

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 35 (1975)

Artikel: Réaction dynamique des structures soumises aux charges mobiles
Autor: Khouday, A. / Proulx, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-26934>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Réaction dynamique des structures soumises aux charges mobiles

Dynamic Response of Structures to Moving Loads

Dynamisches Verhalten durch bewegliche Lasten beanspruchter Bauwerke

A. KHOUDAY

Ing., M.Sc., candidat au grade de docteur ès sciences, Université Laval, Québec. Bureau d'études Lalonde, Girouard, Letendre et Associés, Montréal.

J. PROULX

Ingénieur-conseil, Ph.D., Bureau d'études Beau-lieu, Poulin et Robitaille, ex-professeur agrégé, Université Laval, Québec.

Introduction

Généralités

Le problème du comportement dynamique des structures soumises à des charges mobiles a toujours incité un intérêt spécial tant dans le domaine du génie civil [1] et mécanique que dans le domaine du génie naval et aéronautique. Dans tous ces domaines, les études théoriques, en laboratoire, et sur chantier se sont intensifiées ce dernier quart de siècle. Ces études visaient une meilleure connaissance des paramètres et du comportement de ces systèmes et une élaboration de méthodes de calcul pour estimer la valeur de leurs réponses dynamiques. Les sujets principaux de ces études étaient le pourcentage d'amplification dynamique, les effets de fatigue et la limitation des fréquences nuisibles tant aux structures qu'aux humains qui les utilisent.

La méthode proposée dans cette publication présente un outil maléable et efficace pour traiter les problèmes parfois complexes des réponses dynamiques des structures soumises à des charges mobiles. Une réponse déterministe dynamique peut être calculée en premier lieu en réduisant le système à une force mobile constante. L'écart type de cette réponse peut être aussi estimé si l'excitation mobile est due à plusieurs facteurs ou si le système mobile est complexe.

Dans la pratique courante du génie civil, il n'est pas d'usage de compléter l'analyse statique des structures par une analyse dynamique. Les différents codes fournissent plusieurs critères et facteurs pour tenir compte de l'effet dynamique. Les ponts sont peut-être l'exemple le plus important de ces genres de structures. Mais l'évolution et la diversité des modes et matériaux de construction des ponts et la tendance vers une utilisation de véhicules plus rapides et plus lourds incitent à une révision des différents codes et méthodes de calcul et à une sélection de nouveaux critères limitant les effets nocifs pouvant être causés à ces structures et aux voyageurs qui les utilisent. Les codes et méthodes de calcul utilisés actuellement

sont basés sur une conception statique de l'application de la charge et du comportement du pont. Or ni la charge ni le pont ne représentent l'aspect d'un système statique. Le véhicule se rapproche plutôt d'une force perturbatrice mobile et le pont possède des caractéristiques vibratoires propres. Les spécifications d'impact actuelles, quoique encore valables puisqu'elles représentent un pourcentage tolérable d'augmentation de la charge statique, n'ont aucune justification théorique ou expérimentale acceptable pour être appliquées à la grande diversité des ponts, présents et futurs.

Il est inutile pour des spécifications futures et générales de proposer une méthode de calcul dynamique. Une équivalence statique de l'effet dynamique et certains critères appropriés peuvent être élaborés dans le but de conserver l'aspect statique du problème et la simplification des calculs. Mais pour que de telles solutions s'avèrent justifiables, une connaissance du comportement vibratoire du système pont-véhicule, une évaluation de la grandeur des réponses dynamiques et une estimation des effets de la charge vive sur la vie de service de la structure, doivent être à la base de cette équivalence statique. La méthode proposée, à part sa contribution au domaine de la recherche se rapportant à l'étude des ponts soumis à la circulation, peut s'appliquer facilement dans le bureau d'ingénieurs pour l'étude des cas spéciaux de structures soumises à des charges mobiles.

Aperçu de la méthode

La formulation du problème dynamique des structures soumises à des charges mobiles diffère en complexité suivant que la structure est supposée de dimension finie ou infinie, ou qu'elle est représentée par un espace ou un semi-espace élastique traversé par une force à vitesses subsonique, transonique ou supersonique. L'attribution à la charge mobile des forces d'inertie et des caractéristiques dynamiques propres rend le problème plus complexe.

La méthode développée dans cette publication s'applique à une structure de forme quelconque et de dimension finie. L'amplitude, la répartition, la fonction du mouvement et le trajet de la charge sont arbitraires. La méthode est basée sur la technique des éléments finis pour calculer les valeurs et modes propres et sur l'analyse modale pour calculer la réponse. L'originalité et le fond de la méthode consistent à ne pas discrétiser les forces aux nœuds comme l'exige la technique de l'élément fini. La discrétisation des forces aux nœuds n'est nécessaire que dans le cas d'une charge mobile possédant une force d'inertie [2] ou des caractéristiques dynamiques propres et dans le cas d'un changement des caractéristiques élastiques [3] de la structure en fonction du temps. Dans ces cas, les coefficients des matrices formant l'équation dynamique du système ne sont plus constants, l'analyse modale n'est plus applicable que par étapes de petits intervalles et une solution par les méthodes de résolution numérique pas à pas est souhaitable.

Méthode classique

L'équation dynamique du système utilisant la technique des éléments finis s'écrit [4] sous la forme matricielle suivante:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P \quad (1)$$

La matrice colonne U représente les déplacements nodaux. Les matrices M , C et K sont les matrices de masses, d'amortissement et de rigidité de la structure assemblée. La matrice colonne P représente les charges nodales équivalentes. En appliquant l'analyse modale et en supposant que la matrice d'amortissement est proportionnelle soit à la matrice des masses, soit à la matrice de rigidité, ou soit à l'amortissement critique, l'équation (1) du système devient non couplée et prend la forme suivante:

$$\bar{M}\ddot{Q} + \bar{C}\dot{Q} + \bar{K}Q = \bar{P} \quad (2)$$

Les matrices \bar{M} , \bar{C} et \bar{K} sont diagonales et égales respectivement à $F^T M F$, $F^T C F$ et $F^T K F$. La matrice colonne Q représente les amplitudes modales (coordonnées généralisées) et est égale à $F^{-1}U$. \bar{P} est la matrice colonne des forces en coordonnées généralisées et est égale à $F^T P$. F est la matrice des modes propres et F^T sa transposée. Le retour aux coordonnées de la structure s'effectue par une prémultiplication des coordonnées généralisées par la matrice des modes propres F .

La solution de l'équation (2), quoiqu'elle diffère peu, suivant l'hypothèse faite au sujet de l'amortissement, s'exprime toujours sous la forme d'une intégrale de Duhamel [4]. Dans le cas d'une charge mobile concentrée ou d'une charge mobile répartie sur une surface limitée, la réponse de la structure est souvent calculée par l'une des deux procédures suivantes. Dans la première procédure, la matrice colonne \bar{P} est formée en premier lieu par assemblage, combinaison et superposition des forces nodales dues au déplacement de la charge sur la structure, puis l'équation (2) est résolue. Dans la seconde procédure, la réponse de la structure en coordonnées généralisées est une superposition des réponses dues au parcours de la charge sur chaque élément à part. Dans cette dernière procédure, les conditions finales de déplacement et de vitesse sont à noter au moment du départ de la charge de chaque élément traversé pour être prises en considération dans la superposition.

Méthode proposée

La modification proposée à la méthode de calcul basée sur la technique des éléments finis se situe au niveau du calcul des forces en coordonnées généralisées, soit la matrice colonne \bar{P} . Cette matrice est calculée à l'aide de la notion de «modes-trajet» et d'une manière équivalente à celle utilisée pour une structure à milieu continu. L'équation (2) prend à ce moment la forme suivante:

$$\bar{M}\ddot{Q} + \bar{C}\dot{Q} + \bar{K}Q = \bar{P} \quad (3)$$

La matrice colonne \bar{P} représente les forces en coordonnées généralisées et est calculée par une intégration s'étendant sur la structure:

$$\bar{P}(t) = \iiint_A p(x, y, z, t) \mathcal{F}(x, y, z) dx dy dz \quad (4)$$

$p(x, y, z, t)$ est une fonction représentant le chargement. $\mathcal{F}(x, y, z)$ est une matrice colonne dont chaque élément représente la forme d'un mode propre.

Charge concentrée

Considérons le cas d'une charge concentrée se déplaçant suivant une fonction de mouvement $s = g(t)$ sur un trajet déterminé s . Soit $p(t)$ la fonction représentant l'amplitude de cette charge. La fonction représentant le chargement peut s'écrire sous la forme suivante:

$$p(x, y, z, t) = \delta[x - g_x(t)] \delta[y - g_y(t)] \delta[z - g_z(t)] [p_x(t), p_y(t), p_z(t), p_{xx}(t), p_{yy}(t), p_{zz}(t)] \quad (5)$$

où δ est la fonction Dyrac et g_x , g_y et g_z sont des fonctions représentant les composantes du mouvement par rapport aux coordonnées de la structure. Les fonctions p_z et p_{zz} , par exemple, représentent respectivement l'amplitude d'une force et d'un moment par rapport à z . Les fonctions p_x , p_y ... p_{zz} peuvent être distinctes et ne résultent pas nécessairement d'une simple projection d'une force maîtresse sur ces composantes.

En remplaçant dans l'équation (4) $p(x, y, z, t)$ par sa valeur en (5) et en effectuant l'intégrale, on obtient:

$$\bar{P}(t) = \bar{F}_x(t)p_x(t) + \bar{F}_y(t)p_y(t) + \dots + \bar{F}_{zz}(t)p_{zz}(t) \quad (6)$$

L'équation (6) peut se mettre sous la forme condensée suivante:

$$\bar{P}(t) = \sum_i \bar{F}_i(t) p_i(t) \quad (7)$$

$$i = x, y, z, xx, yy, zz.$$

$$\bar{F}_i(t) = \hat{F}_i[g(t)] \quad (8)$$

où $\bar{F}_i(t)$ sont des matrices colonnes qui s'obtiennent de $\hat{F}_i(s)$ par une transformation d'échelle décrite plus loin; les matrices colonnes $\hat{F}_x(s)$, $\hat{F}_y(s)$ et $\hat{F}_z(s)$ représentent respectivement les composantes x , y et z de la déformation modale de la structure le long du trajet de la charge; $\hat{F}_{xx}(s)$, $\hat{F}_{yy}(s)$ et $\hat{F}_{zz}(s)$ sont les dérivés de $\hat{F}_x(s)$, $\hat{F}_y(s)$ et $\hat{F}_z(s)$ par rapport à x , y et z respectivement.

L'équation (7) est facile à calculer. Les composantes $\hat{F}_i(s)$ des modes propres le long du trajet sont déterminées à l'aide des coordonnées du trajet, des déplacements nodaux en chaque mode des éléments traversés, de la matrice des polynômes d'interpolation définissant les déplacements à l'intérieur des éléments et des matrices de transformation des coordonnées locales en coordonnées globales. Les valeurs de ces composantes sont généralement calculées à des intervalles égaux ds du trajet. Chaque élément des matrices colonnes $\hat{F}_i(s)$ est au fond un vecteur représentant la discrétisation d'un mode le long du trajet. Les matrices colonnes $\bar{F}_i(t)$ sont obtenues de $\hat{F}_i(s)$ par une transformation de l'échelle des abscisses $s = g(t)$. Les éléments de $\bar{F}_i(t)$ sont aussi des vecteurs. Leurs valeurs correspondent généralement à des intervalles de temps égaux dt . Il est très probable que les points de discrétisation des modes le long du trajet à des intervalles égaux de distance ds ne correspondent pas avec les mêmes points de discrétisation à des intervalles égaux de temps dt . Dans ces cas, une simple interpolation entre les points discrétisés peut bien se faire sans apporter une différence significative au niveau des réponses.

Charge répartie

Dans le cas d'une charge ayant une dimension négligeable dans le sens du mouvement et une dimension définie dans le sens perpendiculaire (fig. 1), une solution par discrétisation de cette charge sur un faible nombre de trajets est à suggérer.

Le cas d'une charge d'une dimension non négligeable dans la direction du mouvement (fig. 2) peut aussi être traité sans difficulté et s'effectue de la manière suivante: soit $h_i(q)$ la fonction définissant la répartition de la charge suivant la composante i où q appartient à un système d'axe mobile propre à la charge.

$$q = s - g(t) \quad (9)$$

Soit $\bar{h}_i(q)$ l'image de $h_i(q)$ par rapport à l'axe des ordonnées du système d'axe mobile, et soit $\bar{h}_i(q)$ la translation de cette image dans la partie positive des abscisses. L'équation (8) prendra la forme générale suivante:

$$\bar{F}_i(t) = \bar{F}_i [g(t)] \quad (10)$$

où pour une charge concentrée:

$$\bar{F}_i(s) = \hat{F}_i(s) \quad (10a)$$

et pour une charge répartie:

$$\bar{F}_i(s) = \int_0^s \bar{h}_i(\xi) \hat{F}_i(s - \xi) d\xi \quad (10b)$$

L'équation (10b) se calcule facilement par une convolution numérique entre vecteurs. Le premier vecteur représente la discrétisation de l'image de la charge après translation. Le deuxième vecteur est à tour de rôle un des éléments de la matrice colonne $\hat{F}_i(s)$.

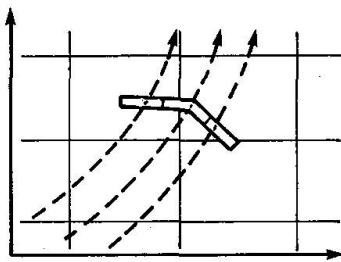


Fig. 1. Charge discrétisée sur trois trajets.

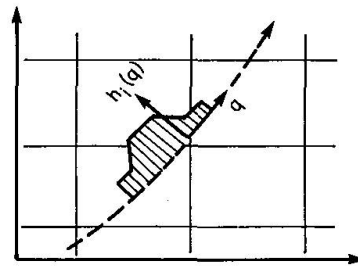


Fig. 2. Charge répartie dans la direction du mouvement.

Charge d'amplitude aléatoire

Le cas d'une charge mobile d'amplitude aléatoire peut se traiter en utilisant les mêmes notions. Supposant que la charge possède une seule composante dans la direction z et que la covariance de l'amplitude de cette composante soit $C_{pp}(t_1, t_2)$.

L'élément j, k de la matrice $C_{\overline{pp}}$ des covariances des forces en coordonnées généralisées s'écrira sous la forme suivante:

$${}_{j, k} C_{\overline{pp}}(t_1, t_2) = {}_j \overline{F}_z(t_1) {}_k \overline{F}_z(t_2) C_{pp}(t_1, t_2) \quad (11)$$

ou ${}_j \overline{F}_z$ représente l'élément j de la matrice colonne \overline{F}_z .

Conclusion

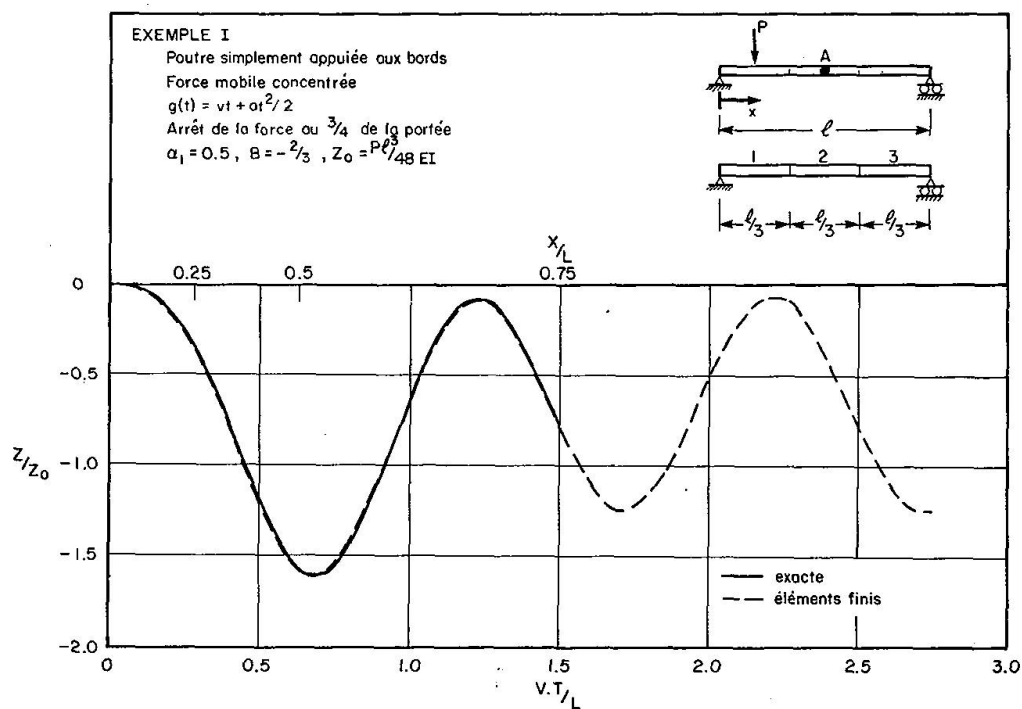
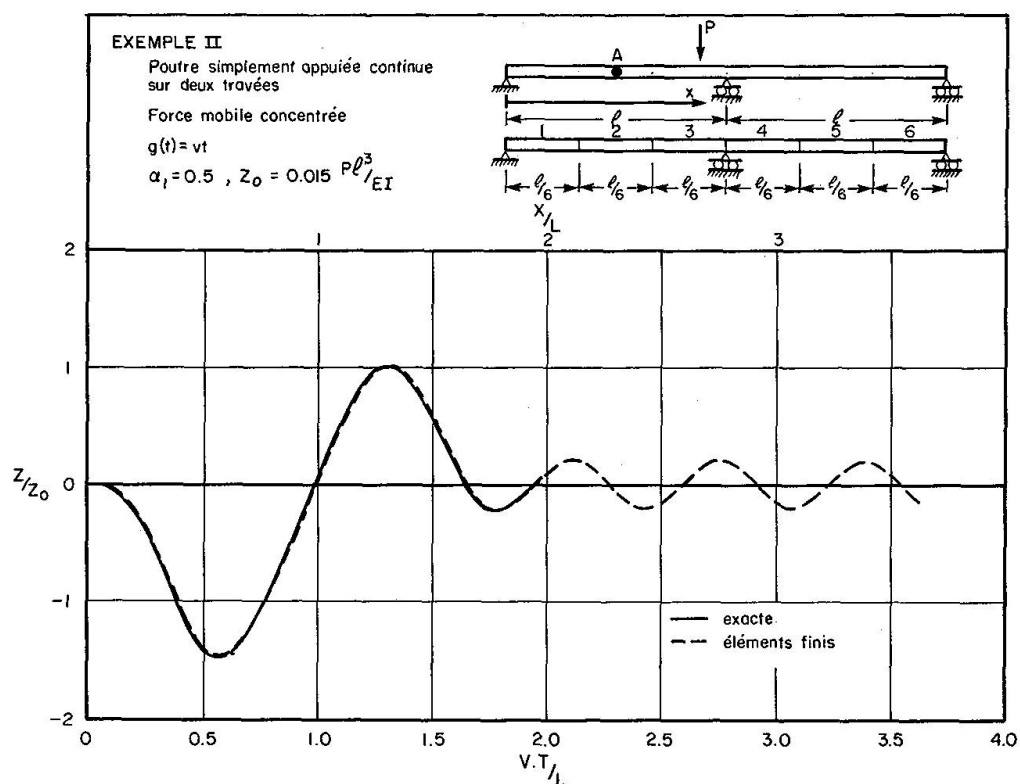
L'avantage de la méthode exposée réside dans la notion des «modes-trajet» $\hat{F}_i(s)$. Une fois ces «modes-trajet» déterminés et bien discrétisés, des cas de charges de fonctions différentes de répartition et de mouvement parcourant le même trajet peuvent être traités sans revenir à toutes les caractéristiques de la structure (éléments traversés, calcul des forces nodales équivalentes, assemblage...). L'analyse des cas de charges mobiles réparties sur une surface limitée ne présente aucune difficulté. Tandis que dans la technique des éléments finis le calcul des forces équivalentes aux nœuds pour des cas pareils demande une intégration spéciale s'étendant sur la partie chargée de chaque élément traversé. Ce genre de calcul demande différentes opérations et est parfois compliqué, vu que la partie chargée de chaque élément varie en fonction du temps et la répartition de la charge mobile se fait sur plusieurs éléments. Dans le cas de l'analyse aléatoire, aucune notion supplémentaire n'est requise. Tandis que la méthode de charges équivalentes aux nœuds présente un handicap pour l'analyse aléatoire des charges mobiles.

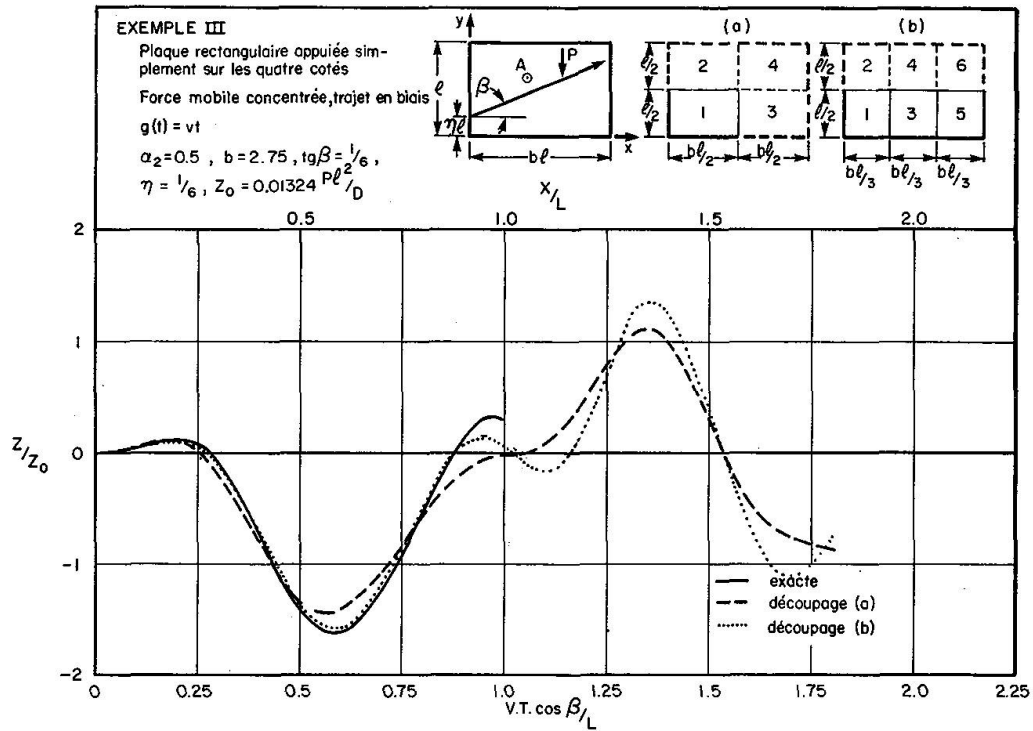
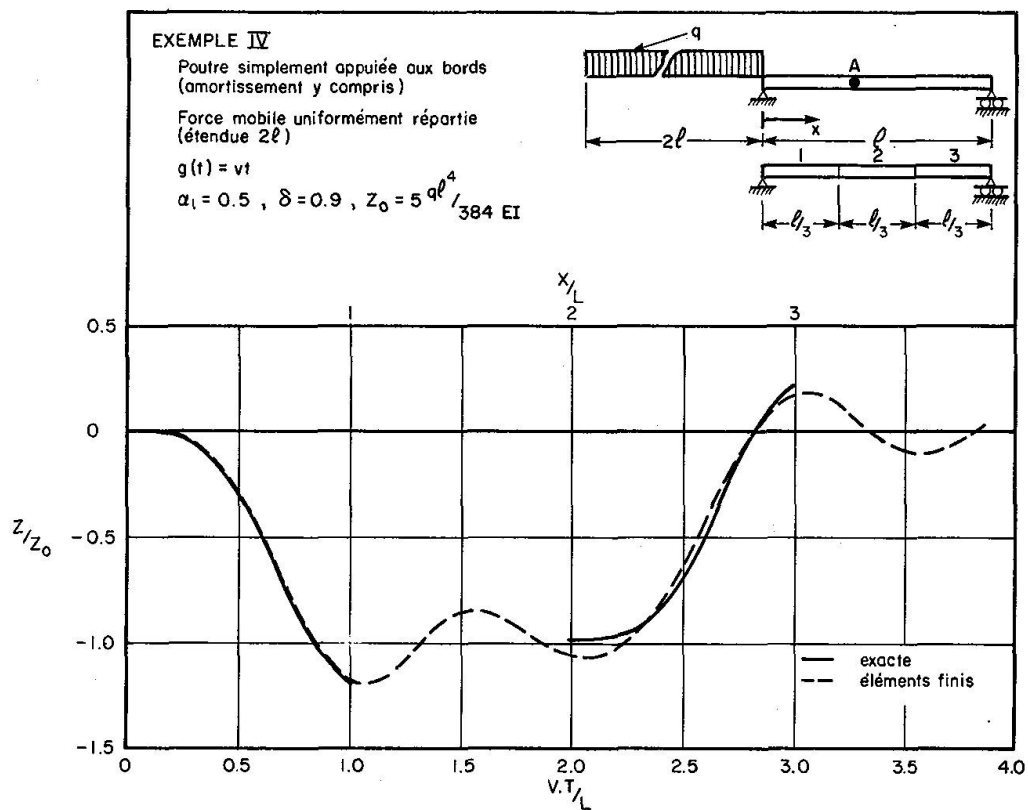
Exemples numériques

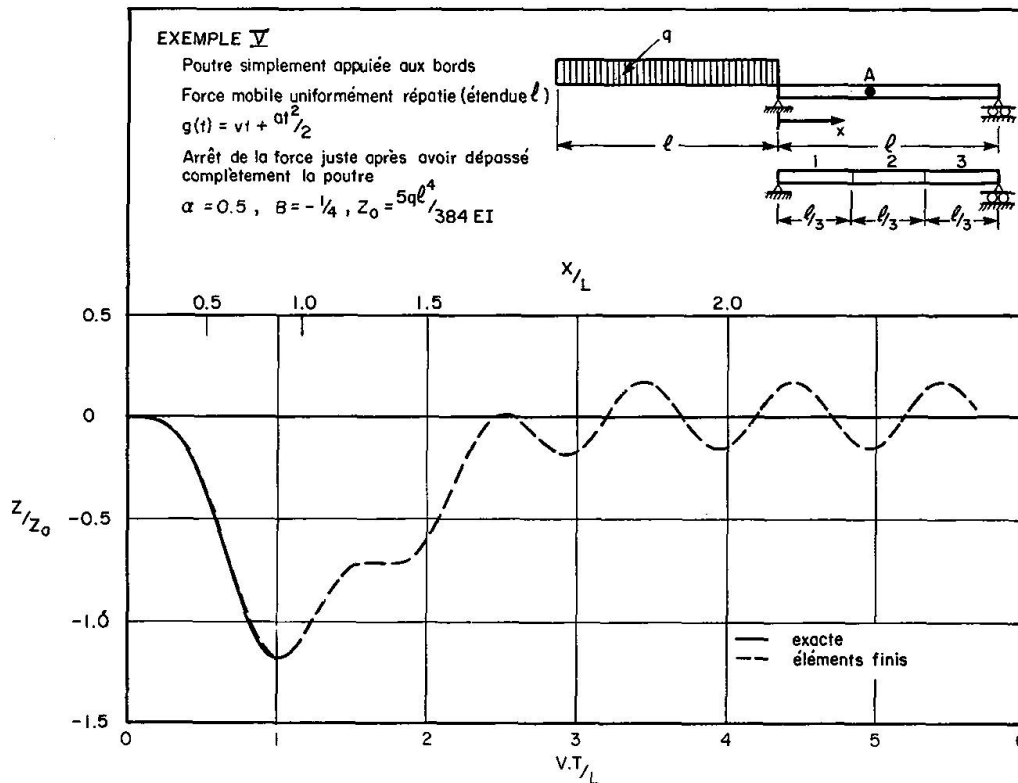
Des cas très simples mais représentatifs ont été fournis comme exemples. Le choix de ces cas a été restreint par la pénurie des solutions exactes. Des éléments très simples comme l'élément poutre à quatre degrés de liberté [4] (un déplacement et une rotation à chaque nœud) et l'élément plaque à seize degrés de liberté de Bogner [5] ont été utilisés. Le «mode-trajet» de chaque exemple a été discrétisé en cinquante points. La formulation des solutions exactes des cas traités se trouve dans l'excellent ouvrage de FRYBA [6]. Des exemples supplémentaires sont traités ailleurs [7]. L'exactitude des réponses est vraiment satisfaisante malgré la simplicité des éléments et le très faible nombre de découpages.

Notations pour les exemples numériques

a	accélération.
B	al/v^2 .
D	rigidité en flexion de la plaque.
EI	rigidité en flexion de la poutre.


 Fig. 3. Déflexion du point A ($x = 0.45 l$) (contribution des premiers quatre modes).

 Fig. 4. Déflexion du Point A ($x = 0.48 l$) (contribution des premiers cinq modes).

Fig. 5. Déflexion du point A ($x = 1.25 l$, $y = 0.60 l$) (contribution des premiers cinq modes).Fig. 6. Déflexion du point A ($x = 0.45 l$) (contribution des premiers quatre modes).


 Fig. 7. Déflexion du point A ($x = 0.45 l$) (contribution des premiers quatre modes).

$g(t)$	fonction du mouvement de la force.
P	valeur de la force concentrée.
q	valeur de la force uniformément répartie par unité de longueur.
u_1	masse par unité de longueur.
u_2	masse par unité de surface.
v	vitesse.
z	déflexion due au passage de la force.
z_0	déflexion de référence.
δ	décroissement logarithmique de l'amortissement.
α_1	$\frac{vl}{\pi} \sqrt{\frac{u_1}{EI}}$
α_2	$\frac{b \cos \beta vl}{1 + b^2} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{u_2}{D}}$
l, x, b, β, η	paramètres désignés sur les figures.

Références

1. KHOUDAY, A.: Introduction au problème dynamique des ponts routiers soumis à la circulation. Thèse de maîtrise, Département de génie civil, Université Laval, Québec, Canada, août 1971.
2. YOSHIDA, D.M., and WEAVER, W., Jr.: Finite Element Analysis of Beams and Plates with Moving Loads. Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering, v. 31-1, 1971.
3. GHAJARI, H.N.: Dynamic Response of Elastic-Perfectly Plastic Rectangular Plates, Ph.D. thesis, Department of Civil Engineering, New York University, April 1971.
4. PRZEMIENIECKI, J.S.: Theory of Matrix Structural Analysis. McGraw-Hill Inc., New York, 1968.
5. BOGNER, F.K., FOX, R.L., and SCHMIT, L.A.: The Generation of Inter-Element-Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulas. AFFDL-TR-66-80, Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, October 1965.
6. FRYBA, L.: Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. Noordhoff International Publishing, Groningen, The Netherlands, 1972.
7. KHOUDAY, A.: Réponse dynamique et probabiliste des structures soumises à des charges mobiles. Thèse de doctorat, Département de génie civil, Université Laval, Québec, Canada (en rédaction).

Résumé

Une méthode de calcul est exposée en vue de la détermination des réactions dynamiques et probabilistes d'une structure d'une forme quelconque soumise à des charges mobiles arbitraires. La méthode est basée sur la technique des éléments finis et de l'analyse modale. Les forces appliquées sur la structure ne sont pas remplacées par des forces équivalentes aux nœuds. Des exemples numériques sont fournis. Ces exemples comprennent les cas de poutres, de plaques, de forces concentrées ou réparties, de mouvements avec accélération et de matériau ayant de l'amortissement.

Zusammenfassung

Ziel des behandelten Verfahrens ist die Untersuchung des dynamischen und probabilistischen Verhaltens eines Bauwerks unter beliebiger beweglicher Belastung. Die Lösung des Problems erfolgt mittels der Methode finiter Elemente und der Modalanalyse. Die Untersuchung des Bauwerkes wird durchgeführt, ohne die gegebenen Lasten auf Knotenlasten zu reduzieren. Es werden Zahlenbeispiele mit Anwendung auf Balken und Platten unter verteilter und Punktbelastung angeführt, sowie die Dämpfung des Materials und die Lastbeschleunigung berücksichtigt.

Summary

This paper describes a method to evaluate the dynamic and probabilistic response of a structure to an arbitrary moving load. To solve the problem, finite element techniques combined with nodal analysis are used. In the analysis of the

structure, the applied loads are not transformed into equivalent nodal loads. Numerical examples such as beams and plates subjected to uniform and concentrated loads, damping of the structure and acceleration of the load are included in the study.

Leere Seite
Blank page
Page vide