

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 33 (1973)

Artikel: Theorie und Praxis der Berechnung von Stahlkonstruktionen
Autor: Szabó, J. / Berényi, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-25639>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Theorie und Praxis der Berechnung von Seilkonstruktionen

Theory and Practice of Calculation of Cable Structures

Théorie et pratique du calcul de constructions en câbles

J. SZABÓ

Prof. Dr., Technische Universität,
Budapest

M. BERÉNYI

Dipl.-Ing., Budapest

Einleitung

Professor LEONHARDT hat im Einführungsbericht [1] den gegenwärtigen Entwicklungsstand der Konstruktion und Berechnung von Seilnetzen kurz zusammengefasst und einige ungelöste Fragen der Berechnung dargelegt. Er weist darauf hin, dass zurzeit die grösste Unsicherheit bei der Annahme der Form des mit Eigenlast beanspruchten Netzes besteht.

Für die Bildung der Form des Netzes hat OTTO FREI [2] zahlreiche gute Vorschläge gegeben und damit zum Formenreichtum der tatsächlich ausgeführten Netzwerke beigetragen. Die Zusammenhänge für die exakte, auf der Theorie 2. Ordnung beruhende Untersuchung der Netze wurden schon von mehreren Verfassern erarbeitet; unter ihnen soll hier bloss SIEV [3] erwähnt werden, mit Hinweis auf die von MORTENSEN [4] angebrachten kritischen Bemerkungen zur Konvergenz der in den sogenannten exakten Verfahren vorgeschlagenen Iterationen.

Die Verfasser der vorliegenden Abhandlung schlagen – mit Rücksicht auf die Erfahrungen verschiedener Autoren – eine allgemeine exakte Theorie zur Untersuchung der Stabnetze vor. Auf Grund dieser Theorie wird ein numerisches Verfahren zur Berechnung des Stabnetzes vorgeführt.

Ihrem Ziel entsprechend besteht die Abhandlung aus drei Teilen: Im *ersten Teil* wird die sehr einfach formulierte Matrix-Differentialgleichung des Stabnetzes endlichen Freiheitsgrades und die numerische Lösungsmethode der entsprechenden Anfangswertaufgabe erläutert. Mit Hilfe dieser Methode kann das Problem mit beliebiger Genauigkeit gelöst werden. Die als Grundlage des zu formulierenden Algorithmus dienende Iteration hat sich auch bei der

Lösung sehr «schlechter» Aufgaben als konvergent erwiesen. Bei der Anwendung des im ersten Teil beschriebenen Verfahrens wird irgendeine mögliche (innerhalb der Möglichkeiten beliebig gewählte) Ausgangslage des Stabnetzes angenommen. Da die vorteilhafte Anwendbarkeit des Verfahrens offensichtlich dadurch beeinflusst wird, wie «weit entfernt» die Ausgangslage von der tatsächlich vorgegebenen Last entsprechenden Lage ist, wird in den beiden folgenden Teilen der Abhandlung die unserseits erarbeitete und mehrfach erprobte, zur Bestimmung des Ausgangslage empfohlene Methode besprochen.

Im *zweiten Teil* wird ein spezieller Typ des sogenannten rechtwinkligen Seilnetzes untersucht, ausgehend von der Überlegung, dass die direkte Berechnung des erwähnten Netztyps sehr einfach und selbst im Falle gross dimensionierter (aus vielen Seilen bestehender) Netze noch mit Hilfe des operativen Speichers der Rechenanlage möglich ist.

Im *dritten Teil* wird dargelegt, wie man mit Hilfe des rechtwinkligen Seilnetzes ein Stabnetz konstruieren kann, dessen Knotenpunkte an (gewissen Überlegungen entsprechenden) Hauptkrümmungslinien liegen und seine Stäbe die diese Punkte verbindenden Sehnen der Hauptkrümmungslinien sind. Das als Berechnungsgrundlage dienende rechtwinklige Seilnetz ist keine stetige Fläche; das Richtungsfeld der Hauptkrümmungslinien kann daher mit den in den Knotenpunkten des rechtwinkligen Seilnetzes liegenden Hauptrichtungen angenähert werden.

1. Die Zustandsänderungsgleichung des Stabnetzes

Es wird angenommen, dass das Stabnetz aus geradachsigen, ideal elastischen Stäben mit konstantem Querschnitt aufgebaut ist, so dass die Stäbe mit reibungsfreien Gelenken aneinandergeschlossen sind. Ein Teil der Knotenpunkte des Stabnetzes wird am steifen Rand angeschlossen. (Das an elastischem Rand angeschlossene Stabnetz wird an anderer Stelle [5] ausführlich besprochen.)

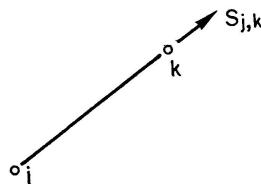


Fig. 1.

Die Stabkräfte des Stabnetzes gemäss Fig. 1 deutend, wird das Gleichgewicht des mit «*j*» bezeichneten Knotenpunktes mit Gleichungen der Form

$$\sum_k \frac{\mu_k - \mu_j}{l_{j,k}} s_{j,k} + p_{\mu j} = 0 \quad (\mu = x, y, z) \quad (1)$$

ausgedrückt, wobei sich die Addierung auf alle Stäbe erstreckt, in deren

Symbol « j » enthalten ist. Aus der Gleichung (1) ergibt sich die Feststellung, dass bei vorgegebenen Knotenpunktkoordinaten jedem beliebigen Stabkraftsystem \mathbf{s} ein eindeutig bestimmtes Knotenpunktlastsystem \mathbf{p} zugehört (umgekehrt gilt das *allgemein* nicht!).

Es sei angenommen, dass der Vektor $d\mathbf{r}$ der Knotenpunktkoordinaten eine infinitesimale Änderung erleidet, während sich der Vektor der Stabkräfte mit dem Zuwachs $d\mathbf{s}$ verändert. Die Gesamtheit der die Verschiebungen der Endpunkte des Stabes (j, k) und die Verträglichkeit der Stabdehnung ausdrückenden Gleichungen

$$\sum_k \left(\frac{\mu_k - \mu_j}{l_{j,k}} d\mu_j + \frac{\mu_j - \mu_k}{l_{j,k}} d\mu_k \right) + F_{j,k} ds_{j,k} + dt_{j,k} = 0 \quad (2)$$

$(\mu = x, y, z)$

wird *Verschiebungs-Differentialgleichungssystem* der Stabnetz-Knotenpunkte genannt und in kurzer Form mit der Matrizengleichung

$$\mathbf{G} d\mathbf{r} + \mathbf{F} d\mathbf{s} + d\mathbf{t} = \mathbf{0} \quad (3)$$

bezeichnet, wobei \mathbf{G} die geometrische Matrix des Stabnetzes bedeutet, mit den Stabindizes (j, k) als Zeilenindizes und den Komponenten von \mathbf{r} als Spaltenindizes. Die Elemente der Matrix \mathbf{G} können folgenderweise formuliert werden:

$$G_{\mu_\sigma:j,k} = (\delta_{\sigma,j} - \delta_{\sigma,k}) \frac{\mu_k - \mu_j}{l_{j,k}},$$

$$\delta_{\sigma,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma = j, \\ 0, & \text{falls } \sigma \neq j. \end{cases}$$

Wie daraus ersichtlich, lässt sich bei \mathbf{G} und \mathbf{F} nach Gleichung (3) und willkürlichem, jedoch infinitesimal kleinem Wert von $d\mathbf{r}$ und $d\mathbf{s}$ die der Verträglichkeit entsprechende Stabdehnung $d\mathbf{t}$ eindeutig bestimmen.

Es ist leicht verständlich, dass die Gleichgewichtsgleichung (1) zur Matrizengleichung

$$\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (4)$$

als *Gleichgewichtsgleichung des Stabnetzes* zusammengefasst werden kann, wobei \mathbf{G}^* die Transponierte der vorher erwähnten Matrix \mathbf{G} ist.

Bei Änderung der Knotenpunktkoordinaten des Stabnetzes mit $d\mathbf{r}$ haben sich die Stabkräfte um $d\mathbf{s}$ verändert, und der dem Gleichgewicht der Knotenpunkte entsprechende Lastvektor wird sich offensichtlich um $d\mathbf{p}$ ändern. Das veränderte Gleichgewicht stellt sich jedoch bei einer geänderten Geometrie des Stabnetzes ein. Diese neue Lage wird durch eine Matrizengleichung

$$(\mathbf{G}^* + d\mathbf{G}^*) (\mathbf{s} + d\mathbf{s}) + (\mathbf{p} + d\mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (5)$$

ausgedrückt. Mit Rücksicht jedoch darauf, dass \mathbf{G} ausschliesslich von den Knotenpunktkoordinaten abhängig ist, kann der Zusammenhang

$$(\mathbf{G}^* + d\mathbf{G}^*) = \mathbf{G}^* + \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} + \dots \quad (6)$$

aufgeschrieben werden, wobei mit dem Symbol $\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{r}}$ der Ableitungstensor der Matrix \mathbf{G}^* bezeichnet wurde. Nach Einsetzen des Zusammenhanges (6) in die Gleichung (5), Durchführung der Multiplikation und Vernachlässigung der Potenzen, bzw. Produkte der Differentiale erhält man das folgende Ergebnis:

$$\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{G}^* d\mathbf{s} + \left(\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right) \mathbf{s} + \mathbf{p} + d\mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Berücksichtigt man noch den Zusammenhang (4), so erhält man aus der Gleichung (7) die *Stabkraftänderungs-Differentialgleichung* des Stabnetzes:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right) \mathbf{s} + \mathbf{G}^* d\mathbf{s} + d\mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Das mit dem kontravarianten Vektor $d\mathbf{r}$ und dem kovarianten Vektor \mathbf{s} gebildete Produkt des Tensors $\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{r}}$ ist von der Reihenfolge dieser Faktoren unabhängig; es lässt sich also der folgende Zusammenhang aufschreiben:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{s} \right] d\mathbf{r} = \mathbf{D} d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right) \mathbf{s}$$

und auf Grund dieses Zusammenhangs kann die Gleichung (8) auf die folgende Form gebracht werden:

$$\mathbf{D} d\mathbf{r} + \mathbf{G}^* d\mathbf{s} + d\mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Die die Gleichungen (9) und (3) zusammenfassende Gleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G}^* \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{r} \\ d\mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\mathbf{p} \\ d\mathbf{t} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (10)$$

wird *Zustandsänderungs-Differentialgleichung des Stabnetzes* genannt.

Der Block \mathbf{D} der Gleichung (10) ist symmetrisch, seine Elemente liefert der Ausdruck:

$$\sum_{(j, k)} \frac{(\delta_{\sigma, j} - \delta_{\sigma, k}) (c_{\mu; j, k} c_{\nu; j, k} - \delta_{\mu, \nu})}{l_{j, k}} s_{j, k} = D_{\mu\sigma, \nu, j} \\ (\mu, \nu = x, y, z; \sigma = j, k),$$

wobei:

$$c_{\mu; j, k} = \frac{\mu_k - \mu_j}{l_{j, k}} = G_{\mu_j; j, k},$$

$$c_{\mu; k, j} = \frac{\mu_j - \mu_k}{l_{j, k}} = G_{\mu_k; j, k},$$

$$l_{j, k} = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2}$$

und

$$\delta_{\mu, \nu} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mu = \nu, \\ 0, & \text{falls } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Von einem beliebigen Zustand $\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0$ und dementsprechenden \mathbf{G}_0 ausgehend, kann auf Grund von (4) die diesem Zustand entsprechende Last

$$\mathbf{p}_0 = -\mathbf{G}_0^* \mathbf{s}_0 \quad (11)$$

bestimmt werden. Im Besitz der willkürlich gewählten Stabkräfte (\mathbf{s}_0) lässt sich in direkter Weise die elastische Stabdehnung und jene weitere Stabdehnung \mathbf{t}_0 errechnen, die erforderlich ist, damit sich die ursprüngliche Länge « l » der einzelnen Stäbe auf eine Länge verändert, die das Einpassen zwischen die willkürlich gewählten Knotenpunkte \mathbf{r}_0 ermöglicht. Mit Hilfe der Gleichung (10) kann der der vorgegebenen Last \mathbf{p} und Stabdehnung \mathbf{t} entsprechende Zustand \mathbf{r}, \mathbf{s} einer beliebigen Genauigkeitsvorschrift gemäss bestimmt werden. Falls man nämlich die Gleichung (10) als mit der Differenz der dem willkürlich gewählten Ausgangszustand $(\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0)$ zugehörenden Vektoren $\mathbf{p}_0, \mathbf{t}_0$ und der vorgegebenen Vektoren \mathbf{p}, \mathbf{t} :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_0 &= \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \\ \Delta \mathbf{t}_0 &= \mathbf{t} - \mathbf{t}_0 \end{aligned}$$

mit einer vorgeschriebenen Genauigkeit lösbar betrachtet, so können die Vektoren $\Delta \mathbf{r}_0, \Delta \mathbf{s}_0$ aus der Gleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_0 & \mathbf{G}_0^* \\ \mathbf{G}_0 & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{r}_0 \\ \Delta \mathbf{s}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_0 \\ \Delta \mathbf{t}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

berechnet werden. Mit Hilfe dieser Vektoren sind

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}_0$$

und

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_0 + \Delta \mathbf{s}_0$$

bestimmt, und mit Hilfe der entsprechenden Blöcke $\mathbf{G}_1, \mathbf{D}_1$ lassen sich die verträglichen Vektoren $\mathbf{p}_1, \mathbf{t}_1$ und danach mit diesen die Vektoren

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p} - \mathbf{p}_1, \\ \Delta \mathbf{t}_1 &= \mathbf{t} - \mathbf{t}_1 \end{aligned}$$

errechnen. Das Verfahren in diesem Sinne weiterführend, ist es leicht kontrollierbar, ob die mit den Längen der Vektoren $(\Delta \mathbf{p}_0, \Delta \mathbf{t}_0), (\Delta \mathbf{p}_1, \Delta \mathbf{t}_1), \dots, (\Delta \mathbf{p}_i, \Delta \mathbf{t}_i), \dots$ gebildete Folge monoton abnimmt oder nicht. Im letzteren Fall kann, durch Verminderung der endlichen Ausgangszuwachse $\Delta \mathbf{p}_0, \Delta \mathbf{t}_0$ auf $\epsilon \Delta \mathbf{p}_0, \epsilon \Delta \mathbf{t}_0 (0 < \epsilon < 1)$, die Konvergenz des Verfahrens immer wiederhergestellt werden.

Mit dem nachstehenden, zu diesem Zweck erarbeiteten und numerisch ausführlich analysierten Zahlenbeispiel werden unsere Feststellungen gut veranschaulicht.

Zur Untersuchung der Konvergenzverhältnisse der Zustandsänderungsgleichung (10) wurde als Extremfall das gemäss Fig. 2 angeordnete, in einer horizontalen Ebene liegende Stabnetz gewählt.

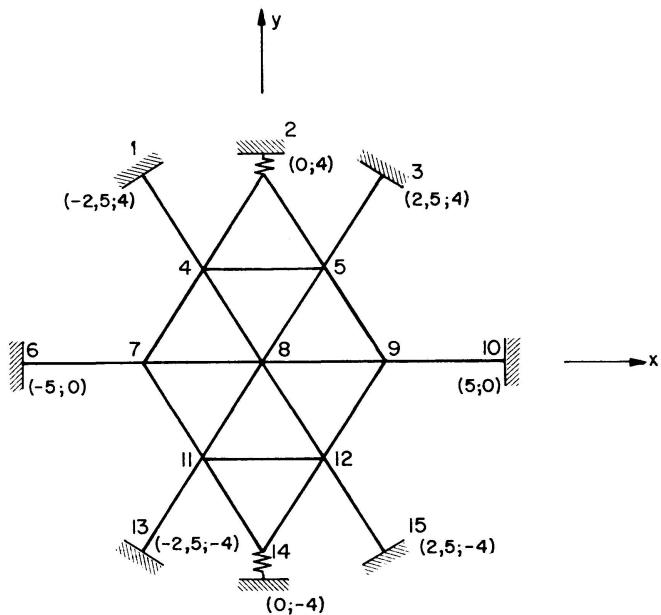


Fig. 2.

Die Anfangsbeanspruchung der längs der drei Diagonalen des Sechseckes gelegenen Stäbe war eine Zugkraft von $s = 2,5 \text{ MP}$; in den übrigen Stäben der Konstruktion wurde keine Anfangsbeanspruchung angenommen. In den Punkten 2 und 14 wurde elastische Stützung angenommen, mit einer Federkonstante von $\rho = 100 \text{ MP/m}$. Die Stützpunkte der Diagonalstäbe sind unverschieblich.

Das Stabnetz ist mit einer vertikalen, im Mittelpunkt angreifenden Einzellast von der Grösse $P = 2,0 \text{ MP}$ beansprucht.

Die numerische Prüfung wurde mit der Laststufe $\Delta P = 0,25 P$ begonnen, wobei das Verfahren nicht konvergent war. Der Versuch wurde danach mit den Werten $0,20 P$ und $0,10 P$ fortgesetzt, bis sich schliesslich bei einer Lastannahme von $\Delta P = 0,05 P$ ($= 0,1 \text{ MP}$) das Verfahren als konvergent erwies. Bei der ersten Laststufe hat die relative Genauigkeit nach 43 Iterations schritten den Wert 10^{-5} erreicht. Auf Fig. 3 ist die Anzahl der bei den einzelnen Laststufen erforderlichen Iterationsschritte dargestellt, während Fig. 4 die durch die stufenweise Lasterhöhung erfolgende zentrische Durchbiegung veranschaulicht.

2. Das orthogonale Seilnetz

Es wurde bereits in der Einleitung betont, dass wir das orthogonale Seilnetz als Modell nicht geeignet finden, um mit seiner Hilfe die allgemeine Analyse des Stabnetzes durchzuführen zu können. Obwohl früher [6], [7] ein Versuch unternommen wurde, die Zustandsänderung des auf elastischen Rand gespannten Seilnetzes – und gleichzeitig auch die horizontalen Verschiebungen der Knotenpunkte, sowie den Einfluss der Veränderung der Seilkräfte – auf Grund dieses Modells zu untersuchen, besteht kein Zweifel, dass dieses Verfahren selbst mit grossem Aufwand nur Näherungswerte liefern kann.

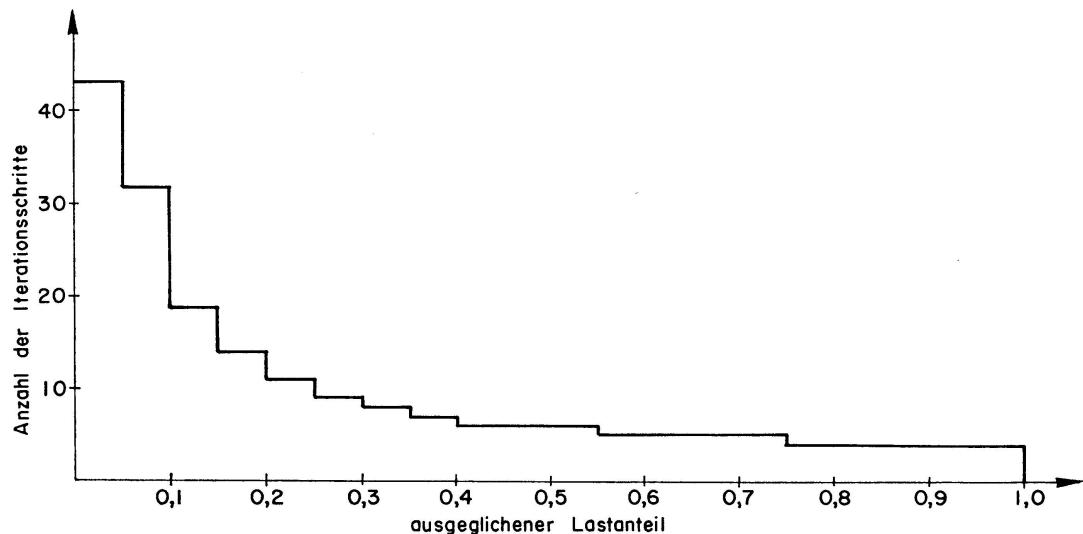


Fig. 3.

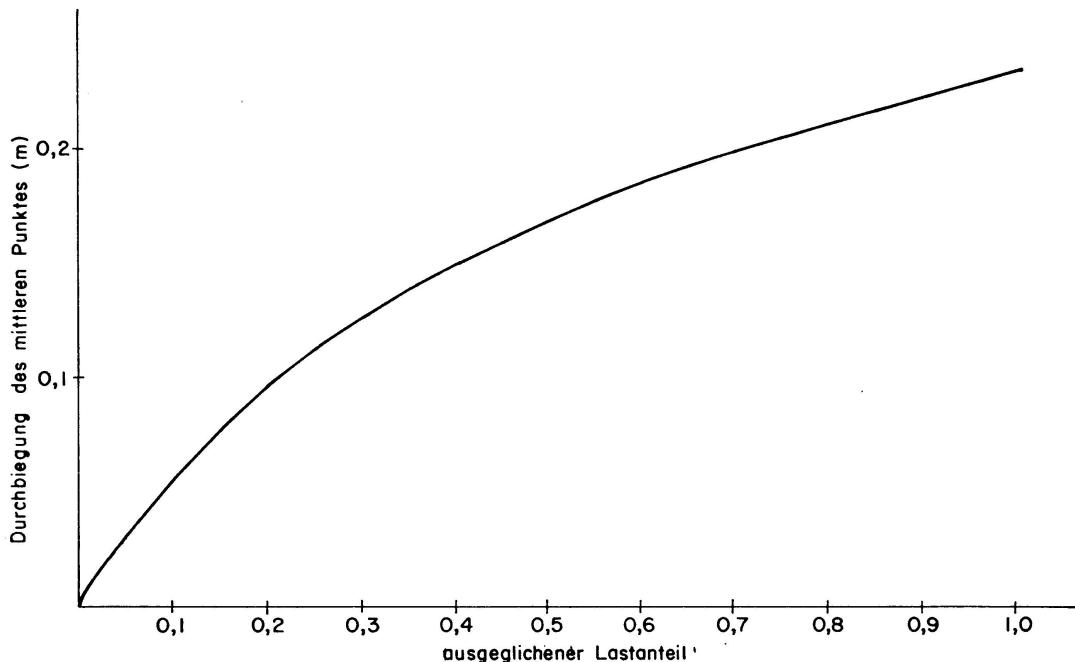


Fig. 4.

Wenn man jedoch dieses in rechnerischer Hinsicht sehr vorteilhafte Modell zweckentsprechend, nämlich zur exakten Berechnung einer möglichen Ausgangsform des Netzes benutzt, so lässt sich unbedingt ein vorteilhaftes Hilfsmittel zur allgemeinen Analyse der Stabnetze gewinnen. Das Modell des orthogonalen Seilnetzes wird durch Erfüllung des einfachsten Bedingungssystems brauchbar gemacht:

- Die Seile bilden im Grundriss eine äquidistante orthogonale Masche und sind auf den in vorgeschriebener Höhe befindlichen Punkten des steifen, rechteckförmigen Randes reibungsfrei gelagert.

- b) Die Höhenlage der im Grundriss einander schneidenden Seile ist (im Schnittpunkt) dieselbe.
- c) Das Netz wird ausschliesslich mit den auf die Knotenpunkte konzentrierten vertikalen Kräften belastet.
- d) Die einzelnen Seile verschieben sich unter Einfluss der Belastung nur in vertikaler Ebene.
- e) Längs der einzelnen Seile ist die horizontale Komponente der Seilkraft eine positive Konstante von vorgegebener Grösse.

Zur Behandlung dieses Modells genügt das Aufschreiben der Gleichgewichtsbedingungen, in denen die vertikale Koordinate der Knotenpunkte als Unbekannte enthalten ist. Die nähere Erläuterung der Aufgabe ist in [8] enthalten; an dieser Stelle soll nur der Gedankengang der Berechnung, bzw. die zur Formulierung des Modells dienende Matrizengleichung kurz dargestellt werden.

Die Skizze des Modells mit den angewandten Symbolen ist auf Fig. 5 dargestellt.

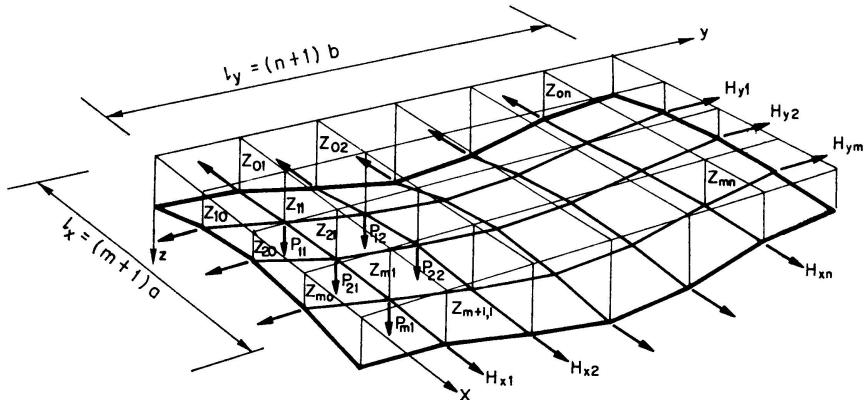


Fig. 5.

Das Gleichgewicht des Knotenpunktes j, k wird mit der Gleichung

$$\frac{H_{xk}}{a}(-z_{j-1,k} + 2z_{j,k} - z_{j+1,k}) + \frac{H_{yj}}{b}(-z_{j,k-1} + 2z_{j,k} - z_{j,k+1}) = P_{j,k} \quad (12)$$

ausgedrückt, und die Gesamtheit der Gleichgewichtsgleichungen kann in der Matrizengleichung

$$\frac{1}{a} \mathbf{C}_x \mathbf{Z} \mathbf{H}_x + \frac{1}{b} \mathbf{H}_y \mathbf{Z} \mathbf{C}_y = \mathbf{P} + \frac{1}{a} \mathbf{Z}_{0y} \mathbf{H}_x + \frac{1}{b} \mathbf{H}_y \mathbf{Z}_{0x} \quad (13)$$

zusammengefasst werden. Diese letztere Gleichung wird zweckmässiger in nachfolgender Form aufgeschrieben:

$$\mathbf{A}_x \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \mathbf{A}_y = \mathbf{Q}, \quad (14)$$

wo $\mathbf{A}_x = \frac{1}{a} \mathbf{H}_y^{-1} \mathbf{C}_x$,

$$\mathbf{A}_y = \frac{1}{b} \mathbf{C}_y \mathbf{H}_x^{-1},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= [q_{j,k}] = \mathbf{H}_y^{-1} \mathbf{P} \mathbf{H}_x^{-1} + \frac{1}{a} \mathbf{H}_y^{-1} \mathbf{Z}_{0y} + \frac{1}{b} \mathbf{Z}_{0x} \mathbf{H}_x^{-1}, \\
&\quad (j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n), \\
\mathbf{C}_x &= [c_{j,k}]; \quad c_{j,k} = -\delta_{j,k-1} + 2\delta_{j,k} - \delta_{j,k+1}, \\
&\quad (j, k = 1, 2, \dots, m), \\
\mathbf{C}_y &= [c_{j,k}]; \quad c_{j,k} = -\delta_{j,k-1} + 2\delta_{j,k} - \delta_{j,k+1}, \\
&\quad (j, k = 1, 2, \dots, n), \\
\mathbf{H}_x &= [H_{xj,k}]; \quad H_{xj,k} = \delta_{j,k} H_{xk}, \\
&\quad (j, k = 1, 2, \dots, n), \\
\mathbf{H}_y &= [H_{yj,k}]; \quad H_{yj,k} = \delta_{j,k} H_{yj}, \\
&\quad (j, k = 1, 2, \dots, m), \\
\mathbf{Z}_{0y} &= [z_{0y;j,k}]; \quad z_{0y;j,k} = \delta_{1,j} z_{0,k} + \delta_{m,j} z_{m+1,k}, \\
&\quad (j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n), \\
\mathbf{Z}_{0x} &= [z_{0x;j,k}]; \quad z_{0x;j,k} = \delta_{1,k} z_{j,0} + \delta_{n,k} z_{j,n+1}, \\
&\quad (j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n), \\
\delta_{\sigma,\tau} &= \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma = \tau, \\ 0, & \text{falls } \sigma \neq \tau, \end{cases} \\
\mathbf{Z} &= [z_{j,k}], \quad (j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n), \\
\mathbf{P} &= [P_{j,k}], \quad (j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n).
\end{aligned}$$

Zur Lösung der Gleichung (14) wurden bei unseren numerischen Untersuchungen zwei Verfahren angewandt. Beim einen – allgemein üblichen – Verfahren wird die Matrizengleichung (14) zur Vektorengleichung

$$\mathbf{A} \mathbf{z} = \mathbf{q} \quad (15)$$

transformiert und bei der Lösung der Vorteil ausgenutzt, dass \mathbf{A} eine symmetrische Bandmatrix der Bandbreite $2m+1$ oder $2n+1$ ist. Beim anderen Verfahren wird die Spektralauflösung der Koeffizientenmatrizen \mathbf{A}_x und \mathbf{A}_y angewandt und die Matrizengleichung (14) direkt gelöst.

Wenn das Netz $m \cdot n$ Innenpunkte (Knotenpunkte) besitzt, so enthält die Matrix $\mathbf{A} m^2 n^2$ Elemente, von denen in jeder Zeile höchstens 5 von Null verschieden sind. Unter Ausnutzung der Symmetrie und Bandstruktur der Matrix ist die Anzahl der zu speichernden Elemente – $m \leq n$ angenommen – $(m+1)mn$. Bei relativ nicht zu grossem m und n kann die Speicherung bei der Maschinenrechnung nur noch mit Peripheriespeicher gelöst werden. Im Falle $m > 10$, bzw. $n > 10$ wird die Anzahl der zu speichernden Elemente der Koeffizientenmatrizen nach Gleichung (14) im Verhältnis zur Anzahl der zu speichernden Elementen der Bandmatrix mindestens um eine Größenordnung kleiner.

Die Lösung der Gleichung (14) kann im Falle der vollständigen Spektralauflösung der Koeffizienten \mathbf{A}_x und \mathbf{A}_y in expliziter Form aufgeschrieben

werden. Die vollständige Spektralzerlegung eines Koeffizienten A_μ der Grösse $n n$ ist folgendermassen durchführbar:

Man geht von der Modalmatrix (Matrix der Eigenvektoren) $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_0^{-1} = \mathbf{U}_c$ aus (\mathbf{U}_c ist das Modal der gleichförmigen Kontinuantenmatrix \mathbf{C}) und bildet die Matrix

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{U}_0^{-1} \mathbf{A}_\mu \mathbf{U}_0. \quad (16)$$

Falls ausser der Diagonalen von \mathbf{B}_0 noch weitere von Null verschiedene Elemente vorhanden sind, so wird in n Schritten eine Ähnlichkeitstransformation durchgeführt.

Im ersten Schritt erhält man:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{B}_0 \mathbf{Q}_1^{-1}, \quad (17)$$

wobei: $\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{q} & \mathbf{E} \end{bmatrix}$ bzw. $\mathbf{Q}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{q} & \mathbf{E} \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{E} = [\delta_{j,k}]; \quad j, k = 1, 2, \dots, n-1; \quad \delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j=k, \\ 0, & \text{falls } j \neq k. \end{cases}$$

Es wird nun \mathbf{B}_0 folgenderweise aufgeteilt:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} b & \mathbf{h}^* \\ \mathbf{k} & \mathbf{L} \end{bmatrix}$$

und die Multiplikation nach (17) durchgeführt:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} b - \mathbf{h}^* \mathbf{q} & \mathbf{h}^* \\ \mathbf{k} + (b \mathbf{E} - \mathbf{L}) \mathbf{q} - \mathbf{q} \mathbf{h}^* \mathbf{q} & \mathbf{q} \mathbf{h}^* + \mathbf{L} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Falls $f(\mathbf{q}) = \mathbf{q} \mathbf{h}^* \mathbf{q} - (b \mathbf{E} - \mathbf{L}) \mathbf{q} - \mathbf{k} = 0$ ist, so kann in der ersten Spalte von \mathbf{B}_1 nur das Hauptdiagonal-Element von Null verschieden sein.

Den Zusammenhang (17) berücksichtigend, werden mit der Transformation von \mathbf{B}_0 gleichzeitig auch die Modale transformiert:

$$\mathbf{A}_\mu = \underbrace{(\mathbf{U}_0 \mathbf{Q}_1^{-1})}_{\mathbf{U}_1} \underbrace{(\mathbf{Q}_1 \mathbf{B}_0 \mathbf{Q}_1^{-1})}_{\mathbf{B}_1} \underbrace{(\mathbf{Q}_1 \mathbf{U}_0^{-1})}_{\mathbf{U}_1^{-1}}. \quad (19)$$

Das Verfahren n -mal wiederholend, erhält man das Ergebnis $\mathbf{U}_{A_\mu} = \mathbf{U}_n$; $\mathbf{A}_{A_\mu} = \mathbf{B}_n$; $\mathbf{U}_{A_\mu}^{-1} = \mathbf{U}_n^{-1}$, welches das vollständige Spektrum von \mathbf{A}_μ ergibt:

$$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{U}_{A_\mu} \Lambda_{A_\mu} \mathbf{U}_{A_\mu}^{-1}. \quad (20)$$

Bei jedem einzelnen Schritt des Verfahrens wurde zur Lösung des Gleichungssystems zweiter Ordnung $f(\mathbf{q})=0$ die Newton-Raphson-Methode angewandt.

Von den zahlreichen numerischen Untersuchungen sind hier zwei beigelegt. Die Matrix \mathbf{A} ist das Produkt der Matrix \mathbf{C} und der Diagonalmatrix \mathbf{H} .

Im ersten Beispiel wurde mit der Annahme

$$\mathbf{H} = \langle 5, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 9, 0, 8, 0, 7, 0, 6, 0, 5, 0, 4 \rangle$$

die Spektralzerlegung der Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{C}$ durchgeführt. Der Rechenprozess nahm mit der Anlage Siemens 4004/45 drei Minuten in Anspruch.

Beim zweiten Beispiel handelte es sich um eine Matrix von Ordnung 20. Die Annahme war hier

$$\mathbf{H} = \langle 2,0, 1,9, 1,7, 1,4, 1,0, 0,6, 0,3, 0,2, 0,1, 0,2, \\ 0,4, 0,7, 1,1, 1,4, 1,6, 1,7, 1,6, 1,2, 0,6, 0,1 \rangle;$$

die Rechenzeit betrug 7 Minuten.

Die Fehlerschranke betrug

$$\epsilon = 10^{-8} \frac{\text{Spur}(\mathbf{A})}{n}.$$

Die Eigenwerte von \mathbf{A} waren im ersten Beispiel

$$\Lambda_A = \langle 0,04059 \quad 0,15841 \quad 0,36927 \quad 0,65553 \quad 2,05151 \\ 0,98188 \quad 1,32940 \quad 8,40050 \quad 1,68200 \quad 3,66910 \\ 3,02327 \quad 14,26011 \quad 2,49574 \quad 4,68271 \rangle,$$

bzw. im zweiten Beispiel:

$$\Lambda_A = \langle 0,00731 \quad 0,06470 \quad 0,10005 \quad 0,16362 \quad 3,45717 \\ 4,63950 \quad 0,63694 \quad 3,04287 \quad 5,99104 \quad 0,27974 \\ 0,78616 \quad 0,36623 \quad 2,49410 \quad 6,57467 \quad 0,50650 \\ 4,62137 \quad 1,06850 \quad 1,19411 \quad 1,86066 \quad 1,74475 \rangle.$$

3. Das an den Hauptkrümmungslinien liegende Stabnetz

Mit Hilfe des orthogonalen Seilnetzes kann die Begrenzungsfläche von gewünschter Form des zu überdachenden Raumes konstruiert werden. Der Grundriss des zu überdachenden Raumes kann innerhalb des Randes des rechtwinkligen Seilnetzes beliebig gestaltet werden. Durch Variieren der Höhe der Randpunkte des rechtwinkligen Netzes (dadurch wird nur die auf der rechten Seite der Gleichung (14) stehende Matrix \mathbf{Q} beeinflusst) erreicht man, dass die Seile den eigentlichen Rand des zu konstruierenden Netzes in der gewünschten Höhe schneiden. Die Berechnung des Netzes wird auch nicht wesentlich beeinflusst, wenn das Netz in einzelnen Punkten mit Masten gestützt ist. Jeder einzelne Mast erfordert je eine Lösung der Gleichung (14), sowie die Lösung eines Bedingungsgleichungssystems, das aus so vielen Gleichungen besteht, wie die Anzahl der Maste. Damit sollen die Bedingungen erfüllt werden, dass die Knotenpunkte des Seilnetzes an den Stellen der Maste die vorgeschriebene Höhe besitzen.

Das Seilnetz kann also im wesentlichen durch drei Verfahren auf die gewünschte Form gebracht werden:

1. Mit der Höhenlage der Randpunkte des rechtwinkligen Netzes,
2. durch Anwendung von Seilkräften unterschiedlicher Grösse in den einzelnen Seilen,
3. durch Stützung einzelner Punkte des Netzes mit Masten.

Unter diesen ist das letztgenannte Verfahren am wenigsten wirksam, da die Beanspruchung des Netzes mit grosser Einzellast in entscheidendem Grad mit grosser lokaler Verschiebung und nur in einem geringeren Grad mit der Veränderung der ganzen Netzform einhergeht. Wirksamer ist die gleichzeitige Übertragung des Masteffektes auf eine Gruppe der benachbarten Netzpunkte, da hierdurch mit geringerer Masthöhe der gleiche netzformende Effekt erzielbar ist.

Nachdem die gewünschte Netzform sich mit Hilfe des rechtwinkligen Seilnetzmodells ausgebildet hat, können die Richtungsfelder der Hauptkrümmungslinien und die den Tangenten der Hauptkrümmungslinien zugehörigen spezifischen Seilkräfte mittels eines einfachen numerischen Verfahrens berechnet werden. Bei der numerischen Analyse ist die Bestimmung einer einzigen Fläche, in der die Knotenpunkte des rechtwinkligen Seilnetzes enthalten sind, nicht notwendig. Im Falle eines ausreichend dichten Netzes ist es vollkommen zweckentsprechend, den einzelnen Knotenpunkten je ein hyperbolisches Paraboloid mit vertikaler Achse zuzuordnen. Jedem Knotenpunkt des Netzes wird durch seine Höhe und durch die Höhen der benachbarten vier Knotenpunkte eine vertikale Fläche zweiter Ordnung eindeutig zugeordnet. Diese Fläche bestimmt die den Knotenpunkten zugehörigen Grössen – Flächentangente, Normale, Krümmung, usw. – und ermöglicht die Bestimmung der Hauptkrümmungsrichtungen. Im Besitz der derart gewonnenen Daten erhält man die Hauptkrümmungslinien des Seilnetzes derart, dass man die Gesamtheit der Grundrissprojektion der Knotenpunkt-Hauptkrümmungsrichtungen als Richtungsfeld der Hauptkrümmungslinien des Netzes betrachtet. Innerhalb des Richtungsfeldes werden durch numerische Integration die Hauptkrümmungslinien mit beliebiger Dichte hergestellt (wobei man durch lineare Interpolation im Bereich zwischen jeweils vier Netzpunkten des Richtungsfeldes die Dichte erhöht).

Erfahrungsgemäss ist es zweckmässig, die Bestimmung der Hauptkrümmungslinien unter Beibehaltung der Beziehung Mensch/Maschine zu automatisieren. Darunter ist der folgende Vorgang zu verstehen:

1. Darstellung des räumlichen Bildes des rechtwinkligen Seilnetzes auf Bildschirm; Modifizierung des Netzes zur gewünschten Form unter Anwendung der oben erwähnten drei Verfahren.
2. Darstellung des Hauptkrümmungs-Richtungsfeldes im Grundriss, mit Hilfe eines Zeichenautomaten.

3. Auf Grund dieses Bildes des Richtungsfeldes wird darüber entschieden, von welchem Punkt die Integration ausgehen und in welcher Richtung sie verlaufen soll.
4. Bestimmung jener Punkte der ersten ausgewählten, mit dem Zeichenautomaten im Grundriss dargestellten Hauptkrümmungslinie, von denen ausgehend die normale Hauptkrümmungslinienschar konstruiert werden soll.

Das Schema des Konstruktionsverfahrens und die nach den einzelnen Schritten erhaltenen (intermediären) zeichnerischen Ergebnisse sind auf dem nachfolgenden Beispiel veranschaulicht. Ein Knotenpunkt des auf Fig. 6 dargestellten Seilnetzes wird mit einem Mast in die Höhe von 10 Metern aufgeschoben. Das Seilnetz nimmt unter Wirkung der vorgeschriebenen horizontalen

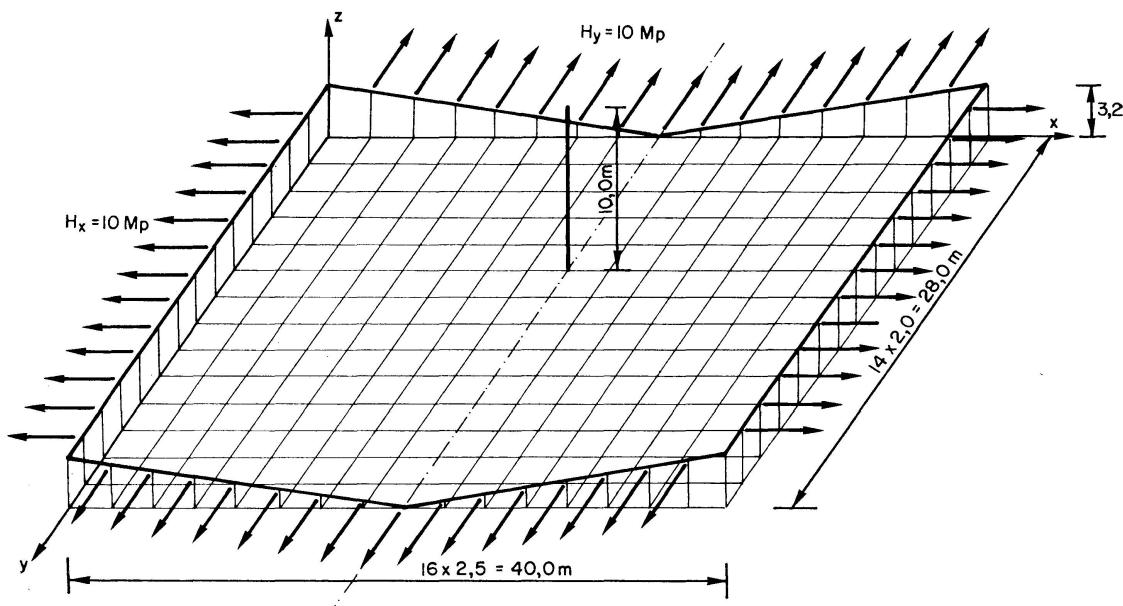


Fig. 6.

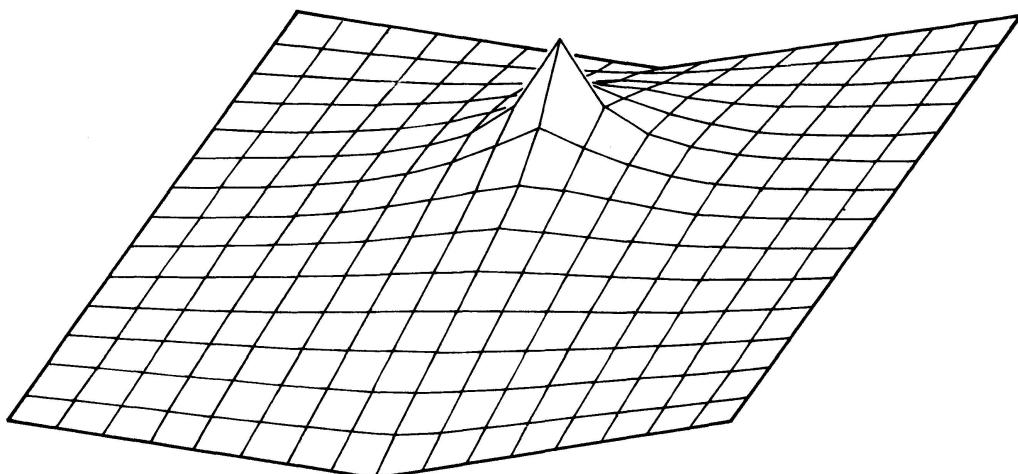


Fig. 7.

Komponenten der Seilkräfte die in Fig. 7 geschilderte Form an. Das Richtungsfeld der Hauptkrümmungslinien wird in Fig. 8 gezeigt.

Die Berechnung der ersten Hauptkrümmungslinie wurde ausgehend vom Punkt A (s. Fig. 8 und Fig. 9) durchgeführt, und zwar mit der Vorschrift, dass die

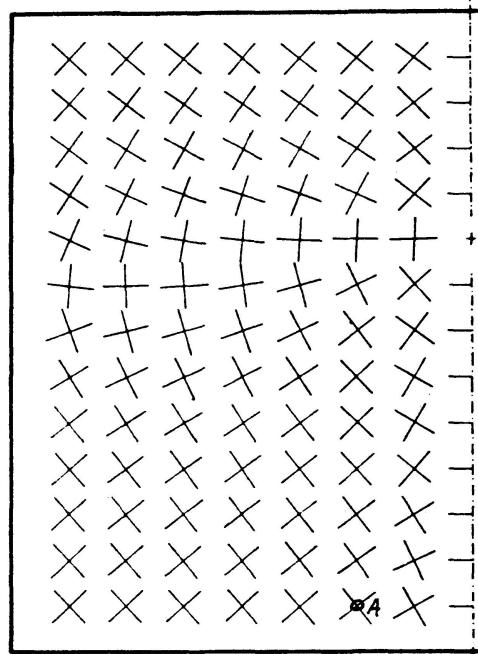


Fig. 8.

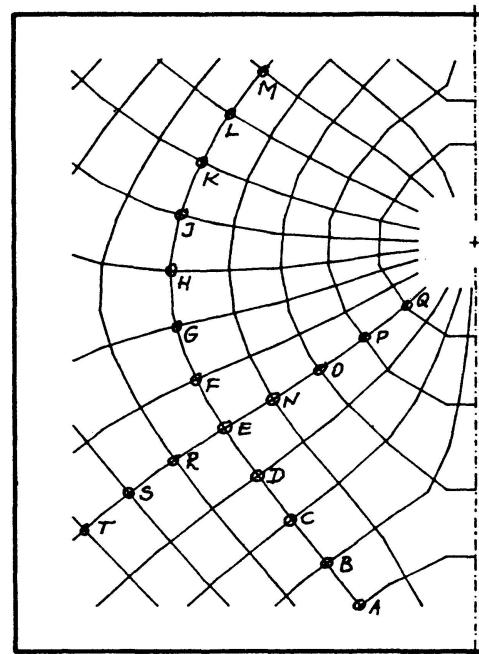


Fig. 9.

auf der Fläche 2,5 Meter voneinander entfernt liegenden Punkte der Linie bezeichnet werden sollen. Auf diese Weise ergaben sich die Punkte A, B, C, \dots, M der Fig. 9. Die erste orthogonale Hauptkrümmungslinie geht vom Punkt E aus. Die mit N, O, \dots, T bezeichneten Punkte dieser Linie liegen gleichfalls 2,5 Meter entfernt voneinander. Die weiteren Hauptkrümmungslinien sind ausgegangen von den mit A, B, \dots, T bezeichneten Punkten aufgezeichnet.

Gleichzeitig erhält man die Koordinaten der Schnittpunkte der Hauptkrümmungslinien, ferner die den Schnittpunkten zugehörenden je vier Seilkräfte. Diese Seilkräfte werden mit Hilfe der spezifischen Seilkraft und der Sehnenlänge berechnet.

Auf Grund des Verfahrens sind also die Knotenpunktkoordinaten (\mathbf{r}_0) eines Stabnetzes (und dementsprechend seine geometrische Matrix \mathbf{G}_0) sowie seine Stabkräfte (\mathbf{s}_0) bekannt, wodurch mit Hilfe des Zusammenhangs (11) das mit dem Ausgangszustand $\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0$ verträgliche Knotenpunktlastsystem $\mathbf{p}_0, \mathbf{t}_0$ bestimmt werden kann. Die weiteren Verschiebungen des Netzes \mathbf{r}_0 werden dann in der im ersten Abschnitt erläuterten Weise berechnet, und zwar derart, dass der Zustand \mathbf{r}, \mathbf{s} als die der vorgeschriebenen Flächenlast \mathbf{p} entsprechende und den Anfangsbedingungen genügende Lösung der Differentialgleichung (10) bestimmt wird.

Bezeichnungen

Matrizen, Vektoren, Spalten: Fettdruck

- * Transponierte Matrix, Zeile.
- $l_{j,k}$ Länge des die Knotenpunkte j und k verbindenden Stabes.
- \mathbf{r} die Gesamtheit der Knotenpunktkoordinaten $x_j, y_j, z_j (j = 1, 2 \dots n)$ enthaltender Vektor, kurz: Knotenpunkt-Koordinatenvektor.
- \mathbf{s} Die Gesamtheit der Stabkräfte $s_{j,k}$ enthaltender Vektor (kurz: Stabkraftvektor).
- \mathbf{p} Die Gesamtheit der Knotenpunkt-Lastkomponenten p_{xj}, p_{yj}, p_{zj} enthaltender Vektor (kurz: Lastvektor).
- \mathbf{F} Die Gesamtheit der Moduli $F_{j,k} = \frac{l_{j,k}}{EA_{j,k}}$ der Stäbe enthaltende Diagonalmatrix (kurz: Netzelastizitätsmatrix).
- \mathbf{t} Die Gesamtheit der für diese Stäbe *vorgegebenen* Dehnungen $t_{j,k}$ enthaltender Vektor.
- $A_{j,k}$ Querschnitt des Stabes (j, k) .
- \mathbf{G} Geometrische Matrix des Stabnetzes.
- \mathbf{D} Die ergänzende Steifigkeits-Matrix.
- \mathbf{E} Die Einheits-Matrix.

Schrifttum

1. F. LEONHARDT: Seilkonstruktionen und seilverspannte Konstruktionen, IVBH IX. Kongr. Einführungsbericht, 1972, p. 103–125.
2. O. FREI: Das hängende Dach, Ullstein-Verlag, Berlin, 1954.
3. A. SIEV: General Analysis of Prestressed Nets, Abh. IVBH Zürich 1963, p. 283–292.
4. H. MØLLMANN, P. L. MORTENSEN: The analysis of prestressed suspended roofs (cable nets), Int. Conf. on Space Struct. 1966, Blackwell Sci. Publ. Ltd. 1966.
5. J. SZABÓ: Bemerkungen zur Berechnung seilverspannter Konstruktionen, Acta Technica Sc. Hung. 75, 1973, Budapest.
6. J. SZABÓ: A térbeli tartórács egyenlete. (Die Gleichung des räumlichen Trägerrostes.) ÉTI. Tud. Közl. 34, 1964. Budapest.
7. J. SZABÓ, M. BERENYI: Numerical Analysis of orthogonal Presstressed Nets, Acta Technica, 72, 3–4. Budapest, 1972.
8. J. SZABÓ: Mit Hilfe der kanonischen Form der Matrixfunktionen vorteilhaft zu behandelnde Aufgaben auf dem Gebiet der Statik und der Festigkeitslehre, Wiss. Zeitschr. d. Techn. Univ. Dresden, 10, 1961, H. 6, p. 1325–1327.

Zusammenfassung

Der exakte Zusammenhang zwischen den Lasten, Stabdehnungen, Stabkräften und Knotenpunktverschiebungen eines Stabnetzes endlichen Freiheitsgrades kann mit Hilfe einer Matrizen-differentialgleichung aufgeschrieben werden. Diese Gleichung kann zur iterativen Berechnung von beliebiger Genauig-

keit des einer gegebenen Last entsprechenden Netzzustandes angewandt werden. Die Anfangsform des Netzes lässt sich mit Hilfe eines orthogonalen Seilnetzes bequem bestimmen. Die Daten des orthogonalen Seilnetzes können zur Konstruktion eines beliebigen Netzes als Hilfsmittel benutzt werden. Als Beispiel wird ein mit den Sehnen der Hauptkrümmungslinien konstruiertes Netz aufgezeichnet.

Summary

The exact relation between the loads, the elongations and forces of bars and the displacements of points of junction of a bar net with a finite degree of freedom can be formulated by a matrix differential equation. This equation can be applied for the iterative calculation of arbitrary accuracy of a given load to the corresponding net-state. The initial shape of the net can be determined easily by means of an orthogonal cable net. The data of the orthogonal cable net can be used for constructing an arbitrary net as expedient. An example is given by tracing a net constructed with the chords of the main curvature lines.

Résumé

Le rapport exact entre charges, allongement de barre, tensions dans la barre et déplacements de nœuds d'assemblage d'un réseau de treillis de degré de liberté fini peut être formulé à l'aide d'une équation différentielle matricielle. Cette équation peut être employée au calcul itératif d'exactitude arbitraire de l'état du réseau correspondant à une charge donnée. La forme initiale du réseau peut être déterminée facilement à l'aide d'un réseau de câbles orthogonal. Les dates du réseau de câbles orthogonal peuvent être employées pour la construction d'un réseau arbitraire. A titre d'exemple on a tracé un réseau construit avec les cordes des lignes de courbure principales.