

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 33 (1973)

Artikel: Der Einfluss von Querschotten auf das Verhalten von Kastenträgern mit Rechteckquerschnitt

Autor: Janssen, J.D. / Veldpaus, F.E.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-25620>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Der Einfluss von Querschotten auf das Verhalten von Kastenträgern mit Rechteckquerschnitt

The Influence of Cross-Ties on the Behaviour of Box Girders of Rectangular Section

L'influence de parois transversales sur le comportement de poutres en caisson à section rectangulaire

J. D. JANSSEN

Prof. Dr. Ir.

Laboratorium für technische Mechanik, Technische Hochschule Eindhoven NL

F. E. VELDPAUS

Ir.

1. Einleitung

Für die Berechnung des in Fig. 1.1 gezeichneten Kastenträgers mit Rechteckquerschnitt, der am Ende $x=0$ eingespannt, am Ende $x=l$ durch Normalspannungen $\bar{\sigma}_x(s)$ und Schubspannungen $\bar{\tau}(s)$ belastet ist, ist es im allgemeinen nicht gestattet, nur die in Fig. 1.2 gezeichneten Spannungsresultierenden zu betrachten.

Dies bedeutet, dass an einem Spannungssystem wie in Fig. 1.1, ausser den resultierenden Kräften und Momenten, auch bestimmte Gleichgewichtssysteme wichtig sind. Theoretisch und experimentell ist nachweisbar [2], dass die Berücksichtigung der sogenannten axialen und transversalen Bimomente, \bar{B} bzw. \bar{Q} , eine hinreichend genaue Beschreibung der Realität ergibt. Mit diesen Spannungsgrössen \bar{B} und \bar{Q} hängen die Verwölbung bzw. die Querschnittsverformung als Verschiebungsgrössen zusammen [1].

Insbesondere wird manchmal der Einfluss der Querschnittsverformung nicht berücksichtigt [3, 4]. Dieses Verfahren ist nur dann erlaubt, wenn die Querschnittstreue unter gegebener Belastung mittels (vieler) Querschotte und eines Querschotts an der Krafteinleitungsstelle gewährleistet ist.

Im nachfolgenden wird der Einfluss von Querschotten auf das Verhalten der Kastenträger behandelt. Daraus resultieren Richtlinien für die Anwen-

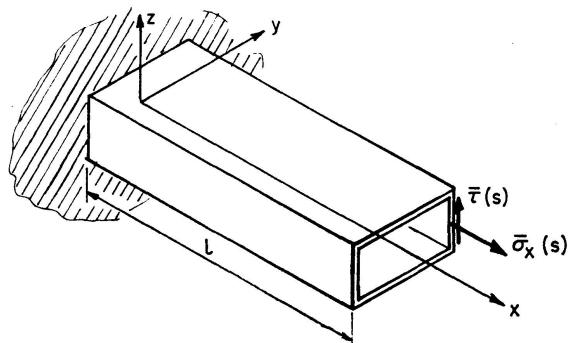


Fig. 1.1. Der Träger mit Belastung im Endquerschnitt.

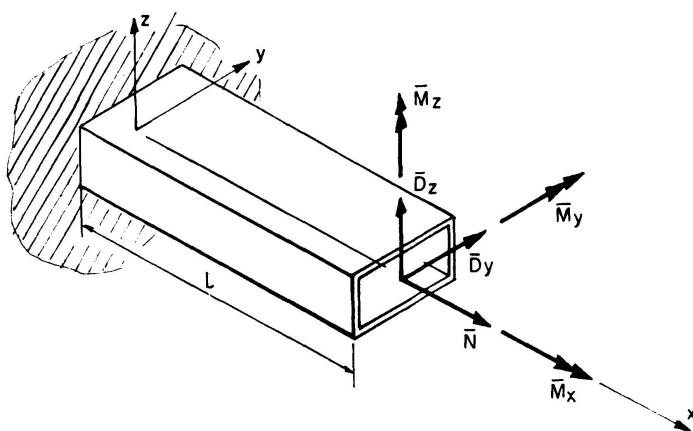


Fig. 1.2. Die in der klassischen Theorie interessanten Belastungsgrößen.

dung von Querschotten. Ausserdem wird der Zustand untersucht, der auftritt, wenn die Belastung zwischen Querschotten eingeleitet wird.

Der Einfluss der Querschnittsverformung und die Wirkung von Schotten ist schon öfters in wissenschaftlichen Abhandlungen erörtert worden, z. B. in den Arbeiten von V. VLASOV [1], J. JANSSEN [2], G. LACHER [5], F. RESINGER [6], R. DABROWSKI [7] und P. CSONKA [8].

Analog zur Arbeitsweise in [2] stützt sich die Theorie auf das Prinzip der minimalen potentiellen Energie. Mit der Formulierung in Matrizenbeschreibung entsteht eine übersichtliche und leicht programmierbare Darstellung der Berechnung.

Der Spannungs- und Verformungszustand infolge \$\bar{N}\$, \$\bar{D}_y\$, \$\bar{D}_z\$, \$\bar{M}_y\$ und \$\bar{M}_z\$ (Fig. 1.2) hängt nicht zusammen mit den Spannungen und Verformungen infolge \$\bar{M}_x\$, \$\bar{B}\$ und \$\bar{Q}\$, und kann mit der Theorie nach Bernoulli-Navier hinreichend genau beschrieben werden. Deshalb können wir uns auf Belastungen durch \$\bar{M}_x\$, \$\bar{B}\$ und \$\bar{Q}\$ beschränken. Für einen Kastenträger mit doppelt-symmetrischem Querschnitt bedeutet dies, dass die auftretenden Spannungen und Verschiebungen mit Rücksicht auf beide Symmetrieachsen des Querschnitts antimetrisch sind.

2. Bezeichnungen

Für alle Bezeichnungen in dieser Arbeit beziehen wir uns auf [11] mit Ausnahme der Größen E^* , ν^* , h , k_β und k_κ :

$$\left. \begin{array}{l} E^* = \text{Elastizitätsmodul} \\ \nu^* = \text{Querdehnungszahl} \\ h = \text{Stärke} \end{array} \right\} \text{der Querschotte,}$$

$$k_\beta = \frac{E^*}{3(1+\nu^*)} \frac{h^3 b_1 b_2}{\alpha_0 a_1},$$

$$k_\kappa = \frac{8 E^*}{1+\nu^*} \frac{b_1 b_2 h \alpha_0}{c}.$$

3. Einige Ergebnisse für Kastenträger mit verformbarem Rechteckquerschnitt

In [1] und [2] wurde eine Theorie aufgestellt, die für Kastenträger ohne Querschotten verwendbar ist. Wir werden die Resultate kurz zusammenfassen.

Wenn $u(x, s)$ und $v(x, s)$ die Verschiebung in axialer Richtung bzw. Umlaufsrichtung bedeuten (Fig. 3.1), so darf man nach der Grundhypothese dieser Theorie schreiben:

$$u(x, s) = \beta(x) \varphi(s), \quad (3.1)$$

$$v(x, s) = \vartheta(x) h(s) + \kappa(x) m(s). \quad (3.2)$$

Für die Funktionen φ , h und m der Umlaufskoordinate s (Fig. 3.1) gilt:

$$\varphi(s) = y(s) z(s), \quad (3.3)$$

$$h(s) = \begin{cases} b_2 & \text{für } y = \pm b_2, \\ b_1 & \text{für } z = \pm b_1, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$m(s) = \begin{cases} b_2 & \text{für } y = \pm b_2 \\ -b_1 & \text{für } z = \pm b_1 \end{cases} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (3.5)$$

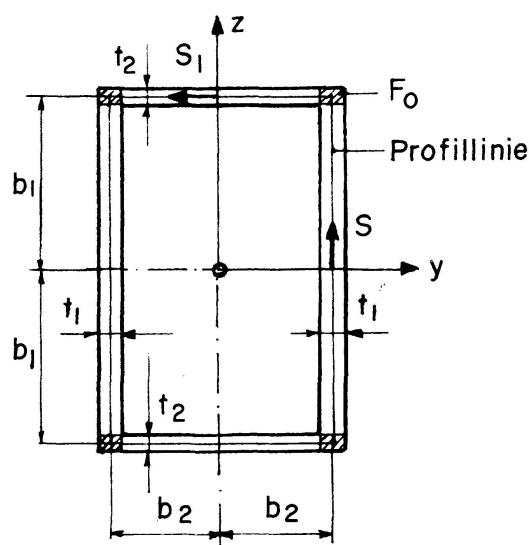


Fig. 3.1. Der Trägerquerschnitt.

Als Schnittgrößen treten nur das axiale Bimoment $B(x)$, das Torsionsmoment $M(x)$ und das transversale Bimoment $Q(x)$ auf. Wenn in einem Querschnitt axiale Normalspannungen $\sigma(x, s)$ und Schubspannungen $\tau(x, s)$ bestehen (z. B. Fig. 1.1), so lässt sich für B , M und Q schreiben:

$$B(x) = \int_F \sigma(x, s) \varphi(s) dF, \quad (3.6)$$

$$M(x) = \int_F \tau(x, s) h(s) dF, \quad (3.7)$$

$$Q(x) = \int_F \tau(x, s) m(s) dF. \quad (3.8)$$

Mittels des Prinzips der minimalen potentiellen Energie ist das Resultat der Ansätze für die Verschiebungen (3.1) und (3.2) ein System dreier linearer Differentialgleichungen in β , ϑ und κ [2]. Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen enthält sechs Integrationskonstanten, die als Komponenten eines Spaltenvektors C aufgefasst werden können. Mit den Matrizen $W(x)$ und $F(x)$ von der Ordnung (3×6) kann die allgemeine Lösung folgenderweise geschrieben werden:

$$w(x) = \begin{bmatrix} \beta(x) \\ \vartheta(x) \\ \kappa(x) \end{bmatrix} = W(x) C, \quad (3.9)$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} B(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{bmatrix} = F(x) C. \quad (3.10)$$

Die Koeffizienten von $W(x)$ und $F(x)$ sind von VLASOV in [1] (S. 240 und 241) gegeben worden. Es sind lineare Kombinationen der folgenden Funktionen der axialen Koordinate:

1, x , $\cosh(\alpha x) \sin(\gamma x)$, $\cosh(\alpha x) \cos(\gamma x)$, $\sinh(\alpha x) \cos(\gamma x)$, $\sinh(\alpha x) \sin(\gamma x)$.

Die Konstanten α und γ sind völlig bedingt durch die Abmessungen des Querschnittes und die Querdehnungszahl ν . Es gilt [2, 9]:

$$\alpha^2 = \alpha_0^2(1 + \epsilon), \quad (3.11)$$

$$\gamma^2 = \alpha_0^2(1 - \epsilon) \quad (3.12)$$

mit $\alpha_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{1 - \nu^2} \frac{t_1^3 t_2^3}{b_1^2 b_2^2 (b_1 t_1 + b_2 t_2) (b_1 t_2^3 + b_2 t_1^3)}}, \quad (3.13)$

$$\epsilon = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1 + \nu}{3(1 - \nu)} \frac{t_1 t_2 (b_1 t_1 + b_2 t_2) (b_1 t_2 + b_2 t_1)^2}{b_1^2 b_2^2 (b_1 t_2^3 + b_2 t_1^3)}}. \quad (3.14)$$

Weil B und Q Gleichgewichtssysteme sind, wird in «einiger Entfernung» von der Stelle wo B und Q eingeleitet werden, der Einfluss dieser Belastung vernachlässigbar sein. Wir können eine Länge l_0 mit der Eigenschaft definieren, dass in einer Entfernung l_0 vom belasteten Querschnitt keine merkliche Wirkung von B und Q resultiert. Dies bedeutet, dass für einen Kastenträger

mit Länge l grösser als l_0 die Spannungen und Verformungen am Ende $x=0$ von den mit Verwölbung (B, β) und Querschnittsverformung (Q, κ) zusammenhängenden Randbedingungen am Ende $x=l$ nicht merklich beeinflusst werden. Derartige Kastenträger werden wir «unendlich lang» nennen. Nach [11] können wir ansetzen:

$$l_0 = \frac{\pi}{\alpha_0}. \quad (3.15)$$

Die axialen Membranspannungen sind dem axialen Bimoment $B(x)$ und der Funktion $\varphi(s)$ proportional. Die Extremwerte treten mithin in den Eckpunkten des Trägerquerschnittes auf. Die Schubspannungen können als die Summe der mit $M(x)$ und $h(s)$ und mit $Q(x)$ und $m(s)$ proportionalen Beiträge betrachtet werden. Die Querschnittsverformung verursacht in Längsschnitten ausserdem biegende Momente, deren Grösse mit $\kappa(x)$ proportional ist. Die Extremwerte dieser Momente treten in den Eckpunkten auf.

4. Der Einfluss mehrerer, in gleichem Abstand gestellter Querschotter

4.1. Einleitung

Zur Bestimmung des Einflusses von Querschottten betrachten wir einen Kastenträger mit in gleichem Abstand gestellten Querschottten (Fig. 4.1). Der Träger ist am Ende $x=0$ eingespannt und am Ende $x=l$ belastet durch ein Torsionsmoment \bar{M}_x , das durch ein Endschott eingeleitet wird. Jedes Querschott ist starr in der Ebene der Schotte und völlig flexibel senkrecht zur Ebene.

Wir werden für zwei Träger, deren Querschnitt in Fig. 4.5 gezeichnet ist und deren Länge gleich l_0 bzw. $0,4l_0$ ist, die axiale Membranspannung σ_a infolge des axialen Bimomentes B , die Schubspannung τ_e infolge des transversalen Bimomentes Q und die Biegespannung σ_b infolge der Querschnitts-

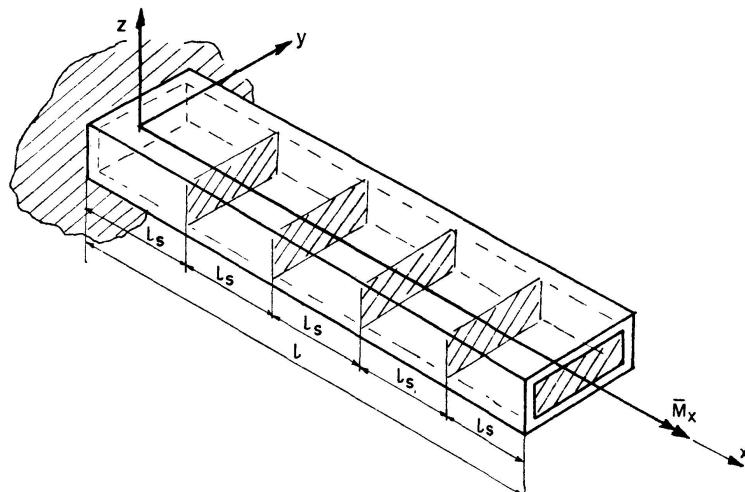


Fig. 4.1. Kastenträger mit 5 Querschottten (einschliesslich Endschotte).

verformung in Abhängigkeit von x berechnen. Interessant ist auch der Abstand, über den die Wirkung der Wölbbehinderung bei $x=0$ wahrnehmbar ist.

Wird das Torsionsmoment \bar{M}_x mittels eines Endschotts eingeleitet und bestehen keine anderen Querschotten, so ist die Vergleichsspannung in der Einspannung maximal.

Ebenso ist der Spannungszustand in der Einspannung am gefährlichsten, wenn die Querschnittstreue mittels genügend vieler Querschotte garantiert ist. Es ist zu erwarten, dass auch für das in Fig. 4.1 gegebene Problem der Querschnitt $x=0$ für die Stärke des Trägers massgebend sein wird. Die Spannungen in diesem Querschnitt sind durch das axiale Bimoment $B_0=B(x=0)$, das transversale Bimoment $Q_0=Q(x=0)$ und das Torsionsmoment $M_0=\bar{M}_x$ völlig bestimmt. Wir werden den Einfluss der Anzahl der Querschotte auf B_0 und Q_0 untersuchen.

Selbstverständlich werden zur Lösung des Problems wie in Fig. 4.1 elektronische Rechenmaschinen eingeschaltet. Es liegt nahe, Übertragungsmatrizen zu gebrauchen, mit denen die interessanten Verschiebungs- und Schnittgrößen in einem bestimmten Querschnitt in den nämlichen Größen in einem anderen Querschnitt ausgedrückt werden. Auf diese Weise wäre es möglich β , ϑ , B , M und Q für $x=0$ auszudrücken in β , ϑ , B , M und Q für $x=l$. Indessen veranlasst diese Methodik eine Reihe numerischer und andersartiger Komplikationen, die nicht einfach zu lösen sind.

Ein besseres Verfahren erhält man, wenn man von der Methode der finiten Elemente ausgeht. Dabei werden die «Verschiebungen» β , ϑ und κ in den Knotenpunkten des Trägers als die Unbekannten des Problems betrachtet. In Fig. 4.2 ist ein Kastenträgerelement mit Knotenpunkten (\equiv Querschnitten) 1 und 2 gezeichnet.

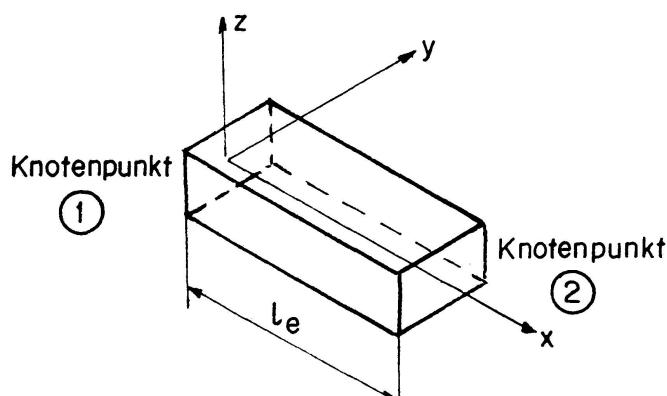


Fig. 4.2. Trägerelement.

Knotenpunkte werden immer lokalisiert in Querschnitten, in denen «Kräfte» B , M , Q oder «Verschiebungen» β , ϑ , κ einen vorgeschriebenen Wert haben. Infolgedessen werden wir bei jedem Querschott einen Knotenpunkt festlegen.

Mittels (3.9) und (3.10) kann die Steifigkeitsmatrix Q_e dieses Elementes berechnet werden, denn diese Matrix gibt den Zusammenhang zwischen den

Verschiebungen β , ϑ und κ und den Schnittgrößen B , M und Q in den Knotenpunkten des Elementes. Es gilt:

$$\begin{bmatrix} w(0) \\ w(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(0) \\ W(l) \end{bmatrix} C, \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} -f(0) \\ f(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F(0) \\ F(l) \end{bmatrix} C. \quad (4.2)$$

Mit der Lösung von C aus (4.1):

$$C = \begin{bmatrix} W(0) \\ W(l) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(l) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

kann für (4.2) geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} -f(0) \\ f(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F(0) \\ F(l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(0) \\ W(l) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(l) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Folglich gilt für die Steifigkeitsmatrix Q_e :

$$Q_e = \begin{bmatrix} -F(0) \\ F(l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(0) \\ W(l) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (4.5)$$

Mit der in der Methode der finiten Elemente üblichen Arbeitsweise lässt sich die totale Steifigkeitsmatrix für die gesamte Konstruktion zusammensetzen, wobei alle geometrischen Bedingungen erfüllt werden. Im vorliegenden Problem bedeutet dies beispielsweise, dass in jedem Querschnitt mit Querschott κ den Wert null haben soll.

Auch diese Arbeitsweise bringt numerische Komplikationen mit sich, da in der totalen Steifigkeitsmatrix Koeffizienten enthalten sind, die in ihrer Grösse ganz verschieden sind. Die Ursache ist in der Differenz zwischen der Torsionssteifigkeit und den interessanten Steifigkeiten bei Verwölbung und Querschnittsverformung zu suchen. Diese Schwierigkeiten können jedoch einfach und zweckmässig gelöst werden.

Das dargestellte Verfahren wurde für den elektronischen Rechenautomaten EL-X 8 der Technischen Hochschule Eindhoven programmiert [9, 10].

4.2. Kastenträger mit Länge l grösser als l_0

Ist die Länge des Trägers in Fig. 4.1 grösser als l_0 (siehe Gleichung (2.15)), so ist der Einfluss der Wölbbehinderung am Rande $x=0$ vernachlässigbar für die Verschiebungen und Spannungen am Rand $x=l$. Das axiale und transversale Bimoment in der Einspannung (B_0 , bzw. Q_0) ist dann unabhängig von der Länge des Trägers. Sind in einem Träger mit $l \geq l_0$ in gleicher Distanz l_s Querschotte befestigt, so kann die Wirkung der Schottendistanz leicht berechnet werden.

Für Träger ohne Querschott – und daher auch dann wenn der Schottabstand $l_s \geq l_0$ ist – gilt für das Problem von Fig. 4.1 [11]:

$$B_0(\lambda) = -4\mu \frac{\epsilon}{\alpha_0} M \quad \text{für } \lambda \geq 1, \quad (4.6)$$

$$Q_0(\lambda) = 4\mu \epsilon M \quad \text{für } \lambda \geq 1 \quad (4.7)$$

mit:

$$\lambda = \frac{l_s}{l_0}, \quad (4.8)$$

$$\mu = \frac{-b_1 t_2 + b_2 t_1}{b_1 t_2 + b_2 t_1}. \quad (4.9)$$

Ist die Querschnittstreue durch genügend viele Querschotte gewährleistet ($\lambda \rightarrow 0$), so gilt [11]:

$$B_0(\lambda) = -\mu \frac{\sqrt{2}\epsilon}{\alpha_0} M \quad \text{für } \lambda \rightarrow 0, \quad (4.10)$$

$$Q_0(\lambda) = \mu M \quad \text{für } \lambda \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

Für Werte von λ zwischen 0 und 1 kann für $B_0(\lambda)$ und $Q_0(\lambda)$ berechnet werden:

$$B_0(\lambda) = B_0(1) + [B_0(0) - B_0(1)] f_1(\lambda, \epsilon), \quad (4.12)$$

$$Q_0(\lambda) = Q_0(1) + [Q_0(0) - Q_0(1)] f_2(\lambda, \epsilon). \quad (4.13)$$

In Fig. 4.3 und 4.4 sind f_1 und f_2 gegeben als Funktionen von λ mit ϵ als Parameter. Wir bemerken, dass f_1 und f_2 nur von λ und ϵ abhängig sind.

Man erkennt, dass die Einspanngrößen durch den Einbau von Querschotten, verglichen mit der Situation ohne Schotten, beträchtlich zunehmen können. Dies bedeutet folglich auch, dass die Spannungssituation im Träger durch Querschotte gefährlicher werden kann.

Die Torsionssteifigkeit des Trägers nimmt beim Aufstellen von Querschotten nur sehr wenig zu.

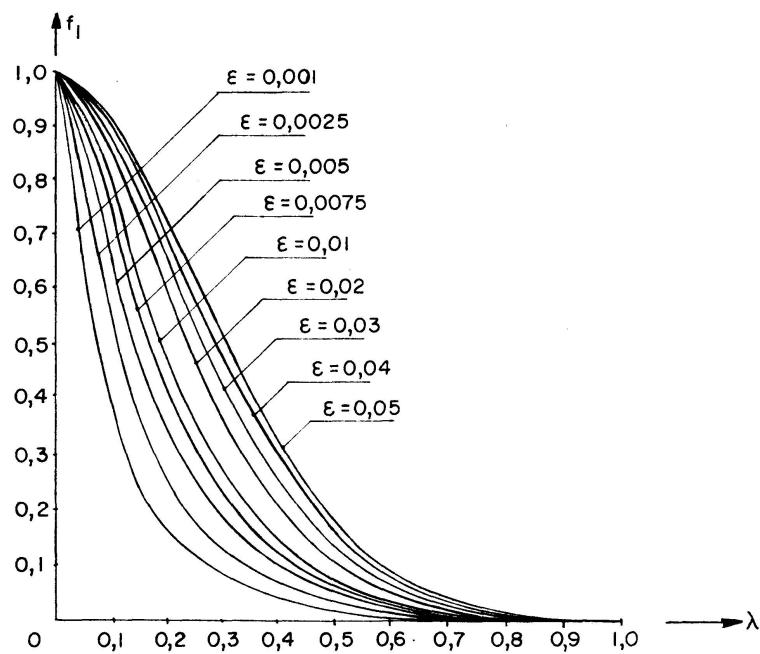
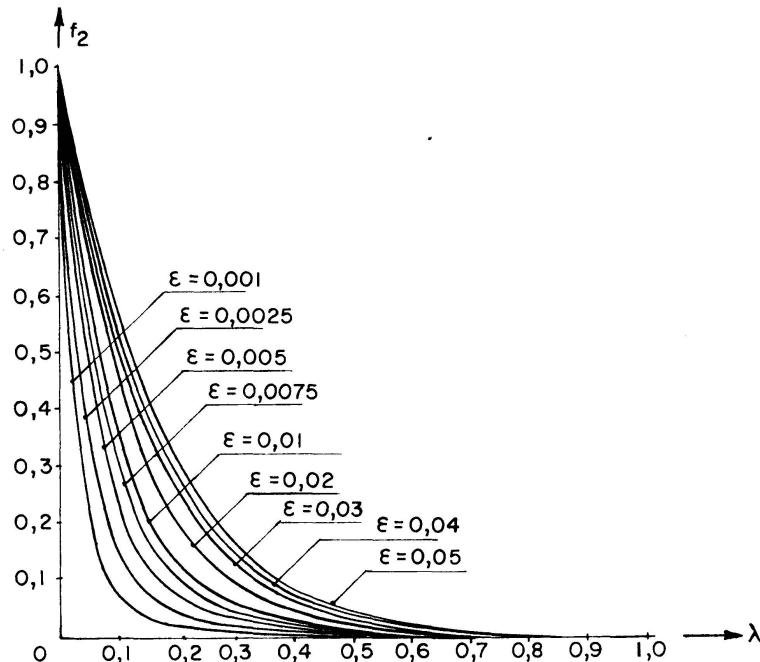


Fig. 4.3. $f_1 = f_1(\lambda, \epsilon)$.

Fig. 4.4. $f_2 = f_2 (\lambda, \epsilon)$.

In Fig. 4.6, 4.7 und 4.8 sind für einen Träger mit einem Querschnitt nach Fig. 4.5 die interessantesten Spannungen gegeben als Funktion der axialen Koordinate bei einer Belastung von einem Torsionsmoment $M_x = 2000$ Nm. In diesen graphischen Darstellungen tritt der Schottabstand als Parameter

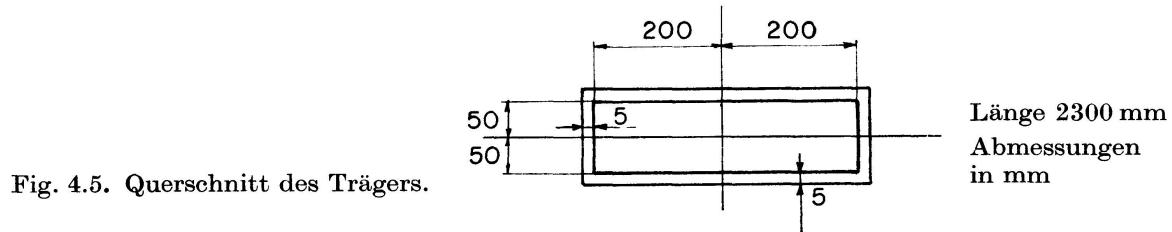
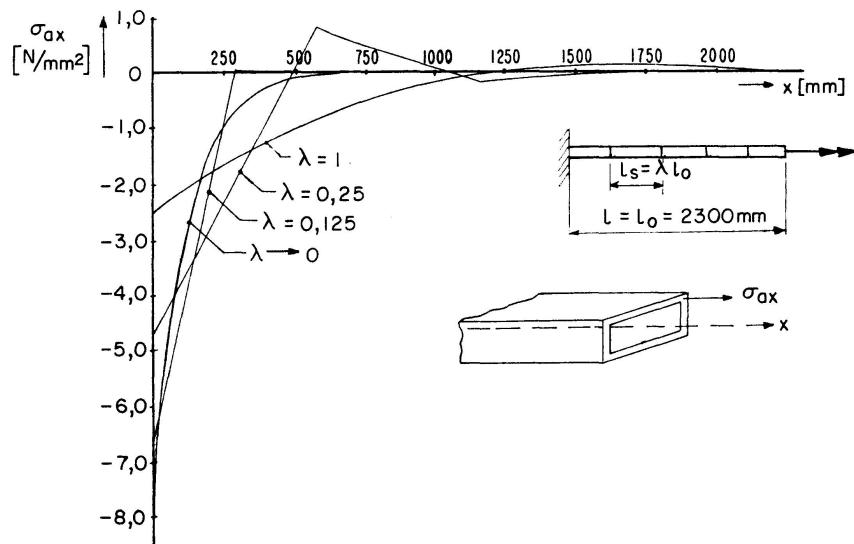
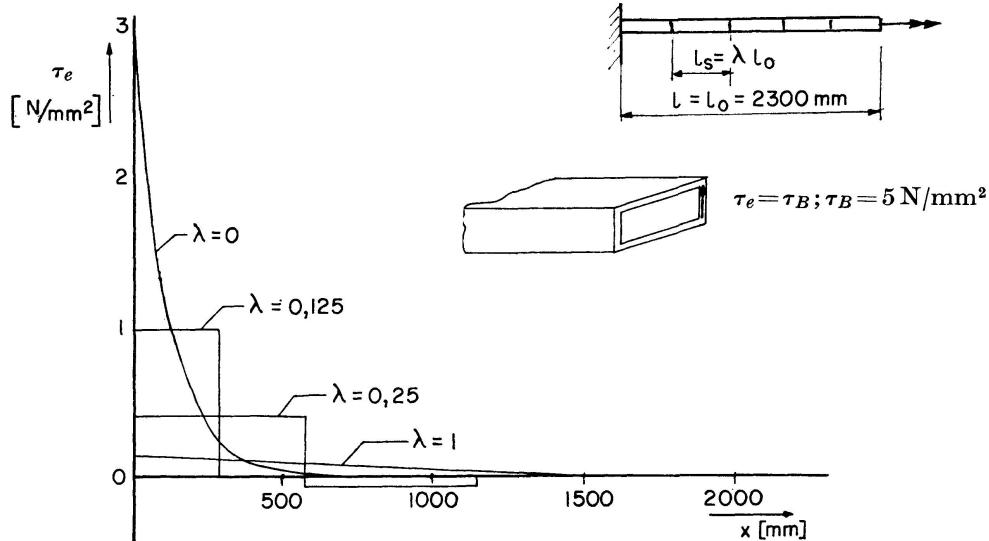
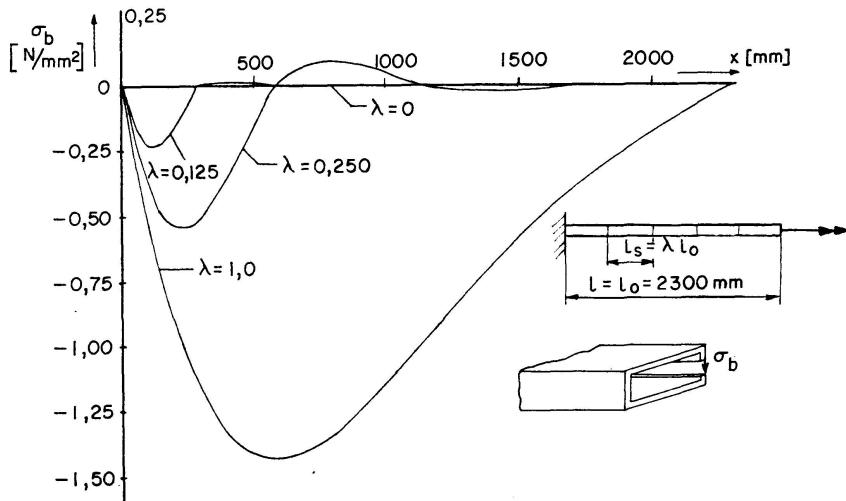


Fig. 4.5. Querschnitt des Trägers.

Fig. 4.6. $\sigma_{ax} = \sigma_{ax} (x, \lambda)$.

Fig. 4.7. $\tau_e = \tau_e (x, \lambda)$.Fig. 4.8. $\sigma_b = \sigma_b (x, \lambda)$.

auf. Die Bredtsche Schubspannung beträgt 5 N/mm^2 . Für diesen Träger gilt $l_0 = 2300 \text{ mm}$ und $\epsilon = 0,012$. Zu bemerken ist, dass $\lambda = 0$ unendlich vielen Schotten entspricht. Für $\lambda = 0,125$ ist der Schottabstand $l_s = 287 \text{ mm}$.

Aus diesen Darstellungen geht hervor, dass sich mit zunehmender Schottanzahl der Abstand, worüber die Abweichung von der Bredtschen Theorie infolge Wölbbehinderung für $x = 0$ wahrnehmbar ist, deutlich vermindert. Dies bedeutet, dass die in Fig. 4.6, 4.7 und 4.8 für $l_s = 575 \text{ mm}$ ($\lambda = 0,25$) gezeichneten Kurven auch für Träger mit gröserer Länge, z. B. 1000 mm verwendbar sind.

4.3. Kastenträger mit Länge l kleiner l_0

Auch für kurze Träger ($l < l_0$) lässt sich die Wirkung von Querschotten analysieren. Obwohl es keineswegs notwendig ist, werden wir uns auch jetzt auf die Situation mit in gleichem Abstand gestellten Schotten beschränken.

Die Parameter, die das Verhalten des Trägers bestimmen, sind l/l_0 , l_s/l und ϵ . Mit Rücksicht auf die Übersichtlichkeit der Resultate werden wir uns auf einen Wert von ϵ , nämlich $\epsilon = 0,012$ beschränken. Dieser Wert stimmt z. B. mit dem Querschnitt in Fig. 4.5 überein.

In Fig. 4.9, ... 4.13 sind einige interessante Resultate für den Träger in Fig. 4.5 dargestellt, belastet mit einem Torsionsmoment $M_x = 2000 \text{ Nm}$. Die in diesen graphischen Darstellungen gegebenen Daten können auf Träger mit anderen Abmessungen einfach transformiert werden, da nur die genannten Parameter massgebend sind. Die Fig. 4.9 und 4.10 zeigen den Einfluss von Schottabstand l_s und Trägerlänge l (bezogen auf l_0) auf die Extremwerte der axialen Normalspannung und der zusätzlichen Schubspannung im Querschnitt $x=0$, wo die Verwölbung behindert ist. Sowohl die Anwesenheit von Quer-

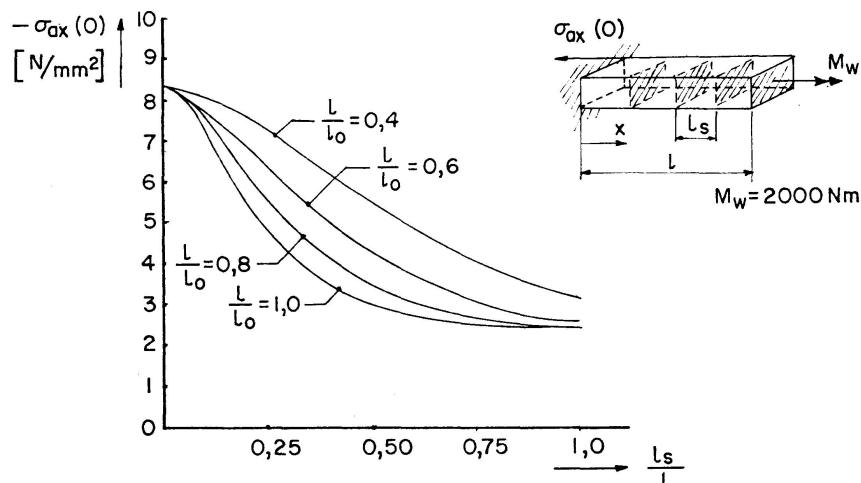


Fig. 4.9. $\sigma_{ax} = \sigma_{ax} \left(\frac{l_s}{l}, \frac{l}{l_0} \right)$.

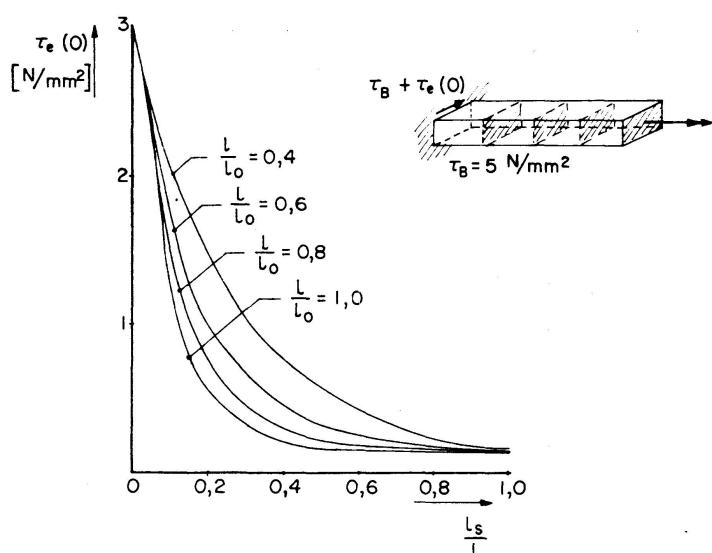


Fig. 4.10. $\tau_e = \tau_e \left(\frac{l_s}{l}, \frac{l}{l_0} \right)$.

schotten wie auch die Kürzung des Trägers ergeben eine Steigerung der untersuchten Spannungen. In Fig. 4.11, ... 4.13 ist für einen Träger mit $l/l_0 = 0,4$ der Verlauf der interessanten Spannungen in axialer Richtung gegeben mit dem Schottabstand als Parameter.

Hierdurch lässt sich feststellen, dass die Membranspannungen infolge einer

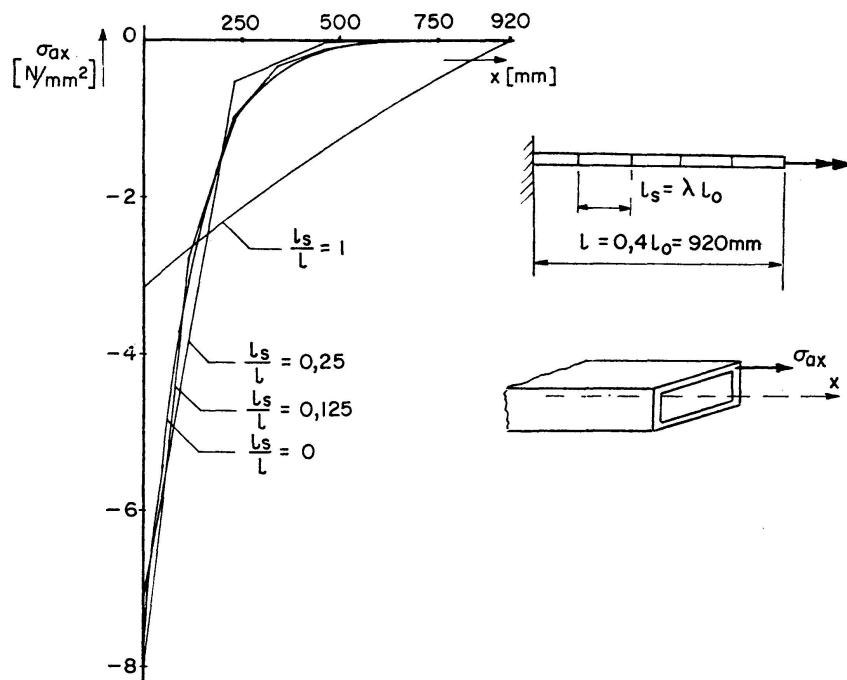


Fig. 4.11. $\sigma_{ax} = \sigma_{ax}\left(x, \frac{l_s}{l}\right)$ mit $\frac{l}{l_0} = 0,4$.

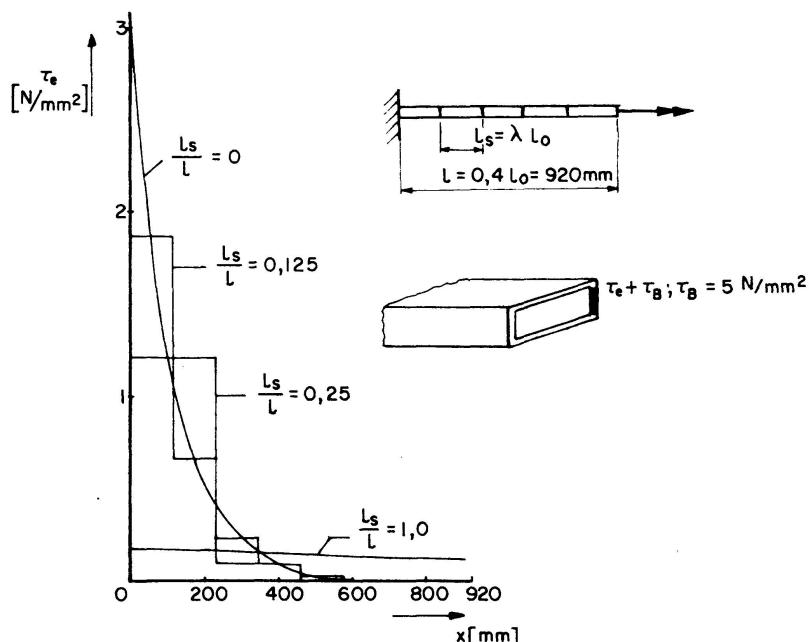


Fig. 4.12. $\tau_e = \tau_e\left(x, \frac{l_s}{l}\right)$ mit $\frac{l}{l_0} = 0,4$.

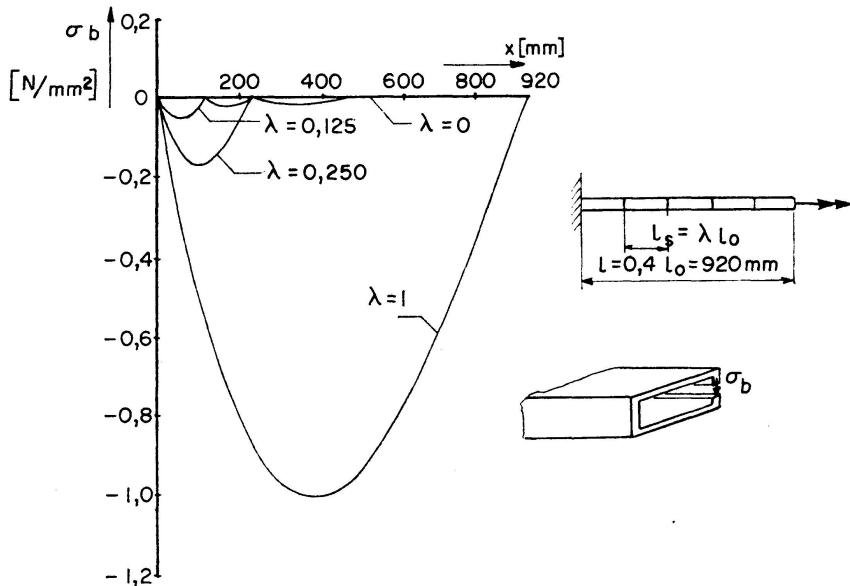


Fig. 4.13. $\sigma_b = \sigma_b \left(x, \frac{l_s}{l} \right)$ mit $\frac{l}{l_0} = 0,4$.

wachsenden Anzahl von Schotten in der Einspannung erheblich zunehmen können, während die maximale Biegespannungen nachlassen.

Zusammenfassend kann man schliessen, dass nicht nur für Träger mit $l > l_0$, sondern auch für kurze Träger ($l < l_0$) der Spannungszustand durch Querschotte ungünstig beeinflusst wird.

5. Wirkung einer nicht mittels Querschott eingeleiteten Belastung

5.1. Einleitung

In den vorigen Kapiteln wurde angenommen, dass die Belastung, insbesondere das Torsionsmoment, mittels eines Querschotts eingeleitet wird. In der Praxis wird diese Situation nicht immer auftreten, da z. B. die Einleitungsstelle der Belastung variabel ist. Deshalb werden wir den Spannungszustand analysieren, der in einem Träger mit Querschotten auftritt, wenn dieser zwischen den Schotten belastet wird. Dabei ist eine Belastung mit einem transversalen Bimoment insbesondere für die Praxis von Bedeutung.

Wenn der Abstand zwischen der Einleitungsstelle der Belastung und dem nächsten Querschott grösser ist als l_0 , kann die Wirkung der Schotte auf den Spannungsverlauf in der Umgebung der Einleitungsstelle vernachlässigt werden.

In Fig. 5.1 und 5.2 sind einige Belastungssituationen weiter ausgearbeitet. Massgebend für die Membranspannungen sind die Schnittgrössen B und Q , weil die Biegespannungen vom Produkt $c\kappa$ eindeutig bestimmt werden. Die

maximale Biegespannung ist z. B. gleich $\frac{3}{4} \frac{|c\kappa|}{t^2}$. Für die Bedeutung von c , κ und t siehe [2] und [11].

Die Resultate in Fig. 5.1 und 5.2 gelten für alle Träger mit $\epsilon \ll 1$ (siehe [11]).

Anhand von Fig. 5.1 und 5.2 kann man feststellen, dass das Behindern oder Nichtbehindern der Verwölbung bei einer Belastung mit einem transversalen Bimoment von grösster Bedeutung ist. Behindert man die Verwölbung, so nimmt die maximale axiale Membranspannung mit einem Faktor 1,56 zu, während die maximale Biegespannung mit einem Faktor 2 abnimmt.

Wenn die Belastung in einer Entfernung weniger als l_0 vom nächsten Querschott angreift, so wird das Verhalten des Trägers in der Gegend der Einleitungsstelle durch die Stelle und die Anzahl der übrigen Querschotte und deshalb durch den ganzen Träger mitbestimmt.

Den wirklichen Verlauf der Spannungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Querschotten eines Trägers (z. B. der Teil zwischen A und B in Fig. 5.3a) lässt sich dadurch begrenzen, indem man jenen Teil (einschliesslich der zwei

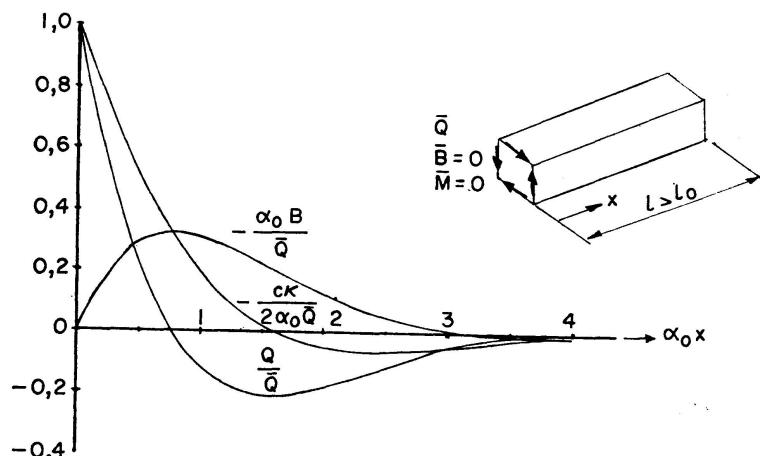


Fig. 5.1. Dimensionslose Schnittgrössen in Abhängigkeit von $\alpha_0 x$.

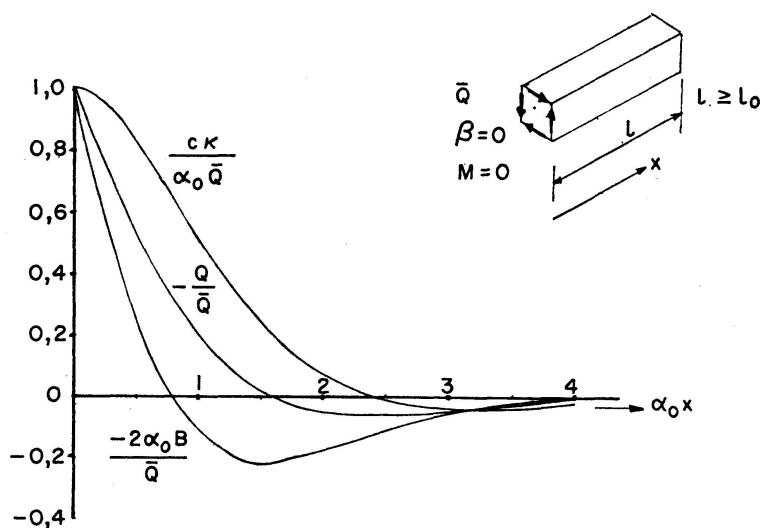


Fig. 5.2. Dimensionslose Schnittgrössen in Abhängigkeit von $\alpha_0 x$.

Querschotte) isoliert und zwei Probleme löst, nämlich die Probleme mit und ohne Wölbbehinderung an der Stelle der Querschotte (Fig. 5.3b bzw. 5.3c) und mit der gegebenen Belastung \bar{Q} . Wir werden uns im folgenden auf diese Probleme beschränken. Dabei wird in 5.2 der Einfluss der Angriffsstelle $x=q$ von \bar{Q} analysiert, falls die Länge des Teils (Querschottenabstand) $2l_0$ ist (siehe Fig. 5.4), und nachher in 5.3 den Einfluss der Länge $2l$ des Trägerteils betrachten, falls die Belastung \bar{Q} in der Mitte angreift (siehe Fig. 5.7).

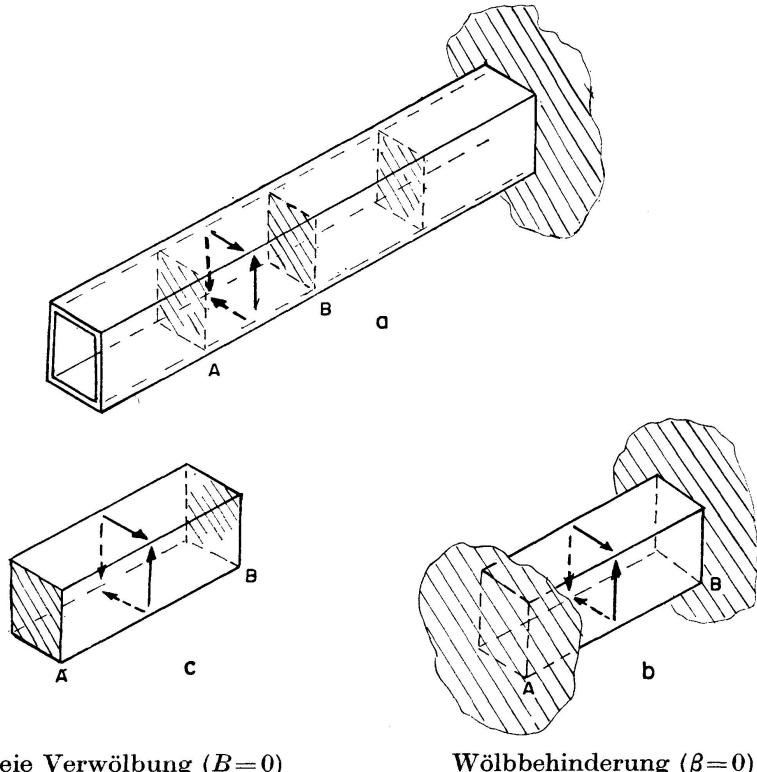


Fig. 5.3. Charakteristische Probleme, falls der Querschottenabstand kleiner als l_0 ist.

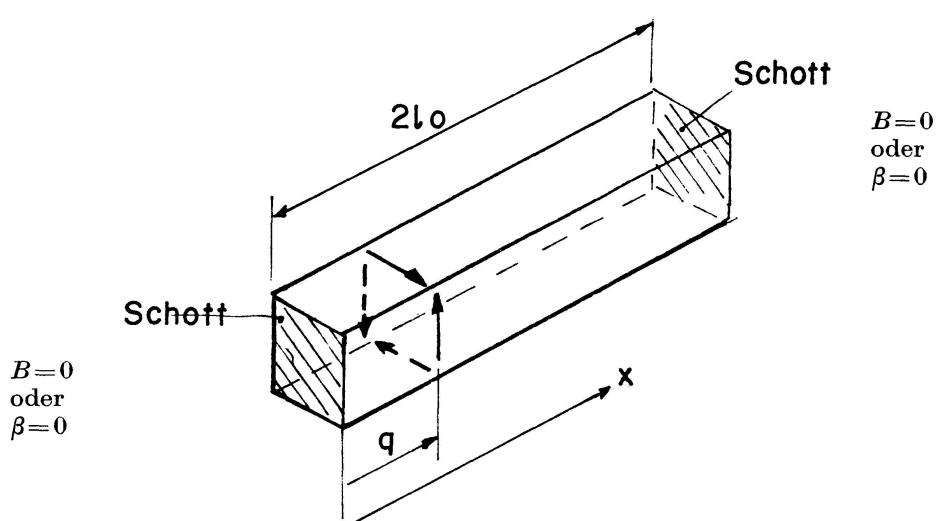


Fig. 5.4. Belastung mit einem Bimoment \bar{Q} mit beliebiger Angriffsstelle $x=q$, falls der Querschottenabstand grösser ist als $2l_0$.

5.2. Querschottenabstand $2 l_0$ und veränderlicher Angriffspunkt der Belastung \bar{Q}

Wir werden nun die Wirkung von q/l_0 auf den Spannungszustand mit verschiedenen Randbedingungen genauer betrachten.

Da der Schottabstand $2 l_0$ ist, werden die Bedingungen am Rand $x = 2 l_0$ (bzw. $x = 0$) keine Rolle spielen, wenn $q \leq l_0$ (bzw. $q \geq l_0$) ist.

In Fig. 5.5 und 5.6 sind die Größen $\frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}}$ und $\frac{c \kappa}{\alpha_0 Q}$ gegeben für $q/l_0 = 0,25, 0,50$ und $1,00$.

Aus diesen Figuren folgt, dass der Spannungszustand am gefährlichsten ist für $q/l_0 = 1$.

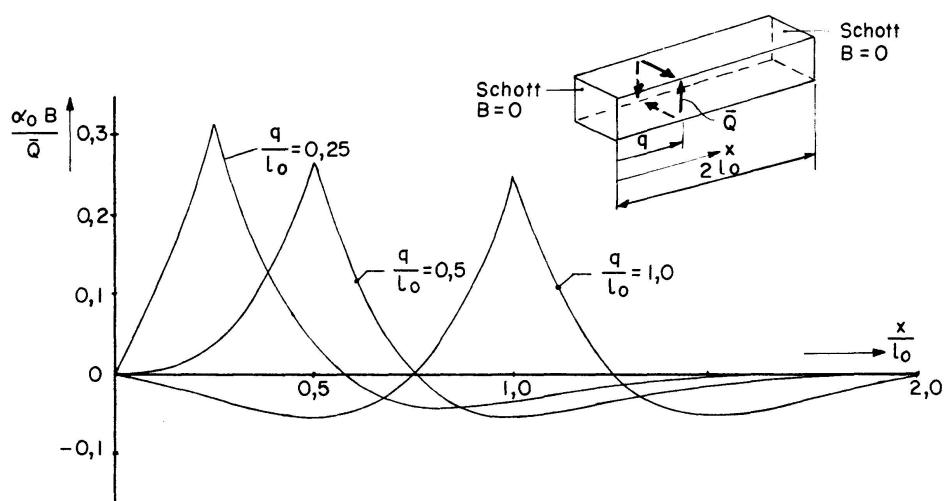


Fig. 5.5a. $\frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} = \frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} \left(\frac{x}{l_0}, \frac{q}{l_0} \right)$, falls $B(x=0) = B(x=2l_0) = 0$.

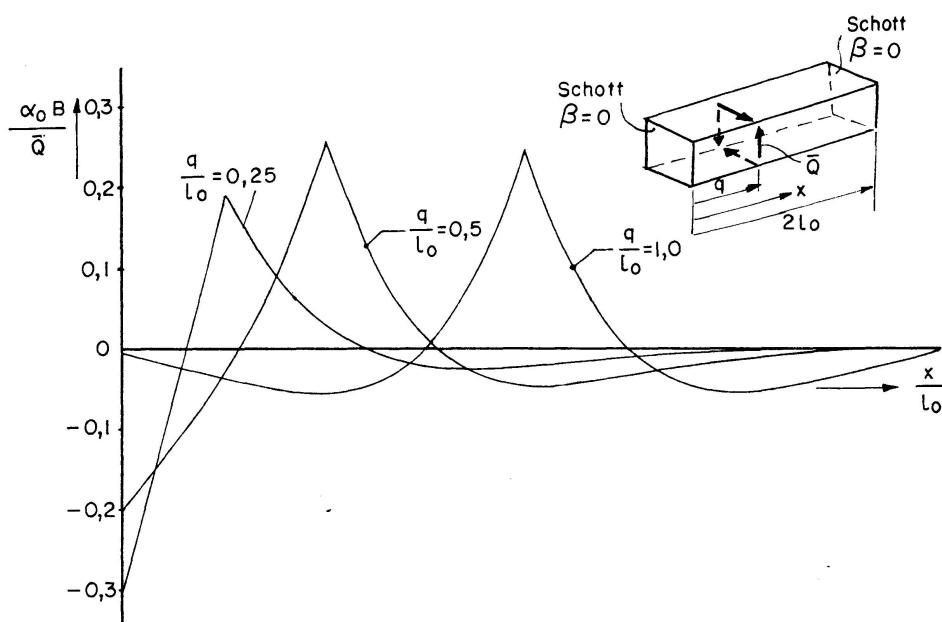


Fig. 5.5 b. $\frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} = \frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} \left(\frac{x}{l_0}, \frac{q}{l_0} \right)$, falls $\beta(x=0) = \beta(x=2l_0) = 0$.

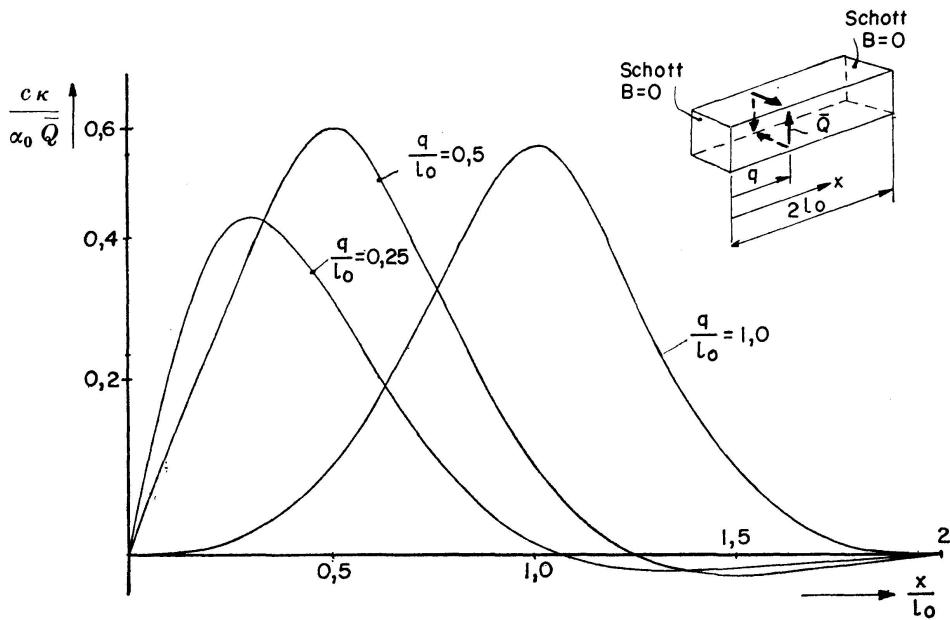


Fig. 5.6 a. $\frac{c \kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} = \frac{c \kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} \left(\frac{x}{l_0}, \frac{q}{l_0} \right)$, falls $B(x=0) = B(x=2l_0) = 0$.

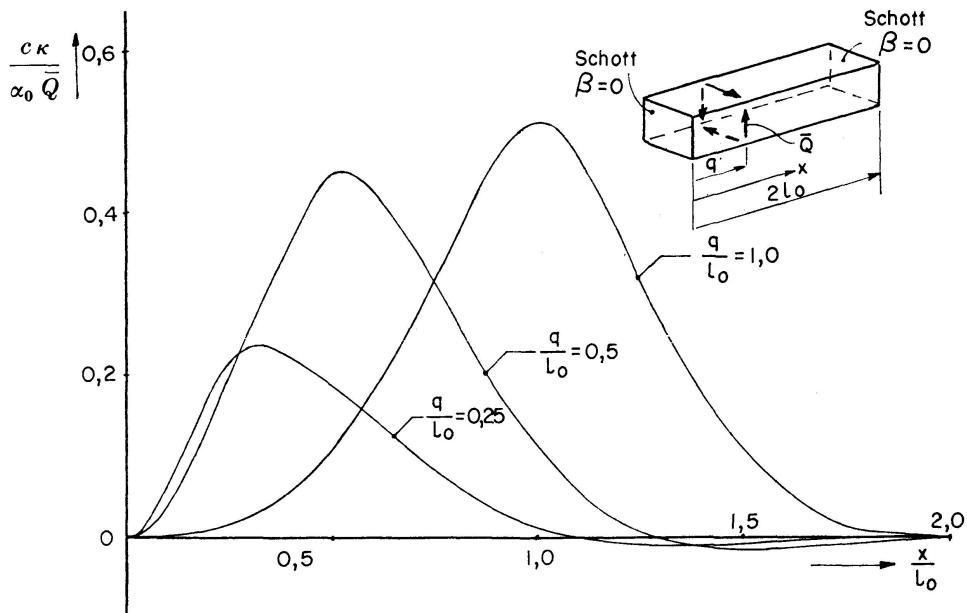


Fig. 5.6 b. $\frac{c \kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} = \frac{c \kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} \left(\frac{x}{l_0}, \frac{q}{l_0} \right)$, falls $\beta(x=0) = \beta(x=2l_0) = 0$.

5.3. Querschottabstand kleiner als $2l_0$ und Belastung in der Mitte

Der Einfluss des Abstandes zwischen den Schotten, $2l$, bei einem in der Mitte mit einem transversalen Bimoment \bar{Q} belasteten Trägerstück, wie in Fig. 5.7, kommt in den Fig. 5.8a, 5.8b, 5.9a und 5.9b zum Ausdruck. Die auftretenden Biege- und Membranspannungen sind maximal im Querschnitt, wo \bar{Q} eingeleitet wird ($x/l=1,0$). Werden die Querschotte näher zueinander

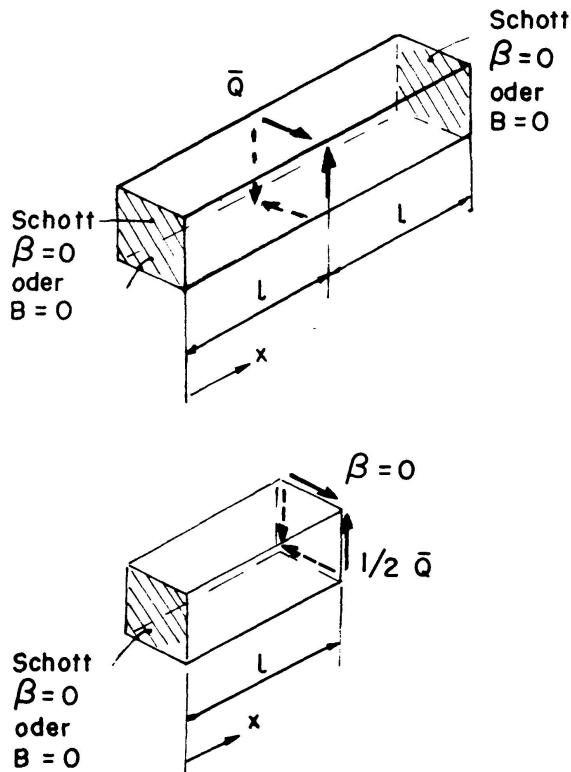


Fig. 5.7. Belastung mit einem, in der Mitte angreifenden, Bimoment \bar{Q} , falls der Querschott-abstand kleiner ist als $2l_0$.

gestellt, so nehmen die Biegespannungen ab, weil sich der Querschnitt weniger verformt. Die axialen Normalspannungen für $x/l = 1,0$ erreichen einen Extremwert für einen bestimmten Wert von l/l_0 , wie aus Fig. 5.8a und 5.9a hervorgeht.

Ist die Verwölbung in den Endquerschnitten behindert, so sind die auftretenden Biegespannungen im allgemeinen kleiner als mit freier Verwölbung.

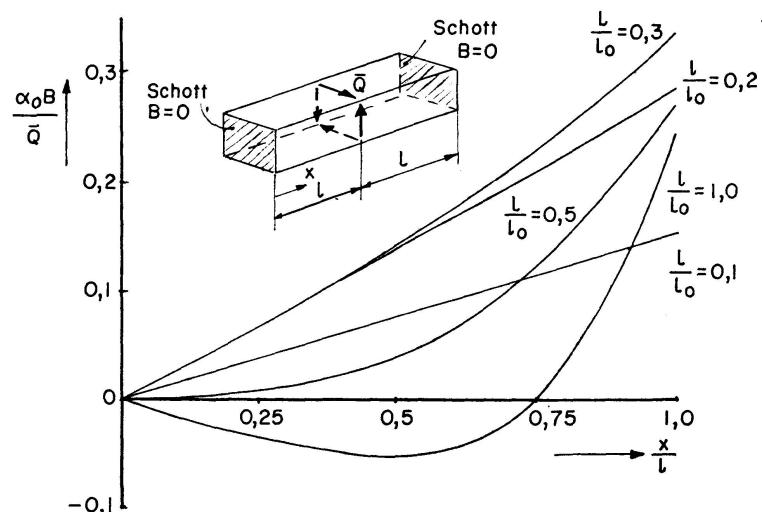


Fig. 5.8a. $\frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} = \frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} \left(\frac{x}{l}, \frac{l}{l_0} \right)$, falls $B(x=0) = B(x=2l_0) = 0$.

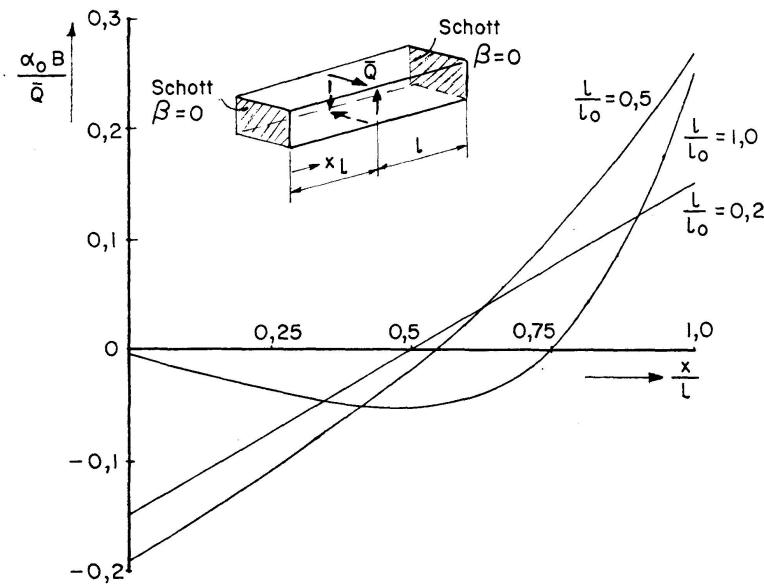


Fig. 5.8 b. $\frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} = \frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} \left(\frac{x}{L}, \frac{l}{l_0} \right)$, falls $\beta(x=0) = \beta(x=2l_0) = 0$.

Aus Fig. 5.8 b und 5.9 b ergibt sich der Einfluss des Behinderns oder Nicht-behinderns der Verwölbung auf die axialen Normalspannungen.

Die Deutung der graphischen Darstellungen kann – für Träger mit konstanter Wandstärke – vereinfacht werden mittels der in [2] und [11] gegebenen Gleichungen für die Extremwerte der axialen Normalspannung (σ_{ax}) und der Biegespannung (σ_{sb}) in einem Querschnitt.

$$\sigma_{ax} = -\frac{1}{2} \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{\alpha_0 B}{\bar{Q}} \frac{\alpha_0 \bar{Q}}{t^2}, \quad (5.1)$$

$$\sigma_{sb} = \frac{3}{4} \frac{c \kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} \frac{\alpha_0 \bar{Q}}{t^2}. \quad (5.2)$$

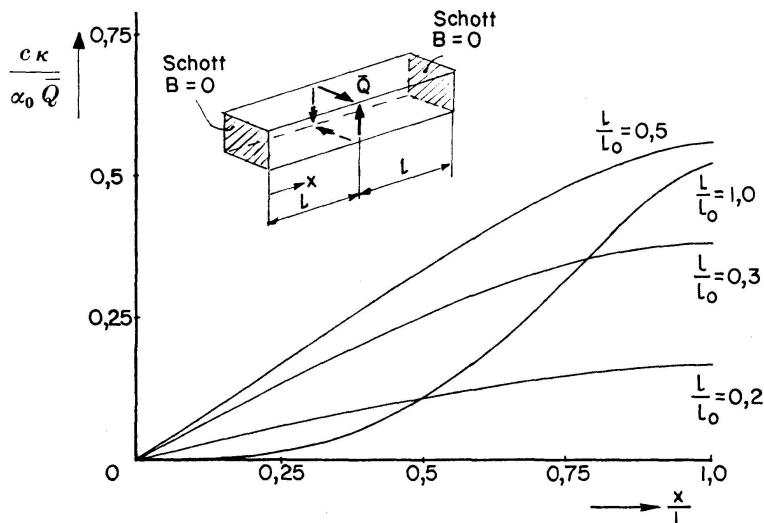


Fig. 5.9 a. $\frac{c \kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} = \frac{c \kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} \left(\frac{x}{L}, \frac{l}{l_0} \right)$, falls $B(x=0) = B(x=2l_0) = 0$.

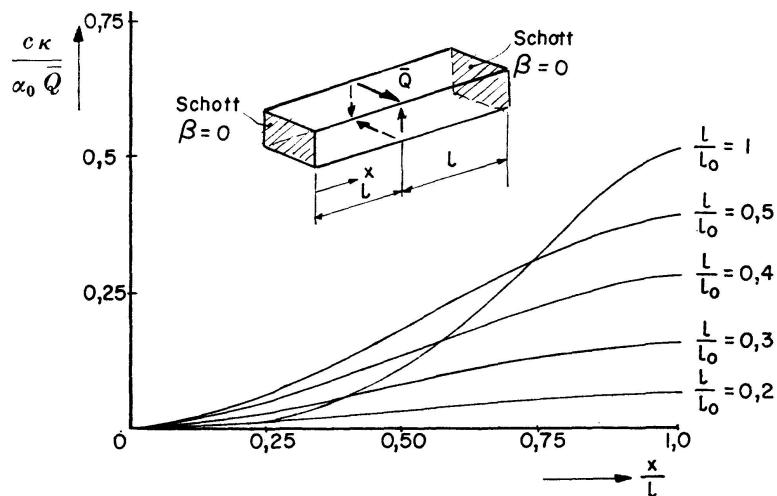


Fig. 5.9b. $\frac{c \kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} = \frac{c \kappa}{\alpha_0 \bar{Q}} \left(\frac{x}{l}, \frac{l}{l_0} \right)$, falls $\beta(x=0) = \beta(x=2l_0) = 0$.

6. Die nicht-idealnen Querschotte

Im vorhergehenden wurde stets vorausgesetzt, dass jedes Querschott in der Ebene starr und senkrecht zur Ebene völlig flexibel sei. Wir werden untersuchen unter welchen Umständen diese Voraussetzung anwendbar ist.

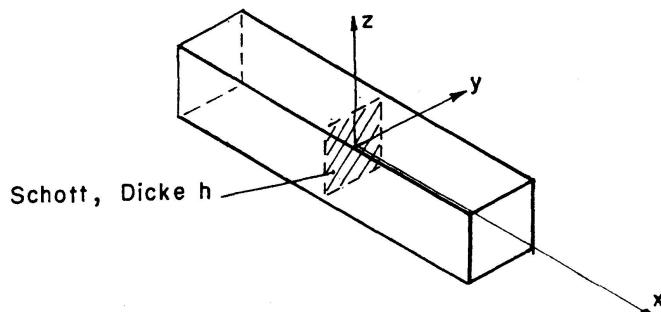


Fig. 6.1. Kastenträger mit nicht-idealem Querschott.

In der Theorie für Kastenträger ohne Querschotte oder mit idealen Querschotten (siehe z. B. [1, 2, 7]) gilt für die axialen Verschiebungen u :

$$u = \beta(x) y z, \quad (6.1)$$

wobei $\beta(x)$ den axialen Verlauf der Verwölbung charakterisiert. Auch wenn es im Träger nicht-ideale Querschotte gibt, kann man voraussetzen, dass Verschiebungen an den Rändern der Schotte ebenfalls durch diese Formel gegeben werden.

Nach der Theorie der Plattenbiegung können derartige Verschiebungen an den Rändern auftreten, wenn die Platte auf die in Fig. 6.2 gezeichnete Weise belastet wird.

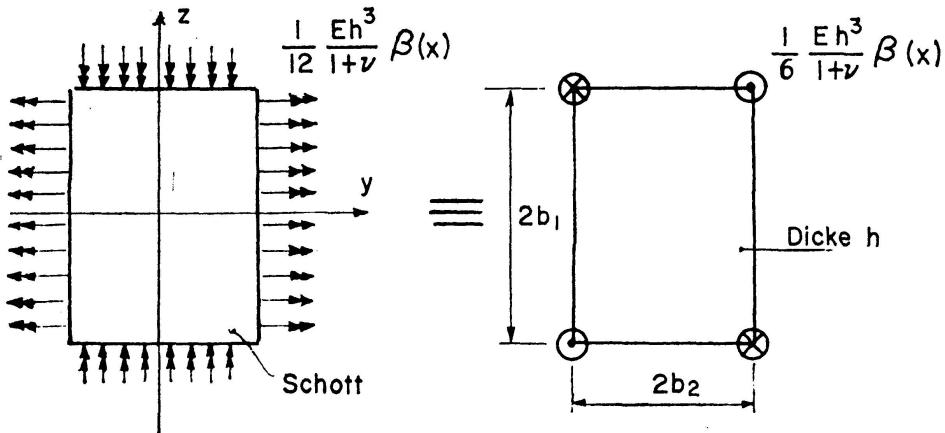


Fig. 6.2. Belastung der Querschotte.

Am Träger wird ein Gleichgewichtssystem angreifen, das wir als axiales Bimoment B_s mit der Grösse (siehe Fig. 6.3)

$$B_s = -\frac{2}{3} \frac{E^* h^3}{1 + \nu^*} b_1 b_2 \beta \quad (6.2)$$

betrachten können, wobei h , b_1 und b_2 in Fig. 6.2 gegeben und E^* und ν^* die Materialeigenschaften der Schotte sind.

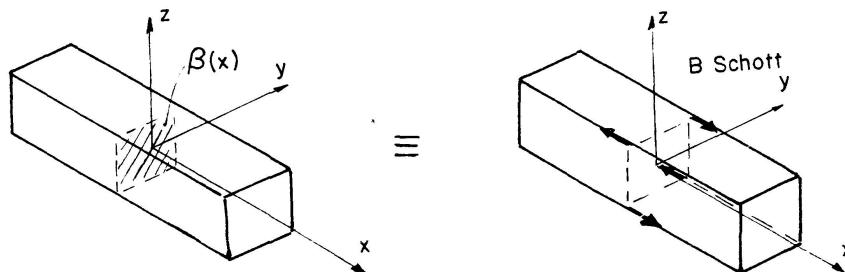
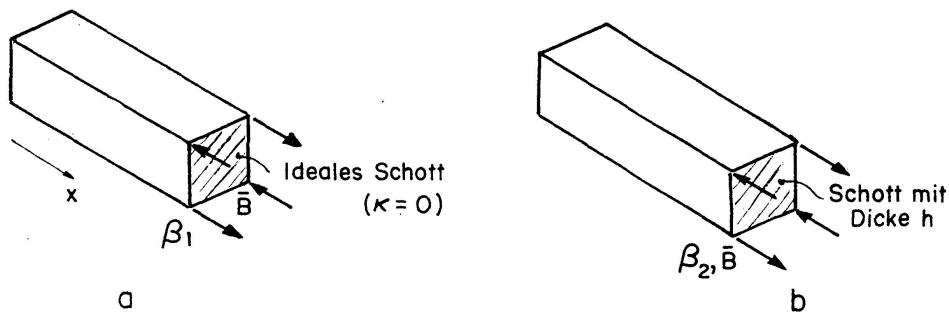


Fig. 6.3. Durch die nicht-ideale Querschotte verursachte zusätzliche Belastung des Trägers.

Von der Bedeutung dieser Belastung lässt sich ein Eindruck gewinnen, wenn man einen Träger mit der Länge grösser als l_0 mit einem axialen Bimoment \bar{B} belastet und die Verwölbung in den beiden Lagen in Fig. 6.4a und 6.4b vergleichen.

Fig. 6.4. Träger mit einer idealen und nicht-idealnen Querschotte (Fig. a, bzw. Fig. b), belastet mit einem Bimoment \bar{B} .

Falls β_1 und β_2 die Verwölbung charakterisieren und das Querschott ideal ist (Fig. 6.4a) bzw. eine bestimmte Steifigkeit senkrecht zur Ebene hat (Fig. 6.4b), so gilt für den Zusammenhang zwischen β_1 , β_2 und \bar{B} :

$$\bar{B} = 2 a_1 \alpha_0 \beta_1, \quad (\text{Fig. 6.4a}) \quad (6.3)$$

$$\bar{B} = 2 a_1 \alpha_0 \beta_2 (1 + k_\beta) \quad (\text{Fig. 6.4b}) \quad (6.4)$$

mit:

$$a_1 = \frac{4}{3} E b_1^2 b_2^2 (b_1 t_1 + b_2 t_2), \quad (6.5)$$

$$k_\beta = \frac{E^* h^3 b_1 b_2}{3(1+\nu^*) \alpha_0 a_1}. \quad (6.6)$$

Wenn t_1 und t_2 gleich t sind und sowohl Träger wie Schotte dieselben Materialeigenschaften haben, gilt:

$$k_\beta \approx 0,2 \sqrt{\frac{h^6}{b_1 b_2 (b_1 + b_2) t^3}}. \quad (6.7)$$

Aus (6.7) geht hervor, dass k_β viel kleiner ist als 1, wenn das Querschott als Platte betrachtet werden kann, also $h \ll b_1$ und $h \ll b_2$ und wenn h und t Größen gleicher Ordnung sind.

In ähnlicher Weise kann man analysieren, unter welchen Umständen das Querschott in der Ebene als starr betrachtet werden kann.

Wenn der Querschnitt deformiert, wird die Schotte an den Rändern mit Schubspannungen belastet, die ein Gleichgewichtssystem \bar{Q} bilden. Wir berechnen die Querschnittsverformung κ für die beiden in Fig. 6.5 gezeichneten Situationen. Es gilt:

$$\bar{Q} = -\frac{c \kappa_1}{2 \alpha_0}, \quad (\text{Fig. 6.5a}) \quad (6.8)$$

$$\bar{Q} = -\frac{c \kappa_2}{2 \alpha_0} (1 + k_\kappa) \quad (\text{Fig. 6.5b}) \quad (6.9)$$

mit:

$$c = \frac{4 E t_1^3 t_2^3}{(1-\nu^2)(b_1 t_2^3 + b_2 t_1^3)}, \quad (6.10)$$

$$k_\kappa = \frac{8 E^* b_1 b_2 h \alpha_0}{(1+\nu^*) c}. \quad (6.11)$$

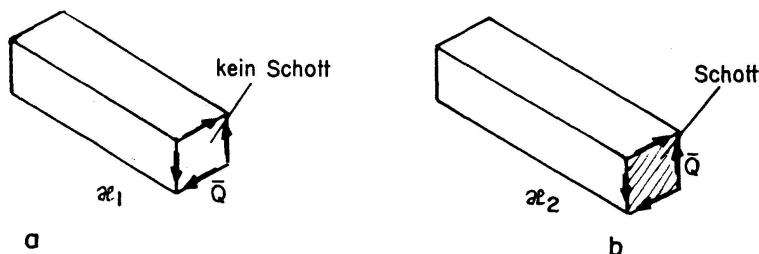


Fig. 6.5. Träger ohne und mit Endschott (Fig. a, bzw. Fig. b), belastet mit einem Bimoment \bar{Q} .

Für einen Kastenträger mit $t_1 = t_2 = t$, mit $E^* = E$ und $\nu^* = \nu$ kann man statt (6.11) schreiben:

$$k_\kappa = 5,47 \frac{h}{t} \sqrt{\frac{b_1 b_2 (b_1 + b_2)}{t^3}}. \quad (6.12)$$

Aus (6.12) und (6.9) kann man schliessen, dass κ_2 hinsichtlich κ_1 vernachlässigt werden kann.

Weil für übliche Abmessungen der Schotte $k_\beta \ll 1$ und $k_\kappa \gg 1$ ist, wird mit einem idealen Querschott die Realität hinreichend gut beschrieben. Übrigens ist es sehr wohl möglich, das wirkliche Verhalten der Schotte in den Rechenprogrammen [9] und [10] zu berücksichtigen.

7. Schlussbemerkungen

Unter der Annahme, dass sich der Trägerquerschnitt in einer bestimmten Weise deformieren kann, ist es möglich, den Einfluss von Querschotten auf den Spannungsverlauf zu analysieren.

Wenn die Belastung mittels eines Querschotts eingeleitet wird, so wird die Stärke des Trägers durch zusätzliche Querschotte ungünstig beeinflusst (siehe 4.).

Wird die Belastung, und insbesondere ein transversales Bimoment, zwischen zwei Querschotten eingeleitet, so können die in 5. dargestellten Figuren bei der Berechnung des optimalen Abstandes zwischen den Querschotten zu Hilfe gezogen werden.

Im allgemeinen kann man den Schluss ziehen, dass es wenig zweckvoll ist, den Abstand zwischen den Schotten kleiner als $0,5 l_0$ zu wählen.

Literatur

- [1] VLASOV, V. S.: Thin-walled elastic beams, 2nd. ed., Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (1961).
- [2] JANSSEN, J. D.: Over de torsietheorie van Vlasov voor dunwandige kokers, Dissertation, Technische Hogeschool Eindhoven (1967).
- [3] HEILIG, R.: Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform. Der Stahlbau 1961, Heft 11, S. 333/349.
- [4] FLÜGGE, W. und MARGUERRE, K.: Wölbkräfte in dünnwandigen Profilstäben. Ingenieur-Archiv, XVIII (1950), S. 23/38.
- [5] LACHER, G.: Zur Berechnung des Einflusses der Querschnittsverformung auf die Spannungsverteilung bei durch elastische oder starre Querschotte verstiften Tragwerken mit prismatischem, offenem oder geschlossenem biegesteifem Querschnitt unter Querlast. Der Stahlbau 1962, Heft 10, S. 299/308, und Heft 11, S. 325/335.
- [6] RESINGER, F.: Der dünnwandige Kastenträger. Forschungsheft aus dem Gebiet des Stahlbaus Nr. 13, Stahlbau-Verlags-G.m.b.H., Köln 1959.

- [7] DABROWSKI, R.: Einfluss der Querschnittsverformung auf die Normalspannungen in Biegestäben. Schlussbericht Stahlbautagung TH-Dresden 1959, VEB-Verlag für Bauwesen, Berlin 1961.
- [8] CSONKA, P.: Torsion of a square-shaped tube clasped in at both ends. Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Acta Technika XXIV (1959), H. 3-4, S. 379/390.
- [9] VELDPAUS, F. E.: Berekening van rechthoekige kokers met starre profiellijn, Rechenprogramm, Technische Hogeschool Eindhoven, nr. 05063120 (1969).
- [10] VELDPAUS, F. E.: Berekening van rechthoekige kokers met deformeerbare profiellijn, waarin ideale dwarsschotten zijn aangebracht, Rechenprogramm Technische Hogeschool Eindhoven, nr. 05063346 (1969).
- [11] JANSSEN, J. D. und VELDPAUS, F. E.: Über die Stärke und Steifigkeit von Kastenträgern mit Rechteckquerschnitt. Abhandlungen IVBH, Bd. 32-II, 1972, S. 85-106.

Zusammenfassung

Der Einfluss von Querschotten auf den Spannungs- und Verformungszustand dünnwandiger Kastenträger mit Rechteckquerschnitt wird untersucht. Diese Analyse stützt sich auf die Torsionstheorie nach Vlasov. Dabei wird der Frage, unter welchen Umständen die Verformung des Trägerquerschnitts vernachlässigbar klein ist, besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Hieraus ergeben sich Richtlinien für die Anwendung von Querschotten. Namentlich zeigt sich, dass der Spannungszustand ungünstiger werden kann, wenn mehrere Querschotten angebracht werden.

Summary

The influence of cross-ties on the behaviour of thin walled box girders of rectangular section is examined. This analysis is founded on the torsion theory of Vlasov. Special attention is paid to the circumstances under which the deformation of the girder section can be neglected. Therefrom result directions for the application of cross-ties, in particular that the tension condition can become unfavourable if several cross-ties are employed.

Résumé

On examine l'influence de parois transversales sur l'état de tension et de déformation de poutres en caisson minces à section rectangulaire. Cette analyse est basée sur la théorie de torsion selon Vlasov. Une attention particulière est attribuée aux circonstances dans lesquelles la déformation de la section de la poutre est négligeable. Il en résultent des lignes directives pour l'emploi de parois transversales, en particulier l'état de tension peut s'avérer défavorable lorsque plusieurs parois transversales sont appliquées.