

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 33 (1973)

Artikel: Calcul des ponts biais à poutres multiples

Autor: Jirousek, J.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-25621>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Calcul des ponts biais à poutres multiples

Berechnung der schiefen Brücken aus nebeneinanderliegenden Balken

Finite Element Solution of Skew Multibeam Bridges

J. JIROUSEK

Dr ing. SIA. Chaire de statique et de résistance des matériaux de
l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Introduction

La présente étude concerne les ponts à poutres multiples sans entretoises formés par un système de poutres préfabriquées placées l'une à côté de l'autre et liées le long de la portée (voir par exemple fig. 1). L'obliquité de l'ouvrage en plan est obtenue par un décalage des extrémités des poutres. La liaison entre les poutres est réalisée par le remplissage des logements (shear key) aménagés le plus souvent dans la partie supérieure des joints (fig. 2). Si la précontrainte latérale est faible ou inexistante, les déformations de l'ouvrage

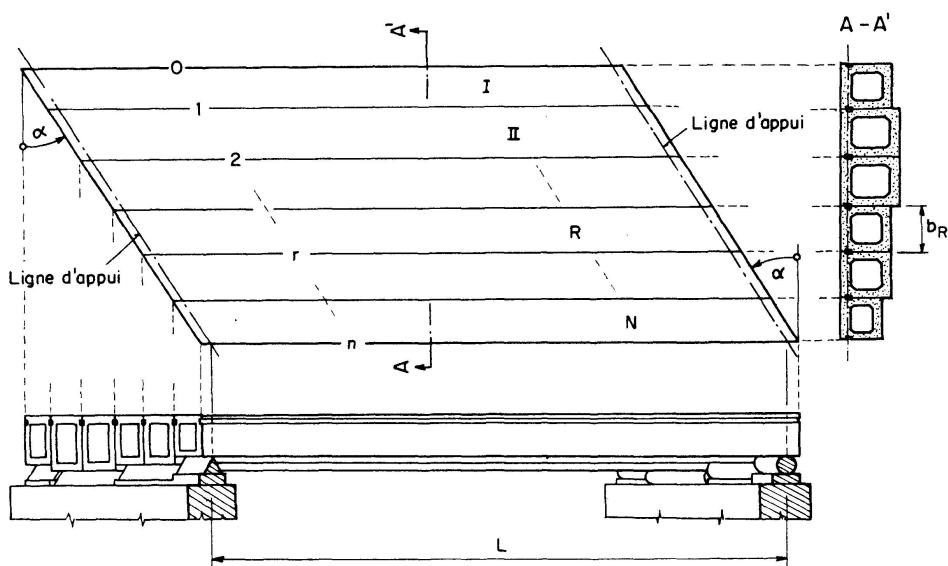


Fig. 1. Pont biais à poutres multiples.

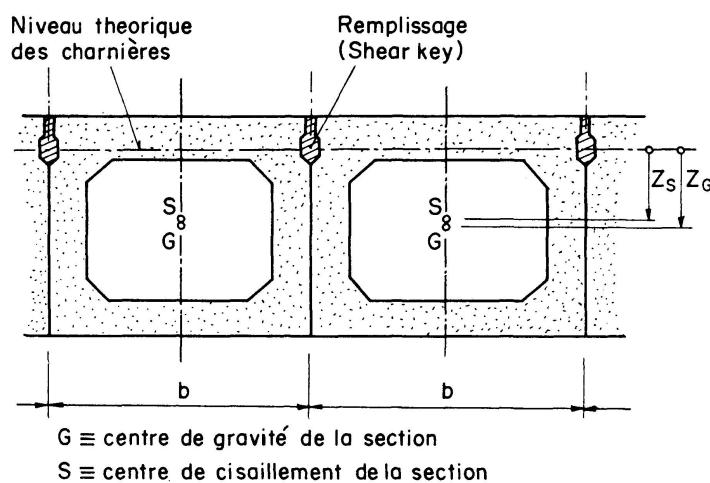


Fig. 2. Géométrie de la section; charnières fictives formées par le remplissage des joints.

et le retrait entraînent un décollement des clavettes de remplissage des joints. La rigidité transversale, et par conséquent aussi la possibilité de transmission des moments transversaux disparaissent. Selon l'hypothèse, très généralement admise en pratique¹⁾, on peut alors considérer que les poutres sont liées le long de la portée par des charnières longitudinales sans frottement. C'est également ce que nous ferons dans l'étude qui va suivre.

A cause des complications mathématiques, les méthodes connues²⁾ basées sur l'hypothèse des charnières se limitent presque en totalité à des ponts rectangulaires. De plus, on suppose aussi presque toujours que toutes les poutres ont la même section. D'après ce que nous savons, les travaux concernant les ponts biais se limitent à ceux (voir [9], [10] et [16])³⁾ qui ne traitent que le cas où les charnières entre les poutres sont au niveau des centres de cisaillement des sections.

Le but de la présente étude est de montrer les possibilités d'application de la méthode des éléments finis au calcul des ponts biais à poutres multiples. Vu l'utilisation croissante des ordinateurs dans la pratique, on peut envisager que l'élaboration d'un programme standard de calcul des ponts biais (en général avec des poutres de sections inégales) permettrait de résoudre la majorité des problèmes.

Afin d'obtenir une solution suffisamment simple, il a fallu formuler certaines hypothèses simplificatrices. Celles-ci sont en l'occurrence toujours bien satisfaites pour les poutres-caissons mais le sont en général beaucoup moins pour les poutres à section ouverte. La méthode de calcul développée dans ce travail s'applique donc essentiellement aux ponts à poutres de section fermée.

¹⁾ Voir le «National Cooperative Highway Research Program Report 83» (1970) du «Highway Research Board», Etats-Unis.

²⁾ Voir la bibliographie de la fin de l'article.

³⁾ Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie de la fin de l'article.

La technique de calcul par éléments finis utilisés ici se base sur la subdivision en plan de chaque poutre en une série de macro-éléments trapézoïdaux et sur les fonctions de déplacement de ces éléments. Ces fonctions assurent aussi bien la compatibilité des déformations des éléments de la même poutre que celle des poutres elles-mêmes aux joints. Partant du théorème du minimum de l'énergie potentielle, on développe la matrice de rigidité de l'élément liant les forces nodales aux déplacements nodaux. Ceux-ci sont ensuite calculés à partir des conditions d'équilibre aux noeuds de l'assemblage.

Ire Partie: Théorie

1. Formulation du problème et hypothèses de base

Considérons un pont biais à poutres multiples sans entretoises (fig. 1). Les poutres peuvent être de section différente mais constante le long de la portée. L'ouvrage n'est pas précontraint latéralement, ou cette précontrainte est négligeable. Il s'agit d'étudier l'interaction des poutres sous l'effet des charges verticales et du tassement des appuis, et de développer une méthode pratique de calcul.

Hypothèses de base:

- a) Les sections transversales des poutres possèdent un axe vertical de symétrie.
- b) Les liaisons entre les poutres sont équivalentes à des charnières longitudinales travaillant sans frottement.
- c) Toutes les charnières liant les poutres entre elles se trouvent dans le même plan horizontal (fig. 2).
- d) L'obliquité en plan de l'ouvrage n'est pas excessive, de sorte que les dimensions des sections biaises des poutres, parallèlement aux lignes d'appui, sont petites vis-à-vis de la longueur des poutres.
- e) La section transversale des poutres est indéformable dans son plan.
- f) Les appuis sont constitués de façon à ne pas entraver le gauchissement des sections d'appui.

D'autres hypothèses auxiliaires seront formulées au cours du développement de la méthode de calcul.

2. Efforts internes des poutres et énergie potentielle de déformation

Considérons une poutre de l'ouvrage (voir par exemple la fig. 3 où G désigne le centre de gravité de la section et S son centre de torsion). Dans le cas particulier où S se confond avec G et où les charnières entre les poutres se trouvent au niveau des centres de torsion et si les sections ne se gauchissent pas, les charges

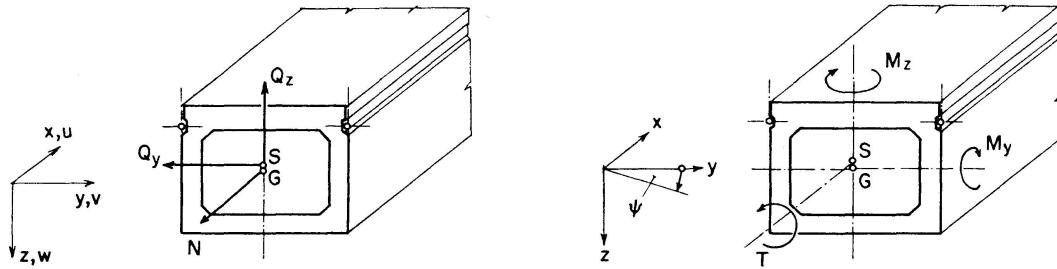


Fig. 3. Composantes des déformations (u, v, w, ψ) et efforts internes d'une poutre du pont.

verticales appliquées sur l'ouvrage n'engendrent qu'une flexion verticale et une torsion des poutres autour de S . Alors, les points du plan horizontal passant par les charnières ne se déplacent pas dans ce plan ($u=v=0$) et les forces d'interaction d'une poutre sur l'autre, par l'intermédiaire des charnières, sont toutes verticales. Par contre, dans le cas général où ces conditions simplificatrices ne sont pas réalisées, les points du plan passant par les charnières subissent des déplacements horizontaux et les forces d'interaction ont, en plus des composantes verticales, des composantes horizontales latérales et longitudinales (respectivement perpendiculaires et parallèles aux axes des poutres). Ainsi, les poutres sont en général soumises non seulement à la flexion verticale et à la torsion, mais aussi à la flexion horizontale et aux efforts normaux.

La figure 3 montre les efforts internes de la section transversale d'une poutre dans ce cas général. On désigne par M_y, M_z les moments fléchissants, par T le moment de torsion, par Q_y, Q_z les efforts tranchants et par N l'effort normal. Les composantes des déplacements selon les directions du système global d'axes x, y, z sont respectivement u, v et w (fig. 3). De plus, ψ désigne la rotation autour de l'axe de la poutre.

Avec les conventions de la figure 3, les moments de flexion, le moment de torsion et l'effort normal s'expriment en fonction des déformations par

$$M_y = -E I_y \frac{d^2 w_S}{dx^2}, \quad (1a)$$

$$M_z = -E I_z \frac{d^2 v_S}{dx^2}, \quad (1b)$$

$$T = G J \frac{d\psi}{dx} - E C \frac{d^3 \psi}{dx^3}, \quad (1c)$$

$$N = E A \frac{du_S}{dx}. \quad (1d)$$

D'autre part, le bimoment dû aux contraintes normales de torsion non uniforme (torsion fléchie) vaut

$$B = -E C \frac{d^2 \psi}{dx^2}. \quad (1e)$$

Dans ces relations,

- I_y, I_z = moment d'inertie de la section par rapport à l'axe principal parallèle respectivement à y et z et passant par G [cm⁴];
 J = moment de rigidité de torsion uniforme (Saint-Venant) [cm⁴];
 C = moment d'inertie sectorielle [cm⁶];
 A = aire de la section [cm²];
 w_S, v_S = déplacements latéraux w et v du centre de torsion de la section;
 u_G = déplacement longitudinal u du centre de gravité de la section.

En négligeant l'effet des contraintes tangentielles dues à la flexion, ainsi que celles dues à la torsion fléchie, l'énergie potentielle des efforts internes (énergie potentielle de déformation) de la poutre s'écrit

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[M_y \left(-\frac{d^2 w_S}{dx^2} \right) + M_z \left(-\frac{d^2 v_S}{dx^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + T_S \left(\frac{d\psi}{dx} \right) + B \left(-\frac{d^2 \psi}{dx^2} \right) + N \left(\frac{du_G}{dx} \right) \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[E I_y \left(-\frac{d^2 w_S}{dx^2} \right)^2 + E I_z \left(-\frac{d^2 v_S}{dx^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + G J \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + E C \left(-\frac{d^2 \psi}{dx^2} \right)^2 + E A \left(\frac{du_G}{dx} \right)^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Dans cette expression, $T_S = G J \frac{d\psi}{dx}$ est la partie du moment de torsion selon Saint-Venant, tandis que la torsion fléchie s'exprime en fonction du bimoment B .

3. Hypothèses simplificatrices

Avant de développer notre méthode de calcul, nous formulons encore deux hypothèses simplificatrices, tirées de l'analyse détaillée des propriétés des ouvrages en question:

1. On a vu au paragraphe précédent que, dans le cas général, les charges verticales engendrent aussi une flexion horizontale des poutres. Cette flexion provoque le long des poutres des déplacements horizontaux $v_S = v_S(x)$, différents d'une poutre à l'autre. Mais, puisqu'on suppose en même temps que les sections transversales des poutres restent indéformables dans leur plan (les éléments de l'ouvrage travaillent comme des poutres et non pas à la manière d'une ossature plissée), on doit admettre que dans le plan horizontal passant par les axes des charnières, les déplacements v de toutes les poutres doivent être égaux. Puisque l'assemblage des poutres est toujours très rigide dans ce plan, il est logique d'admettre que *les déplacements v au niveau des charnières sont négligeables vis-à-vis des déplacements verticaux w* .

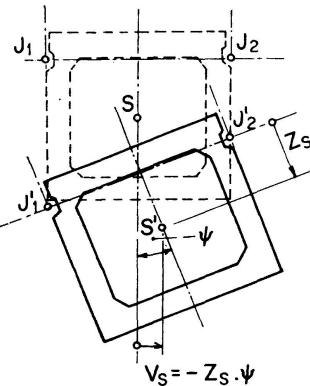


Fig. 4. Relation entre le déplacement latéral v_s et la rotation ψ de la section.

Il en résulte (voir la fig. 4) que le déplacement horizontal v_s du centre de rotation de n'importe quelle poutre est dû uniquement à sa distorsion ψ et s'exprime simplement sous forme

$$v_s = -z_s \psi. \quad (3)$$

2. La solution se simplifie considérablement si l'on admet que les charnières n'empêchent pas les fibres adjacentes de deux poutres voisines de glisser longitudinalement l'une par rapport à l'autre. (Ce glissement correspond à la différence de déformations dues à la flexion et au gauchissement des sections). Ceci implique que l'on peut supprimer le dernier terme de l'équation (2), puisque les efforts normaux des poutres seront dorénavant nuls. La différence des déplacements longitudinaux des fibres adjacentes, due à la flexion, est très petite, et tant qu'il ne s'agit pas de sections ouvertes, il en est de même pour l'effet du gauchissement. La confrontation des résultats numériques donnés plus loin (2e partie, problème 3) montre que la possibilité de glissement longitudinal ne se manifeste pratiquement pas et que cette hypothèse simplificatrice peut être adoptée avec confiance pour l'analyse des ouvrages à partir de poutres à section pleine ou fermée auxquelles est consacrée cette étude. Elle serait, en revanche, beaucoup moins satisfaisante pour les systèmes de poutres à section ouverte, dont le gauchissement est beaucoup plus important.

4. Subdivision de l'ouvrage en macro-éléments et introduction des fonctions de déplacements

Pour analyser l'ouvrage par la méthode des éléments finis, on le remplace par un assemblage de macro-éléments selon la figure 5. Chaque poutre est, en général, subdivisée dans le plan en une série de M macro-éléments trapézoïdaux de longueur

$$\Delta = \frac{l}{M}.$$

On utilisera deux systèmes d'axes dans le plan (voir figures 5 et 6; le système dit «global» formé des axes x , y orthogonaux, et le système dit «local» formé

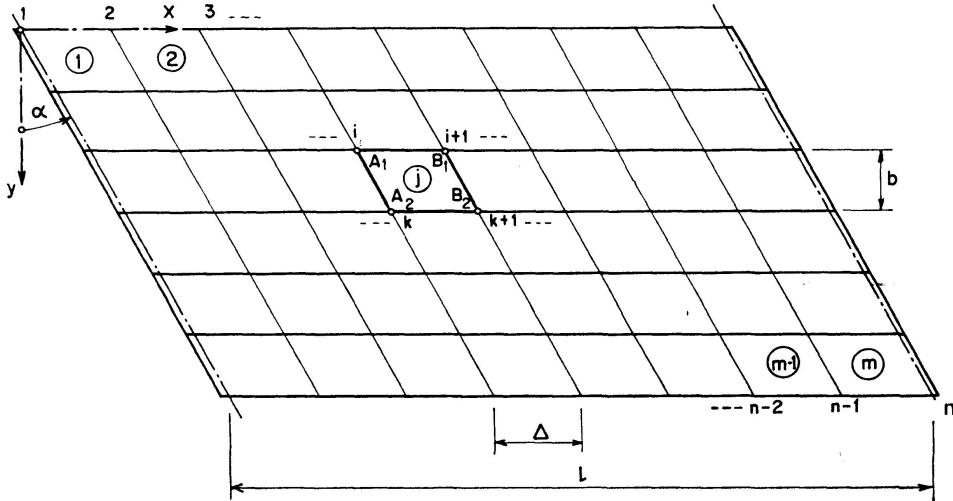


Fig. 5. Assemblage d'éléments finis.

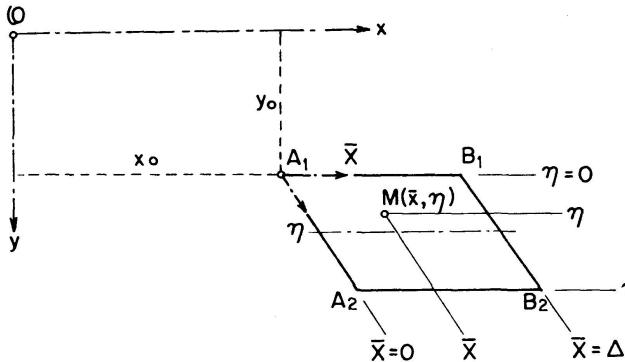


Fig. 6. Systèmes d'axes «global» et système «local».

par les axes biais \bar{x} , η , liés à un élément particulier. Le plan des deux systèmes correspond à celui des axes des charnières liant les poutres (voir aussi la fig. 3).

D'après la figure 6, les relations entre les coordonnées globales du système et les coordonnées locales d'un élément s'expriment par

$$x = x_0 + \bar{x} + b \eta \operatorname{tg} \alpha,$$

$$y = y_0 + b \eta.$$

Soit w le déplacement vertical au niveau des charnières ($z=0$);

$$w(\bar{x}, \eta) = (1 - \eta) w_1(\bar{x}) + \eta w_2(\bar{x}), \quad (4)$$

où $w_1(\bar{x})$, $w_2(\bar{x})$ sont les déplacements verticaux des charnières entre les noeuds A_1 , B_1 , respectivement A_2 , B_2 . Pour exprimer les dérivés de $w(\bar{x}, \eta)$ par rapport à x et y , on écrit:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\Im(w, y)}{\Im(x, y)}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\Im(x, w)}{\Im(x, y)},$$

où $\mathfrak{J}(\dots)$ sont les jacobiens de transformation. En désignant pour simplifier

$$\frac{d}{d\bar{x}}(\dots) = (\dots)'$$

on trouve

$$\frac{\partial w}{\partial x} = (1 - \eta) w'_1 + \eta w'_2, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{b}(w_1 - w_2) - \operatorname{tg} \alpha [(1 - \eta) w'_1 + \eta w'_2]. \quad (4b)$$

Pour $\eta = \frac{1}{2}$ on en tire

$$w_S = (w)_{\eta=1/2} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2), \quad (5a)$$

$$\varphi = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{\eta=1/2} = \frac{1}{2}(w'_1 + w'_2), \quad (5b)$$

$$\psi = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{\eta=1/2} = -\frac{1}{b}(w_1 - w_2) - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha (w'_1 + w'_2), \quad (5c)$$

et avec (3) on a encore

$$v_S = \frac{z_S}{b}(w_1 - w_2) + \frac{1}{2}z_S \operatorname{tg} \alpha (w'_1 + w'_2). \quad (5d)$$

Soit maintenant pour $i = 1, 2$ les fonctions de déplacement des charnières pour un élément

$$w_i = w_i(\bar{x}) = \mathbf{B} \mathbf{w}_i, \quad (6)$$

$$\text{ou } \mathbf{B} = [f_1(\bar{x}) \ f_2(\bar{x}) \ f_3(\bar{x}) \ f_4(\bar{x})] \quad (6a)$$

est la matrice de quatre fonctions

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}) &= \frac{1}{\Delta^3}(\Delta^3 - 3\bar{x}^2\Delta + 2\bar{x}^3), \\ f_2(\bar{x}) &= \frac{1}{\Delta^2}(\bar{x}\Delta^2 - 2\bar{x}^2\Delta + \bar{x}^3), \\ f_3(\bar{x}) &= \frac{1}{\Delta^3}(3\bar{x}^2\Delta - 2\bar{x}^3), \\ f_4(\bar{x}) &= \frac{1}{\Delta^2}(-\bar{x}^2\Delta + \bar{x}^3), \end{aligned} \quad (6b)$$

et

$$\mathbf{w}_i = \begin{pmatrix} w_{A_i} \\ \varphi_{A_i} \\ w_{B_i} \\ \varphi_{B_i} \end{pmatrix} \quad (6c)$$

est le sous-vecteur de quatre paramètres nodaux inconnus.

Les fonctions $f(\bar{x})$ ont été choisies, afin de satisfaire aux conditions

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 1, & f_2(0) &= 0, & f_3(0) &= 0, & f_4(0) &= 0, \\ f'_1(0) &= 0, & f'_2(0) &= 1, & f'_3(0) &= 0, & f'_4(0) &= 0, \\ f_1(\Delta) &= 0, & f_2(\Delta) &= 0, & f_3(\Delta) &= 1, & f_4(\Delta) &= 0, \\ f'_1(\Delta) &= 0, & f'_2(\Delta) &= 0, & f'_3(\Delta) &= 0, & f'_4(\Delta) &= 1. \end{aligned}$$

En même temps, les paramètres du nœud (égaux respectivement au déplacement w et à la rotation φ de la charnière en ce point) seront toujours communs à tous les éléments autour du même nœud. Ainsi, les fonctions de déplacement (6) assureront automatiquement, aussi bien la continuité des déplacements w_S , v_S et des pentes ψ , φ entre les macro-éléments de la même poutre, que la compatibilité des déplacements w entre les poutres de l'ouvrage. Notons toutefois (voir 5d) qu'on ne peut pas assurer aussi automatiquement la continuité des pentes $\frac{dv_S}{dx}$ entre les éléments dès que le pont n'est plus rectangulaire ($\operatorname{tg} \alpha \neq 0$). La conséquence de cette imperfection, qui d'ailleurs ne peut intervenir que si $z_S \neq 0$, est toutefois minime. Dans la deuxième partie (problème 5), nous démontrerons que l'interaction des poutres n'est que très peu influencée par la position z_S des charnières et par conséquent aussi par la flexion horizontale des poutres, de sorte qu'il n'est pas nécessaire de rechercher une très grande précision.

5. Matrice de rigidité du macro-élément

Soit \mathbf{S} le vecteur des forces nodales (figure 7) et \mathbf{w} le vecteur des paramètres nodaux d'un élément

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_{A_1} \\ M_{A_1} \\ Z_{B_1} \\ M_{B_1} \\ Z_{A_2} \\ M_{A_2} \\ Z_{B_2} \\ M_{B_2} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{A_1} \\ \varphi_{A_1} \\ w_{B_1} \\ \varphi_{B_1} \\ w_{A_2} \\ \varphi_{A_2} \\ w_{B_2} \\ \varphi_{B_2} \end{Bmatrix}. \quad (7a, b)$$

On cherche la relation

$$\mathbf{S} = \mathbf{k} \mathbf{w}, \quad (8)$$

où \mathbf{k} est la matrice de rigidité d'ordre 8×8 . On la détermine en utilisant le théorème du minimum de l'énergie potentielle.

Pour exprimer l'énergie potentielle de déformation U_i (voir (2), où selon les hypothèses adoptées, on négligera l'effet de N) on introduira le vecteur

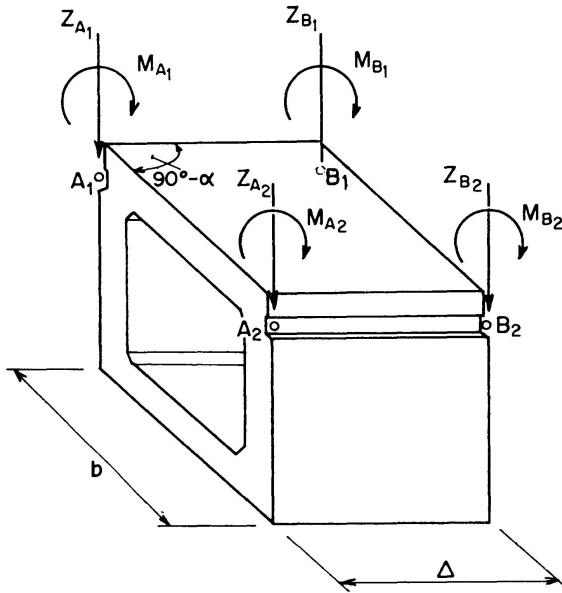


Fig. 7. Élément fini et ses forces nodales.

$$\mathbf{m} = \begin{Bmatrix} M_y \\ T_S \\ M_z \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_y & & & -w''_S \\ & GJ & & \psi' \\ & & EI_z & -v''_S \\ & & & EC \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w''_S \\ \psi' \\ -v''_S \\ -\psi'' \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{c}. \quad (9)$$

En utilisant les Eqs. (5), (6) et (7 b)

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} -w''_S \\ \psi' \\ -v''_S \\ -\psi'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\mathbf{B}'' & -\frac{1}{2}\mathbf{B}'' \\ -\frac{1}{b}\mathbf{B}' - \frac{1}{2}\operatorname{tg} \alpha \mathbf{B}'' & \frac{1}{b}\mathbf{B}' - \frac{1}{2}\operatorname{tg} \alpha \mathbf{B}'' \\ -\frac{z_S}{b}\mathbf{B}'' - \frac{z_S}{2}\operatorname{tg} \alpha \mathbf{B}''' & \frac{z_S}{b}\mathbf{B}'' - \frac{z_S}{2}\operatorname{tg} \alpha \mathbf{B}''' \\ \frac{1}{b}\mathbf{B}'' + \frac{1}{2}\operatorname{tg} \alpha \mathbf{B}''' & -\frac{1}{b}\mathbf{B}'' + \frac{1}{2}\operatorname{tg} \alpha \mathbf{B}''' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{w}, \quad (10)$$

de sorte que

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^A \mathbf{c}^T \mathbf{m} d\bar{x} = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \int_0^A \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} d\bar{x} \mathbf{w}$$

(l'indice T signifie que la matrice doit être transposée). L'énergie potentielle des efforts extérieurs étant

$$U_e = -\mathbf{w}^T \mathbf{S},$$

la variation de l'énergie potentielle totale $U = U_i + U_e$ donne

$$\int_0^A \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} d\bar{x} \mathbf{w} - \mathbf{S} = 0,$$

d'où (voir (8)) la matrice de rigidité

$$\underline{\mathbf{k}} = \int_0^A \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C} d\bar{x}. \quad (11)$$

Tableau 1. Matrice de rigidité fondamentale – Effet de la flexion verticale et de la torsion pure

$a_1 + a_3$	$a_5 + a_7$	$-a_1 - a_3$	$a_5 + a_7$	$a_1 - a_3$	$a_5 - a_7 + a_9$	$-a_1 + a_3$	$a_6 - a_7 - a_9$
$a_2 - a_4 + 2 a_8$	$-a_5 - a_7$	$-a_6 + a_8$	$a_5 - a_7 - a_9$	$-a_2 + 2 a_8$	$-a_5 + a_7 + a_9$	$-a_5 + a_7 + a_9$	$-a_4 + a_6 + a_8$
$a_1 + a_3$	$-a_5 - a_7$	$-a_1 + a_3$	$-a_5 + a_7 - a_9$	$-a_5 + a_7 - a_9$	$a_1 - a_3$	$a_1 - a_3$	$-a_5 + a_7 + a_9$
$a_2 + a_4 + 2 a_8$	$a_5 - a_7 + a_9$	$a_4 + a_6 + a_8$	$a_4 + a_6 + a_8$	$a_5 + a_7 - a_9$	$-a_5 + a_7 - a_9$	$-a_2 + 2 a_8$	$-a_5 + a_7 + a_9$
$\bar{k} = EI_y$	$a_1 + a_3$	$a_5 + a_7$	$a_5 + a_7$	$a_1 - a_3$	$-a_1 - a_3$	$a_5 + a_7$	$a_6 - a_7 - a_9$
Symétrie	$a_2 + a_4 + 2 a_8$	$a_2 + a_4 + 2 a_8$	$a_2 + a_4 + 2 a_8$	$a_5 + a_7$	$-a_5 - a_7$	$-a_6 + a_8$	$-a_5 - a_7$
				$a_1 + a_3$	$a_1 + a_3$	$a_2 - a_4 + 2 a_8$	$a_2 - a_4 + 2 a_8$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{3}{\Delta^3} \left(1 + \frac{GJ}{EI_y} \operatorname{tg}^2 \alpha \right) & a_3 &= \frac{6}{5 b^2 \Delta} \frac{GJ}{EI_y} & a_5 &= \frac{3}{2 \Delta^2} \left(1 + \frac{GJ}{EI_y} \operatorname{tg}^2 \alpha \right) & a_7 &= \frac{1}{10 b^2} \frac{GJ}{EI_y} & a_9 &= \frac{1}{b \Delta} \frac{GJ}{EI_y} \operatorname{tg} \alpha \\
 a_2 &= \frac{2 \Delta}{15 b^2} \frac{GJ}{EI_y} & a_4 &= \frac{1}{2 b} \frac{GJ}{EI_y} \operatorname{tg} \alpha & a_6 &= \frac{\Delta}{30 b^2} \frac{GJ}{EI_y} & a_8 &= \frac{1}{2 \Delta} \left(1 + \frac{GJ}{EI_y} \operatorname{tg}^2 \alpha \right)
 \end{aligned}$$

Tableau 2. Matrice de rigidité complémentaire – Effet de la flexion horizontale et de la torsion fléchie

$b_1 + b_3$	$b_5 - b_7 + b_9$	$-b_1 - b_3$	$b_5 + b_7 + b_9$	$-b_1 + b_3$	$-b_5 + b_7 + b_9$	$b_1 - b_3$	$-b_5 - b_7 + b_9$
$b_2 + b_4 - 2 b_8$	$-b_5 + b_7 - b_9$	$b_4 + b_6$	$-b_5 - b_7 + b_9$	$-b_2 + b_4$	$b_6 + b_7 - b_9$	$b_6 + b_7 - b_9$	$b_4 - b_6 - 2 b_8$
$b_1 + b_3$	$-b_5 - b_7 - b_9$	$b_1 - b_3$	$b_6 - b_7 - b_9$	$b_6 - b_7 - b_9$	$-b_1 + b_3$	$-b_1 + b_3$	$b_6 + b_7 - b_9$
$b_2 + b_4 + 2 b_8$	$-b_5 + b_7 + b_9$	$b_4 - b_6 + 2 b_8$	$b_5 + b_7 + b_9$	$b_5 - b_7 - b_9$	$b_1 - b_3$	$-b_1 - b_3$	$-b_2 + b_4$
$b_1 + b_3$	$b_5 + b_7 + b_9$	$b_6 + b_7 + b_9$	$b_6 + b_7 + b_9$	$b_5 - b_7 - b_9$	$b_5 - b_7 - b_9$	$b_5 - b_7 + b_9$	$b_4 + b_6$
$\Delta k = E(I_z z_s^2 + C)$	$b_2 + b_4 + 2 b_8$	$b_1 + b_3$	$b_1 + b_3$	$b_2 + b_4 + 2 b_8$	$b_1 + b_3$	$b_1 + b_3$	$b_2 + b_4 - 2 b_8$
Symétrie							

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{12}{b^2 \Delta^3} & b_2 &= \frac{4}{b^2 \Delta} & b_3 &= \frac{36}{\Delta^5} \operatorname{tg}^2 \alpha & b_4 &= \frac{9}{\Delta^3} \operatorname{tg}^2 \alpha & b_5 &= \frac{6}{b^2 \Delta^2} \\
 b_6 &= \frac{2}{b^2 \Delta} & b_7 &= \frac{6}{b \Delta^3} \operatorname{tg} \alpha & b_8 &= \frac{3}{b \Delta^2} \operatorname{tg} \alpha & b_9 &= \frac{18}{\Delta^4} \operatorname{tg}^2 \alpha
 \end{aligned}$$

La matrice de rigidité \mathbf{k} obtenue selon (11) est donnée dans les tableaux 1 et 2. Pour des raisons pratiques, on l'exprime sous la forme

$$\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}} + \Delta \mathbf{k}, \quad (12)$$

où $\bar{\mathbf{k}}$ (tableau 1) est la matrice fondamentale représentant uniquement l'effet de la flexion verticale et de la torsion de Saint-Venant et $\Delta \mathbf{k}$ (tableau 2) est la matrice complémentaire représentant la correction due à l'effet de la flexion horizontale et de la torsion fléchie.

6. Matrice de rigidité de l'assemblage et calcul des efforts internes

Une fois connue la matrice de rigidité d'un macro-élément, l'établissement de la matrice de rigidité de l'assemblage (fig. 5) n'est plus qu'une question de routine. Après avoir trouvé par inversion les paramètres nodaux aux noeuds de l'assemblage, on peut procéder au calcul des efforts internes.

Soit \mathbf{n} le vecteur des efforts internes aux extrémités $\bar{x}=0$ et $\bar{x}=\Delta$ de l'élément

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} M_{yA} \\ M_{zA} \\ B_A \\ T_{SA} \\ T_{fA} \\ Q_{zA} \\ M_{yB} \\ M_{zB} \\ B_B \\ T_{SB} \\ T_{fB} \\ Q_{zB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -EI_y w''_S(0) \\ -EI_z v''_S(0) \\ -EC\psi''(0) \\ GJ\psi'(0) \\ -EC\psi'''(0) \\ -Z_{A_1} - Z_{A_2} \\ -EI_y w''_S(\Delta) \\ -EI_z v''_S(\Delta) \\ -EC\psi''(\Delta) \\ GJ\psi'(\Delta) \\ -EC\psi'''(\Delta) \\ Z_{B_1} + Z_{B_2} \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

où T_S et T_f sont respectivement les parties du moment de torsion T dues à la torsion de Saint-Venant et à la torsion fléchie.

Pour exprimer les déformations w_S , v_S , ψ et leurs dérivés par rapport à \bar{x} , on utilisera les relations (5) et (6). Pour les forces nodales Z , compte tenu des équations (7) et (8), on se servira directement des lignes correspondantes de la matrice de rigidité $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}} + \Delta \mathbf{k}$ donnée aux tableaux 1 et 2. On exprimera ainsi le vecteur \mathbf{n} en fonction des paramètres nodaux aux angles de l'élément sous la forme

$$\mathbf{n} = \mathbf{F}\mathbf{w}, \quad (14)$$

où \mathbf{F} est la matrice de coefficients d'ordre 12×8 (voir tableau 3) et \mathbf{w} le vecteur de huit paramètres nodaux définis par l'équation (7b).

En examinant l'équation (13), on se rend compte que le vecteur \mathbf{n} ne contient pas l'effort tranchant Q_y . Son absence est due au fait que les hypothèses

Tableau 3. Matrice F pour le calcul des efforts internes aux extrémités des éléments

1	2	3	4	5	6	7	8
c_1	$2 c_2$	$-c_1$	c_2	c_1	$2 c_2$	$-c_1$	c_2
$-z_S$ fois la ligne 3							
$-d_1 + d_3$	$-2 d_2 + d_4$	$d_1 - d_3$	$-d_2 + d_4$	$d_1 + d_3$	$2 d_2 + d_4$	$-d_1 - d_3$	$d_2 + d_4$
e_1	$2 e_2 - e_3$	$-e_1$	e_2	e_1	$2 e_2 + e_3$	$-e_1$	e_2
f_1	f_2	$-f_1$	f_2	$-f_1$	$-f_2$	f_1	$-f_2$
$-2 a'_1 - 2 b'_3$	$\begin{matrix} -2 a'_5 + a'_9 \\ +2 b'_7 - 2 b'_9 \end{matrix}$	$2 a'_1 + 2 b'_3$	$\begin{matrix} -2 a'_5 - a'_9 \\ -2 b'_7 - 2 b'_9 \end{matrix}$	$-2 a'_1 - 2 b'_3$	$\begin{matrix} -2 a'_5 - a'_9 \\ -2 b'_7 - 2 b'_9 \end{matrix}$	$2 a'_1 + 2 b'_3$	$\begin{matrix} -2 a'_5 + a'_9 \\ +2 b'_7 - 2 b'_9 \end{matrix}$
$-c_1$	$-c_2$	c_1	$-2 c_2$	$-c_1$	$-c_2$	c_1	$-2 c_2$
$-z_S$ fois la ligne 9							
$d_1 + d_3$	$d_2 + d_4$	$-d_1 - d_3$	$2 d_2 + d_4$	$-d_1 + d_3$	$-d_2 + d_4$	$d_1 - d_3$	$-2 d_2 + d_4$
$-e_1$	$-e_2$	e_1	$-2 e_2 - e_3$	$-e_1$	$-e_2$	e_1	$-2 e_2 + e_3$
comme la ligne 5							
comme la ligne 6							
$-z_S$ fois la ligne 9							
$d_1 + d_3$	$d_2 + d_4$	$-d_1 - d_3$	$2 d_2 + d_4$	$-d_1 + d_3$	$-d_2 + d_4$	$d_1 - d_3$	$-2 d_2 + d_4$
$-e_1$	$-e_2$	e_1	$-2 e_2 - e_3$	$-e_1$	$-e_2$	e_1	$-2 e_2 + e_3$
comme la ligne 5							
comme la ligne 6							
$-z_S$ fois la ligne 9							
$d_1 = \frac{6 EI_z}{b \Delta^2}$	$d_2 = \frac{2 EI_z}{b \Delta}$	$d_3 = \frac{6 EI_z}{\Delta^3} \operatorname{tg} \alpha$	$d_4 = \frac{3 EI_z}{\Delta^2} \operatorname{tg} \alpha$	$c_1 = \frac{3 EI_y}{\Delta^2}$	$c_2 = \frac{EIy}{\Delta}$	$e_1 = \frac{3 GJ}{\Delta^2} \operatorname{tg} \alpha$	$e_2 = \frac{GJ}{\Delta} \operatorname{tg} \alpha$
$f_1 = \frac{12 EC}{b \Delta^3}$	$f_2 = \frac{6 EC}{b \Delta^2}$	$e_3 = \frac{6 E C}{b \Delta^2}$	$e_4 = \frac{G J}{b}$				

simplificatrices adoptées au paragraphe 3 rendent impossible la détermination des réactions horizontales entre les poutres au niveau des charnières de liaison. Notons que les valeurs de Q_y sont très faibles et pratiquement sans importance.

En appliquant à tour de rôle la relation (14) aux éléments d'une poutre du pont, on constate en général une légère oscillation des efforts obtenus respectivement à l'extrémité droite de l'élément (j) et à l'extrémité gauche de l'élément ($j+1$) (et ceci même en l'absence des charges isolées qui pourraient justifier une certaine discontinuité). Cette petite imperfection est propre à la méthode habituelle des éléments finis. Une meilleure approximation sera obtenue en prenant les moyennes arithmétiques des valeurs de gauche et de droite.

2e Partie: Analyse numérique et applications

Pour faciliter le calcul pratique des ponts biais à poutres multiples sans entretoises, nous avons élaboré un programme standard en langage FORTRAN pour l'ordinateur (programme PBPMSE). Ce programme, basé sur la théorie développée dans la première partie de ce travail, calcule pour le pont donné, avec les charges et les tassements d'appui choisis, les déformations (w, φ) et les efforts internes ($M_y, M_z, B, T_s, T_f, Q_z$) dans les poutres de l'ouvrage. Le nombre d'éléments $M = l : \Delta$ peut être choisi en fonction de la précision voulue. Nous n'entrerons pas dans les détails, qui feront l'objet d'un mode d'emploi mis plus tard à la disposition des clients du centre de calcul de l'EPF-L.

Dans le texte qui suit, on donne les résultats de quelques-uns des nombreux problèmes résolus à l'aide du programme PBPMSE. Les trois premiers ont été choisis pour vérifier la théorie, en confrontant nos résultats avec ceux de la littérature connue. Les autres exemples nous ont permis d'étudier quelques questions intéressant la pratique.

Problème 1: Confrontation des calculs avec l'expérience

Pour la première vérification de la théorie, nous avons choisi le modèle d'un pont rectangulaire à cinq poutres (figure 8a) qui a fait l'objet d'une étude expérimentale de J. KOPECKY [14]. Le modèle était réalisé en résine polyester durcie (extroplex) et les charnières étaient représentées par des encoches minces, fraîssées dans la plaque compacte du matériau.

Pour les dimensions de la section transversale des poutres et les qualités physiques du matériau (E, G), la référence [14] donne $E I_y = G J$. Les charnières étant à mi-hauteur des sections, on a $z_s = 0$ et les inerties I_z n'interviennent pas (voir le tableau 2). De plus, si l'on néglige pour les sections pleines le petit effet de la torsion non uniforme ($C \doteq 0$), la matrice de rigidité supplémentaire Δk est nulle. Ainsi, pour le cas envisagé, la matrice de rigidité

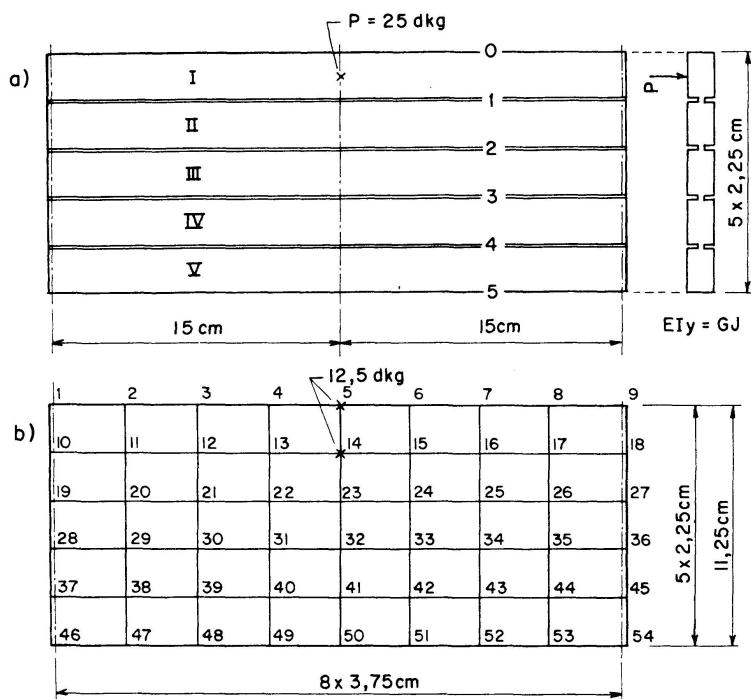


Fig. 8 a) Modèle du pont rectangulaire de l'essai de KOPECKY [14].
b) Assemblage d'éléments finis ($M=8$) pour l'analyse numérique du même ouvrage.

k des éléments sera représentée uniquement par la matrice fondamentale \bar{k} du tableau 1.

Le calcul du modèle a été exécuté pour deux réseaux différents d'éléments finis: celui de la figure 8b ($M=8$), et le réseau deux fois plus fin ($M=16$). Excepté dans la région voisine de la charge concentrée P (figure 8a), les deux calculs conduisent à des résultats peu différents. La figure 9 montre que les résultats du second calcul ($M=16$) concordent bien avec les valeurs expérimentales.

On remarquera sur la figure 9 que sous la charge concentrée P , le diagramme des moments fléchissants présente une pointe très aiguë qui, probablement, influence considérablement la répartition des moments entre les poutres du pont. Ce fait devrait être pris en considération dans le calcul d'un pont réel, où de vraies charges concentrées n'existent pas. Remplacer une charge répartie par des charges isolées pourrait conduire à des résultats assez différents.

Problème 2: Confrontation avec d'autres méthodes de calcul

Comme seconde vérification de notre méthode, nous avons choisi le pont biais de la figure 11a, formé de sept poutres-caissons préfabriquées de type KL 61-18 (figure 10a), soumis à une charge uniformément répartie $p = 1 \text{ t/m}^2$. Ce problème a déjà été résolu par d'autres méthodes approchées (voir [9] et [16]), dont les résultats sont confrontés avec les nôtres dans le tableau 4 (pour

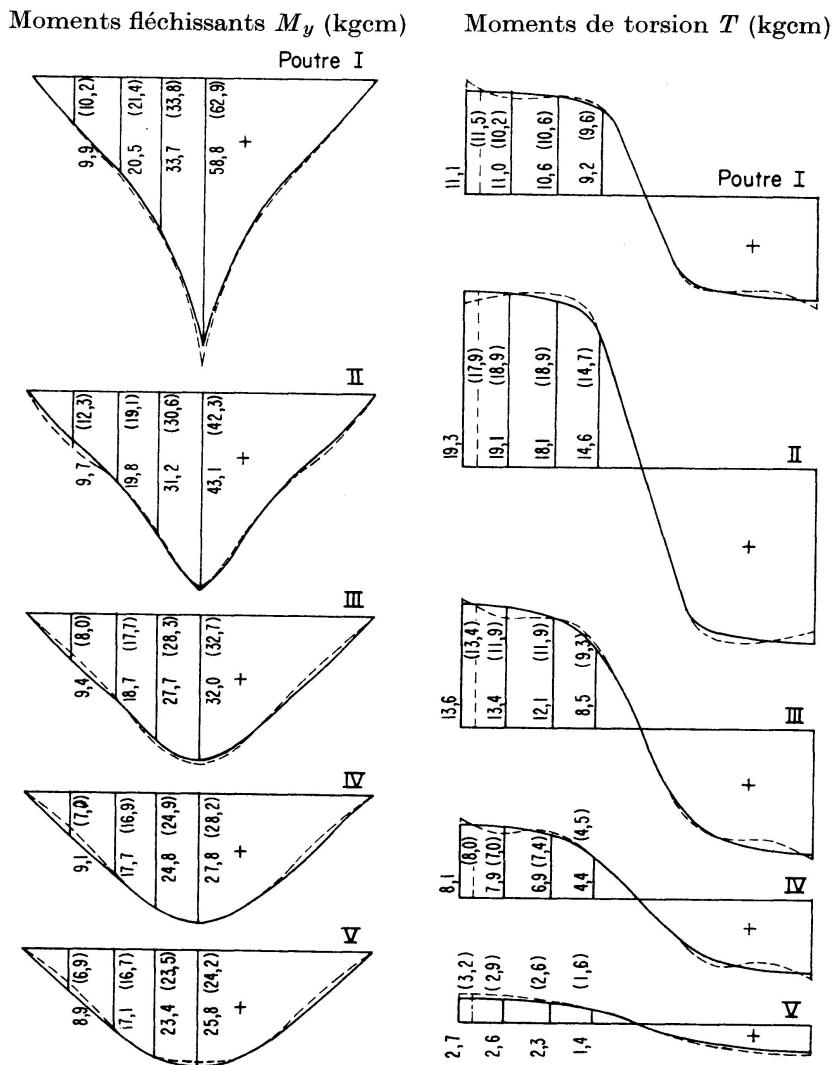


Fig. 9. Confrontation des résultats du calcul du pont de la figure 8 avec les résultats expérimentaux obtenus sur le modèle (valeurs en parenthèses et diagrammes en traitillé).

$M = 16$). On remarquera que nos résultats concordent, en général, très bien avec les deux autres solutions approchées.

Notons que les deux méthodes [9] et [16] considèrent, à priori, que les charnières entre les poutres se trouvent au niveau des centres de rotation S (ce qui est approximativement vrai pour les poutres-caissons KL 61-18) et négligent le petit effet de la torsion fléchie. Dans l'application de notre méthode, qui est plus générale, nous avons par conséquent posé $z_S = 0$ et $C = 0$. On verra plus loin l'influence de ces approximations.

Problème 3: Vérification des hypothèses simplificatrices

Les deux problèmes précédents concernaient des ponts avec charnières au niveau des centres de rotation. Dans ces cas, l'influence des hypothèses simplificatrices, énoncées au paragraphe 3 de la première partie de ce travail, n'apparaissait pas, puisque les poutres ne fléchissaient que dans le plan vertical et le

Tableau 4. Pont biais constitué par sept poutres-caissons KL 61-18 – Confrontation des résultats de différentes méthodes de calcul pour la charge répartie $p = 1 \text{ t/m}^2$

Méth.	R						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
Kop. [16]	1,51	1,55	1,57	1,58	1,57	1,55	1,51
El. finis	1,509	1,548	1,568	1,574	1,568	1,548	1,509

Flèches w [cm] au milieu des poutres

Moments fléchissants M_y [tm] aux quarts de la portée des poutres

R	x/l						
	0	0,25	0,50	0,75	1,00		
Jir. [9]	Kop.[16]	El. finis	Jir. [9]	Kop.[16]	El. finis	Jir. [9]	Kop.[16]
Jir. [9]	Kop.[16]	El. finis	Jir. [9]	Kop.[16]	El. finis	Jir. [9]	Kop.[16]
I	-7,08	-8,48	-8,45	15,37	15,59	31,41	31,55
II	-5,37	-6,30	-5,78	18,32	18,10	32,53	32,69
III	-3,81	-5,00	-3,89	20,59	20,44	33,13	33,29
IV	-2,76	-4,23	-2,96	22,50	22,39	33,33	33,48
V	-2,30	-4,05	-2,06	24,52	24,39	33,13	32,96
VI	-2,94	-4,79	-2,73	27,07	26,77	32,53	32,30
VII	-4,91	-7,67	-4,28	29,57	29,02	31,41	31,64
Σ	-29,17	-40,52	-30,15	157,94	156,70	158,35	157,47
				227,00	227,47	228,54	227,94
					156,70	158,35	157,94
						156,70	158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35
							157,94
							157,47
							227,00
							227,47
							228,54
							227,94
							156,70
							158,35</

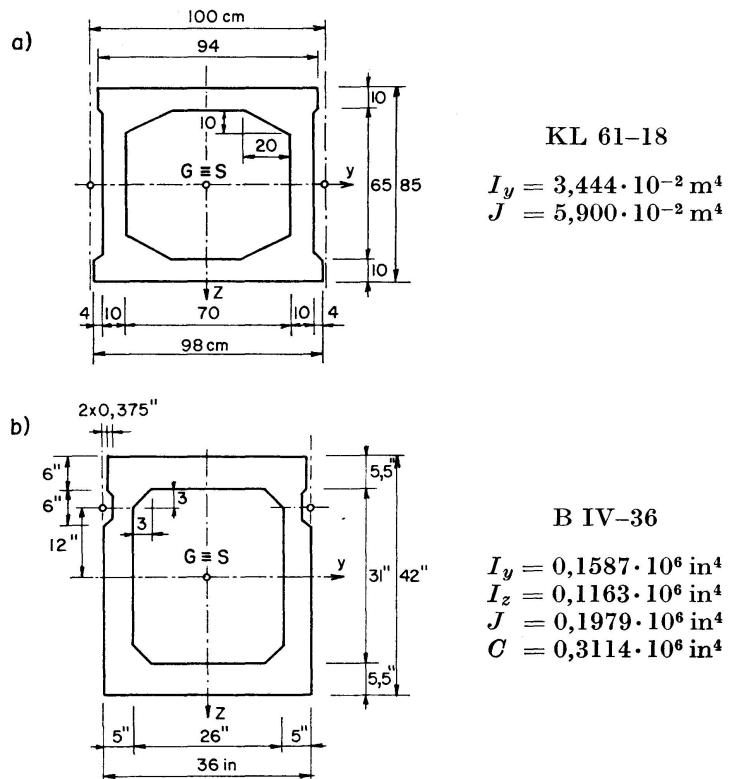


Fig. 10. Quelques exemples réels de poutres-caissons préfabriquées.

- a) KL 61-18 (Tchécoslovaquie) pour les portées jusqu'à 20 mètres.
 b) B IV-36 (Etats-Unis) pour les portées jusqu'à 88 ft.

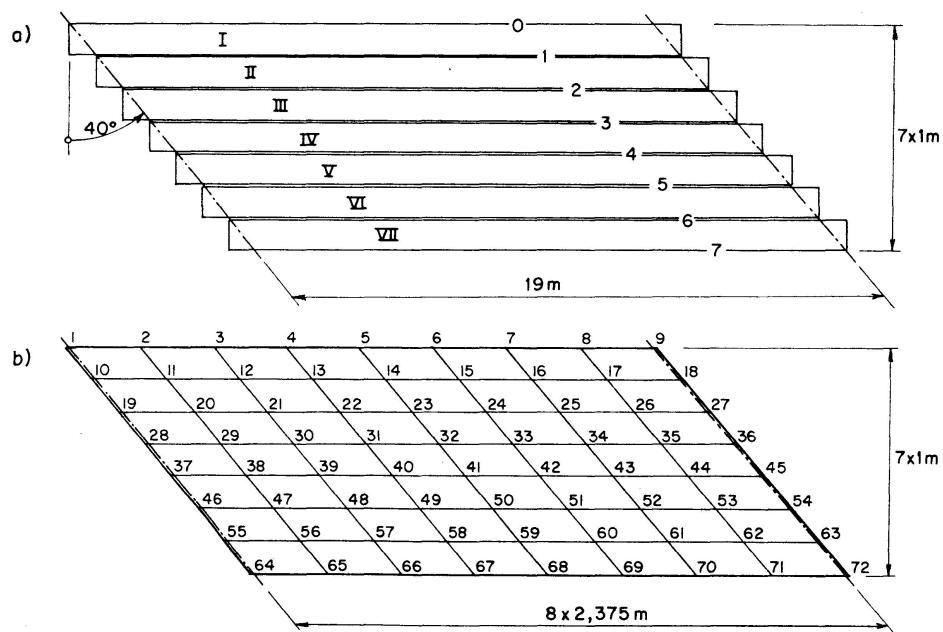


Fig. 11 a) Pont biais formé de sept poutres-caissons KL 61-18.
 b) Assemblage d'éléments finis ($M=8$) pour l'analyse numérique de l'ouvrage.

fait de négliger de plus la torsion fléchie imposait des déplacements longitudinaux u automatiquement nuls au niveau des charnières.

Pour vérifier la validité de ces hypothèses simplificatrices, nous avons étudié le pont rectangulaire de la figure 12a, constitué par dix poutres-caissons américaines de type B IV-36. Selon la figure 10b, la position théorique des charnières se trouve à peu près à douze pouces au-dessus des centres de rotation. Les inerties I_y , I_z et le moment d'inertie sectoriel C sont donnés dans la même figure. Etant donné que la conversion des unités américaines en cm ($1'' = 1 \text{ in} = 2,54001 \text{ cm}$) donnerait des chiffres peu commodes pour le calcul, nous avons conservé les unités originales, les pouces.

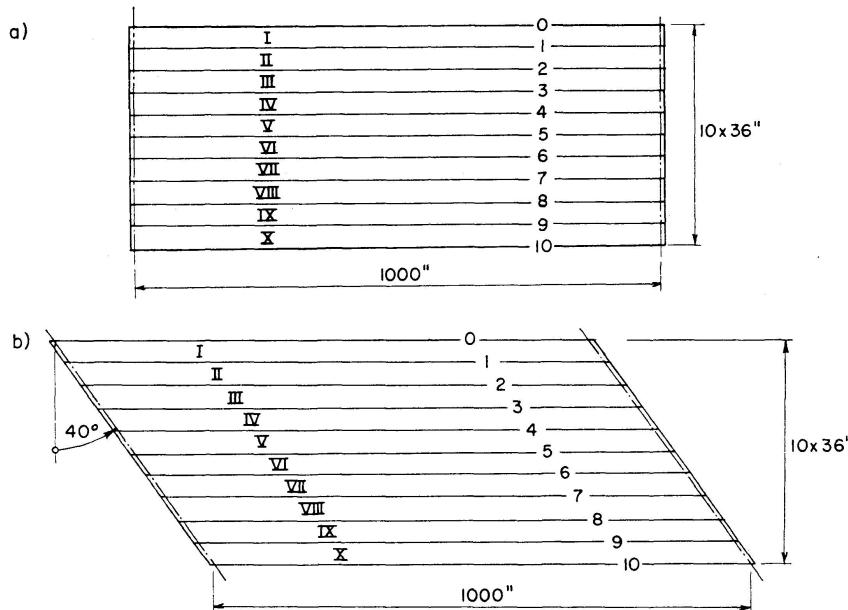


Fig. 12. Pont rectangulaire et pont biais formés de dix poutres-caissons B IV-36. Dimensions en pouces ($1'' = 1 \text{ pouce} = 2,54 \text{ cm}$).

Comme charge du pont, nous avons considéré la charge linéaire $p = p_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ appliquée successivement:

- sur la bordure extérieure (indice 0) de la poutre I,
- au milieu de la largeur de la poutre I.

La raison de ce choix est que pour une charge sinusoïdale, on trouve relativement facilement la solution exacte du problème (voir [12]). Les équations sont applicables uniquement pour des ponts rectangulaires à poutres de même section. Pour faciliter leur application, nous les avons programmées.

Le tableau 5 résume les résultats des deux calculs, la solution exacte et le calcul approché par notre méthode ($M = 16$). En accord avec les hypothèses simplificatrices du paragraphe 3, les résultats du calcul exact confirment que les déplacements latéraux sont vraiment très petits vis-à-vis des déplacements verticaux w . Sous premier cas de charge, ce rapport est par exemple 19 : 10888

pour la première poutre et 19 : 4477 pour la dernière poutre du pont. D'autre part, le calcul des contraintes normales confirme la très faible influence des efforts normaux. Ainsi par exemple, alors que dans la poutre I le moment fléchissant $M_{y \max}$ engendre la contrainte

$$\sigma_{M_y \max} = \frac{M_{y \max}}{I_y} \frac{h}{2} = \frac{15\,950 \, p_1}{158\,700} 21 = 2,111 \, p_1,$$

la contribution de l'effort normal est

$$\sigma_{N \max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{13 \, p_1}{710} = 0,018 \, p_1,$$

ce qui ne représente que 0,85% de $\sigma_{M_y \max}$. Ajoutons que les résultats de notre méthode (déformations, efforts internes) concordent très bien avec les résultats du calcul exact.

Notons encore au sujet des contraintes normales que, en plus de celles dues aux moments M_y et aux efforts normaux N , d'autres contraintes normales viendront s'ajouter, qui seront dues aux moments M_z et aux bimoments B . Par notre méthode, on trouve (toujours pour la même section et le même cas de charge)

$$\sigma_{M_z \max} = \frac{M_{z \max}}{I_z} \frac{b}{2} = \frac{540 \, p_1}{116\,300} 18 = 0,084 \, p_1.$$

Avec $|B|_{\max} = 45 \, p_1$, et $|\omega|_{\max} = 36 \text{ in}^2$ (où $|\omega|_{\max}$ est la valeur absolue de la coordonnée sectorielle aux angles de la section)

$$\sigma_{|B| \max} = \frac{|B|_{\max}}{C} |\omega|_{\max} = \frac{45}{311\,400} 36 = 0,005 \, p_1.$$

La contribution des bimoments B est donc pratiquement sans importance.

Problème 4: Influence de la position des charnières

Dans le cas d'un véritable pont à poutres-caissons préfabriquées et assemblées par le remplissage des joints («shear key») il régnera probablement toujours une certaine imprécision quant à la position exacte des charnières par lesquelles on remplace approximativement l'effet d'une telle jonction. Il est intéressant de savoir dans quelle mesure la position des charnières influence l'interaction des poutres.

Nous avons examiné les deux ponts (rectangulaire et biais) de la figure 12 et avons exécuté le calcul de chacun d'eux pour deux positions z_s différentes des charnières:

- a) $z_s = 12 \text{ in}$ (charnières près de la surface des poutres d'après la figure 10 b);
- b) $z_s = 0$ (charnières au niveau du centre de torsion des poutres).

Tableau 5. Confrontation des résultats – pont rectangulaire formé de dix poutres-caissons B-IV 36

Charge linéaire $p = p_1 \sin \pi x/l$ sur le bord extérieur de la poutre I

r	$Ew : p_1$ ($x = l/2$)		$Ev : p_1$ ($x = l/2$)	
	exact	el. finis	exact	el. finis
0	10888	10890		
1	9485	9489		
2	8307	8311		
3	7326	7329		
4	6518	6521		
5	5864	5866	19	0
6	5349	5351		
7	4961	4963		
8	4690	4691		
9	4530	4531		
10	4477	4478		

R	$10^5 M_y : p_1 l^2$ ($x = l/2$)		$10^5 M_z : p_1 l^2$ ($x = l/2$)		$10^5 T : p_1 l^2$ ($x = l$)		$10^3 Q_z : p_1 l$ ($x = 0$)		$10^3 N : p_1 l$ ($x = l/2$)	
	exact	el. finis	exact	el. finis	exact	el. finis	exact	el. finis	exact	el. finis
I	1595	1601	56	54	1054	1052	51	51	13	13
II	1393	1398	47	45	885	885	44	43	6	6
III	1224	1228	40	38	738	737	38	38	0	0
IV	1084	1088	33	31	607	607	34	34	-3	-3
V	969	973	27	25	491	491	30	30	0	0
VI	878	881	22	20	387	387	27	27	-6	-6
VII	807	810	17	15	292	292	25	25	-5	-5
VIII	756	758	13	10	204	204	24	24	-3	-3
IX	722	724	8	6	120	120	23	23	0	0
X	705	707	4	2	40	40	22	22	4	4

Charge linéaire $p = p_1 \sin \pi x/l$ sur l'axe de la poutre I

0	10187	10190								
1	9542	9545								
2	8357	8360								
3	7369	7372								
4	6557	6559								
5	5899	5901	19	0						
6	5381	5383								
7	4991	4992								
8	4717	4719								
9	4556	4558								
10	4503	4505								

I	1544	1550	27	25	485	484	49	50	10	10
II	1401	1406	48	46	890	890	44	44	6	6
III	1231	1236	40	38	742	742	39	38	1	1
IV	1090	1094	33	31	611	611	34	34	-3	-3
V	975	979	27	25	494	494	30	30	-5	-5
VI	883	886	22	20	389	389	28	28	-5	-5
VII	812	815	17	15	294	294	25	25	-5	-5
VIII	760	763	13	10	205	205	24	24	-3	-3
IX	726	729	8	6	121	121	23	23	0	0
X	709	712	4	2	40	40	22	22	3	3

La poutre I a été soumise à un groupe de trois charges concentrées: $P_1 = 0,25 Q$, $P_2 = 0,50 Q$ et $P_3 = 0,25 Q$ appliquées respectivement aux $7/16$, $8/16$ et $9/16$ de la portée. (Leur effet correspond approximativement à une charge Q uniformément répartie sur un tronçon central de $1/8$ de la portée. Notons toutefois que les charges nodales équivalentes à une telle charge répartie, au sens des travaux virtuels, comprendraient encore des couples nodaux de forces. Mais la différence pratique n'est pas très grande.)

Les résultats du calcul pour les deux positions des charnières sont résumés dans le tableau 6. (Le calcul a été exécuté avec les éléments finis de longueur $\Delta = l/16$.) Pour le niveau inférieur des charnières, les flèches de la poutre chargée et des poutres voisines accusent une légère augmentation, tandis que pour les poutres situées près de l'autre bord du pont les flèches ont une légère tendance à diminuer. Les différences ne sont pas toujours apparentes avec le nombre de décimales choisi. En ce qui concerne les efforts internes, on constate sur la poutre chargée (respectivement sur la poutre voisine) une légère augmentation des moments fléchissants, ceci au profit des poutres plus éloignées où

Tableau 6. Influence de la position z_S des charnières sur l'interaction des poutres. Pont rectangulaire et pont biais de la figure 12. Poutre I chargée par un groupe de trois forces concentrées: $P_1 = \frac{1}{4} Q$, $P_2 = \frac{1}{2} Q$ et $P_3 = \frac{1}{4} Q$, appliquées respectivement à $7/16$, $8/16$ et $9/16$ de la portée

Pont rectangulaire ($\alpha = 0$)

<i>R</i>	$10^5 E l w_{(l/2)}: Q$		$M_{y(l/2)}: Q l$		$M_{z(l/2)}: Q l$		$T_{max}: Q l$	
	$z_S = 12''$	$z_S = 0$	$z_S = 12''$	$z_S = 0$	$z_S = 12''$	$z_S = 0$	$z_S = 12''$	$z_S = 0$
I	0,2014	0,2016	0,0442	0,0444	0,0015	0	0,0080	0,0080
II	0,1815	0,1816	0,0365	0,0365	0,0023	0	0,0149	0,0149
III	0,1583	0,1584	0,0290	0,0289	0,0014	0	0,0128	0,0128
IV	0,1395	0,1395	0,0242	0,0242	0,0010	0	0,0109	0,0109
V	0,1244	0,1244	0,0209	0,0209	0,0007	0	0,0090	0,0090
VI	0,1124	0,1123	0,0185	0,0184	0,0005	0	0,0072	0,0072
VII	0,1032	0,1031	0,0167	0,0167	0,0004	0	0,0055	0,0055
VIII	0,0964	0,0964	0,0155	0,0155	0,0002	0	0,0039	0,0039
IX	0,0921	0,0920	0,0147	0,0147	0,0001	0	0,0023	0,0023
X	0,0899	0,0898	0,0143	0,0143	0,0000	0	0,0008	0,0008

Pont biais ($\alpha = 40^\circ$)

I	0,1802	0,1804	0,0408	0,0410	0,0012	0	0,0146	0,0146
II	0,1576	0,1577	0,0325	0,0326	0,0021	0	0,0200	0,0200
III	0,1309	0,1310	0,0241	0,0241	0,0010	0	0,0165	0,0166
IV	0,1086	0,1087	0,0187	0,0188	0,0007	0	0,0134	0,0135
V	0,0905	0,0905	0,0150	0,0150	0,0004	0	0,0108	0,0108
VI	0,0760	0,0760	0,0123	0,0123	0,0003	0	0,0086	0,0087
VII	0,0646	0,0646	0,0102	0,0102	0,0002	0	0,0067	0,0067
VIII	0,0559	0,0559	0,0087	0,0087	0,0001	0	0,0052	0,0052
IX	0,0494	0,0494	0,0075	0,0075	0,0001	0	0,0038	0,0038
X	0,0446	0,0446	0,0066	0,0066	0,0000	0	0,0026	0,0026

la différence reste toutefois trop petite pour être mise en évidence avec le nombre de décimales utilisé. Les moments de torsion T restent pratiquement inchangés. Il est, par contre, naturel que la position des charnières influence fortement les moments de flexion M_z . Mais, comme on l'a déjà vu dans le problème 3, vis-à-vis des moments M_y , leur contribution aux contraintes normales σ n'est pas très importante.

Problème 5: Influence du biais sur l'interaction des poutres

Une opinion assez répandue en pratique admet que l'effet du biais sur l'interaction des poutres du pont est négligeable. Ceci dit, on applique les mêmes coefficients de répartition transversale pour un pont biais que pour un ouvrage rectangulaire. Pour vérifier dans quelle mesure se justifie cette simplification, nous avons considéré les deux ponts de la figure 12a,b qui correspondent respectivement aux angles d'obliquité $\alpha = 0^\circ$ et $\alpha = 40^\circ$.

Dans un premier cas, nous avons supposé une charge uniforme p appliquée simultanément sur toutes les poutres du pont. Dans un pont rectangulaire, elle provoque dans toutes les poutres les mêmes moments fléchissants avec maximum $M_{y\max} = 0,125 p l^2$. Les moments de torsion T sont nuls. Dans un pont biais, les moments de flexion M_y engendrés par la même charge sont plus petits, mais il apparaît des moments de torsion T . En analysant les diagrammes de M_y de la figure 13 où nous avons porté les résultats de notre calcul (pour

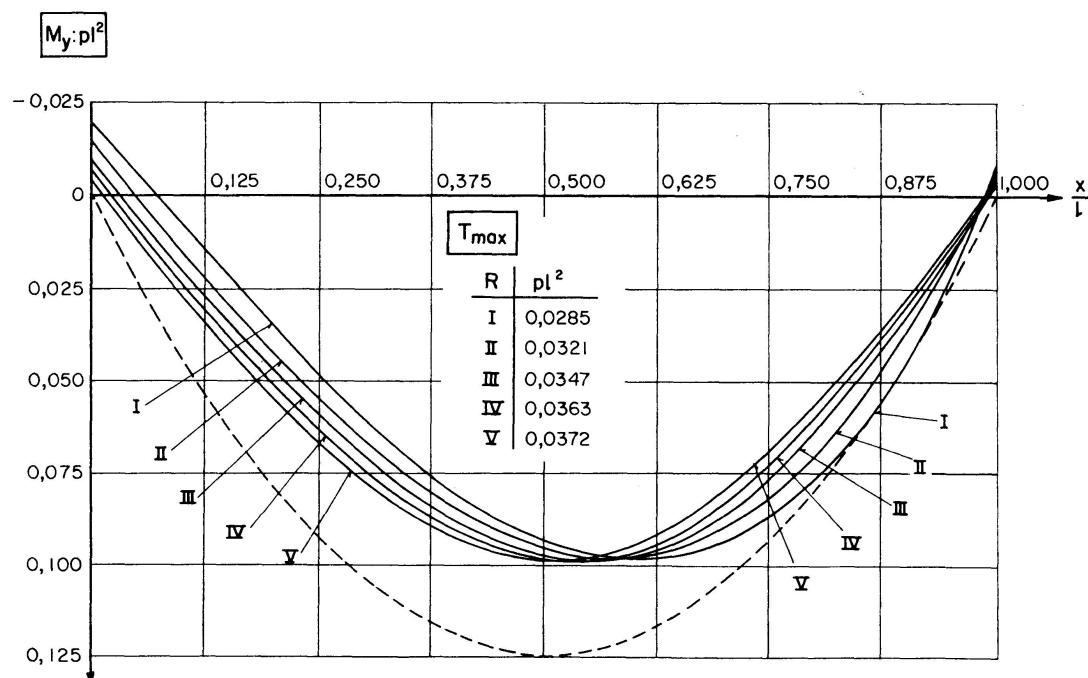


Fig. 13. Diagrammes des moments fléchissants M_y et valeurs maxima des moments de torsion T pour les cinq premières poutres du pont biais de la figure 12b. Poutres-caissons B IV-36, charge uniformément répartie p par unité de longueur de chaque poutre. En traitillé: effet de la même charge sur un pont rectangulaire.

Tableau 7. Influence du biais sur l'interaction des poutres. Dix poutres-caissons B IV-36 de portée $l = 1000$ in. Charge Q répartie sur 1/16 de la portée et appliquée au centre du joint $r = 0, 1, 2 \dots$

$10^4 M_y : Q l$ au centre de la portée

Pou- tre	Charge Q appliquée sur le joint r											
	$r=0$		1		2		3		4		5	
	$\alpha=0^\circ$	40°	0°	40°								
I	525	484	443	406	326	277	266	212	225	169	197	137
II	362	308	407	371	384	345	285	239	237	187	204	151
III	290	229	302	255	367	328	355	315	264	218	222	172
IV	242	180	249	197	273	227	346	305	340	299	254	208
V	209	144	213	158	228	177	258	212	336	295	334	293
VI	184	117	188	129	198	145	218	168	252	206	334	293
VII	167	98	170	108	178	121	192	140	216	166	254	208
VIII	155	83	157	92	164	104	176	120	194	142	222	172
IX	147	71	149	80	155	91	166	106	182	125	204	151
X	143	62	145	70	151	81	161	94	176	113	197	137

$10^4 \max M_y : Q l$

I	525	484	443	406	326	299	266	234	225	193	197	163
II	362	341	407	371	384	345	285	256	237	205	204	171
III	290	263	302	276	367	328	355	315	264	234	222	189
IV	242	204	249	219	273	244	346	305	340	299	254	224
V	209	177	213	182	228	196	258	228	336	295	334	293
VI	184	150	188	154	198	165	218	185	252	222	334	293
VII	167	130	170	133	178	143	192	158	216	183	254	224
VIII	155	116	157	120	164	127	176	141	194	160	222	189
IX	147	106	149	110	155	118	166	129	182	147	204	171
X	143	102	145	106	151	113	161	125	176	140	197	163

$10^4 \max |T| : Q l$

I	170	240	24	111	15	71	11	59	10	50	9	43
II	149	199	149	202	46	112	34	82	29	70	27	61
III	128	164	129	168	130	175	60	119	48	92	45	81
IV	109	133	109	138	110	145	112	154	69	126	63	102
V	90	107	90	111	92	118	94	127	96	143	81	134
VI	72	85	72	89	74	95	76	104	78	114	81	134
VII	55	69	55	70	56	75	58	82	60	92	63	102
VIII	39	53	39	53	40	58	41	64	43	71	45	81
IX	23	39	23	39	24	43	24	47	26	54	27	61
X	8	25	8	27	8	29	8	33	9	38	9	43

$M = l : \Delta = 16$), on constate que les valeurs maxima des moments fléchissants ont diminué d'environ 21%.

En pratique, la charge uniforme qui pourra être prise en considération pour la répartition transversale des effets dus à l'interaction des poutres sera le plus souvent le poids propre du tablier. Par contre, le poids propre des poutres sera

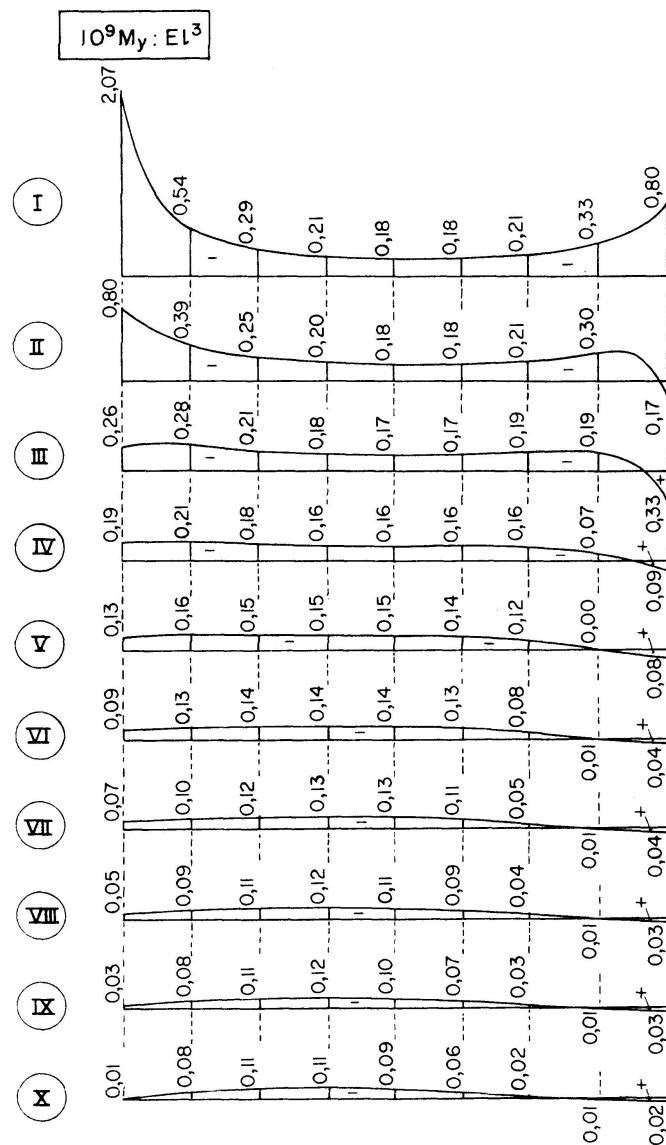


Fig. 14. Effet du tassement $w_1 = \frac{1}{1000} l$ de l'angle supérieur gauche du pont biais de la figure 12b (dix poutres-caissons B IV-36 de portée $l = 1000$ in). Diagrammes des moments fléchissants.

porté indépendamment par chacune d'elles, étant donné que le remplissage des joints ne s'effectue qu'après la mise en place des poutres. Notons toutefois que chaque poutre isolée bénéficiera de l'effet favorable du biais, qui se manifestera par une certaine diminution des moments fléchissants (à peu près 18% dans le cas envisagé). Ceci est dû au fait que l'effet du biais des appuis équivaut, dans une certaine mesure, à un encastrement partiel. Pour ce qui est des surcharges, notons, par exemple, que les normes françaises pour les ponts routiers prévoient comme surcharge du type A une charge uniformément répartie. Vis-à-vis d'un ouvrage rectangulaire, celle-ci bénéficierait donc pleinement de la réduction des moments de flexion M_y (21% dans notre cas).

Un second cas de charge a été envisagé sous la forme de charges Q consti-

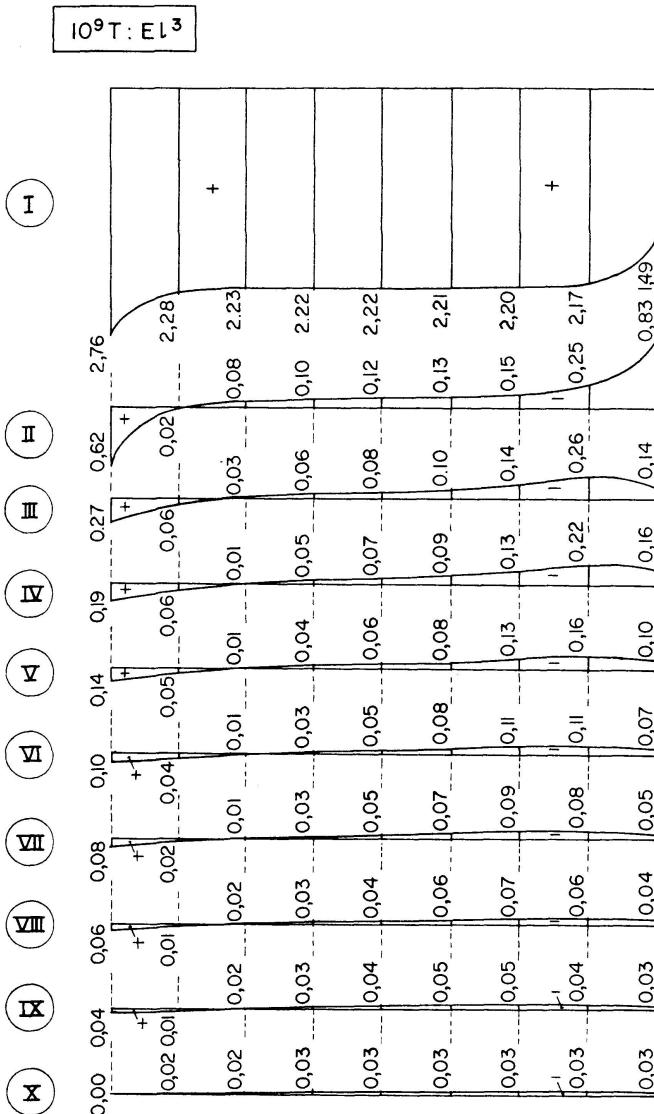


Fig. 15. Effet du tassement $w_1 = \frac{1}{1000} l$ de l'angle supérieur gauche du pont biais de la figure 12b (dix poutres-caissons B IV-36 de portée $l = 1000$ in). Diagrammes des moments de torsion.

tuées par des charges linéaires $p = Q : \Delta l$ réparties uniformément sur les petits tronçons $\Delta l = l : 16$. Nous les avons appliquées à tour de rôle au milieu des joints $r = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5 . Notons que par la combinaison de telles charges, nous pouvons exprimer par exemple l'effet des roues d'un véhicule roulant sur le pont. Les résultats du calcul, qui a été exécuté avec des éléments finis de longueur $\Delta = l : 16$, sont résumés dans le tableau 7. En plus des moments fléchissants au milieu de la portée, nous avons confronté les valeurs approchées des moments maxima $M_{y\max}$ et les maxima des valeurs absolues des moments de torsion $|T|_{\max}$. On constate que, vis-à-vis du pont rectangulaire, les moments fléchissants du pont biais sont beaucoup plus petits et les moments de torsion plus grands.

Notons encore que sur un pont biais la position longitudinale la plus défa-

vable d'une charge Q (pour engendrer les plus grands moments possibles $M_{y \max \max}$) ne se trouve, en général, pas au milieu de la portée. En procédant par tâtonnements, nous avons trouvé par exemple que si la charge Q se déplace le long du bord extérieur (indice 0) de la poutre I, le moment $M_{y \max \max}$ apparaît quand la charge se trouve à peu près à $1/16 l$ à gauche du centre. Le moment $M_{y \max \max}$ ainsi obtenu vaut $488 \cdot 10^{-4} Ql$ (contre $484 \cdot 10^{-4} Ql$ pour la charge au milieu de portée). La différence n'est donc pas très importante.

Problème 6: Effet du tassement des appuis

Comme dernière application, nous avons étudié l'effet du tassement d'appui sur le pont biais de la figure 12b. Nous avons supposé que l'angle gauche de l'extrémité gauche du pont ($x=0, y=0$) a subi une dénivellation égale à $l/1000$. Ainsi l'extrémité gauche du bord extérieur de la poutre I est descendue de $l/1000$, tandis que l'extrémité gauche du bord intérieur (attachée par le joint 1 à la poutre II) est restée en place. Pour obtenir l'effet de ce tassement, il suffit de substituer au déplacement nodal du nœud 1 la valeur $w_1 = l/1000$.

Le calcul a été exécuté avec des éléments finis de longueur $\Delta = l/16$. Les résultats (moments de flexion M_y et moments de torsion T) sont représentés dans les figures 14 et 15. Quant aux moments fléchissants, on remarquera que le tassement affecte essentiellement la région autour du nœud 1, tandis qu'ailleurs ces moments restent relativement faibles. Par contre, les moments de torsion sont assez élevés et presque constants sur la totalité de la poutre I. La torsion des autres poutres est peu importante.

Conclusion

Le présent travail propose une solution approchée du calcul des ponts biais à poutres multiples sans entretoises. Ses hypothèses simplificatrices sont, en règle générale, bien remplies pour les ponts à poutres de section pleine ou fermée (poutres-caissons).

Les fonctions de déplacement choisies pour les éléments finis comprennent tous les modes rigides de déplacement et sont susceptibles de donner toutes les déformations correspondant à une valeur constante des efforts internes. En général, elles assurent aussi automatiquement la compatibilité des déformations entre les éléments, si cette compatibilité est établie aux nœuds de l'assemblage. Dans le cas d'un pont biais, cette compatibilité n'est toutefois pas complète pour les dérivées des déplacements horizontaux v . Cette petite imperfection n'intervient d'ailleurs que si les charnières entre les poutres se trouvent au-delà du niveau des centres de rotation des sections. Etant donné la faible influence du niveau des charnières sur les résultats, son effet est minime. Mis à part cette petite imperfection, notre modèle est donc du type

«déplacement conforme». Un tel modèle est plus rigide et son énergie de déformation est plus petite que la valeur exacte. Partant dans le cas d'un ouvrage rectangulaire (où la compatibilité est parfaite), notre solution converge vers la solution exacte de la construction idéalisée dans le sens des hypothèses admises.

Dans le cas d'un ouvrage biais, le problème de la convergence est plus compliqué. Dans la mesure où l'on diminue la longueur des éléments et où chaque élément s'approche de l'état de contrainte constant, la petite discontinuité des dérivées des déplacements horizontaux v diminue et disparaît à la limite. Notons toutefois que le calcul d'un ouvrage biais ne converge vraisemblablement que vers des valeurs très proches de la solution exacte, et ceci pour la raison suivante: l'adoption de fonctions de déplacement sous la forme donnée par l'équation (4) signifie que dans la bande limitée par les bords longitudinaux d'une poutre, le déplacement vertical w est linéaire le long des droites parallèles aux lignes d'appui. Dans le cas d'un pont biais, ceci revient à l'hypothèse des «sections biaises rigides». Or, cette hypothèse n'est exacte qu'au droit des appuis, à moins que les poutres-caissons ne soient dotées de diaphragmes rigides parallèles aux lignes d'appui.

Remerciements

Cette recherche a été entreprise dans le cadre des travaux de la Chaire de statique et de résistance des matériaux de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. L'auteur tient à remercier Monsieur le Professeur M.-H. Derron de son appui et de l'aide apportée à la rédaction de cet article.

Bibliographie

1. ARYA, A. S., KHACHATURIAN, N., and SIESS, C. P.: Lateral Distribution of Concentrated Loads on Multibeam Highway Bridges. Civil Eng. Studies Struct. Res. Series Rep. 213, Univ. of Illinois (1960).
2. ARYA, A. S., LOHTIA, R. P.: Distribution of Wheel Loads on Multibeam Highway Bridges. Indian Conc. Jour., 38, No 4, p. 127–135 (1964).
3. ARYA, A. S., LOHTIA, R. P.: Distribution of Wheel Loads on Multibeam Highway Bridges. Indian Conc. Jour., 39, No 4, p. 146–151 (1965).
4. BRILLA, J.: Statické riešenie žaluziových dôsák (Calcul statique des dalles articulées). Stavebnícky časopis Slovenské Akadémie Vied Bratislava, 1963, No 1–2.
5. BÚCI, B.: Statický výpočet montovaných mostov s klbovým spojením prefabrikátov v priečnom smere. (Calcul statique des ponts assemblés par une liaison transversale articulée entre les éléments préfabriqués). Inženýrské stavby, 1963, No 2, Bratislava.
6. CEJTTIN, S. JU.: O sovmestnoj rabote panelnych perekrytij (traité sur l'interaction des éléments de toitures formés de panneaux). Sbornik statej VII, Gosstrojizdat, Moscou (1957).

7. CUSENS, A. R., PAMA, R. P.: Design of Concrete Multibeam Bridge Decks. Proc. ASCE, 91, No ST 5, p. 255–278 (1965).
8. DUBERG, J. E., KHACHATURIAN, N., FRADINGER, R. E.: Method for Analysis of Multibeam Bridges. Proc. ASCE, 86, No ST 7, p. 109–138 (1960).
9. JIROUŠEK, J.: Statické vyšetřování šikmých mostních žaluziových desek. (Analyse statique des ponts biais à dalle articulée.) Sborník Vysokého Učení Technického Brno, 1966, No 2–3, p. 219–253.
10. JIROUŠEK, J.: Řešení šikmých mostních žaluziových desek. (Calcul des ponts biais à dalle articulée.) Inženýrské stavby, 1967, No 2, Bratislava.
11. JIROUŠEK, J.: Some contributions to the Finite Element Methods of Stress Analysis. 10th Science Week University of Damascus, Part 4, p. 21–76, Supreme Council of Sciences Syrian Arab Republic (1970).
12. KHACHATURIAN, N., ROBINSON, A. R., POOL, R. B.: Multibeam Bridges with Elements of Channel Section. Proc. ASCE, 93, No ST 6, p. 161–187 (1967).
13. KLIMEŠ, M.: Montované silniční mosty. (Ponts routiers formés d'éléments préfabriqués.) Inženýrské stavby, 1967, No 12, Bratislava.
14. KOPECKÝ, J.: Statické vyšetřování montovaných pravoúhlých desek-poloroštů-skloubovým spojením. (Analyse statique des dalles articulées rectangulaires formées d'éléments préfabriqués.) Stavebnicky časopis Slovenské Akadémie Vied Bratislava, 1965, No 6.
15. KOPECKÝ, J.: Výpočet provoúhlých mostních poloroštů metodou rozdělovacích čísel. (Calcul des ponts rectangulaires à poutres multiples sans entretoises par la méthode des coefficients de répartition.) Sborník Vysokého Učení Technického Brno, 1965, No 3.
16. KOPECKÝ, J.: Statické řešení šikmých poloroštů mostního typu. (Calcul statique des ponts biais à poutres multiples sans entretoises.) Sborník Vysokého Učení Technického Brno, 1968, No 2.
17. KRAJČÍ, L., SMRČINA, M.: Spolupôsobenie nosníkov montovaných mostov. (Interaction entre les poutres préfabriquées des ponts.) Inženýrské stavby, 1962, No 5, Bratislava.
18. KRÍSTEK, V.: Výpočet spolupôsobení komúrkových nosníkov montovaných mostov. (Calcul de l'interaction entre les poutres-caissons des ponts.) Inženýrské stavby, 1962, No 7, Bratislava.
19. NASSER, K. W.: Design Procedure for Lateral Load Distribution in Multibeam Bridges. Prestressed Conc. Inst. Jour., 10, No 4, p. 54–68 (1965).
20. PAMA, R. P., CUSENS, A. R.: Edge Beam Stiffening of Multibeam Bridges. Proc. ASCE, 93, No ST 2, p. 141–161 (1967).
21. POOL, R. B.: An Investigation of Joint Forces in Multibeam Bridges. Unpubl. Ph. D. thesis, Univ. of Illinois (1963).
22. POOL, R. B., et al.: Analysis of Multibeam Bridges with Beam Elements of Slab and Box Section. Eng. Exp. Sta. Bull. 483, Univ. of Illinois (1965).
23. ULICKIJ, B. E.: Prostranstvennyj rascet bezdiafragmennych strojenij mostov. (Calcul des ponts sans diaphragmes.) Avtotransizdat, Moscou (1963).
24. VÍTEK, J.: Spolûpusobení nosníkov montovaných mostov. (Interaction entre les poutres préfabriquées des ponts.) Inženýrské stavby 1961, No 12, Bratislava.
25. WATANABE, E.: Study of Load Distribution in Multibeam Highway Bridges. Unpubl. M. S. thesis, Iowa State Univ. (1968).

Résumé

L'étude présentée concerne l'application de la méthode des éléments finis au calcul des ponts biais à poutres multiples. On considère un système de poutres préfabriquées placées l'une à côté de l'autre et liées le long de la portée par des rotules longitudinales sans friction. Dans la première partie du travail, on développe la matrice de rigidité d'un macro-élément trapézoïdal. La seconde partie du travail montre les résultats des analyses numériques et quelques applications pratiques.

Zusammenfassung

Die vorgelegte Arbeit behandelt die Anwendung der Methode der endlichen Elemente zur Lösung der schiefen Brücken bestehend aus nebeneinanderliegenden vorgefertigten Balken. Die Verbindungen zwischen den Balken werden als längliche Zylindergelenke angesehen. Im ersten Teil der Arbeit wird die Steifigkeitsmatrix der endlichen schiefwinkligen Elemente entwickelt. Im zweiten Teil folgen die Ergebnisse von Vergleichsberechnungen und einige praktische Anwendungen.

Summary

The paper is dealing with the finite element solution of skew multibeam bridges. It is assumed that the bridge consists of precast beams placed side by side and connected to each other along the span by hinges. In the first part of the paper is derived the stiffness matrix of a skew finite element. The second part shows the results of test examples and some practical applications.