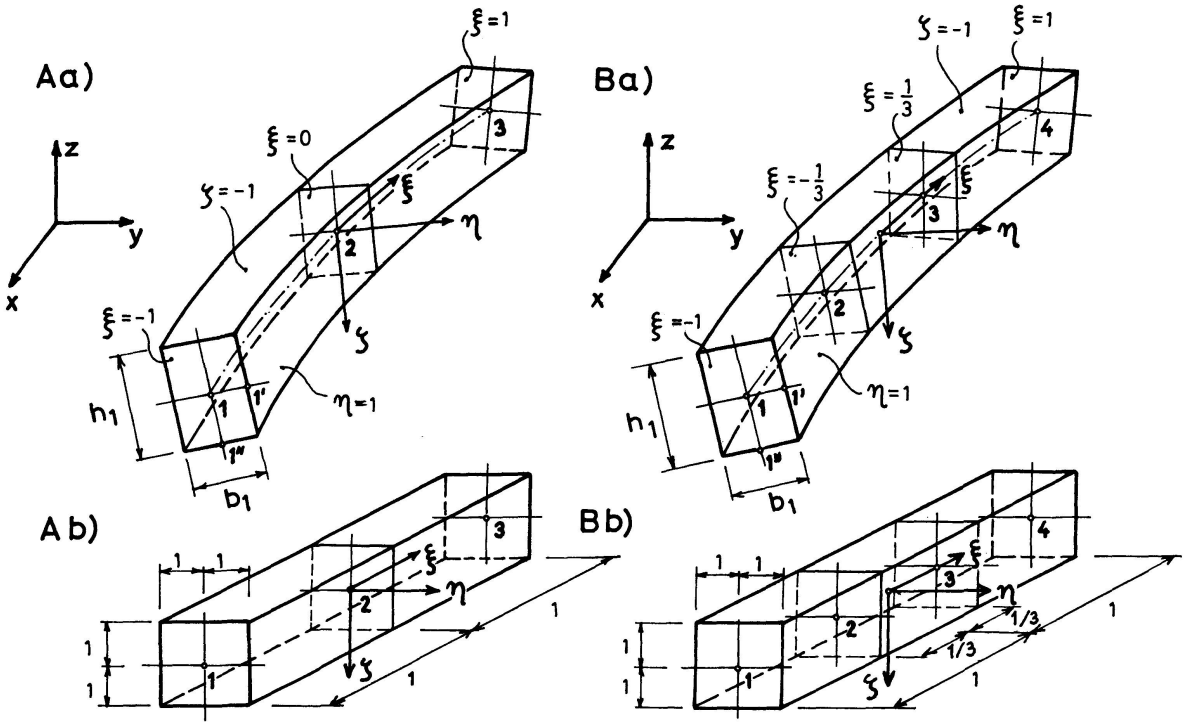

Fig. 1. Deux membres de la famille d'éléments spatiaux de barres courbes de section rectangulaire variable (a) obtenus par distorsion de leurs éléments de base (b): élément quadratique (A), élément cubique (B).

Pour définir l'axe de l'élément dans l'espace, on fixera sur cet axe un certain nombre de nœuds $L = 1, 2 \ldots M$, répartis plus ou moins régulièrement, et on fera passer par ces points une fonction d'interpolation. En désignant par x_o, y_o et z_o les coordonnées globales de l'axe, on peut par exemple écrire:

$$\begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{Bmatrix} = \sum_{L=1}^{M} N_L(\xi) \begin{Bmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{Bmatrix}, \tag{1}$$

où les fonctions de base $N_L(\xi)$ sont représentées par des polynômes de Lagrange:

$$N_L(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \ldots (\xi - \xi_{L-1})(\xi - \xi_{L+1}) \ldots (\xi - \xi_M)}{(\xi_L - \xi_1)(\xi_L - \xi_2) \ldots (\xi_L - \xi_{L-1})(\xi_L - \xi_{L+1}) \ldots (\xi_L - \xi_M)}. \tag{1a}$$

Notons que les noms des éléments représentés dans la figure 1 («quadratique» pour $M = 3$, «cubique» pour $M = 4$), indiquent le degré des fonctions de base appliquées pour leur description. De même, pour $M = 5$, 6, etc., nous parlerons des éléments «quartique», «quintique», etc.

On remarquera que les triplets de points L, L′ et L″ (fig. 1), chacun affecté de ses coordonnées cartésiennes x, y, z connues, définissent les dimensions des sections nodales $\xi = \text{const.}$ et leur orientation dans l'espace. En partant de ces points, il devient possible de représenter la famille d'éléments considérée par la relation

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{L=1}^{M} N_L(\xi) \left(\begin{Bmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{Bmatrix} + \eta \begin{Bmatrix} x_{L'} - x_L \\ y_{L'} - y_L \\ z_{L'} - z_L \end{Bmatrix} + \zeta \begin{Bmatrix} x_{L''} - x_L \\ y_{L''} - y_L \\ z_{L''} - z_L \end{Bmatrix} \right). \tag{2a}$$

Cette relation s'écrit plus brièvement

$$\vec{r} = \sum_{L=1}^{M} N_L(\xi) (\vec{r}_L + \eta \vec{B}_L + \zeta \vec{C}_L) \tag{2b}$$

ou encore

$$\{r\} = ([G_0] + \eta\, [G_B] + \zeta\, [G_C])\, \{N\}, \tag{2c}$$

où $\{N\}$ est la matrice-colonne des fonctions de base,

$$\{N\}^T = [N_1\ N_2\ \ldots\ N_M], \tag{3a}$$

et les matrices géométriques $[G_0]$, $[G_B]$ et $[G_c]$ ont pour expression:

$$[G_0] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_M \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_M \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_M \end{bmatrix}, [G_B] = \begin{bmatrix} (x_{1'} - x_1) & (x_{2'} - x_2) & \ldots & (x_{M'} - x_M) \\ (y_{1'} - y_1) & (y_{2'} - y_2) & \ldots & (y_{M'} - y_M) \\ (z_{1'} - z_1) & (z_{2'} - z_2) & \ldots & (z_{M'} - z_M) \end{bmatrix}, \tag{3b, c}$$

$$[G_C] = \begin{bmatrix} (x_{1''} - x_1) & (x_{2''} - x_2) & \ldots & (x_{M''} - x_M) \\ (y_{1''} - y_1) & (y_{2''} - y_2) & \ldots & (y_{M''} - y_M) \\ (z_{1''} - z_1) & (z_{2''} - z_2) & \ldots & (z_{M''} - z_M) \end{bmatrix} \tag{3d}$$

2. *Simplification des données géométriques*

Au moyen des relations (2), il s'agissait d'exprimer approximativement la forme d'un élément par une expression analytique unique et mieux adaptée aux besoins du calcul. Pour définir un élément de cette manière, que nous pouvons qualifier de passive, il est nécessaire de définir un nombre appréciable de données, soit 9M coordonnées des triplets de points L, L′, L″ qui définissent les sections nodales de la barre réelle.

Le nombre de données géométriques peut être considérablement réduit si l'on détermine la forme de l'élément de manière active: si l'on fixe convenablement dans l'espace un nombre approprié de points L, la relation (1) permet d'engendrer une forme aussi compliquée que l'on désire. On l'adopte alors comme axe réel de la barre. Puisque les sections nodales doivent être perpendiculaires à cet axe (cette condition n'est satisfaite qu'approximativement si l'on applique les relations

(2) de manière passive), chacune d'elle sera définie de manière univoque par trois paramètres seulement. En pratique, il suffit de spécifier par exemple les données suivantes (fig. 2):

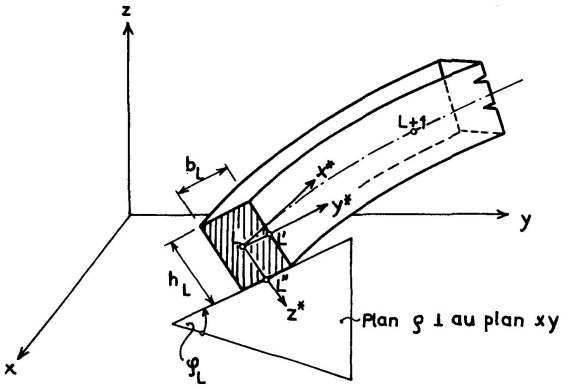

Fig. 2. Définition géométrique d'une section nodale. En partant des valeurs x_L, y_L, z_L et b_L, h_L, φ_L données, les nœuds auxiliaires L′ et L″ seront déterminés à l'aide des relations résumées dans l'appendice.

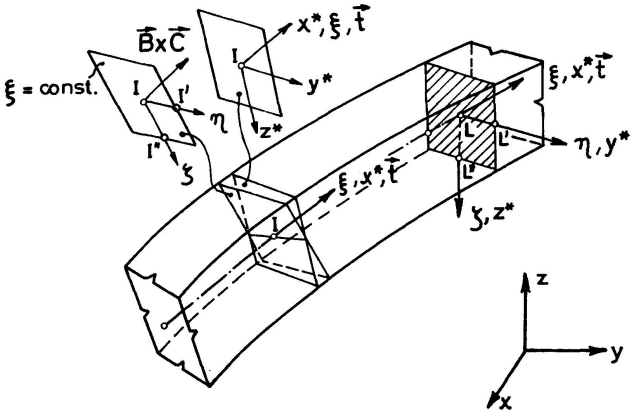

Fig. 3. Section ξ = const. et section perpendiculaire à l'axe en un point intermédiaire de l'élément.

a) les coordonnées x_L, y_L, z_L des nœuds (L = 1, 2 . . . M),
b) le «dévers» représenté par l'angle φ_L entre le plan xy et l'axe principal y_L^* des sections nodales (L = 1, 2 . . . M),
c) les dimensions b_L et h_L des sections nodales (L = 1, 2 . . . M).

Si le dévers et/ou les dimensions de la section sont constants, les données *b*) et/ou *c*) ne seront indiquées que pour une seule section de l'élément.

A partir des données *a*), *b*), *c*) et des bases du calcul vectoriel, on peut développer une routine permettant de déterminer les points L′ et L″ et se ramener au cas fondamental du paragraphe 1. Les relations nécessaires sont données dans l'appendice en fin d'article.

3. *Définition des axes locaux d'une section de l'élément*

Généralités

Afin de pouvoir tenir compte des hypothèses et des lois fondamentales de la théorie classique des barres, on considérera en tout point de l'axe de l'élément un système dit local d'axes orthogonaux, constitué par l'axe x* tangent à l'axe de l'élément et des axes y* et z* confondus avec les axes principaux de la section (voir par exemple la figure 3). La détermination de ce système local recèle quelques difficultés, propres à la méthode utilisée pour la définition géométrique de l'élément, définition qui, forcément, ne représente qu'imparfaitement la réalité. Il faut notamment remarquer qu'une section ξ = const. n'est en général qu'approximativement perpendiculaire à l'axe de l'élément (fig. 3). Nous nous en rendrons facilement compte en étudiant de plus près certaines propriétés de la définition (2).

On remarquera tout d'abord qu'en tout point I intermédiaire ($\xi = \xi_I \neq \xi_L$) de l'axe, les vecteurs

$$\vec{B} = \vec{r}_{I'} - \vec{r}_I = \sum_{L=1}^{M} N_L(\xi)\,\vec{B}_L \quad \text{et} \quad \vec{C} = \vec{r}_{I''} - \vec{r}_I = \sum_{L=1}^{M} N_L(\xi)\,\vec{C}_L \tag{4a, b}$$

restent perpendiculaires l'un à l'autre, puisque les produits scalaires $\vec{B}_L \cdot \vec{C}_L$ des vecteurs nodaux sont par définition nuls. En revanche, la comparaison des expressions du vecteur $\vec{A}$ de la normale à une section $\xi = \text{const.}$,

$$\vec{A} = \sum_{L=1}^{M} N_L(\xi)\vec{B}_L \times \sum_{L=1}^{M} N_L(\xi)\vec{C}_L, \tag{4c}$$

et du vecteur $\vec{t}$ de la tangente à l'axe de l'élément,

$$\vec{t} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}\right)_{\eta=\zeta=o} = \sum_{L=1}^{M} \frac{dN_L}{d\xi}\vec{r}_L = \sum_{L=1}^{M} N'_L(\xi)\,\vec{r}_L, \tag{5}$$

montre que la définition géométrique (2) de l'élément n'implique pas que la normale de la section $\xi = \text{const.}$ est parallèle à la tangente de l'axe, si les sections nodales sont perpendiculaires à l'axe.

Première méthode de définition

Il découle de la discussion précédente que les sections $\xi = \text{const.}$ ne peuvent en général être perpendiculaires à l'axe qu'en un nombre limité de points particuliers (par exemple en tous les nœuds L, si l'on applique la définition active de la forme de l'élément selon le paragraphe 2). Dans ce cas, si le nombre M de nœuds est suffisant et si la distorsion de l'élément n'est pas excessive, on peut approximativement choisir les axes x*, y* et z* suivant les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ (relations (4c, a, b)). Les vecteurs unités i*, j* et k* suivant ces axes s'expriment alors simplement par les relations

$$\vec{i}^* = \frac{\vec{B} \times \vec{C}}{|\vec{B} \times \vec{C}|}, \quad \vec{j}^* = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}, \quad \vec{k}^* = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|}, \tag{6a}$$

et les dimensions b et h de la section ont pour valeur

$$b = 2|\vec{B}| \quad \text{et} \quad h = 2|\vec{C}|. \tag{6b}$$

Deuxième méthode de définition

Une méthode plus précise et plus générale de définition des axes locaux consiste à couper le solide défini par (2) par un plan perpendiculaire à l'axe (1). La section obtenue n'étant en général pas tout à fait rectangulaire, il s'agira de déterminer une section rectangulaire de remplacement. Ce problème n'est pas univoque et plusieurs formulations ont été tentées. Nous avons finalement retenu celle qui paraît la plus simple. Elle consiste à projeter sur le plan perpendiculaire à l'axe la section $\xi = \text{const.}$, soit la section rectangulaire ABCD de la figure 4a, et à ramener ensuite le parallélogramme (A) (B) (C) (D) ainsi obtenu à un rectangle A*B*C*D* (fig. 4b) par les rotations appropriées ϑ_1 et ϑ_2 de ses axes (η) et (ζ). On admettra que les rotations ϑ_1 et ϑ_2 sont telles que les arcs circulaires (I')I*' et (I'')I*'' parcourus

pendant la rotation (fig. 4b) sont de longueur égale. La simplicité de cette hypothèse se justifie par le fait qu'en pratique, les corrections angulaires sont généralement faibles.

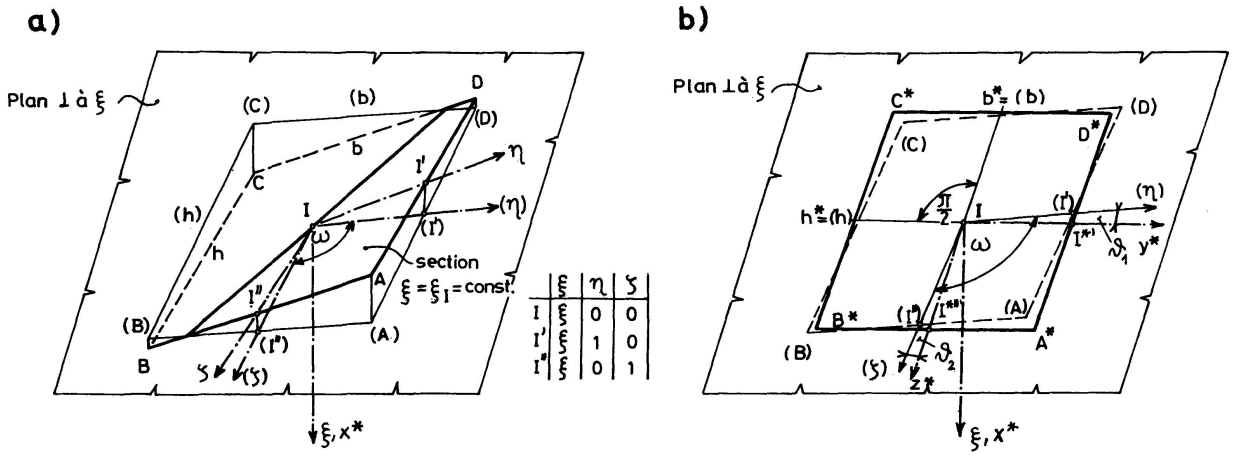

Fig. 4. Projection de la section $\xi = \xi_I$ sur le plan perdiculaire à l'axe et détermination des axes locaux x^*, y^* et z^*.

Cette méthode conduit aux relations suivantes:

$$\vec{i}^* = \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|}, \quad \vec{j}^* = \frac{\vec{B}^*}{|\vec{B}^*|}, \quad \vec{k}^* = \frac{\vec{C}^*}{|\vec{C}^*|}, \tag{7a}$$

$$b = 2|(\vec{B})|, \quad h = 2|(\vec{C})| \tag{7b}$$

où le vecteur $\vec{t}$ est défini par la relation (5) et les vecteurs $\vec{B}^*$ et $\vec{C}^*$ ont pour expression:

$$\left.\begin{aligned} \vec{B}^* &= (\vec{B}) + \tfrac{b}{h}\left[\sin\omega \cdot \operatorname{cotg}(\omega - \vartheta_1) - \cos\omega\right](\vec{C}), \\ \vec{C}^* &= (\vec{C}) + \tfrac{h}{b}\left[\sin\omega \cdot \operatorname{cotg}(\omega - \vartheta_2) - \cos\omega\right](\vec{B}), \end{aligned}\right\} \tag{7c}$$

$$\text{avec} \quad (\vec{B}) = \vec{r}_{I'} - \vec{r}_I - \frac{\vec{t}\cdot\vec{B}}{|\vec{t}|^2}\,\vec{t}, \quad (\vec{C}) = \vec{r}_{I''} - \vec{r}_I - \frac{\vec{t}\cdot\vec{C}}{|\vec{t}|^2}\,\vec{t}, \tag{7d}$$

$$\omega = \arccos \frac{4}{bh}(\vec{B})\cdot(\vec{C}), \tag{7e}$$

$$\vartheta_1 = \frac{h}{b+h}\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right), \quad \vartheta_2 = \frac{b}{b+h}\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right). \tag{7f}$$

Expression matricielle des relations définissant les axes locaux

Pour le calcul sur ordinateur, il convient de remplacer l'ensemble des relations définissant les vecteurs-unités $\vec{i}^*$, $\vec{j}^*$ et $\vec{k}^*$ par un ensemble équivalent de relations matricielles conduisant aux matrices-colonnes $\{i^*\}$, $\{j^*\}$ et $\{k^*\}$. On opérera les substitutions suivantes:

$$\vec{V} \Rightarrow \{V\}, \quad |\vec{V}| \Rightarrow V = \sqrt{\{V\}^T \{V\}}, \quad \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 \Rightarrow \{V_1\}^T \{V_2\}, \tag{8a}$$

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{1y} \cdot V_{2z} - V_{1z} \cdot V_{2y} \\ V_{1z} \cdot V_{2x} - V_{1x} \cdot V_{2z} \\ V_{1x} \cdot V_{2y} - V_{1y} \cdot V_{2x} \end{Bmatrix} \tag{8b}$$

où $\vec{V}$, $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont des vecteurs quelconques, et où l'indice supérieur T désigne la matrice transposée. Par ailleurs, en tenant compte de (2b), on aura:

$$\{B\} = [G_B]\{N\}, \quad \{C\} = [G_C]\{N\}, \tag{9a, b}$$

$$\{r_I\} = [G_0]\{N\}, \tag{9c}$$

$$\{r_{I'}\} = ([G_0] + [G_B])\{N\}, \quad \{r_{I''}\} = ([G_0] + [G_C])\{N\}, \tag{9d, e}$$

$$\{t\} = [G_0]\{N\}' \tag{9f}$$

où $\{N\}'$ est la matrice-colonne des premières dérivées des fonctions de base par rapport à ξ.

4. *Définition d'une famille généralisée d'éléments de section quelconque*

La figure 5 montre deux membres typiques de la famille généralisée d'éléments spatiaux de barre courbe. La section supposée varier lentement le long de l'axe peut être quelconque, pourvu que son centre de torsion se confonde (au moins approximativement) avec le centre de gravité. Outre les sections pleines, on peut admettre également des sections à parois minces de contour fermé, à condition que la torsion fléchie soit négligeable vis-à-vis de la tension de Saint-Venant.

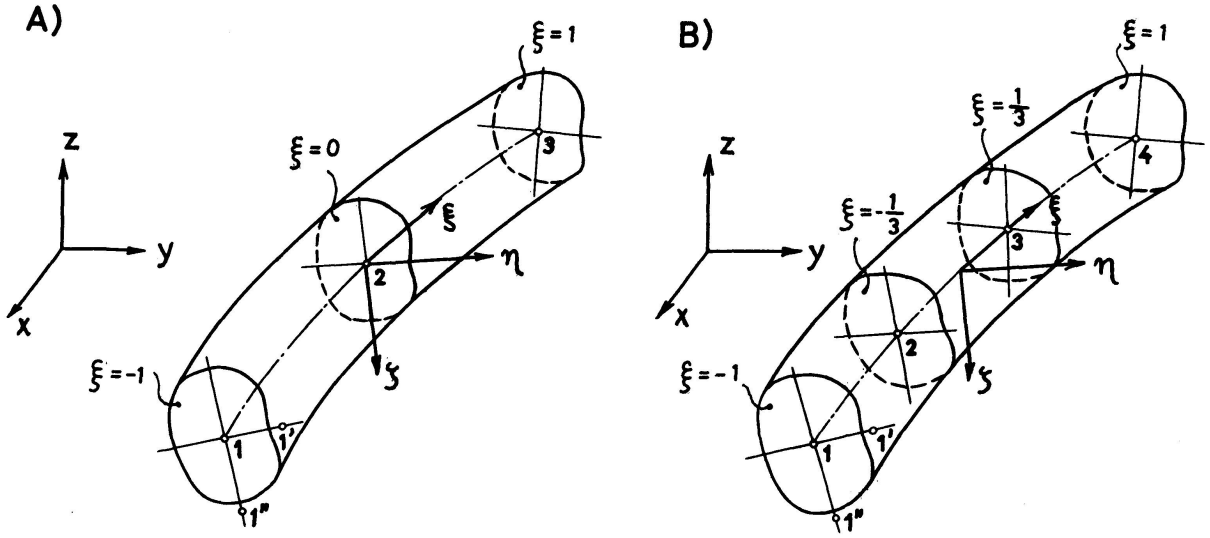

Fig. 5. Deux membres de la famille d'éléments spatiaux de barres courbes de section quelconque: élément quadratique (A), élément cubique (B).

Comme dans le cas de l'élément de section rectangulaire, l'axe de l'élément sera représenté par l'équation (1) et les axes principaux des sections nodales seront définis par les triplets de points L, L′ et L″. Pour définir les axes locaux x*, y*, z* d'une

section quelconque, on appliquera directement les relations développées au paragraphe 3. Les grandeurs b et h intervenant dans ces relations ne sont maintenant que de simples valeurs auxiliaires, ne permettant pas de déterminer la forme et les dimensions de la section correspondante; il faut donc définir de façon indépendante les constantes géométriques caractérisant la section dans les considérations statiques. Il s'agira des six grandeurs suivantes:

F aire de la section;

F_{y*}, F_{z*} aire réduite pour le calcul des déformations dues au cisaillement selon les axes principaux y^* et z^*;

J moment de résistance à la torsion;

I_{y*}, I_{z*} moments d'inertie par rapport aux axes principaux y^* et z^*.

La méthode la plus simple consiste à définir les valeurs nodales de ces grandeurs et à déterminer les valeurs intermédiaires par l'interpolation suivante:

$$\begin{Bmatrix} F \\ F_{y*} \\ F_{z*} \\ J \\ I_{y*} \\ I_{z*} \end{Bmatrix} = \sum_{L=1}^{M} N_L(\xi) \begin{Bmatrix} F_L \\ F_{y*L} \\ F_{z*L} \\ J_L \\ I_{y*L} \\ I_{z*L} \end{Bmatrix}. \tag{10}$$

Ajoutons encore que le principe de la définition active de la forme de l'élément énoncé au paragraphe 2 ainsi que les relations servant au calcul des points auxiliaires L′ et L″ données dans l'Appendice restent valables pour les éléments de section quelconque. Toutefois, le groupe c) de données (valeurs b_L et h_L qu'il est maintenant possible de remplacer par des valeurs fixes quelconques non nulles – par exemple unitaires – égales pour tous les L et pour tous les éléments) sera remplacé par:

$$\text{c)}\ F_L, F_{y*L}, F_{z*L}, J_L, I_{y*L}, I_{z*L} \qquad (L = 1, 2 \ldots M).$$

2. Considérations statiques

1. Généralités

Considérons l'élément courbe de la figure 6a repéré dans un système global de coordonnées cartésiennes x, y et z. En un nœud quelconque L de l'élément, on admettra six degrés de liberté:

les déplacements u, v, w selon les axes x, y, z,

les rotations α, β, γ autour des axes x, y, z.

Pour simplifier l'écriture, on désignera par $\boldsymbol{\delta}_L$ le sous-vecteur des déplacements nodaux défini par la relation

$$\boldsymbol{\delta}_L^T = [u_L, v_L, w_L, \alpha_L, \beta_L, \gamma_L], \tag{11}$$

et on attribuera le symbole $\mathbf{s}_L$ au sous-vecteur des forces nodales équivalentes associé à $\boldsymbol{\delta}_L$. Par ailleurs, on désignera respectivement par $\{\Delta\}$ et $\{S\}$ le vecteur

des déplacements nodaux et le vecteur des forces nodales constitués respectivement par tous les sous-vecteurs $\boldsymbol{\delta}_L$ et par tous les sous-vecteurs $\mathbf{s}_L$ de l'élément. Afin de pouvoir convenablement tenir compte des effets du poids propre, de la variation de température et des déformations initiales, la relation forces-déplacements de l'élément sera exprimée sous la forme

$$\{S\} = \{\bar{S}\} + [K]\,\{\Delta\}, \tag{12}$$

où $\{\bar{S}\}$ est le vecteur des forces nodales primaires équivalentes de l'élément. On remarquera que la matrice $[K]$ est d'ordre 6M, où M est le nombre de nœuds.

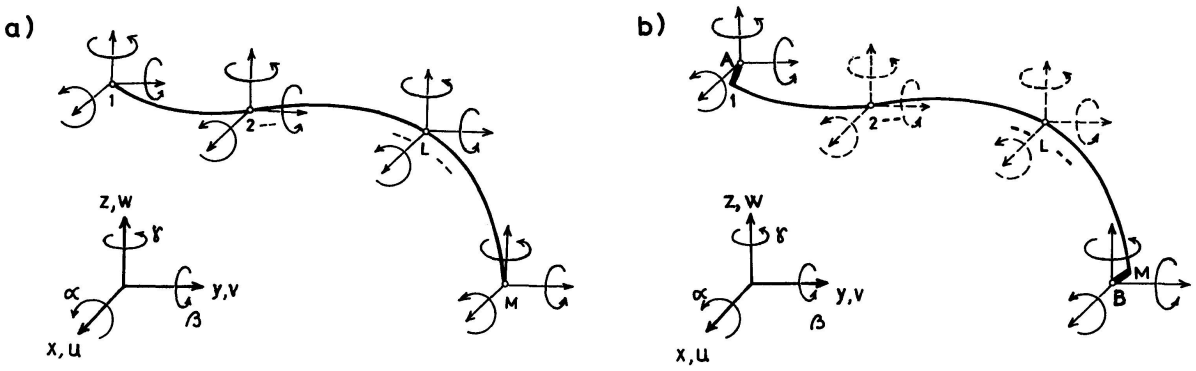

Fig. 6. Elément spatial de barre courbe et ses forces nodales.
a) Cas fondamental: tous les nœuds sont considérés comme nœuds de liaison et se situent sur l'axe de l'élément.
b) Exemple d'un cas dérivé du cas fondamental: les nœuds A et B sont seuls considérés comme nœuds de liaison. (Ils peuvent être excentrés par rapport à l'axe.) Les degrés de liberté des nœuds internes (en traitillé) sont éliminés de la relation forces-déplacements.

La situation représentée sur la figure 6a sera considérée comme cas fondamental. Lorsque le vecteur $\{\bar{S}\}$ et la matrice $[K]$ sont connus, d'autres cas peuvent en être dérivés par des transformations appropriées. Dans les applications concernant les structures constituées uniquement de barres, seuls les nœuds des extrémités interviendront dans le processus d'assemblage. Par ailleurs, si à la suite d'une forte différence entre les dimensions des sections, les axes des barres ne se coupent pas aux croisements des barres, on peut être amené à considérer des éléments possédant des nœuds de liaison excentrés par rapport à leur axe. L'élément type représenté sur la figure 6b satisfait à toutes ces exigences.

Les déplacements nodaux des nœuds intermédiaires peuvent être éliminés par le processus standard de condensation statique. En posant, pour simplifier:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_M \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{s\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_M \end{Bmatrix}, \tag{13a}$$

on aboutit à la relation forces-déplacements suivante:

$$\{s\} = \{\bar{s}\} + [k]\,\{\delta\} \tag{13}$$

$$\text{avec} \quad \{\bar{s}\} = \bar{\mathbf{S}}_e + \mathbf{K}_{ee}\mathbf{K}_{ii}^{-1}(\mathbf{P}_i - \bar{\mathbf{S}}_i), \quad [k] = \mathbf{K}_{ee} - \mathbf{K}_{ei}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ei}^{T} \tag{13b}$$

Dans ces relations, le vecteur $\mathbf{P}_i$ est formé de sous-vecteurs $\mathbf{p}_L$ des charges nodales données aux nœuds intermédiaires de l'élément

$$\mathbf{P}_i^T = [\mathbf{p}_2^T \ldots \mathbf{p}_{M-1}^T], \tag{13c}$$

tandis que la signification des autres termes découle de la partition suivante de la relation matricielle (12):

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_M \\ \hline s_2 \\ \vdots \\ s_{M-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_e \\ \hline S_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{S}_e \\ \hline \bar{S}_i \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} K_{ee} & K_{ei} \\ \hline K_{ie} & K_{ii} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \hline \Delta_i \end{Bmatrix}. \tag{13d}$$

Pour passer à l'élément avec nœuds de liaison excentrés, on admettra que ces nœuds sont liés aux extrémités de l'axe par des barres rigides (fig. 6b). Les déplacements δ_1, δ_M et les déplacements δ_A, δ_B seront alors liés par des relations linéaires du type

$$\delta_1 = T_1 \delta_A, \quad \delta_M = T_M \delta_B,$$

où les matrices de transformation T_1 et T_M découlent de simples considérations géométriques. La matrice T_1, par exemple, a pour expression:

$$T_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta z_1 & -\Delta y_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta z_1 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta y_1 & -\Delta x_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \tag{14a}$$

$$\text{avec} \quad \Delta x_1 = x_1 - x_A, \quad \Delta y_1 = y_1 - y_A, \quad \Delta z_1 = z_1 - z_A. \tag{14b}$$

Pour obtenir la matrice T_M, il suffit de remplacer les indices 1 et A par M et B. En définissant maintenant les vecteurs

$$\{\delta_{exc}\} = \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix}, \{s_{exc}\} = \begin{Bmatrix} s_A \\ s_B \end{Bmatrix}, \tag{14c}$$

on peut transformer la relation (13) en la relation forces-déplacements suivante:

$$\underline{\underline{\{s_{exc}\} = \{\bar{s}_{exc}\} + [k_{exc}]\{\delta_{exc}\},}} \tag{14}$$

avec

$$\{\bar{s}_{exc}\} = [T]^T \{\bar{s}\}, \quad [k_{exc}] = [T]^T [k] [T] \tag{14d}$$

et

$$[T] = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_M \end{bmatrix}. \tag{14e}$$

2. *Définition du champ des déplacements et du vecteur des efforts internes*

Le modèle de calcul permettant de tenir compte de l'effet du cisaillement consiste à admettre qu'une section plane avant déformation restera plane après déformation, mais que son plan ne sera plus nécessairement perpendiculaire à

l'axe déformé de la barre. Ceci signifie que les rotations des sections doivent être définies indépendamment de la déformée de l'axe. La déformation de l'élément sera alors donnée de manière univoque par trois composantes u_o, v_o, w_o du déplacement du centre de gravité de la section selon les axes globaux x, y, z et par trois composantes α, β, γ de la rotation de la section autour de ces axes. On les définira de manière analogue à celle que l'on a utilisée pour les coordonnées globales (équation (1)).

$$\begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \\ w_o \end{Bmatrix} = \sum_{L=1}^{M} N_L(\xi) \begin{Bmatrix} u_L \\ v_L \\ w_L \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \sum_{L=1}^{M} N_L(\xi) \begin{Bmatrix} \alpha_L \\ \beta_L \\ \gamma_L \end{Bmatrix}. \tag{15a, b}$$

Les efforts internes dans une section de l'élément sont définis dans la figure 7, où y* et z* sont les axes principaux. En partant des hypothèses courantes de la théorie des barres, ces efforts peuvent être exprimés en fonction des déformations par la relation matricielle suivante:

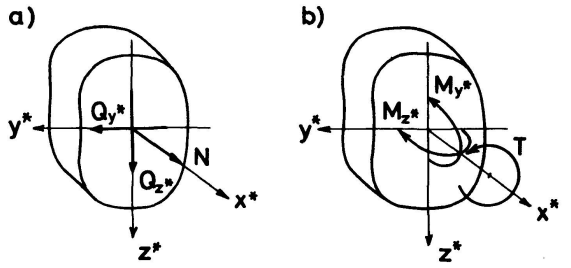

Fig. 7. Composantes de la résultante des efforts internes agissant sur la face positive de la section.

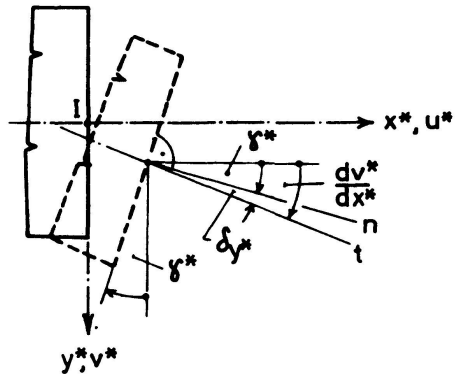

Fig. 8. Positions relatives d'une section et de l'axe d'un élément déformé, compte tenu de l'effet du cisaillement.

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q_{y*} \\ Q_{z*} \\ T \\ M_{y*} \\ M_{z*} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EF & & & & & \\ & GF_{y*} & & & & 0 \\ & & GF_{z*} & & & \\ & & & GJ & & \\ & 0 & & & EI_{y*} & \\ & & & & & EI_{z*} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \dfrac{du_o^*}{dx^*} \\ \dfrac{dv_o^*}{dx^*} - \gamma^* \\ \dfrac{dw_o^*}{dx^*} + \beta^* \\ \dfrac{d\alpha^*}{dx^*} \\ \dfrac{d\beta^*}{dx^*} \\ \dfrac{d\gamma^*}{dx^*} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^o\varepsilon_{x*} \\ {}^o\delta_{y*} \\ {}^o\delta_{z*} \\ {}^o\vartheta_{x*} \\ {}^o\varkappa_{y*} \\ {}^o\varkappa_{z*} \end{Bmatrix} \right) \tag{16a}$$

où u_o^*, v_o^*, w_o^* et α^*, β^*, γ^* sont respectivement les déplacements et les rotations rapportés aux axes locaux de la section, et ${}^o\varepsilon_{x*}$, ${}^o\delta_{y*}$, ${}^o\delta_{z*}$, ${}^o\vartheta_{x*}$, ${}^o\varkappa_{y*}$, ${}^o\varkappa_{z*}$ sont les valeurs initiales des déformations associées aux efforts internes. Dans le cas d'une variation uniforme de température, par exemple, on aura:

$$ {}^o\varepsilon_{x*} = \alpha_T \Delta T, \quad {}^o\delta_{y*} = {}^o\delta_{z*} = {}^o\vartheta_{x*} = {}^o\varkappa_{y*} = {}^o\varkappa_{z*} = 0, $$

où α_T est le coefficient de dilatation thermique de la matière.

La relation (16a) appelle quelques commentaires. On remarquera que les déformations $\delta_{y*} = \dfrac{dv_o^*}{dx^*} - \gamma^*$ et $\delta_{z*} = \dfrac{dw_o^*}{dx^*} + \beta^*$ représentent les composantes de la déviation de la normale n à la section par rapport à la tangente t à l'axe (fig. 8). De plus, on notera que dans le cas d'une section rectangulaire, les surfaces réduites F_{y*} et F_{z*} multipliant ces déformations sont égales à $\frac{5}{6}F$.

Pour simplifier l'écriture, nous écrirons symboliquement la relation (16a) sous la forme

$$ \underline{\underline{\{M\} = [D]\,(\{\varkappa\} - \{{}^o\varkappa\}),}} \tag{16} $$

où $\{M\}$ désigne le vecteur des efforts internes, $[D]$ la matrice de transformation efforts internes-déformations, $\{\varkappa\}$ le vecteur des déformations totales et $\{{}^o\varkappa\}$ le vecteur des déformations initiales.

3. *Expression de la relation forces-déplacements de l'élément*

Le vecteur $\{\varkappa\}$ défini au paragraphe précédent peut être exprimé en fonction du vecteur $\{\Delta\}$ des déplacements nodaux. La matrice $[\Theta]$, qui définit la transformation orthogonale

$$ \{V\} = [\Theta]\,\{V^*\} \quad \text{et} \quad \{V^*\} = [\Theta]^T\,\{V\} $$

entre les coordonnées cartésiennes globales $\{V\}$ et locales $\{V^*\}$ d'un vecteur, aura pour expression

$$ [\Theta] = [\{i^*\}\ \{j^*\}\ \{k^*\}], \tag{17a} $$

où $\{i^*\}$, $\{j^*\}$ et $\{k^*\}$ sont les matrices-colonnes des coordonnées cartésiennes globales des vecteurs unités définis par les relations (6a) ou (7a); d'autre part,

$$ \frac{\partial}{\partial x^*}\{V^*\} = c[\Theta]^T \frac{\partial}{\partial \xi}\{V\} = c[\Theta]^T\,\{V\}', $$

où le coefficient c est égal à la valeur inverse de la longueur du vecteur-tangent $\vec{t}$

$$ c = \frac{1}{|\vec{t}|} = \frac{1}{\sqrt{\{N'\}^T[G_0]^T[G_0]\,\{N'\}}}\,. \tag{17b} $$

On aboutit à $$ \{\varkappa\} = \sum_{L=1}^{M} \left[\begin{array}{c|c} cN'_L\,[\Theta]^T & N_L\,[A]\,[\Theta]^T \\ \hline \mathbf{0} & cN'_L\,[\Theta]^T \end{array}\right] \delta_L = \sum_{L=1}^{M} \mathbf{b}_L \cdot \delta_L \tag{17} $$

avec
$$[A]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{17c}$$

Afin de rendre possible la condensation statique [équations (13)], les sous-vecteurs δ_L constituant le vecteur $\{\Delta\}$ seront considérés dans l'ordre suivant:

$$\{\Delta\}^T=[\delta_1^T\,\delta_M^T\,|\,\delta_2^T \text{ — } \delta_{M-1}^T] \tag{18a}$$

En posant
$$[B]\;=[\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_M\,|\,\mathbf{b}_2 \text{ — } \mathbf{b}_{M-1}] \tag{18b}$$

on obtient
$$\{\varkappa\}=[B]\,\{\Delta\} \tag{18}$$

Pour calculer l'effet du poids propre du matériau, de poids spécifique γ, introduisons les vecteurs

$$\{\gamma\}=\begin{Bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{d_o\}=\begin{Bmatrix}u_o\\ v_o\\ w_o\end{Bmatrix}.$$

Les éléments du premier vecteur sont les composantes du poids spécifique γ selon les axes globaux x, y et z. Le second vecteur peut encore s'écrire à partir de (15a), en fonction de $\{\Delta\}$:

$$\{d_o\}=[\mathbf{c}_1\,\mathbf{c}_M\,|\,\mathbf{c}_2 \text{ — } \mathbf{c}_{M-1}]\,\{\Delta\}=[C]\,\{\Delta\}, \tag{19}$$

avec
$$\mathbf{c}_L=N_L\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

En appliquant maintenant le théorème de stationnarité de l'énergie potentielle totale, $\delta\Pi=\delta V+\delta U=0$, on aboutit à:

$$\{\bar{S}\}=-\int_0^{\ell}[B]^T[D]\,\{{}^o\varkappa\}\,ds-\int_0^{\ell}F[C]^T\{\gamma\}\,ds,\quad [K]=\int_0^{\ell}[B]^T[D]\,[B]\,ds.$$

Sachant que $ds=t\,d\xi$, où $t=t(\xi)$ est la valeur absolue du vecteur tangent

$$t=|\vec{t}|=\sqrt{\{N'\}^T[G_0]^T[G_0]\{N'\}}\;, \tag{20a}$$

il est aisé de remplacer les intégrales suivant l'axe de l'élément par les intégrales selon la coordonnée curviligne ξ entre les bornes -1 et $+1$, de sorte que l'on obtient finalement:

$$\boxed{\begin{gathered}\{\bar{S}\}=-\int_{-1}^{+1}t\;[B]^T[D]\,\{{}^o\varkappa\}\,d\xi-\int_{-1}^{+1}t\;F[C]^T\{\gamma\}\,d\xi,\\ [K]=\int_{-1}^{+1}t\,[B]^T[D]\,[B]\,d\xi.\end{gathered}}$$

On calcule numériquement les intégrales en appliquant par exemple la quadrature de Gauss. Notons que les quantités F, F_{y*}, F_{z*}, J, I_{y*} et I_{z*} intervenant dans ces relations (matrice [D]) s'obtiennent soit à partir des dimensions b et h des sections rectangulaires (équations (6b), (7b)), soit par l'application de la relation (10) dans le cas d'une section quelconque.

4. *Calcul des efforts internes*

Une fois les déplacements nodaux $\{\Delta\}$ connus, les efforts internes des éléments peuvent être calculés au moyen des relations (16) et (17), d'où l'on tire:

$$\{M\} = -[D]\{{}^{o}\mathscr{K}\} + [D]\sum_{L=1}^{M} \mathbf{b}_L \boldsymbol{\delta}_L \,. \tag{21}$$

Quand la relation $\{S\} = \{\bar{S}\} + [K]\{\Delta\}$ ne sert que de point de départ pour développer les relations forces-déplacements telles que (13) ou (14), la résolution de l'assemblage des éléments ne fournit que les sous-vecteurs δ_1, δ_M ou δ_A, δ_B. En partant de (13d) et en remarquant que $\{\delta\} = [T]\{\delta_{exc}\}$, où la matrice $[T]$ est définie par les relations (14a, e), on trouve:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_M \end{Bmatrix} = \{\delta\} = [T]\{\delta_{exc}\},$$

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_2 \\ | \\ \boldsymbol{\delta}_{M-1} \end{Bmatrix} = -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\,\bar{\mathbf{S}}_i - \mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ei}^{T}\{\delta\} = -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\,\bar{\mathbf{S}}_i - \mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ei}^{T}[T]\{\delta_{exc}\}. \tag{21b}$$

Bien que les deux familles d'éléments présentées dans cette étude donnent généralement avec une très bonne précision les déplacements et les forces nodales des éléments pour tous les $M \geq 3$, l'expérience montre que les efforts internes obtenus avec les membres inférieurs de ces familles (éléments quadratiques $M = 3$ et éléments cubiques $M = 4$) ne sont pas suffisamment précis, à moins que les éléments soient relativement courts. Ceci est dû au fait que les fonctions de base de ces éléments ne sont pas suffisamment riches pour représenter convenablement certaines variations des efforts internes. Il est intéressant de remarquer que, dans ces cas-là, on obtient toutefois d'excellents résultats en partant des forces nodales équivalentes et en appliquant les conditions d'équivalence statique. Pour les efforts internes aux extrémités d'un élément, on obtient par exemple les formules suivantes:

$$\{M_1\} = -[\Theta_1]\mathbf{s}_1 = -[T_1][\Theta_1]\mathbf{s}_A, \tag{22a}$$

$$\{M_M\} = [\Theta_M]\mathbf{s}_M = [T_M][\Theta_M]\mathbf{s}_B, \tag{22b}$$

où les matrices $[\Theta_1]$ et $[\Theta_M]$ peuvent être calculées en appliquant la relation (17a).

3. Analyses numériques et applications

1. *Etude de la convergence*

Pour examiner l'efficacité des deux familles d'éléments proposées, nous avons étudié la poutre hélicoïdale représentée à la figure 9. Les calculs ont été tout d'abord effectués avec des éléments de la première famille (éléments de section rectangulaire). Les mêmes calculs ont été répétés avec des éléments de la deuxième famille (relations (10)), comme s'il s'agissait d'une barre de section quelconque.

Les différences entre les deux solutions étant rarement apparues avant le cinquième chiffre des résultats, nous présenterons uniquement l'analyse basée sur la première famille d'éléments.

L'étude de la convergence a été effectuée par comparaison des résultats obtenus au moyen d'éléments quadratiques (M = 3), cubiques (M = 4), quartiques (M = 5) et quintiques (M = 6) et pour un nombre N d'éléments variant entre 2 et 32. Le

Tableau 1. Etude de la convergence. Poutre hélicoïdale (fig. 9).
Effet du poids propre $\gamma = 2{,}5$ t/m³.

Variables	M \ N	2	4	8	12	16	32	Unités
w ($\beta = 120^0$)	3	-0,0548	-0,2328	-0,3507	-0,3634	-0,3658	-0,3669	mm
	4	-0,2861	-0,3644	-0,3670	-0,3670	-0,3670	-0,3670	
	5	-0,3615	-0,3670	-0,3670	-0,3670	-0,3670		
	6	-0,3665	-0,3670	-0,3670				
N_{max} ($\beta = 240^0$)	3	2,060	2,158	2,147	2,152	2,153	2,156	t
	4	2,138	2,152	2,157	2,157	2,157	2,158	
	5	2,169	2,158	2,158	2,158	2,158		
	6	2,160	2,158	2,158				
Q_{z^*max} ($\beta = 0^0$)	3	1,688	1,627	1,628	1,621	1,617	1,613	t
	4	1,625	1,616	1,613	1,612	1,612	1,612	
	5	1,599	1,611	1,612	1,612	1,612		
	6	1,610	1,612	1,612				
T_{max} ($\beta = 240^0$)	3	0,103	0,172	0,251	0,256	0,256	0,255	tm
	4	0,249	0,270	0,257	0,256	0,255	0,255	
	5	0,249	0,255	0,255	0,255	0,255		
	6	0,251	0,255	0,255				
M_{y^*max} ($\beta = 120^0$)	3	0,514	0,633	0,798	0,813	0,815	0,816	tm
	4	0,763	0,814	0,816	0,816	0,816	0,816	
	5	0,813	0,816	0,816	0,816	0,816		
	6	0,816	0,816	0,816				
M_{y^*min} ($\beta = 0^0$)	3	-1,515	-1,704	-2,025	-2,054	-2,058	-2,060	tm
	4	-1,815	-2,048	-2,059	-2,060	-2,061	-2,060	
	5	-2,027	-2,060	-2,060	-2,060	-2,060		
	6	-2,060	-2,060	-2,060				

Tableau 2. Comparaison de l'élément courbe (quintique) avec élément droit.
Poutre hélicoïdale (fig. 9); effet du poids propre $\gamma = 2{,}5$ t/m².

Variables	Elément droit				Elément courbe		Unités
	N=4	8	16	32	N=2	4	
w ($\beta=120^0$)	-0,282	-0,341	-0,360	-0,365	-0,367	-0,367	mm
N_{max} ($\beta=240^0$)	2,17	2,18	2,17	2,17	2,16	2,16	t
Q_{z^*max} ($\beta= 0^0$)	1,50	1,57	1,69	1,60	1,61	1,61	t
T ($\beta=240^0$)	-0,26	-0,07	0,08	0,16	0,25	0,25	tm
M_{y^*max} ($\beta=120^0$)	0,58	0,75	0,80	0,81	0,82	0,82	tm
M_{y^*min} ($\beta= 0^0$)	-2,13	-2,18	-2,15	-2,11	-2,06	-2,06	tm

tableau 1 montre quelques résultats caractéristiques de cette étude. Il en ressort clairement que des éléments quartiques et quintiques conduisent à des résultats pratiquement exacts même avec un nombre très restreint d'éléments. Par contre, il faut un nombre beaucoup plus grand d'éléments quadratiques ou cubiques pour obtenir des résultats de la même qualité. L'expérience montre que les éléments quadratiques et cubiques sont aussi notablement moins économiques sur le plan de la préparation des données et du temps de calcul.

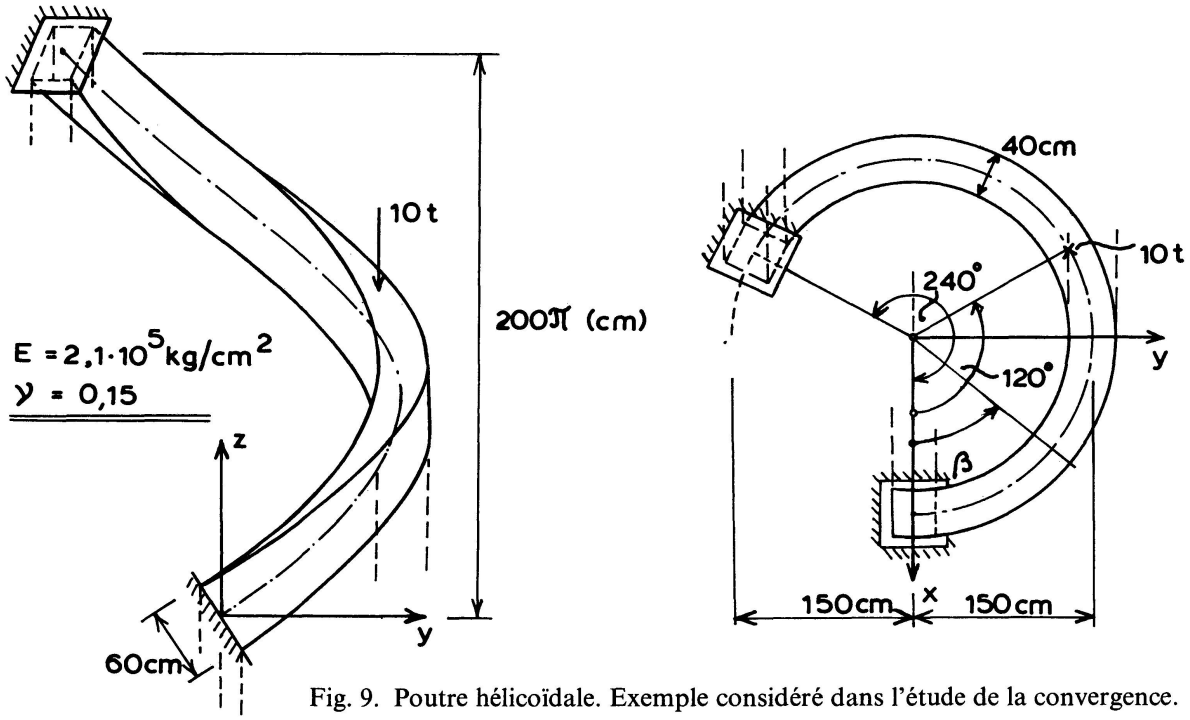

Fig. 9. Poutre hélicoïdale. Exemple considéré dans l'étude de la convergence.

En complément, le tableau 2 donne encore la comparaison entre la solution basée sur l'élément quintique et les résultats obtenus en remplaçant la poutre hélicoïdale par une succession de segments rectilignes. Il apparaît clairement que même avec 32 éléments rectilignes, on n'atteint pas la qualité des résultats obtenus avec deux éléments courbes seulement.

Notons que des résultats en tout point semblables à ceux des tableaux 1 et 2 (poids propre) ont également été obtenus pour une force isolée (fig. 9).

2. *Applications pratiques*

Calcul d'une coupole sphérique constituée de barres

La coupole représentée sur la figure 10, qui rappelle par sa conception la halle de la Foire d'échantillons de Hanovre, est constituée par des tubes d'acier ($E = 2{,}1.10^6$ kg/cm^2, $\nu = 0{,}3$) de section circulaire ($F = 2F_{y*} = 2F_{z*} = 46$ cm^2, $J = 2I_{y*} = 2I_{z*} = 5020$ cm^4) liés rigidement entre eux à leurs intersections. Projetés verticalement, les axes des barres apparaissent comme des paraboles quadratiques régulièrement espacées sur le plan xy de l'ouvrage. Les figures 11 à 13 montrent quelques résultats obtenus pour une charge isolée P = 10 t au sommet de la coupole.

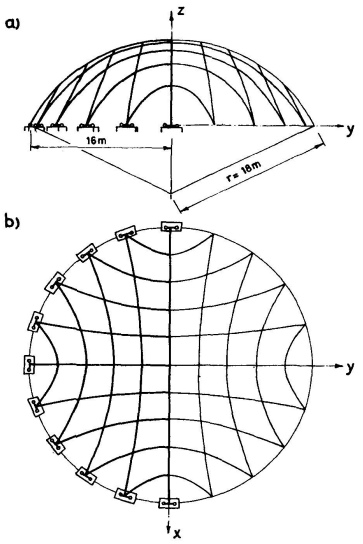

Fig. 10. Coupole sphérique constituée par un grillage de barres courbes de l'espace.

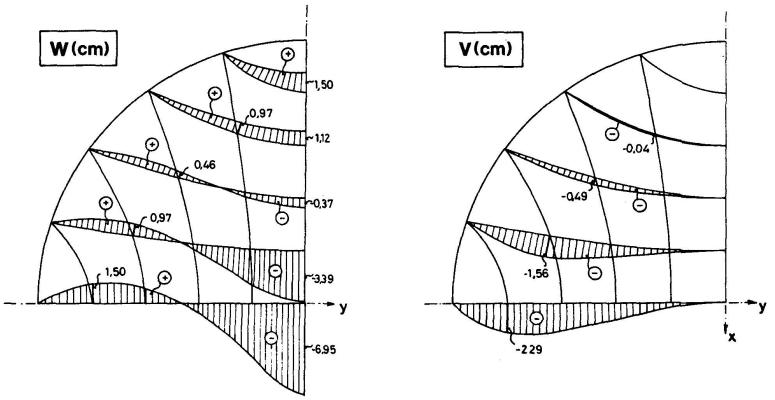

Fig. 11. Déplacements globaux v (selon y) et w (selon z) engendrés par une force verticale P = 10 t, appliquée au sommet de la coupole sphérique de la figure 10.

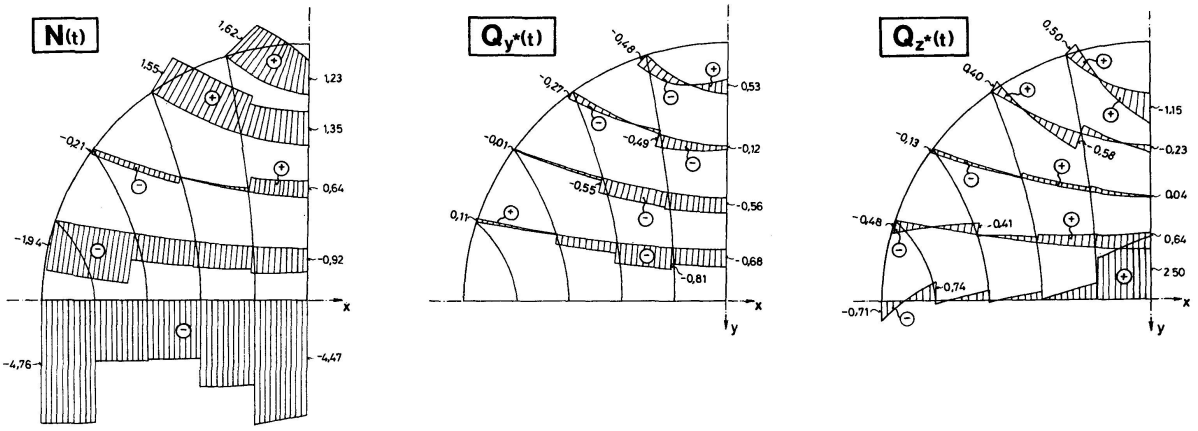

Fig. 12. Effort normal et efforts tranchants engendrés dans les barres de la coupole sphérique de la figure 10 par une force isolée P = 10 t, appliquée au sommet. L'axe principal y* des sections est horizontal ($\varphi = 0$).

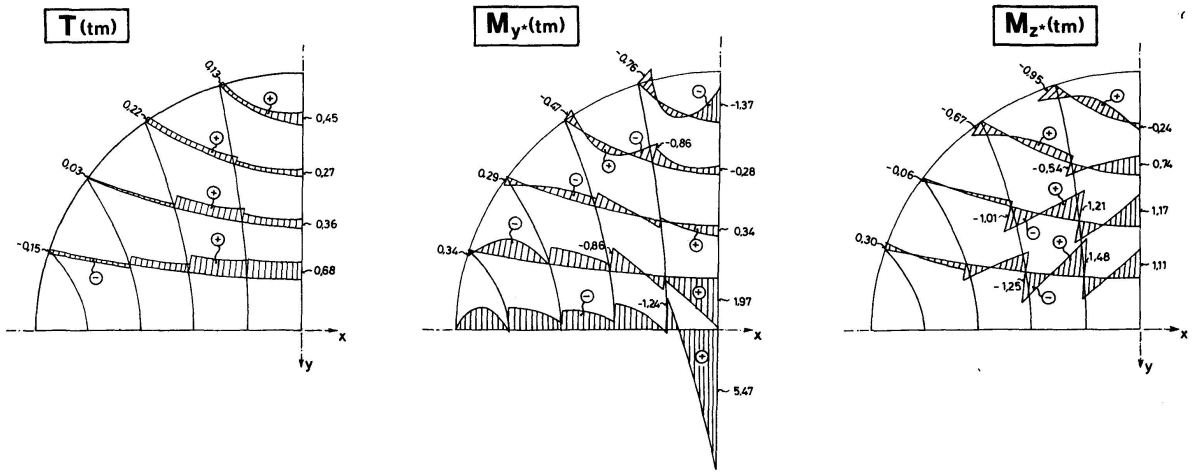

Fig. 13. Moment de torsion et moments fléchissants engendrés dans les barres de la coupole sphérique de la figure 10 par une force isolée P = 10 t, appliquée au sommet. L'axe principal y* des sections est horizontal ($\varphi = 0$).

Calcul d'un pont courbe à trois travées continues

Le pont courbe représenté sur la figure 14 est un ouvrage en acier ($E = 2{,}1.10^6$ kg/cm^2, $\nu = 0{,}3$) constitué par 5 poutres maîtresses ($F = 660$ cm^2, $F_{y*} = 250$ cm^2, $F_{z*} = 300$ cm^2, $J = 996923$ cm^4, $I_{y*} = 1512720$ cm^4, $I_{z*} = 414236$ cm^4) et 13 entretoises ($F = 300$ cm^2, $F_{y*} = 133{,}3$ cm^2, $F_{z*} = 116{,}7$ cm^2, $J = 174222$ cm^4, $I_{y*} = 253336$ cm^4, $I_{z*} = 77385$ cm^4). Les figures 15 et 16 montrent les diagrammes des moments fléchissants M_{y*} et des moments de torsion T engendrés dans le pont par la force $P = 1$ t appliquée au milieu de la première poutre maîtresse.

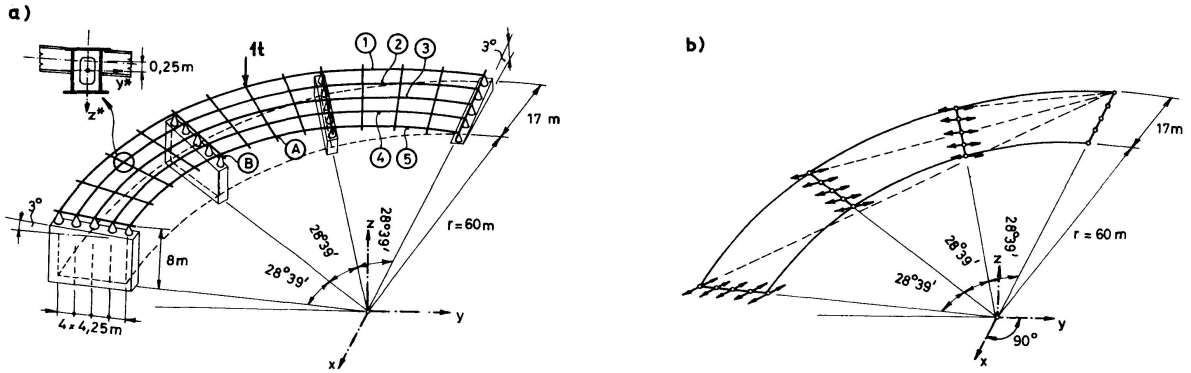

Fig. 14. Pont courbe à trois travées continues: *a*) Axonométrie du pont, *b*) Schéma de la mobilité directionnelle des appareils d'appuis.

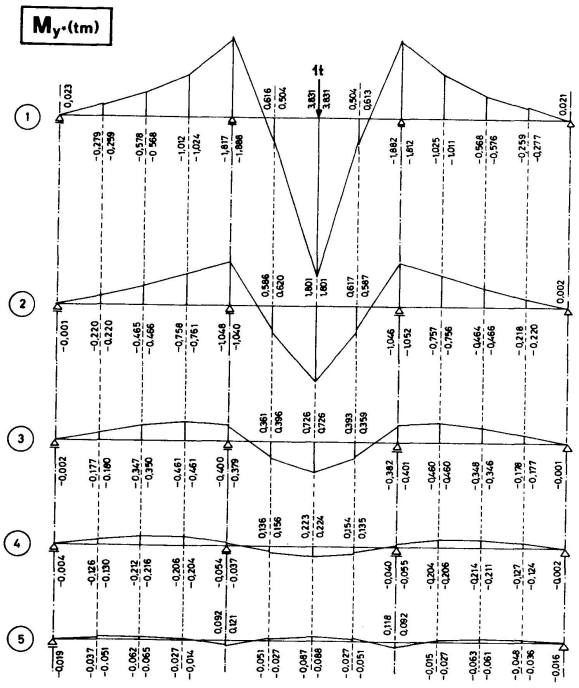

Fig. 15. Diagrammes des moments fléchissants dans les poutres maîtresses du pont courbe de la figure 14.

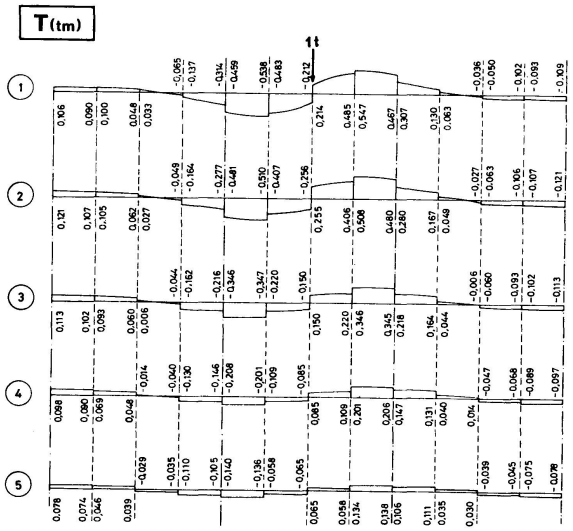

Fig. 16. Diagrammes des moments de torsion dans les poutres maîtresses du pont courbe de la figure 14.

Calcul d'une rampe hélicoïdale en béton armé

La figure 18 montre quelques résultats intéressants d'une étude de l'effet de l'excentricité des poutres aux intersections. La structure de la figure 17

($E = 210000$ kg/cm^2, $\nu = 0{,}15$) a été calculée en supposant à tour de rôle que les entretoises sont soit surélevées soit surbaissées de 20 cm par rapport à l'axe de la poutre hélicoïdale, ou encore qu'elles coupent l'axe de cette dernière. On remarquera que l'excentricité affecte ici essentiellement l'effort normal.

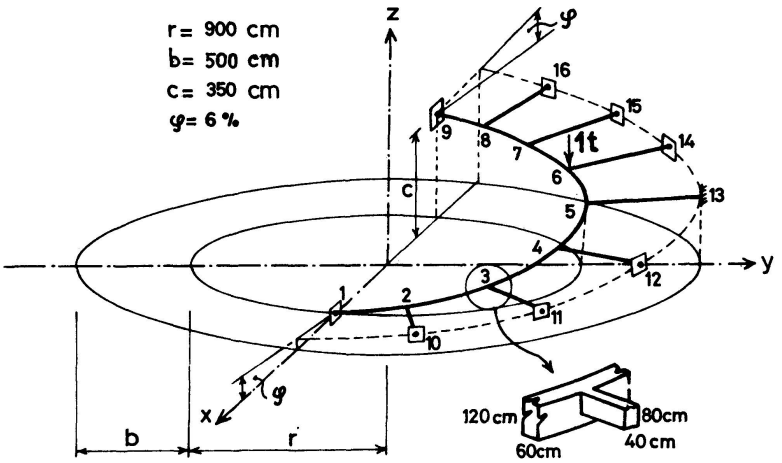

Fig. 17. Rampe hélicoïdale. La numérotation des nœuds correspond à la subdivision de la structure en éléments finis.

4. Aspects économiques des nouveaux éléments et leur importance pour la sécurité des structures

La comparaison donnée dans le tableau 2 montre clairement la supériorité des nouveaux éléments sur le calcul coutumier consistant à remplacer une barre courbe par une succession de segments droits. Le fait que l'assemblage de 32 éléments droits, conduisant à un système de 198 équations, ne suffit encore pas pour obtenir la même précision qu'avec 2 éléments «quintique» seulement (18 équations) est éloquent. Même si l'on admet que le temps de calcul ne croît qu'avec le carré du nombre d'équations, l'économie de temps de calcul et par conséquent également du coût de calcul est extraordinaire. Par ailleurs, la préparation des données pour un nombre très réduit d'éléments est beaucoup plus aisée et le risque d'erreurs diminue.

Dans certains cas, il pourrait devenir pratiquement impossible de subdiviser la barre courbe en un nombre suffisant de segments droits, à cause des limitations imposées par la mémoire centrale de l'ordinateur. (On remarquera par exemple que la succession de 32 segments droits remplaçant une structure aussi simple que celle étudiée dans le tableau 2 donne encore une erreur de 36% sur le moment de torsion.) L'utilisateur obligé de se contenter d'un nombre d'éléments insuffisant peut se trouver devant un dilemme: ou bien il accepte les résultats obtenus et ne pourra garantir une sécurité élevée de l'ouvrage, ou bien il sera obligé de dimensionner plus largement sa construction, de manière peu économique, pour tenir compte de l'imprécision des résultats.

Remarquons encore que dans le calcul des coques nervurées, les éléments proposés sont les seuls capables de satisfaire aux conditions de compatibilité avec les éléments superparamétriques de coque.

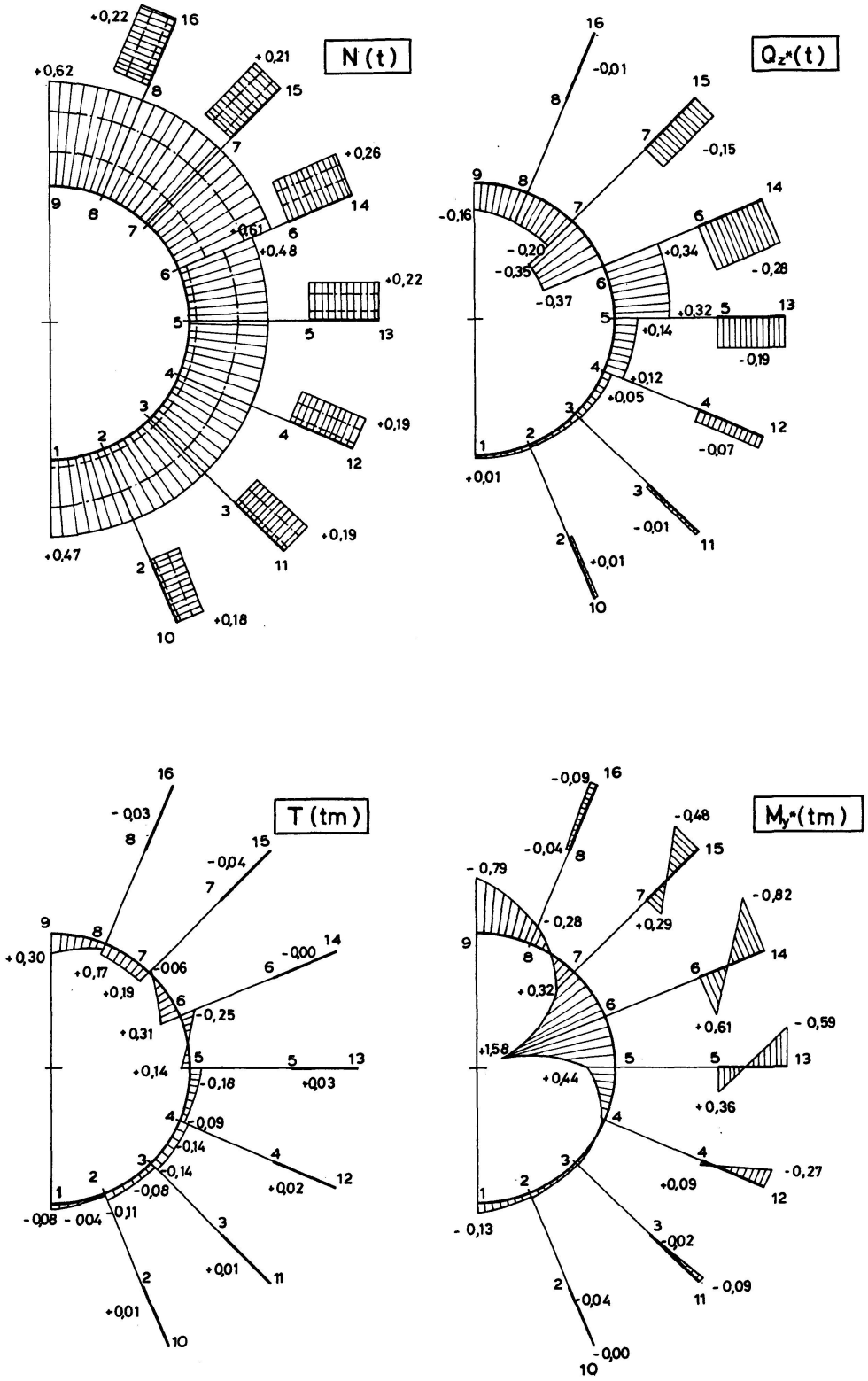

Fig. 18. Efforts internes engendrés dans la rampe hélicoïdale de la figure 17 par une force P = 1 t appliquée au nœud 6.

——— entretoises surélevées de 20 cm par rapport à l'axe de la poutre hélicoïdale.
–·–·–·– axes des entretoises coupant l'axe de la poutre hélicoïdale.
– – – – – – entretoises surbaissées de 20 cm par rapport à l'axe de la poutre hélicoïdale.

Appendice

Calcul des vecteurs $\{B_L\}$

On commence par calculer, pour tous les L de l'élément (L = 1,2 ... M), les vecteurs-tangents

$$\vec{t} = \begin{Bmatrix} t_{xL} \\ t_{yL} \\ t_{zL} \end{Bmatrix} = \sum_{K=1}^{M} N'_K(\xi = \xi_L)\,\vec{r}_K = \sum_{K=1}^{M} N'_K(\xi = \xi_L) \begin{Bmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{Bmatrix} \tag{23}$$

Les coordonnées orthogonales des vecteurs $\{B_L\}$ seront alors obtenues par l'application des relations suivantes:

a)
$$z_{L'} - z_L = \tfrac{1}{2}\, b_L \sin \varphi_L, \tag{24}$$

b)
$$y_{L'} - y_L = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ avec } \pm\sqrt{} \text{ pour } t_x \lessgtr 0, \tag{25}$$

et où $a = t_{xL}^2 + t_{yL}^2$, $b = t_{yL} \cdot t_{zL} b_L \sin \varphi_L$, $c = \frac{1}{4} b_L^2 (t_{zL}^2 \sin^2 \varphi_L - t_{xL}^2 \cos^2 \varphi_L)$. (25a)

(On remarquera que dans (25) la racine carrée est nulle si $t_x = 0$.)

c)
$$x_{L'} - x_L = -\frac{t_{yL}}{t_{xL}}(y_{L'} - y_L) - \frac{t_{zL}}{t_{xL}}(z_{L'} - z_L), \tag{26a}$$

ou encore, si $t_x = 0$,

$$x_{L'} - x_L = \pm\sqrt{\tfrac{b}{2}^2 - (y_{L'} - y_L)^2 - (z_{L'} - z_L)^2} \text{ avec } \pm\sqrt{} \text{ pour } t_y \gtrless 0. \tag{26b}$$

La formule (25) n'est pas applicable si $t_{xL} = t_{yL} = 0$, d'où la restriction suivante: *en aucun des points nodaux L, l'axe de l'élément ne doit être parallèle à l'axe global z.* Remarquons également qu'en donnant le «dévers» φ_L, on ne peut pas dépasser le complément à $\frac{\pi}{2}$ de l'angle de la tangente par rapport au plan xy (il est facile de s'en convaincre par une simple analyse géométrique). L'angle φ_L doit alors satisfaire à la condition suivante:

$$|\varphi_L| \leq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{|t_{zL}|}{\sqrt{t_{xL}^2 + t_{yL}^2}}\,. \tag{27}$$

Notons encore que la relation (24) découle directement de la figure 2. Par ailleurs, les relations (25) à (26) s'obtiennent par la résolution du système de deux équations vectorielles:

$$\vec{t}_L\,(\vec{r}_{L'} - \vec{r}_L) = 0 \quad \text{et} \quad |\vec{r}_{L'} - \vec{r}_L| = \tfrac{1}{2}\, b_L,$$

dont la première exprime le fait que le nœud auxiliaire L′ se trouve dans un plan normal à l'axe de l'élément et la seconde définit la longueur du vecteur LL′.

Calcul des vecteurs $\{C_L\}$

Les coordonnées du vecteur $\{C_L\}$ s'obtiennent au moyen du produit vectoriel $\vec{t}_L \times \vec{B}_L$, le vecteur ainsi défini étant ramené à la longueur $\frac{1}{2} h_L$. On trouve ainsi:

$$\{C_L\} = \frac{1}{2} \frac{h_L}{D_L} \begin{Bmatrix} D_{xL} \\ D_{yL} \\ D_{zL} \end{Bmatrix}$$

avec $$\begin{Bmatrix} D_{xL} \\ D_{yL} \\ D_{zL} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_{yL} B_{zL} - t_{zL} B_{yL} \\ t_{zL} B_{xL} - t_{xL} B_{zL} \\ t_{xL} B_{yL} - t_{yL} B_{xL} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad D_L = \sqrt{D_{xL}^2 + D_{yL}^2 + D_{zL}^2}. \tag{28a}$$

Remerciements

Cet article est issu d'un travail de recherche sur les systèmes spatiaux de poutres curvilignes croisées et les coques nervurées, financé par le Fonds national suisse de la recherche scientifique, auquel vont nos plus sincères remerciements.

Les auteurs remercient également MM. Raymond Schäffer et Fawaz Tarazi, ingénieurs EPF-L, de leur participation aux calculs numériques sur l'ordinateur de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.

Références

1. Baron, F.: Matrix Analysis of Structures Curved in Space. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 87, No. ST3, March 1961, pp. 17-38.
2. Shu-T'ien, Li: Metallic Dome-Structure Systems, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 88, No. ST6, December 1962, pp. 201-226.
3. Eisemann, K., Who, L., Namyet, S.: Space Frame Analysis by Matrices and Computers, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 88, No. ST6, December 1962, pp. 245-268.
4. Jirousek, J.: Kruhové rošty a prostorové rotační rámy (Circular Grillages and Circular Cylindrical Frames), Sborník Vysokého učení technického v Brně (Bulletin of the Technical University Brno, Czechoslovakia), 1963, No. 1-4, pp. 31-71.
5. Hutton, C.R.: Curvilinear Grid Frames, Engineering Journal, July 1964, Vol. 1, No. 3, AISC.
6. Michalos, J.: The Structural Analysis of Space Networks. Int. Conf. on Space Structures, University of Surrey, September 1966.
7. Fenton, D.L.: Matrix Computer Analysis of Curvilinear Grid Systems. Dissertation for the degree of Ph. D. in Civil Engineering, University of Missouri at Rolla, 1967.
8. Jirousek, J.: ELFIN-Programme de calcul des structures par la méthode des éléments finis, tome 1. Publication de la Chaire de Statique et de Résistance des Matériaux de l'EPF-L, N° 7, rédaction provisoire 1974.

Résumé

L'étude analyse deux familles d'éléments spatiaux de barres courbes: l'une formée d'éléments superparamétriques de section rectangulaire variable, et l'autre d'éléments de section quelconque dont le centre de torsion se confond (au moins approximativement) avec le centre de gravité.

Les exemples pratiques se réfèrent principalement au calcul des ponts courbes et des coupoles constituées par des grillages de barres.

Zusammenfassung

Die vorliegende Studie legt zwei Familien gekrümmter räumlicher Balkenelemente vor. Bei der ersten handelt es sich um eine Familie supraparametrischer Elemente mit veränderlichem Rechteckquerschnitt. Die zweite umfasst Elemente beliebigen Querschnitts, deren Schubmittelpunkt (zumindest annähernd) mit dem Querschnittsschwerpunkt identisch ist.

Die Resultate dieser Arbeit finden insbesondere Anwendung bei der statischen Berechnung gekrümmter Brücken und räumlich gewölbter Trägerroste.

Summary

The study presents two families of space-curved rod elements: the first one is that of superparametric elements with variable rectangular cross section, the second one concerns the elements of arbitrary cross section provided that its shear centre identifies (at least approximately) with the centre of gravity.

The study is of special interest for the analysis of curved bridges and curvilinear grid system domes.

Leere Seite
Blank page
Page vide