

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 35 (1975)  
  
**Artikel:** Wieviel Spaltzugbewehrung ist nötig?  
**Autor:** Almasi, Josef  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26943>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Wieviel Spaltzugbewehrung ist nötig?

*On the Necessary Amount of Transverse Reinforcement in the Anchorage Zone of Prestressed Beams*

*Quelle est l'armature de frettage nécessaire dans la zone d'ancrage des câbles de précontrainte?*

DR. JOSEF ALMASI

Technische Universität Budapest, Ungarn

### Einführung

Die Einleitung konzentrierter Kräfte in Stahlbetonscheiben führt in der Krafteinleitungszone zu Spaltzugspannungen. Diese treten im wesentlichen in einem Bereich auf, der nach einem Prinzip von St. Venant auf eine Länge gleich der grössten Querschnittsabmessung begrenzt ist. Diese praktische Begrenzung liess sich auch versuchstechnisch bestätigen und wird bei den folgenden Untersuchungen zugrundegelegt.

Es ist offensichtlich, dass die in der Krafteinleitungszone auftretenden Spaltzugkräfte in Stahlbetonscheiben zu Rissen führen können. Die Spaltzugkräfte müssen deshalb durch eine zweckmässig angeordnete und ausreichend bemessene Spaltzugbewehrung abgedeckt werden, um das Risseverhalten und die Rissbreiten günstig zu beeinflussen. Das sichere Erkennen von Zugzonen ist daher von besonderer Wichtigkeit. Die Berechnung der Grösse der Spaltzugkräfte selbst ist jedoch im allgemeinen nur näherungsweise möglich. Auch die Spannungen in der Spaltzugbewehrung lassen sich bis heute nicht direkt bestimmen.

Offensichtlich ist des weiteren, dass die Rissebildung im Beton der Krafteinleitungszone einen grossen Einfluss auf den Spannungszustand in der Stahlbetonscheibe hat. Die elastische Scheibentheorie ist nicht in der Lage, diesen Effekt zu berücksichtigen.

Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist, ein Berechnungsverfahren bekannt zu machen, welches erlaubt, die Rissebildung zu berücksichtigen. Das Ergebnis einer Berechnung nach dem zu erläuternden Verfahren sind die Spannungen in Beton und Bewehrung sowie die Rissbreiten.

### Anforderungen an die Spaltzugbewehrung

Die Spaltzugbewehrung soll die folgenden Anforderungen erfüllen:

— sie soll das Gleichgewicht der Kräfte sicherstellen;

- sie soll die Risse auf lokale Zonen beschränken;
- sie soll die Breite der Risse auf festzulegende Werte beschränken (zB 0,2 mm), bzw. der Zuwachs der Stahlspannung nach Bildung der Risse soll auf festzulegende Werte beschränkt bleiben (zB 1500 kp/cm<sup>2</sup>);
- sie soll eine gleichmässige Lastverteilung fördern (Konstruktive Erwägung).

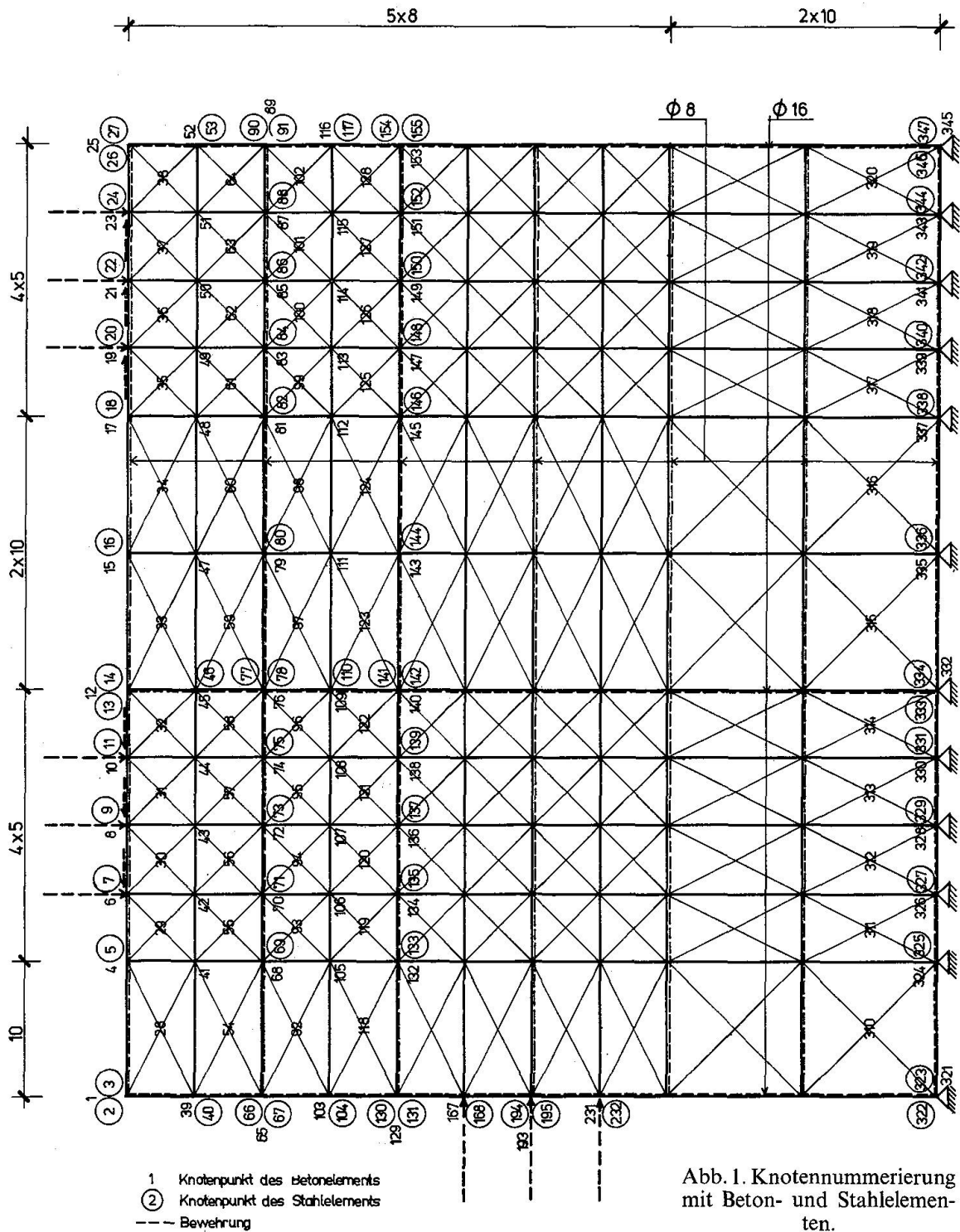


Abb. 1. Knotennummerierung mit Beton- und Stahlelementen.

## Berechnungsverfahren

Das Berechnungsverfahren basiert auf der Methode der Finiten Elemente [1].

Für den Fall von Stahlbetonkonstruktionen ist hier nicht nur das Kontinuum in Elemente aufzuteilen, sondern auch die Bewehrung muss in Elemente aufgeteilt werden. Dass Zusammenwirken von Beton und Stahl ist durch «Federn» zu sichern, welche den Verbund charakterisieren. Zur Erläuterung dient Abb. 1.

Das der Berechnung zugrunde gelegte Modell muss die folgenden Anforderungen erfüllen:

- es soll die Eigenschaften des Stahlbetons möglichst gut wiedergeben;
- es muss auf die Tatsache Rücksicht nehmen, dass die Risse im Beton wie auch das Fliessen im Stahl lokal auftreten;
- es muss davon ausgehen, dass im Beton lokal grosse Betonstauchungen entstehen;
- es soll die Spannungen in der Bewehrung liefern;
- es soll die Abschätzung der Rissbreiten gestatten.

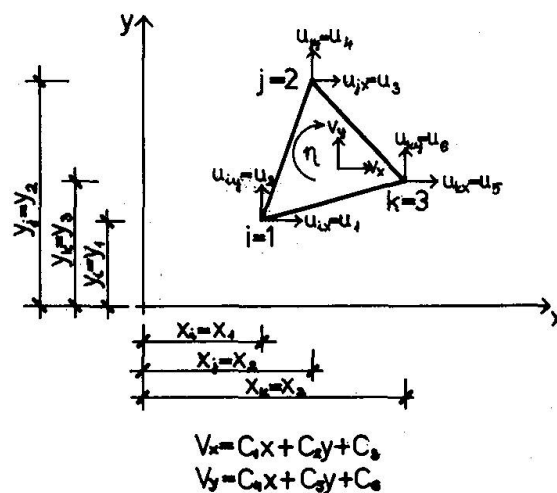


Abb. 2. Betonelement.

## Die idealisierten Finiten Elemente

a) Die Scheiben- oder Betonelemente

Der Beton der Krafteinleitungszone wird in Dreieckelemente aufgeteilt. Die Dreieckelemente haben konstante Dehnungen. Die kinematischen Eigenschaften und die Ansätze sind in Abb. 2 angegeben. Durch «Kondensierung» am Elementniveau erhält man Viereckelemente. Die Elastizitätsmatrix entspricht für Spannungen im Hookeschen Bereich derjenigen für homogenes, isotropes Material:

$$[D_B] = \frac{E_1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Für Bereiche, in denen die Spannungen nicht proportional zu den Dehnungen sind, gilt die folgende Elastizitätsmatrix:

$$[\underline{D}_B] = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \begin{bmatrix} 1 & \nu_{12} & 0 \\ \nu_{21} & E_2/E_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{4} \frac{E_1}{1 + \nu_{12}} \frac{E_2}{1 + \nu_{21}}} \end{bmatrix}$$

Wenn die Zugspannungen in einem Element in einer Hauptrichtung bestimmte Werte überschreiten, so bildet sich aufgrund der gemachten Voraussetzungen ein Element mit orthotropen Eigenschaften und senkrecht zu den Hauptzugspannungen treten Risse auf. Für diesen Fall lautet die Elastizitätsmatrix:

$$[\underline{D}_B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Im Sinne der eingangs erwähnten Anforderungen sind grosse Betonstauchungen zu gestatten. Erreicht die Betonstauchung die Bruchstauchung, so wird das betreffende Element nicht von der Tragwirkung ausgeschaltet, sondern nimmt weiter an der Kraftübertragung teil; einzig der zugehörige Elastizitätsmodul ist klein. Diese Vorstellung wird durch Versuchsergebnisse bestätigt, solange in der Umgebung liegende «stabile» Elemente Hilfe leisten. Versagen der Elemente auf Zug findet statt, wenn die Hauptzugdehnungen in den beiden Hauptrichtungen zugelassene Zugdehnungen überschreiten.

#### b) Stab- oder Stahlelemente

Stahlelemente sind Stabelemente, welche nur in axialer Richtung und senkrecht dazu beansprucht sind. Die Anzahl der Knotenverschiebung ist demnach zwei (siehe Abb. 3). Die Elastizitätsmatrix hat die folgende Form:

$$[\underline{D}_s] = \begin{bmatrix} E_s F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lokales Fliessen der Stahlelemente ist möglich. Ihr Elastizitätsmodul wird für weitere Laststufen auf denjenigen Wert festgelegt, der unmittelbar vor dem Fliessen gilt.

#### c) Verbund- oder Federelemente

Der Verbund zwischen Bewehrung und Beton wird mittels Federelementen simuliert. Die Federn ermöglichen Relativverschiebungen zwischen Bewehrung und Beton in Richtung der Bewehrung und senkrecht dazu.

Die Federn sind als dimensionslose Elemente zu betrachten (siehe Abb. 4). Wichtig sind ihre mechanischen Eigenschaften. Die Steifigkeit in Richtung der Bewehrung lässt sich wie folgt ausdrücken:

$$k_h = E_t \cdot m \cdot \pi \cdot d$$

In diesem Ausdruck ist

$$E_t = d\tau/du$$

und lässt sich aus Ausziehversuchen mit Stählen und Messung der Haftspannungs-Verschiebungs-Charakteristik bestimmen.  $m$  ist die Anzahl der Bewehrungsstäbe pro Federelement und  $d$  der Stabdurchmesser. Die Federsteifigkeit senkrecht zur Bewehrung wird im folgenden zu Null angenommen, da ausreichende Versuchsergebnisse nicht zur Verfügung stehen.

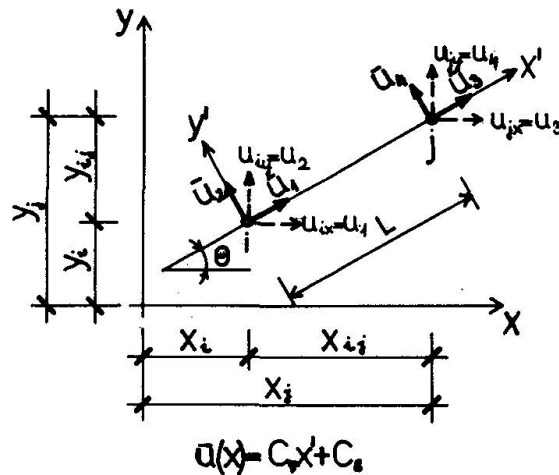


Abb. 3. Stahlelement.

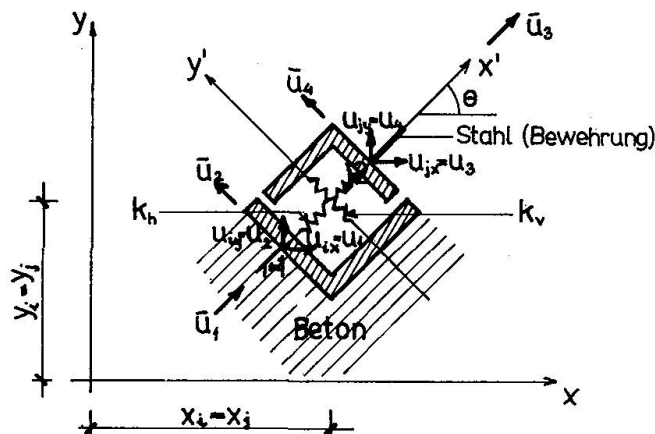


Abb. 4. Federelement.

### Das Rechenprogramm

Auf der Basis der vorgestellten Finiten Elemente hat der Verfasser an der Eidg. Technischen Hochschule in Zürich ein Rechenprogramm geschrieben. Testläufe wurden im Rechenzentrum auf CDC 6400/6500 Computern durchgeführt.

Die Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$[\underline{K}] \cdot \{u\} - \{P\} = \{0\}.$$

Bei nichtlinearem Stoffgesetz ist der Zusammenhang zwischen Spannungen  $\sigma$  und Dehnungen  $\varepsilon$  wie folgt:

$$d\{\sigma\} = [D(\sigma)] \cdot d\{\varepsilon\}.$$

Aufgrund dieser Gleichung ist die Steifigkeitsmatrix auch eine Funktion der Verschiebungen  $u$ .

$$[K(\{u\})] \cdot \{u\} - \{P\} = \{0\}$$

und

$$[K] d\{u\} - d\{P\} = \{0\}.$$

Die Lösung dieser Gleichungen geschieht durch Iteration (siehe Abb. 5). Im Verlauf der Berechnung werden die angreifenden Kräfte schrittweise gesteigert und das jeweils zugehörige Spannungsfeld ermittelt. Die Festlegung einer vernünftigen Iterationsbedingung bereitet dabei einige Schwierigkeiten. Man kann zum Beispiel den maximalen Unterschied zwischen den Verschiebungen zweier Rechenschritte begrenzen, oder aber das Gleichgewicht kontrollieren.

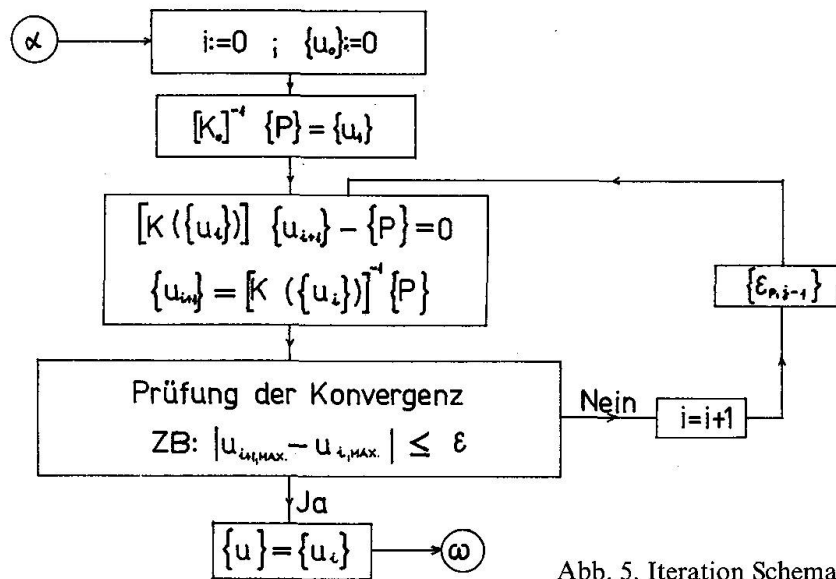


Abb. 5. Iteration Schema.

### Numerische Ergebnisse

Zurückkehrend zu der im Titel dieses Aufsatzes gestellten Frage sollen in der Folge die Ergebnisse zweier numerischer Beispiele diskutiert werden.

#### Beispiel: Symmetrische Kräfteeinleitung

Die Situation entspricht Abb. 6. Mit einem elastischen Lösungsverfahren [4] erhält man bei  $V = 44$  Mp bzw. 80 Mp Vorspannkraft eine maximale bezogene Spaltzugkraft von  $N_y = 152$  kp/cm bzw. 280 kp/cm. Abb. 6 zeigt eine auf diese Beanspruchung hin etwa abgestimmte Bewehrung.

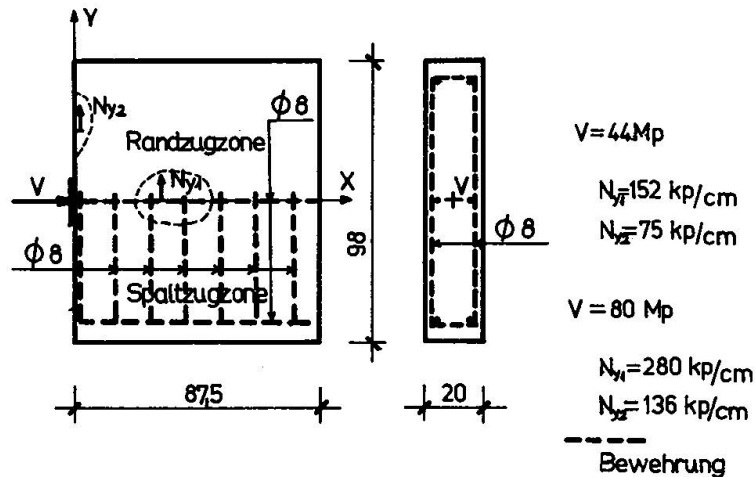
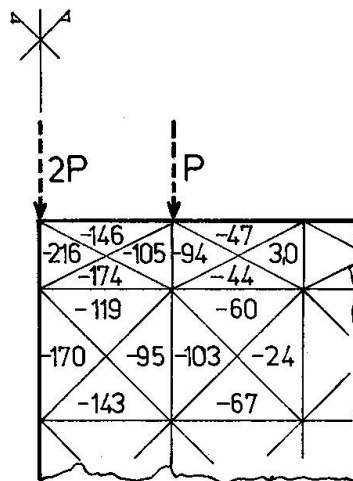


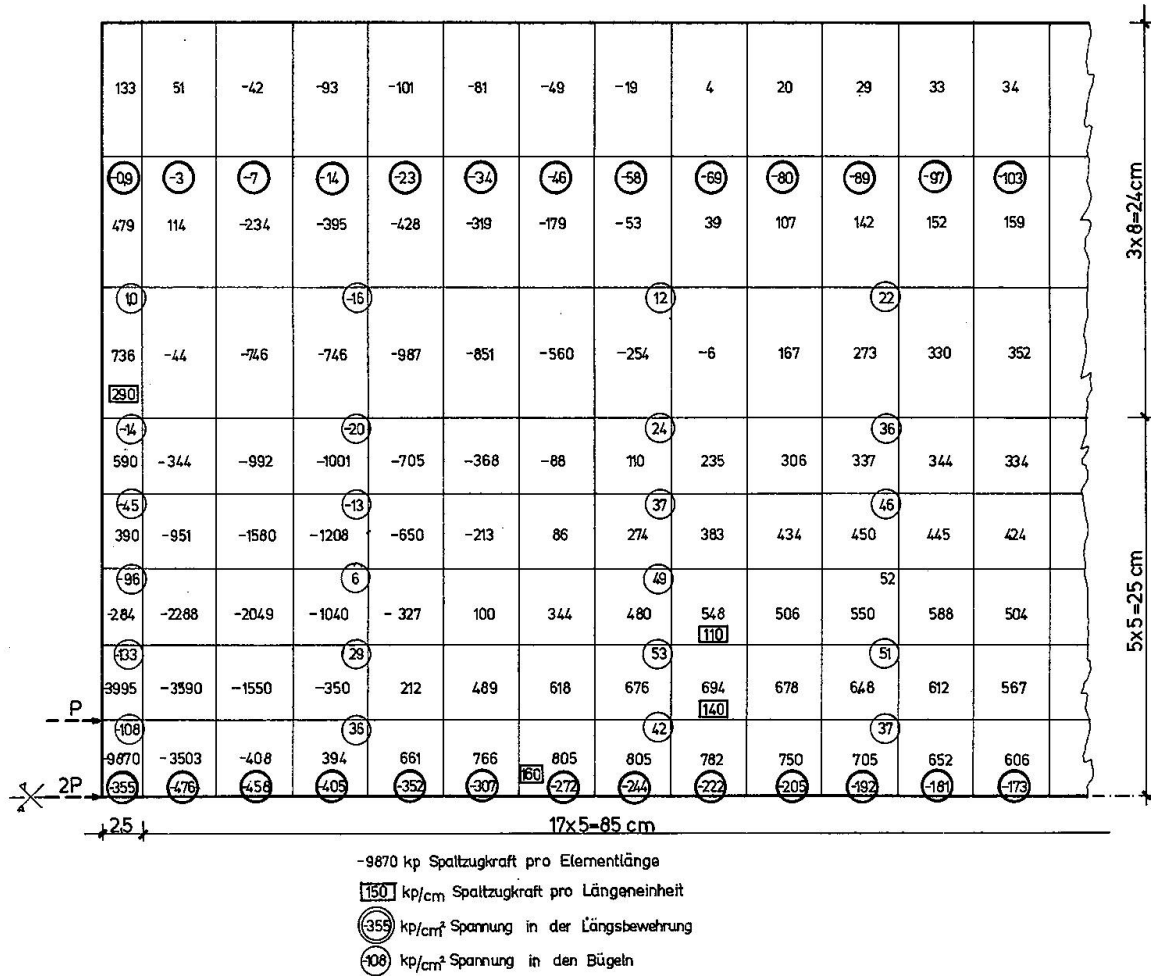
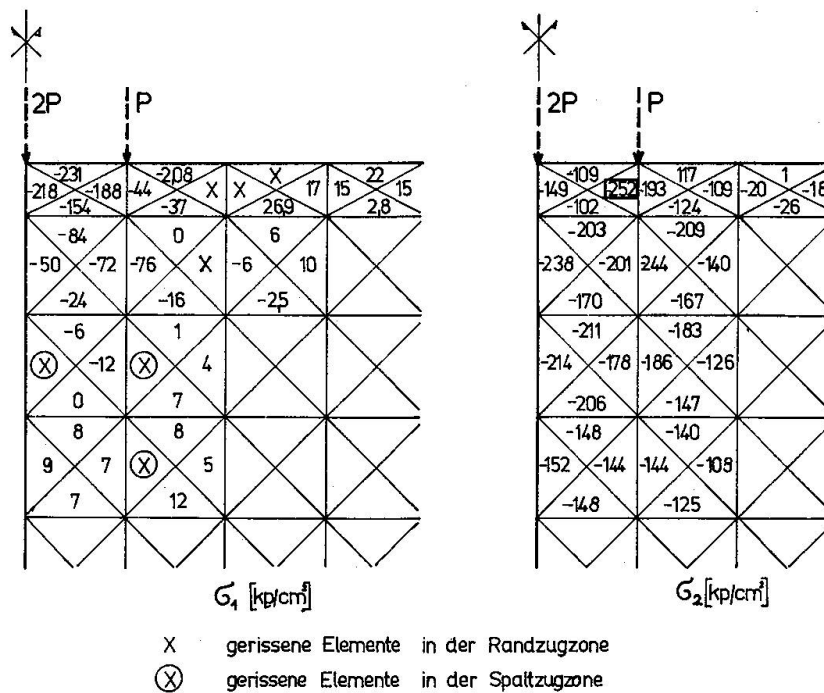
Abb. 6. 1. Beispiel.

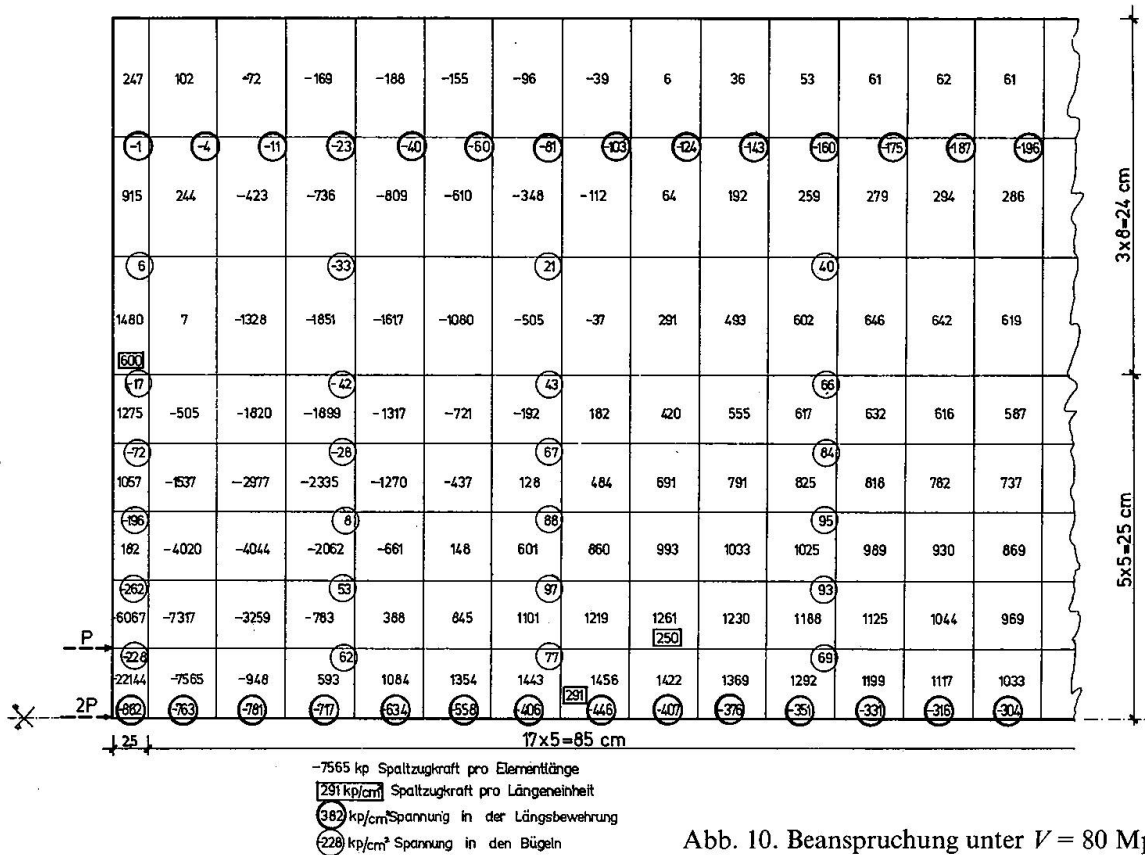
Die Spannungen  $\sigma_x$  in  $X$  - Richtung unter  $V = P + 2P + P = 44 \text{ Mp}$  sind in Abb. 7 dargestellt. Die auf die Elementlänge bezogenen Spaltzugkräfte sowie die Spannungen in den Bügeln und in der Längsbewehrung zeigt Abb. 8. Im Bereich maximaler Werte sind auch die Spaltzugkräfte pro Längeneinheit eingetragen. Diese entsprechen in der Spaltzugzone der elastischen Lösung und zeigen in der Randzugzone erhebliche Unterschiede. Die Ursache ist wohl darin zu suchen, dass die Risse zuerst in der Randzugzone auftreten und damit das Kräftespiel in der Scheibe beeinflussen.

Die unter  $V = 80 \text{ Mp}$  entscheidenden Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  sind in Abb. 9 dargestellt. Die maximale Beton-Druckspannung beträgt  $-252 \text{ kp/cm}^2$ , die Druckstauchung  $-2,47\text{‰}$ , die Zugdehnung  $0,24\text{‰}$ . Unter Annahme eines Rissabstandes von  $\Delta l \cong 100 \text{ mm}$  lässt sich die Rissbreite zu  $a_n = \Delta l \cdot \varepsilon_{\max} = 100 \cdot 0,00024 = 0,024 \text{ mm}$  abschätzen. Die Grösse der Zugspannungen in Bügeln und Längsbewehrung können Abb. 10 entnommen werden. Die maximale Zugspannung in den Bügeln beträgt  $97 \text{ kp/cm}^2$ .

Abb. 7. Spannungen  $\sigma_x [\text{kp/cm}^2]$  bei  $V = 44 \text{ Mp}$ .



Abb. 8. Beanspruchung unter  $V = 2 + 2P + P = 44 \text{ Mp}$ .Abb. 9. Hauptspannungen bei  $V = 80 \text{ Mp}$ .

Abb. 10. Beanspruchung unter  $V = 80$  Mp.

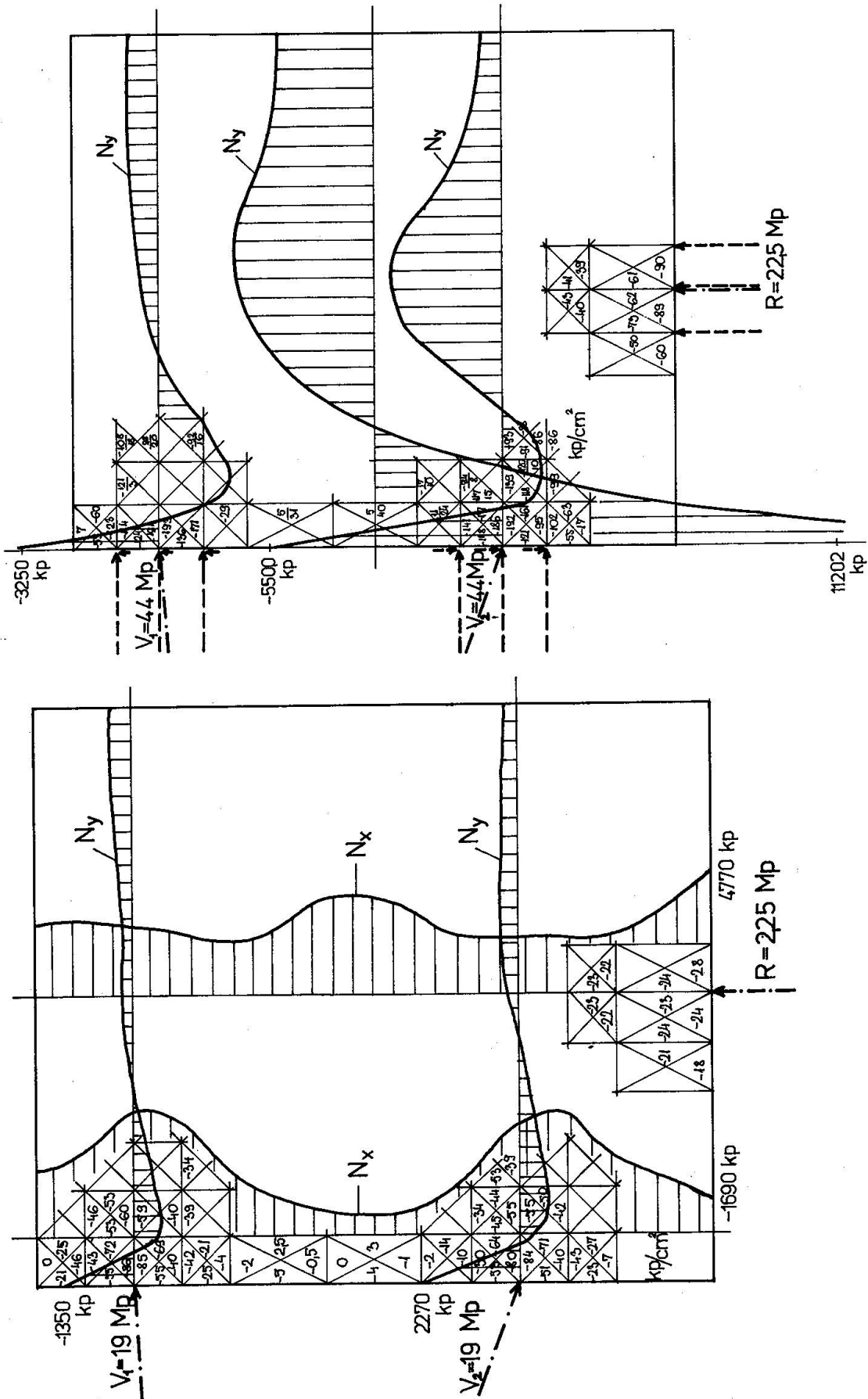
### Beispiel: Unsymmetrische Krafteinleitung

Abb. 1 zeigt die idealisierte Krafteinleitungszone und ihre Bewehrung. Schräg gerichtete Vorspannkräfte werden in Komponenten zerlegt, desgleichen die Auflagekräfte. Die Laststeigerung erfolgt in zwölf Stufen. Das Anwachsen der auf die Längeneinheit bezogenen Kräfte  $N_x$ ,  $N_y$ , der Spannungen  $\sigma_x$  und der Rissbildung ist aus den Abb. 11 bis 15 ersichtlich. Der erste Riss erscheint bei  $V_1 = V_2 = 19$  Mp (siehe Abb. 11) in der Randzugzone. Die ersten Risse in der Spaltzugzone treten unter  $V_1 = V_2 = 38$  Mp auf. Das Anwachsen der Zahl der gerissenen Elemente und die Rissbreiten lassen sich aus den Abb. 12 bzw. 13 entnehmen. Die Rissbreiten sind kleiner als etwa 0,1 mm. Die Spannungen  $\sigma_x$  und die bezogenen Spaltzugkräfte  $N_y$  unter der Höchstlast sind in Abb. 12 dargestellt. Die Spannungen in den Bügeln und in der Längsbewehrung zeigen schliesslich die Abb. 14 und 15. Die grössten Werte übersteigen  $500 \text{ kp/cm}^2$  nicht.

Bei der Beurteilung der Ergebnisse ist allerdings zu beachten, dass sie stark von den getroffenen Annahmen abhängen. Eine Änderung dieser Annahmen wirkt erheblich auf die Ergebnisse zurück. Besonders empfindlich sind die Ergebnisse in Bezug auf die gewählte Verbundcharakteristik zwischen Beton und Bewehrung.

### Vergleich der Ergebnisse mit Versuchen

Eine grosse Anzahl von Versuchen wurden mit Werkstoffen durchgeführt, die dem Verhalten des Stahlbetons nicht entsprechen. Hierzu gehören in erster Linie

Abb. 12. Spannungen  $\sigma_x$  Kräfte  $N_y$  und Rissbild bei Laststufe 12.Abb. 11. Spannungen  $\sigma_x$  und Kräfte  $N_x$  bzw  $N_y$  bei Laststufe 3. (erste Risse).

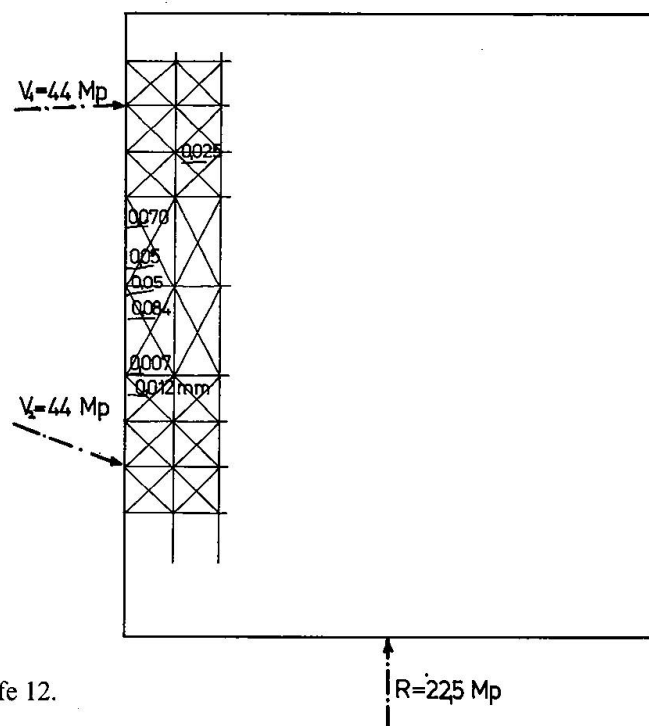


Abb. 13. Rissbreiten bei Laststufe 12.

spannungsoptische Versuche, die im Grunde genommen für den vorliegenden Fall nur Informationscharakter haben.

Versuche an Stahlbetonscheiben haben unter anderen TAYLOR [6] und TASSI-WINDISCH [5] durchgeführt. TAYLOR wiederholte die Versuche von Row und fand abweichende Ergebnisse. Ein Vergleich ist deshalb nur qualitativ möglich, insbesondere in Bezug auf das Rissbild. Sowohl für das erste als auch für das zweite Beispiel wurden die ersten Risse in der Randzugzone neben Krafteinleitungsstellen beobachtet und bestätigen damit die Ergebnisse der vorliegenden Berechnungsmethode.

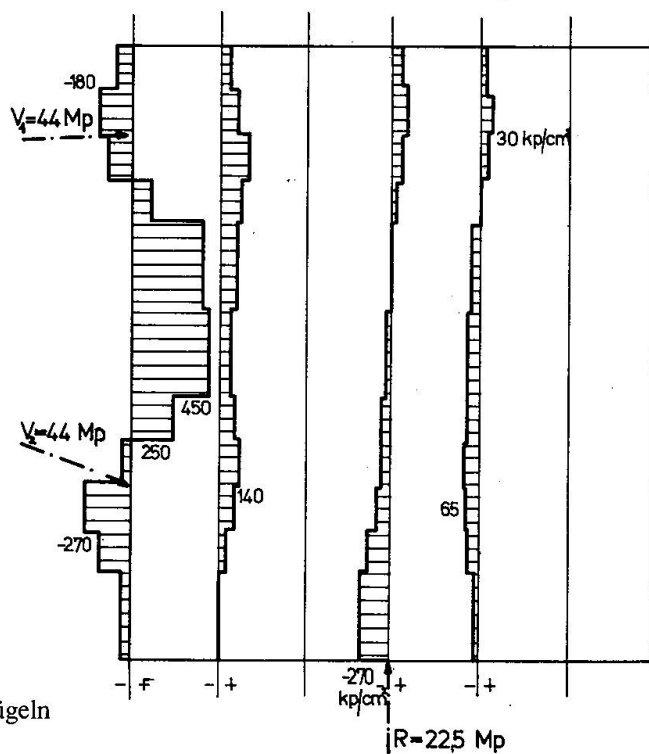


Abb. 14. Spannungen in den Bügeln bei Laststufe 12.

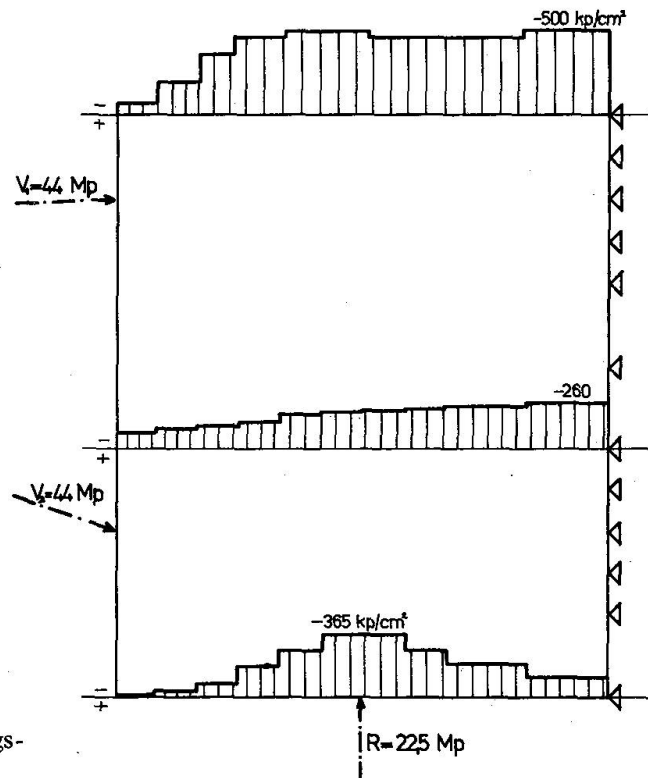


Abb. 15. Spannungen in der Längsbewehrung bei Laststufe 12.

### Folgerungen

Sowohl die Ergebnisse der vorgeschlagenen Berechnungsmethode als auch die Versuche an Stahlbetonscheiben zeigen, dass die ersten Risse in der Randzugzone erscheinen. Diese Risse verändern das elastische Kräftespiel. Die Risse in der Spaltzugzone treten später auf, die Rissbreiten sind in dieser Zone kleiner und die auftretenden Zugkräfte näher bei den Ergebnissen einer plastischen Berechnung aufgrund der konventionellen Scheibentheorie. Es zeigt sich auch, dass es normalerweise nicht möglich ist, eine rissefreie Spaltzugzone zu erhalten. Es geht vielmehr darum, eine zweckmässig angeordnete und vernünftig bemessene Bewehrung einzulegen, mit welcher die Rissbreiten unter einer erwünschten Grösse gehalten werden.

Für die beiden Beispiele wurde die Bügelbewehrung nach der konventionellen elastischen Lösung bestimmt, und es zeigte sich, dass die — geschätzten — Rissbreiten kleiner als etwa 0,1 mm bleiben. Dies lässt den Schluss zu, dass eine konventionell bestimmte Bewehrung die Rissbreiten unter den normalerweise gewünschten Werten von 0,1 bis 0,2 mm halten kann. Inwieweit hier jedoch noch unausgeschöpfte Einsparungsmöglichkeiten bei der Bemessung der Bewehrung liegen, bedarf weiterer analytischer und experimenteller Untersuchungen.

### Nachwort

Die vorliegende Arbeit entstand zu wesentlichen Teilen während meines Aufenthaltes am Lehrstuhl für Baustatik, Stahlbeton- und Brückenbau an der E.T.H. Zürich.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Jörg Schneider danken für die mir gewährte Unterstützung und auch für die Hilfe bei der Redaktion des Aufsatzes.

### Literatur

1. ZIENKIEWICZ, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, London, 1971.
2. NGO, D. and SCORDELIS, A.: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams. J. ACI Proc., V. 64, No. 3, March 1967, pp. 152-163.
3. NILSON, A.: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method. J. ACI Proc., V. 65, No. 9, Sept. 1968, pp. 757-766.
4. KAMMENHUBER, J. and SCHNEIDER, J.: Arbeitsunterlagen für die Berechnung vorgespannter Konstruktionen. Zürich, 1974.
5. TASSI, G. and WINDISCH, A.: Analysis and Model Testing of the Anchorage Zone of Post-Tensioned Beams. FIP VII, Congress, New York, 1974.
6. TAYLOR, S.J.: Anchorage bearing stresses. ICE, 1968, Conference on Prestressed Concrete Pressure Vessel, 1967.
7. ALMASI, J.: Berechnung von Stahlbeton-Elementen mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente. Nicht publiziert, in ungarisch, Bp., 1974.

### Zusammenfassung

Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist, ein Berechnungsverfahren bekannt zu machen, welches erlaubt, Spannungszustände unter Berücksichtigung der Rissebildung zu bestimmen. Das Berechnungsverfahren basiert auf der Methode der finiten Elemente. Die praktische Anwendung wird anhand von zwei numerischen Beispielen erläutert, für welches die Spaltzugspannungen und die Rissebildung im Bereich der Krafteinleitungszone berechnet worden sind. Die beiden berechneten Beispiele zeigen, dass eine konventionell bestimmte Bügelbewehrung das Gleichgewicht sicherstellt und die Rissbreiten unter den normalerweise gewünschten Werten von 0,1 bis 0,2 mm halten kann.

### Résumé

La contribution présente un procédé de calcul permettant de déterminer des états de tension en tenant compte de la formation de fissures. Le procédé de calcul est basé sur la méthode des éléments finis. L'application pratique est faite au moyen de deux exemples numériques pour lesquels les tensions dans la zone d'ancrage des câbles de précontrainte et la formation de fissures ont été calculés. Les deux exemples calculés montrent qu'une armature d'étriers déterminée selon les règles conventionnelles assure l'équilibre et que la largeur des fissures peut être maintenue au-dessous des valeurs normalement admissibles de 0,1 à 0,2 mm.

### Summary

The aim of the present contribution is to notify a computation procedure which allows to determine tension states in taking into account the formation of cracks. The calculation procedure is based on the finite element method. The practical application is explained by two numerical examples wherein the tension in the anchorage zone of prestressed beams and the formation of cracks have been calculated. The two calculated examples show that the transverse reinforcement determined in the conventional manner assures the equilibrium and maintains the width of cracks below the usual values of 0.1 to 0.2 mm.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide