Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 36 (1976)

Artikel: Ein Berechnungsverfahren zur Grenztragfähigkeits-Untersuchung von Platten mittels der Methode der finiten Elemente

Autor: Fujii, F. / Kajita, T. / Naruoka, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-914

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ein Berechnungsverfahren zur Grenztragfähigkeits-Untersuchung von Platten mittels der Methode der finiten Elemente

Un procédé d'analyse de la charge ultime des dalles moyennant la méthode des éléments finis

A Procedure for the Evaluation of the Ultimate Load of Plates by the Finite Element Method

F. FUJII
Wissenschaftlicher Mitarbeiter

T. KAJITA
Dozent, Dr.-Ing.

M. NARUOKA
Prof., Dr.-Ing.

Universität Nagoya, Nagoya, Japan

1. Einleitung

Für jedes gegebene Tragsystem gibt es verschiedene Bemessungsmöglichkeiten. Daraus ergibt sich die Aufgabe, die Bemessung mit dem minimalen Materialvolumen herauszufinden, die gleichzeitig die Tragsicherheit gewährleistet.

Die Bemessung nach zulässigen Spannungen führt manchmal zu unnötig grossem Materialaufwand, weil die Elastizitätstheorie die Tragfähigkeitsreserven des Gesamtsystemes nicht berücksichtigen kann. Die nach der Elastizitätstheorie berechnete Tragfähigkeit ist besonders bei statisch unbestimmten Tragsystemen von der wirklichen Grenztragfähigkeit weit entfernt. Zur Beurteilung der Tragsicherheit und Wirtschaftlichkeit ist die Elastizitätstheorie nicht geeignet.

Aus diesen Gründen erscheint es zweckmässiger, das Traglastverfahren zur Bemessung heranzuziehen. Ausserdem lässt sich damit die Sicherheit eines Tragwerkes besser erfassen und der Baustoff kann wirtschaftlicher ausgenutzt werden.

Die Tatsache, dass in der Baupraxis mehr als die Hälfte aller Stahlbetonbauteile in Form von Platten verwendet wird, richtet das Interesse der Ingenieure auf eine einerseits wirtschaftliche aber andererseits sichere Bemessungsmethode.

Mit dem Auftreten der grossen Rechenanlagen und der Methode der finiten Elemente ist die Untersuchung des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlbetonplatten in den letzten Jahren zu einem bedeutenden Forschungsthema geworden.

Mit dem viereckigen Plattenelement mit 3 Freiheitsgraden pro Knotenpunkt stellten sich J.C. Jofriet und G.M. McNeice [9] die Aufgabe, die Auswirkungen von Betonrissen auf das Verformungsverhalten einer an vier Ecken punktgestützten Quadratplatte unter einer Einzellast in Plattenmitte zu ermitteln.

G. M. McNeice [6] und [7] führte mit einem Rechteckelement mit 3 Freiheitsgraden pro Knoten Traglastberechnungen von Stahlbetonplatten mit Randträgern durch, indem er die «Diskontinuität der Neigungswinkel» (Relativverdrehung) zwischen den Nachbarelementen einführte, um das Formänderungsverhalten der Platten im plastischen Zustand zu beschreiben. Unter Verwendung der linearisierten maximalen-Hauptmomenten-Fliessbedingung zerlegte er diese Relativverdrehung in zwei Komponenten, die bei weiterer Laststeigerung als neue Unbekannte im Gleichungssystem angesetzt wurden.

Vorausgesetzt, dass sich die Fliessgelenklinien längs der Elementränder erstrecken, berechnete J. Bäcklund [8] erfolgreich die obere Grenzlast der Stahlbetonplatten mit dem gemischten Modell von Herrmann. Im Gleichungssystem hielt er die Biegemomente auf den Elementrändern fest, auf denen sich die Fliessgelenklinien gebildet hatten. Um bei Überlagerung der gemischten Elementmatrizen die Kontinuitätsbedingungen der Neigungswinkel zwischen den Nachbarelementen zu erfüllen, vernachlässigte er das Auftreten der Relativverdrehung nach der Querschnittserschöpfung.

2. Zielsetzung der Arbeit

Die oben erwähnten Fliessgelenklinien bilden den Grundbegriff der Fliessgelenklinientheorie, die das übliche Berechnungsverfahren zur Ermittlung der Grenztragfähigkeit von Stahlbetonplatten darstellt und bereits in einigen europäischen Ländern Eingang in die Bemessungspraxis gefunden hat. Zwar liefert die Fliessgelenklinientheorie stets eine obere Eingrenzungslösung für die Grenztragfähigkeit, aber sie führt häufig zur auf der sicheren Seite liegenden Bewehrung, weil die Stahlbetonplatten grössere Tragfähigkeitsreserven (z.B. über Gewölbewirkung) besitzen, wie die bisher durchgeführten Versuche nachweisen. Studien zur Sicherheit und Wirtschaftlichkeit der Fliessgelenklinientheorie finden sich in [2] und [3].

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, die Ideen von G.M. McNeice und J. Bäcklund zu erweitern und die Fliessgelenklinientheorie mittels der Methode der finiten Elemente zu formulieren. Die Verfolgung der elastoplastischen Verformungen nach dem Gebrauchszustand bis zum Grenzzustand wird ermöglicht. Der Formänderungsmechanismus einer Platte wird, wie in der Fliessgelenklinientheorie, vom kinematischen Gesichtspunkt aus beschrieben. Zur Berechnung wird ein einfaches hybrides Plattenelement ausgewählt.

3. Voraussetzungen

Die Berechnung wird unter den folgenden Voraussetzungen durchgeführt:

1. Die Fliessgelenklinien erstrecken sich auf den Elementrändern.
2. Alle Lasten nehmen proportional zueinander und einsinnig stetig bis zum Bruchversagen des Systems zu. Es muss also der Steigerungsfaktor $\lambda^n_{\min}$ für den n-ten Lastschritt gesucht werden.
3. Nachdem das unter Berücksichtigung des Bewehrungsnetzes berechnete Grenzmoment *Mnpij* auf Elementgrenze *i-j* (Abb. 3/1) erreicht ist, kann bei weiterer Laststeigerung kein Zuwachs *dMnij* ertragen werden. Die Bildung der Fliess-

gelenklinien hängt nur vom Biegemoment *Mnij* ab, und der Anteil des Biegemoments *Msij* und des Drillmoments *Mnsij* ist vernachlässigbar klein. Das gültige Stoffgesetz auf der Seite *i-j* ist in Abb. 3/1 dargestellt.

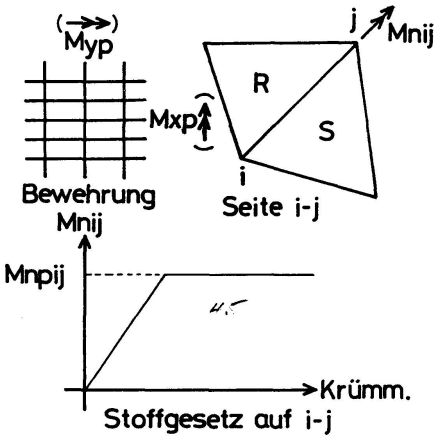

Abb. 3/1. Seite *i-j* und Stoffgesetz.

4. Die Elementgrenze, auf der das Grenzmoment *Mnp* erreicht wurde, wird bei weiterer Belastung durch eine Gelenklinie ersetzt, um die sich die Nachbarelemente untereinander relativ verdrehen können. Das Ersatzmodell verletzt die Verträglichkeitsbedingung für den Neigungswinkel *W, n*, aber nicht für die Durchbiegung *W*. Diese Annahme stützt sich auf das pyramidenförmige Durchbiegungsgeschwindigkeitsfeld aus ebenen Teilflächen einer Platte in der Fliessgelenklinientheorie.
5. Die Membranwirkung wird vernachlässigt, und die Durchbiegungen der Plattenteile sind, verglichen mit den Plattenabmessungen, genügend klein. Die Platte ist «schwach» bewehrt und der Schubbruch wird ausgeschlossen. Die Drehfähigkeit in den Fliessgelenklinien ist genügend gross, so dass keine örtlichen Risse entstehen.

4. Wahl des Plattenelements

Es stehen zahlreiche verschiedene Elementmodelle zur Auswahl. Am geeignetsten erweist sich hier das folgende dreieckige hybride Plattenelement:

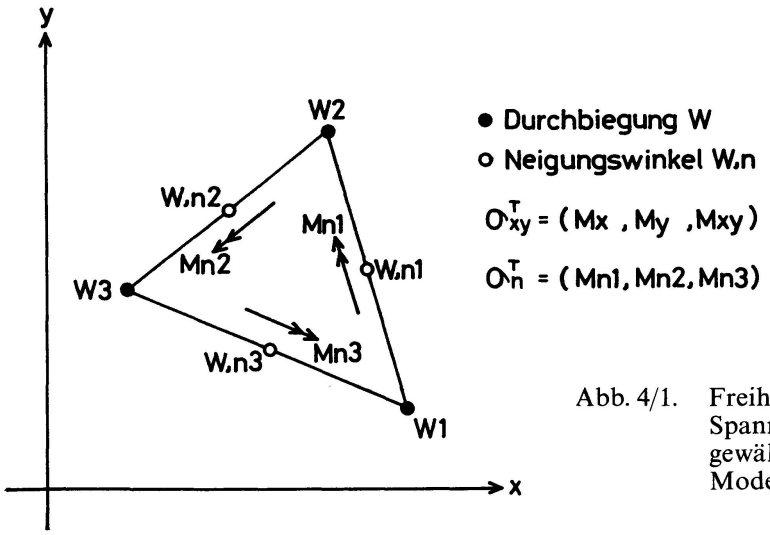

Abb. 4/1. Freiheitsgrade und Spannungen des ausgewählten hybriden Modells.

Dreieckiges hybrides Gleichgewichtsmodell

Freiheitsgrade

$$d^T = (W1,\ W2,\ W3,\ W,n1,\ W,n2,\ W,n3) \tag{1}$$

Spannungsansatz innerhalb des Elements

$$\sigma xy = \left\{ \begin{matrix} Mx \\ My \\ Mxy \end{matrix} \right\} = \text{konstant} \tag{2}$$

Verschiebungsansatz auf den Elementrändern

$$\left. \begin{matrix} W \text{auf } 1\text{-}2 \\ W \text{auf } 2\text{-}3 \\ W \text{auf } 3\text{-}1 \end{matrix} \right\} = \text{linear veränderlich auf jedem Elementrand} \tag{3}$$

$$\left. \begin{matrix} W,n \text{ auf } 1\text{-}2 = W,n1 \\ W,n \text{ auf } 2\text{-}3 = W,n2 \\ W,n \text{ auf } 3\text{-}1 = W,n3 \end{matrix} \right\} = \text{konstant auf jedem Elementrand} \tag{4}$$

Beziehung zwischen den Spannungen im Elementinnern und den Knotenverschiebungen

$$\sigma xy = Sxy\, d \tag{5}$$

Nach Spannungstransformation erhält man

$$\sigma n = Sn\, d \tag{6}$$

5. Berechnungsverfahren

Die Last wird in Stufen aufgebracht.

Bei jeder Laststufe werden zwei neue, gegebenfalls ein neuer, Parameter in das Gleichungssystem eingesetzt, um den Formänderungsmechanismus einer Platte zu beschreiben. Die Koeffizientenmatrix des zu Beginn des n-ten Lastschrittes aufzulösenden Gleichungssystems hat im allgemeinen das Aussehen:

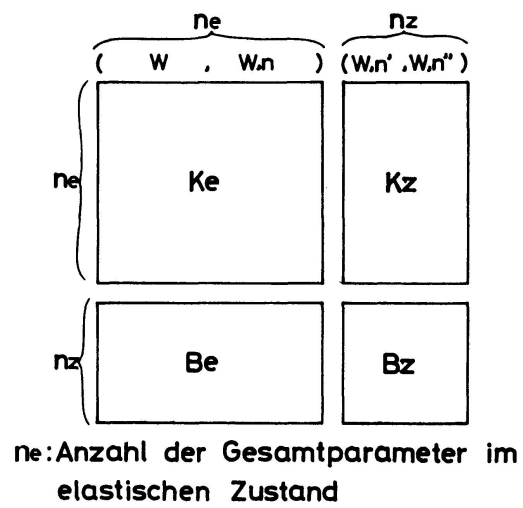

Abb. 5/1. Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems für n-ten Lastschritt.

Die Elemente in den Untermatrizen Kz, Be und Bz lassen sich aus den einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen bestimmen. Zum besseren Verständnis wird der Prozess an einem konkreten Beispiel erläutert.

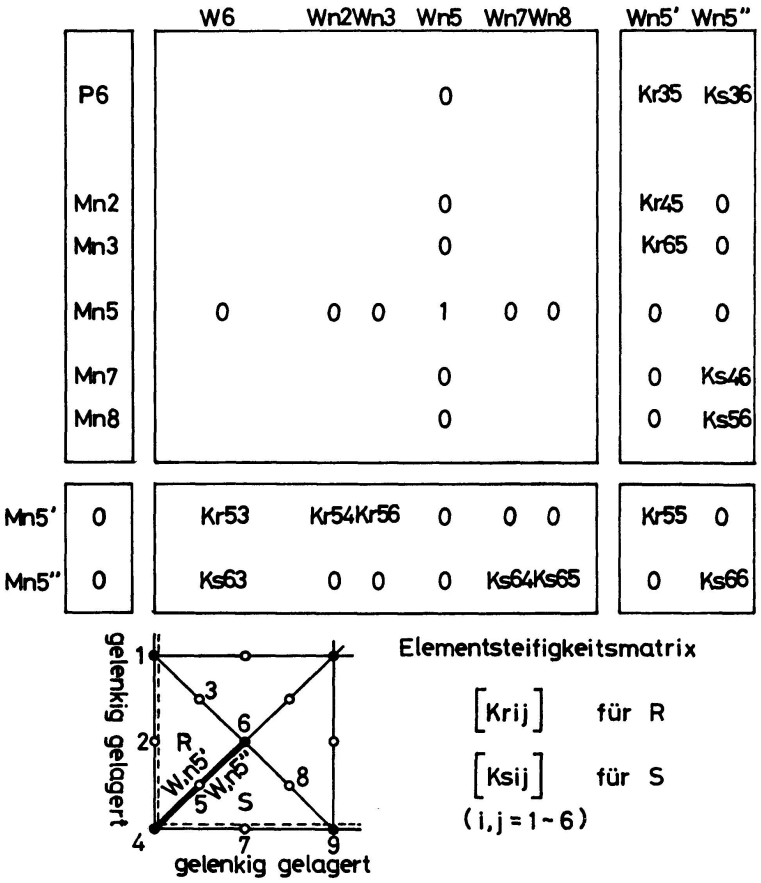

Abb. 5/2. Beispiel für den Fall, dass eine Fliessgelenklinie auf einer Innenseite definiert wird.

Abb. 5/2 zeigt ein Beispiel für den Fall, dass sich eine Fliessgelenklinie auf der Innenseite 5 bildet.

Die Knotenverschiebungsvektoren der Elemente R und S lauten nun

$$d_r^T = (W1, W4, W6, W, n2, W, n5', W, n3) \tag{7}$$

$$d_s^T = (W4, W9, W6, W, n7, W, n8, W, n5''). \tag{8}$$

Um die Struktur der Gesamtsteifigkeitsmatrix Ke im elastischen Zustand nicht zu zerstören, wird der alte Parameter $W, n5$ beibehalten, indem auf der Hauptdiagonale eine 1 gesetzt wird und die restlichen Zeilen und Spalten mit Nullen aufgefüllt werden.

Kz ordnet die Einflusskoeffizienten von $W, n5'$ und $W, n5''$ zu, die den Elementsteifigkeitsmatrizen von R und S zu entnehmen sind. In Be und Bz werden die Gleichgewichtsbedingungen längs der Seite berücksichtigt:

$$dMn5' = 0 \text{ und } dMn5'' = 0. \tag{9}$$

Mit steigender Parameteranzahl wächst das Gleichungssystem an. Um bei der Auflösung des immer grösser werdenden Gleichungssystems Rechenzeit und

Speicherplatz zu sparen, können die alten Parameter auch eliminiert werden. Wird z.B. der Parameter W, $n5$ vom Gleichungssystem eliminiert, so wächst die Koeffizientenmatrix nur um eine Zeile und eine Spalte.

Der Fall, wonach auf einer zu einem eingespannten Plattenrand gehörigen Elementgrenze eine Fliessgelenklinie entsteht, ist völlig analog zu behandeln, indem man nur einen neuen Parameter in die Koeffizientenmatrix einführt, weil die Randbedingung auf der Elementgrenze bereits in Ke berücksichtigt worden ist.

Der Fliessgelenklinientheorie wird eine vereinfachte Fliessbedingung zugrundegelegt, die durch

$$Mn = Mnp \tag{10}$$

ausgedrückt wird, wobei

Mn : Biegemoment entlang einer Fliessgelenklinie, das nach der Transformationsformel berechnet werden kann.

Mnp : Unter Berücksichtigung des Bewehrungsnetzes berechnetes Grenzmoment (s. z.B. S. 209-213 in [3]).

Es wird hier dieselbe einachsige Fliessbedingung als Bestimmungsgleichung für den Belastungsmultiplikator λ^n verwendet:

$$Mnn\text{-}1 + \lambda^n dMnn = Mnp \tag{11}$$

mit Mnn-1: Spannungszustand am Ende des $(n-1)$-ten Lastschrittes auf der betrachteten Elementgrenze, auf der noch keine Fliessgelenklinie definiert worden ist.

$dMnn$: Spannungszuwachs auf der Elementgrenze, der mit der Koeffizientenmatrix in Abb. 5/1, dem Einheitslastvektor und der Beziehung (6) zu berechnen ist.

Es muss dann die Elementgrenze gesucht werden, die den Minimumwert $\lambda^n_{\min}$ ergibt. Anschliessend wird jeder Zuwachs (Verschiebungs- und Spannungszuwachs) mit dem Faktor $\lambda^n_{\min}$ verkleinert. Eine Fliessgelenklinie wird auf der Seite mit $\lambda^n_{\min}$ definiert. Die Berechnung wird fortgesetzt, bis das Gleichungssystem singulär wird oder bis der Lösungsvektor gross von höherer Ordnung wird. Der Grenzlastfaktor wird dann durch Aufsummierung der Steigerungsfaktoren der einzelnen Laststeschritte ermittelt.

Für das beschriebene Verfahren wurde ein FORTRAN-Programm erstellt. Für die elektronischen Berechnungen wurden die Einrichtungen des Rechenzentrums der Universität Nagoya benutzt.

Um den Rechenaufwand gering zu halten, werden in der folgenden Diskussion nur die isotropen und schichtweise isotropen Stahlbetonplatten betrachtet. Das Grenzmoment wird mit Mp bezeichnet.

6. Numerische Beispiele

6-1. Allseitig frei drehbar gestützte Quadratplatte

Die Fliessgelenklinienfigur für eine allseitig frei drehbar gestützte Quadratplatte unter Gleichlast oder Einzellast in Plattenmitte besteht aus Fliessgelenklinien in den Diagonalen. Die Grenzlast beträgt bzw.

$$\bar{q} = 24.00$$

$$\bar{P} = 8.00$$

Zu bemerken ist, dass die Grenzlastintensität $\bar{q} = 24.00$ in diesem Fall eine eindeutige Lösung im Traglastverfahren ist.

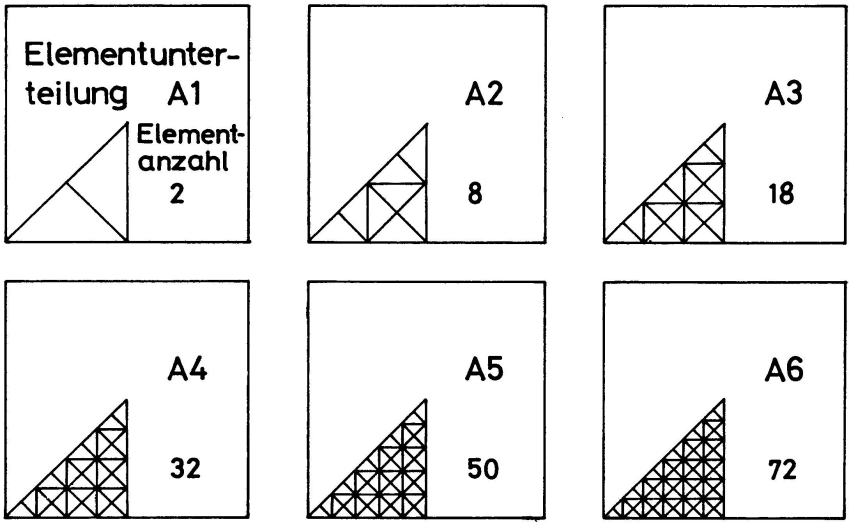

Abb. 6/1. Verfeinerung der Elementunterteilung für die Konvergenzuntersuchung an einer allseitig frei drehbar gestützten Quadratplatte.

Für die Konvergenzuntersuchung wird ein Achtel der Plattenfläche in 2, 8, 18, 32, 50 und 72 Elemente unterteilt (Abb. 6/1).

In Abb. 6/2 sind die gewonnenen Grenzlastintensitäten und die zugehörigen Fliessgelenklinienfiguren bei jeder Elementunterteilung dargestellt, aus denen die Konvergenz gegen $\bar{q} = 24.00$ abgelesen werden kann. Für Einzellast in Plattenmitte kann gute Übereinstimmung mit der Fliessgelenklinienlösung $\bar{P} = 8.000$ sogar bei der gröbsten Elementunterteilung Al erwartet werden, falls der Bruchmechanismus im Elementraster dem in der Fliessgelenklinientheorie gleich ist (Abb. 6/3). In den Fliessgelenklinienfiguren bezeichnen die dickeren Linien positive Fliessgelenklinien.

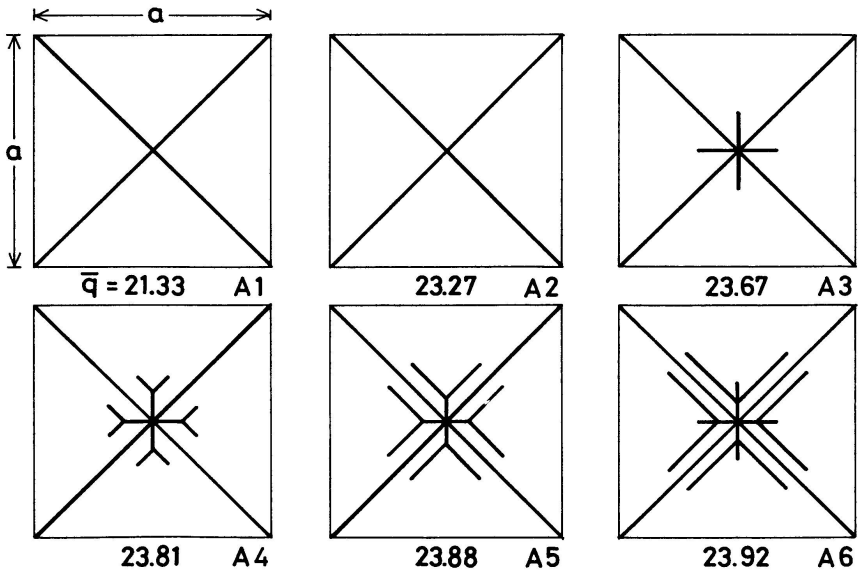

Abb. 6/2. Fliessgelenklinienfigur für eine allseitig frei drehbar gestützte Quadratplatte unter Gleichlast Grenzlastintensität: $\bar{q} = q\,a^2/Mp$.

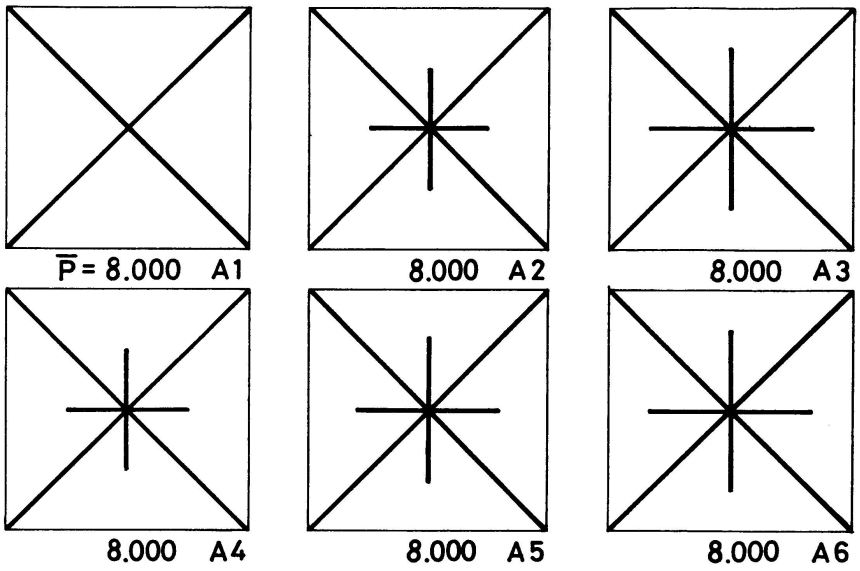

Abb. 6/3. Fliessgelenklinienfigur für eine allseitig frei drehbar gestützte Quadratplatte unter einer Einzellast in Plattenmitte Grenzlast: $\bar{P} = P/Mp$.

Die Abweichung der berechneten Grenzlastintensitäten von der einzigen Lösung $\bar{q} = 24.00$ wird auf die Aufteilung der verteilten Belastung auf die kinematisch äquivalenten Knotenkräfte zurückgeführt. Zu ersehen ist, dass die Grenzlastintensität von der unteren Seite her gegen $\bar{q} = 24.00$ konvergiert.

Dieselbe Aufgabe wurde bereits von J. Bäcklund [8] mit dem gemischten Modell von Herrmann untersucht. Sein Ergebnis wird in Abb. 6/4, verglichen mit der Fliessgelenklinienfigur nach der vorliegenden Arbeit, dargestellt. Der Vergleich der beiden Fliessgelenklinienfiguren in jedem Laststadium zeigt, abgesehen vom Grenzzustand, keine Übereinstimmung. Der Grund dafür scheint in den verwendeten Elementmodellen zu liegen. Zahlreiche Versuchsberichte [12] für Stahlbetonplatten sagen aber aus, dass die Fliessgelenklinienfigur in der vorliegenden Arbeit wirklichkeitsnäher die Rissverteilung in jedem Laststadium simuliert.

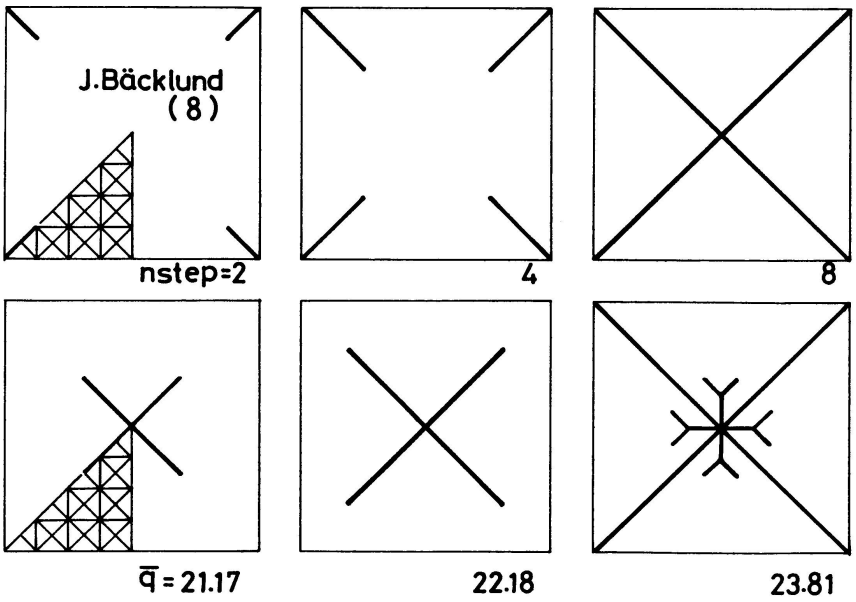

Abb. 6/4. Vergleich mit der Fliessgelenklinienfigur in [8].

Die Last-Mittendurchbiegungskurven sind in dimensionloser Form in Abb. 6/5 aufgetragen.

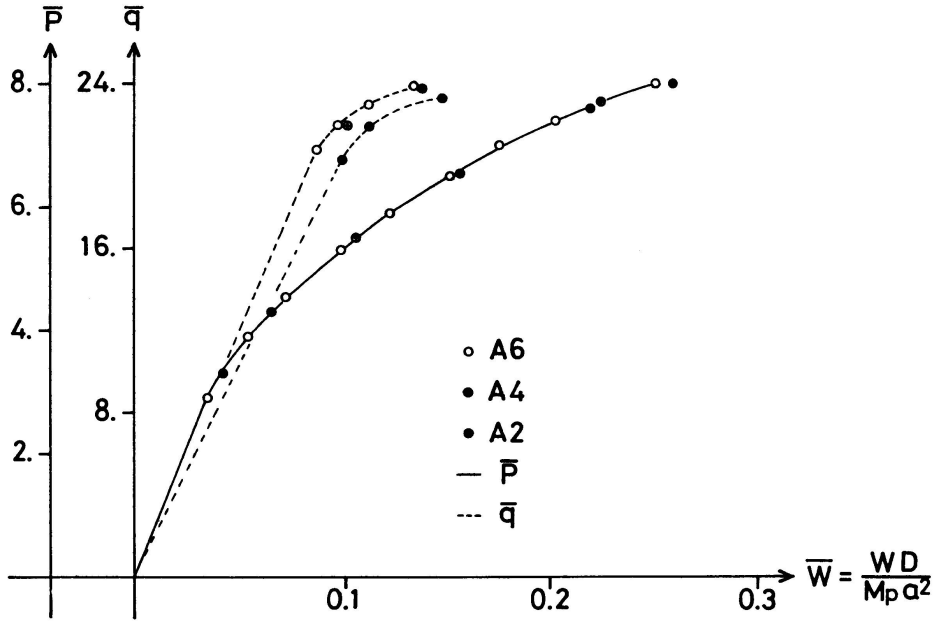

Abb. 6/5. Last-Mittendurchbiegungskurven.

6-2. Pilzdecke mit im Quadratnetz angeordneten Säulen unter gleichförmig verteilter Belastung

Als kinematisch zulässige Fliessgelenklinienfigur untersuchte A. Sawczuk [3] die in Abb. 6/6 *a* bis *c* mit den zugehörigen Grenzlastintensitäten dargestellten drei verschiedenen Möglichkeiten. Die breiten gestrichelten Linien bezeichnen negative Fliessgelenklinien.

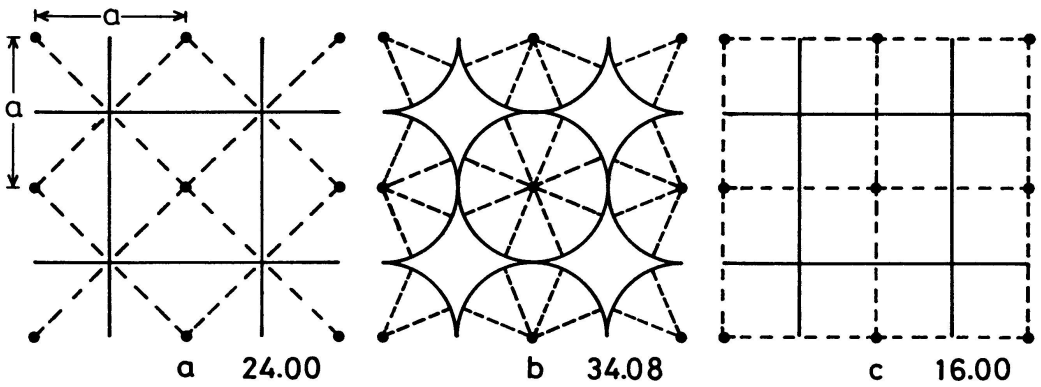

Abb. 6/6. Drei kinematisch zulässige Fliessgelenklinienfiguren von A. Sawczuk [3].

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen wird die Berechnung bei der Elementunterteilung A5 durchgeführt. Die in Abb. 6/7 errechnete Bruchart ergibt die gleiche Grenzlast $\bar{q} = 16.00$ wie die von Sawczuk in Abb. 6/6 *c*. Es treten aber ausserdem die Fliessgelenklinien wie in Abb. 6/6*a* und *b* auf.

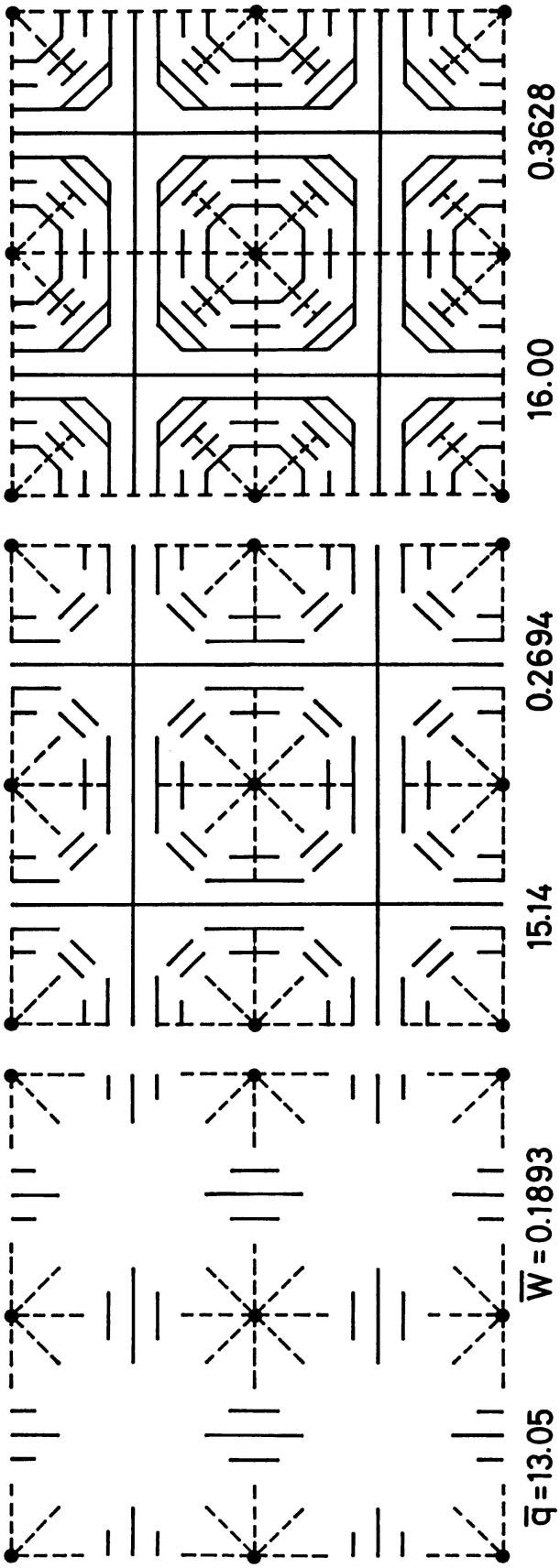

Abb. 6/7. Berechnete Fliessgelenklinienfigur für eine Pilzdecke unter gleichförmig verteilter Belastung.

6-3. *Vergleich mit dem Versuchsergebnis in* [*11*]

Es wird in diesem Beispiel der Vergleich mit dem Versuchsergebnis in [11] vorgenommen, um zu sehen, wie wirklichkeitsnahe das vorgeschlagene Verfahren ein Rissbild beschreiben kann. Das Versuchsmodell ist eine an zwei gegenüberliegenden Seiten eingespannte, an den beiden anderen Seiten frei drehbar gestützte Rechteckplatte unter gleichförmig verteilter Belastung.

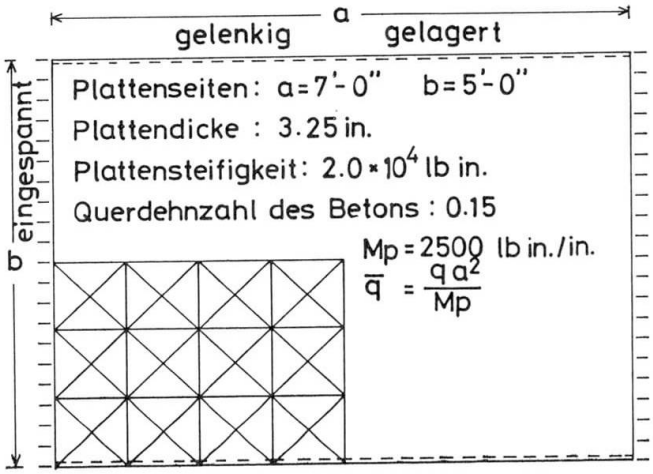

Abb. 6/8. Plattenabmessungen, Stoffgesetz und Elementunterteilung.

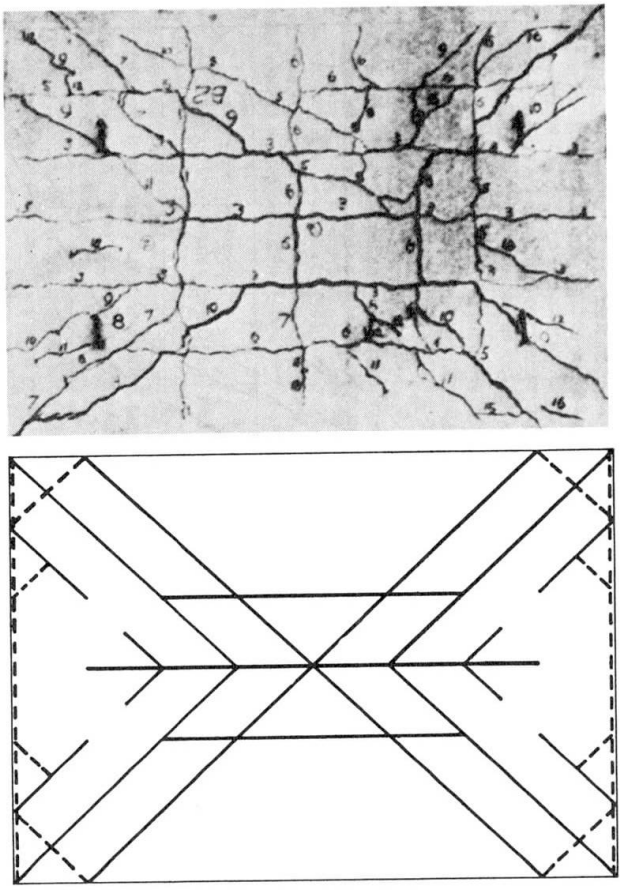

Abb. 6/9. Gegenüberstellung des experimentellen und des rechnerischen Bruchbildes.

Die in [11] angegebenen Plattenabmessungen sind in Abb. 6/8 mit dem in der vorliegenden Arbeit idealisierten Stoffgesetz wiedergegeben. Ein Viertel der Plattenfläche wird in 48 Elemente unterteilt.

Das Foto des Rissbildes im Versuch und das aus der Rechnung gewonnene Bruchbild, aus dem die Grenzlastintensität

$$\bar{q} = 48.90$$

folgt, sind in Abb. 6/9 gegenübergestellt. Zu erkennen ist, dass das rechnerische Bruchbild das wirkliche Rissbild recht gut simuliert. Die Fliessgelenklinienlösung für diesen Fall ist

$$\bar{q} = 47.52,$$

mit der Fliessgelenklinienfigur nach Abb. 6/10.

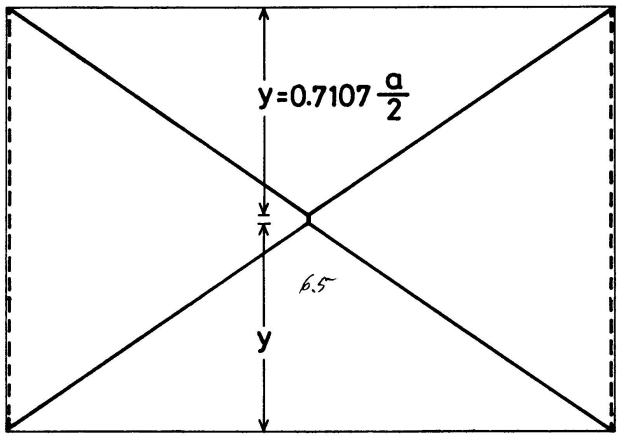

Abb. 6/10. Fliessgelenklinienfigur für $b/a = 0.7143$ in der Fliessgelenklinientheorie.

7. Schlußbemerkungen

Mit dem in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagenen Berechnungsverfahren lässt sich der vollständige Bruchmechanismus eines Gesamtsystems nach einem kürzeren Rechenprozess erreichen als bei bisherigen Untersuchungen, die das Tragverhalten der Stahlbetonplatten im gerissenen Zustand, unter Berücksichtigung der Einflüsse der Rissbildung auf die Herabminderung der Plattensteifigkeit bis zum Bruchversagen verfolgen.

Obgleich es zur verschlechterten Approximation der Last-Verschiebungskurven führt, stimmen die errechneten Grenztragfähigkeiten recht gut mit den Fliessgelenklinienlösungen überein.

Es müssen in der Fliessgelenklinientheorie verschiedene mögliche Fliessmechanismen untersucht werden, um eine möglichst niedrige Grenztraglast zu finden. Das oben entwickelte Berechnungsverfahren enthebt uns der Mühe, kinematisch zulässige Bruchfiguren vorzugeben und sie durch einige Parameter zu definieren, weil ein Bruchmechanismus im Elementnetz automatisch hergestellt wird. Für den Fall von Platten beliebiger Gestalt und mit beliebigen Auflagerbedingungen wird dies besonders vorteilhaft, weil die Methode der finiten Elemente allgemeine Geometrie und Randbedingungen des Tragwerkes leicht erfassen kann.

8. Bezeichnungen

λ^n	Belastungsmultiplikator einer Seite für n-ten Lastschritt.
$\lambda^n_{\min}$	Steigerungsfaktor des Gesamtsystems für n-ten Lastschritt.
Mp	Grenzmoment einer isotrop und schichtweise isotrop bewehrten Platte.
Mnp	Grenzmoment entlang den Fliessgelenklinien.
$Mnpij$	Grenzmoment auf Seite i-j.
$Mnij$	Biegemoment auf Seite i-j.
$dMnij$	Spannungszuwachs auf Seite i-j.
$Msij$	Biegemoment auf Seite i-j.
$Mnsij$	Drillmoment auf Seite i-j.
d	Knotenverschiebungsvektor des Plattenelements.
σxy	Spannungen (Mx, My, Mxy) innerhalb des Elements.
σn	Transformierte Spannungen (Mnl, $Mn2$, $Mn3$) innerhalb des Elements.
Sxy	Verknüpfungsmatrix zwischen d und σxy.
Sn	Verknüpfungsmatrix zwischen d und σn.

Literaturverzeichnis

1. JOHANSEN, K.W.: Yield-line Formulae for Slabs. C & CA, 1972.
2. WOOD, R.H.: Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates. Thames and Hudson, London, 1961.
3. SAWCZUK, A., und Jaeger, T.: Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten. Springer-Verlag, Berlin, 1963.
4. MASSONNET, C.E., und SAVE, M.A.: Plastic Analysis and Design of Plates, Shells and Disks. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London, 1972.
5. WOOD, R.H., und JONES, L.L.: Yield Line Analysis of Slabs. Thames and Hudson, Chatto and Windus, London, 1967.
6. MCNEICE, G.M., und KEMP, K.O.: Comparison of Finite Element and Unique Limit Analysis Solutions for certain Reinforced Concrete Slabs. Pro. of I.C.E., Vol. 43 (1969), S. 629-640.
7. MCNEICE, G.M.: An Elasto-plastic Finite Element Analysis for Plates with Edge Beams. Pro. Symp. on Appl. of FEM in Civil Eng., Nov. 1969, Nashville, S. 529-566.
8. BÄCKLUND, J.: Limit Analysis of Reinforced Concrete Slabs by a Finite Element Method. Pro. Conf. FEM in Civil Eng., McGill Univ., Montreal, 1972. S. 803-840.
9. JOFRIET, J.C., und MCNEICE, G.M.: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slabs with Progressive Cracking. Pro. ASCE, Vol. 97, 1971, ST3, S. 785-806.
10. SCANLON, A.: Time dependent Deflections of Reinforced Concrete Slabs. Ph. D. Dissertation, Department of Civil Eng., Univ. of Alberta, Edmonton, December 1971.
11. BELL, J.C., und ELMS, D.G.: A Finite Element Approach to post-elastic Slab Behavior ACI Publication SP-30. Cracking, Deflection and Ultimate Load of Concrete Slab Systems. Paper SP-30-15, S. 325-344.
12. FRANZ, G.: Konstruktionslehre des Stahlbetons. Band I, Springer-Verlag, Berlin, 1964, s. z.B., S. 293-299.
13. RACTLIFFE, A.T.: Hybrid Yield-Line Finite Element Analysis. IABSE Publications, Vol. 35-I, 1975, S. 169-183.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit versucht, mit dem hybriden Gleichgewichtsmodell ein Berechnungsverfahren zur Grenztraglastuntersuchung von querbelasteten Stahlbetonplatten zu entwickeln. Unter der Voraussetzung, dass der räumliche Grenz-

zustand einer Platte auf ein zweidimensionales Biegeproblem reduziert werden darf, wird der Bruchmechanismus in einer relativ kurzer Rechenzeit erreicht. Im Gegensatz zur üblichen Fliessgelenklinientheorie muss hier die Bruchfigur nicht vorgegeben werden, sondern sie wird automatisch hergestellt. Numerische Ergebnisse werden mit den Fliessgelenklinienlösungen verglichen.

Summary

The present paper tries to determine by the finite element method the ultimate load of transversally loaded reinforced concrete plates. The authors intend by aid of the hybrid equilibrium model an analysis of the ultimate load, taking into account the elastoplastic deformations of the plates up to the ultimate mechanism. The numerical results are compared with the solutions obtained by the yield line method.

Résumé

L'article essaie de déterminer au moyen de la méthode des éléments finis la charge ultime de dalles en béton armé chargées transversalement. A l'aide du modèle hybride d'équilibre, les auteurs développent un procédé d'analyse de la charge limite, en considérant les déformations élastoplastiques des dalles jusqu'au mécanisme de rupture. Les résultats numériques sont comparés aux solutions obtenues par la méthode des lignes de rupture.