Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 32 (1972)

Teilband: IABSE Publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.03.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ASSOCIATION INTERNATIONALE DES PONTS ET CHARPENTES
INTERNATIONALE VEREINIGUNG FÜR BRÜCKENBAU UND HOCHBAU
INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR BRIDGE AND STRUCTURAL ENGINEERING

MÉMOIRES
ABHANDLUNGEN
PUBLICATIONS

32-I

1972

PUBLIÉS PAR LE SECRÉTARIAT GÉNÉRAL À ZURICH
HERAUSGEGEBEN VOM GENERALSEKRETARIAT IN ZÜRICH
PUBLISHED BY THE GENERAL SECRETARIAT IN ZURICH

Editeur - Verleger - Publisher

Association Internationale des Ponts et Charpentes
Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich

Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

International Association for Bridge and Structural Engineering
Swiss Federal Institute of Technology, Zurich

En commission pour la vente en librairie
Kommissionsverlag für den Buchhandel - Copies for sale at

Verlag Leemann Zürich

Printed in Switzerland

Préface

Nous publions dans le présent volume douze articles auxquels ont collaboré dix-sept auteurs.

Nous pouvons nous réjouir de l'intérêt sùscité par l'hospitalité de nos mémoires puisque les contributions proviennent de dix pays. Nous regrettons, cependant, l'absence d'exposés en langue française.

Les thèmes choisis sont des plus divers. Ils englobent aussi bien des problèmes théoriques spécialisés que des questions plus générales allant jusqu'à la synthèse à propos d'un sujet de grande actualité.

Nous serions heureux d'accueillir dans l'avenir des contributions touchant des problèmes difficiles d'exécution. Notre Association se doit de contribuer à améliorer la relation entre la théorie et la pratique. Cette relation existe déjà du reste par le fait de la provenance de nos membres qui se reflète ici par la provenance des auteurs que nous remercions très vivement pour la qualité de leurs travaux et leur fidélité à notre Association.

Zurich, juillet 1972.

Le Président de l'AIPC:

Prof. MAURICE COSANDEY
Président de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Les Secrétaires Généraux:

Dr sc. techn. HANS VON GUNTEN
Professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich

Dr. sc. techn. PIERRE DUBAS
Professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich

Dr sc. techn. ANGELO POZZI
Professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich

Vorwort

Im vorliegenden Band veröffentlichen wir 12 Aufsätze unter Mitarbeit von 17 Autoren.

Wir freuen uns über das entgegengebrachte Interesse für unsere Abhandlungen, zu denen 10 Länder beigetragen haben. Leider vermissen wir jedoch Darstellungen in französischer Sprache.

Die ausgewählten Themen sind sehr verschieden. Sie umschliessen sowohl theoretische Fachprobleme wie auch allgemeinere Fragen, die sich für ein sehr aktuelles Problem bis zur Synthese ausdehnen.

Wir würden es begrüssen, wenn wir in Zukunft Beiträge über schwierig auszuführende Arbeiten aufnehmen könnten. Es ist die Aufgabe unserer Vereinigung, zu den Verbesserungen der Beziehung zwischen Theorie und Praxis beizutragen. Diese Beziehung besteht ja bereits durch die Herkunft unserer Mitglieder, die sich hier durch die Verfasser widerspiegelt. Wir danken wärmstens diesen Autoren für den Wert ihrer Arbeit und für die unserer Vereinigung bewiesene Treue.

Zürich, Juli 1972.

Der Präsident der IVBH:

Prof. Maurice Cosandey
Präsident der Eidgenössischen Technischen Hochschule Lausanne

Die Generalsekretäre:

Dr. sc. techn. Hans von Gunten
Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich

Dr. sc. techn. Pierre Dubas
Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich

Dr. sc. techn. Angelo Pozzi
Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich

Preface

In the present volume we publish twelve reports to which seventeen authors have contributed.

We are delighted at the interest taken in our reports as the contributions come from 10 countries. We regret however the absence of contributions in the French language.

The themes chosen differ very greatly one from the other. They include specialised theoretical problems as well as more general questions leading to the synthesis of a subject of great interest at the present time.

We would be pleased to receive in the future further contributions dealing with problems which are difficult to solve.

Our Association must contribute towards improving the relationship between theory and practice. This relationship however already exists in fact by the origin of our members and is reflected in the subjects of the authors.

We wish to convey our sincere thanks to the authors for the quality of their work and their loyalty to our Association.

Zurich, July 1972.

The President of IABSE:

Prof. MAURICE COSANDEY
President of the Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne

The General Secretaries:

Dr. sc. techn. HANS VON GUNTEN
Professor at the Swiss Federal Institute of Technology, Zurich

Dr. sc. techn. PIERRE DUBAS
Professor at the Swiss Federal Institute of Technology, Zurich

Dr. sc. techn. ANGELO POZZI
Professor at the Swiss Federal Institute of Technology, Zurich

Leere Seite
Blank page
Page vide

Table des matières - Inhaltsverzeichnis - Table of Contents

H. J. Brettle . . . . . English 1

Théorie et résistance limite de cheminées en béton armé
Theorie und Grenzfestigkeit von Stahlbetonschornsteinen
Theory and Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete Chimneys

D. N. Buragohain . . . . . English 37

Analyse discontinue de chaussées de ponts courbes cylindriques et orthotropes
Unstetige Analyse zylindrischer orthotroper gebogener Brückenfahrbahnen
Discrete Analysis of Cylindrical Orthotropic Curved Bridge Decks

M. S. G. Cullimore . . . . . English 49

Résistance à la fatigue de câbles de fil d'acier hautement stables sous l'influence de fluctuations d'effort de petite amplitude
Ermüdungsfestigkeit hochfester Stahldrahtkabel unter Einwirkung von Beanspruchungsschwankungen kleiner Amplitude
The Fatigue Strength of High Tensil Steel Wire Cable Subjected to Stress Fluctuations of Small Amplitude

I. Deutsch . . . . . Deutsch 57

Calcul de la fissuration des éléments en béton armé, sollicités à la flexion à effort tranchant
Berechnung der Rissbildung bei auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Stahlbetonbauteilen
Analysis of Cracking in Reinforced Concrete Members Subjected to Bending and Shear

Jacob Glück, Menachem Gellert. . . . . English 77

Analyse tridimensionnelle de charge latérale aux structures à plusieurs étages
Dreidimensionale seitliche Lastanalyse von mehrstöckigen Bauten
Three Dimensional Lateral Load Analysis of Multistorey Structures

J. Glück, M. Gellert, A. Danay . . . . . English 91

Dynamique de structures asymétriques à plusieurs étages
Dynamik asymmetrischer mehrstöckiger Bauten
Dynamics of Asymmetric Multistorey Structures

A. Hrennikoff, C. I. Mathew, Rajan Sen . . . . . English 109

Stabilité de dalles utilisant des éléments de barre rectangulaires
Festigkeit von Platten bei Anwendung rechteckiger Stabelemente
Stability of Plates Using Rectangular Bar Cells

F. Leonhardt, W. Zellner . . . . . Deutsch 127

Comparaisons entre ponts suspendus et ponts à haubans pour portées dépassant 600 m
Vergleiche zwischen Hängebrücken und Schrägkabelbrücken für Spannweiten über 600 m
Comparative Investigations Between Suspension Bridges and Cable-stayed Bridges for Spans Exceeding 600 m

Bernd Möller . . . . . Deutsch 167

Calcul de plaques orthotropes en acier dans la portée de charge efficace
Berechnung orthotroper Stahlplatten im Traglastbereich
Calculation of Orthotropic Steel Plates in the Range of Ultimate Load

F. Sebök . . . . . Deutsch 179

Etude et calcul de réservoirs cylindriques en béton précontraint à nervures axiales
Entwurf und Berechnung von zylindrischen Spannbeton-Druckbehältern mit axialen Rippen
Design and Calculation of Cylindrical Prestressed Concrete Vessels with Axial Joists

Werner Warkenthin . . . . . Deutsch 199

Contribution au déversement plastique de poutres à section en I non-conforme
Beitrag zum plastischen Kippen von Trägern mit nichtformtreuem I-Querschnitt
Contribution to the Plastic Tipping of Beams with Non-conformed I-Section

E. A. Zagustin, D. H. Young . . . . . English 219

Réaction dynamique de poutres sur une masse mouvante
Dynamische Reaktion von Trägern auf eine sich bewegende Masse
Dynamic Response of Beams to a Travelling Mass

Theory and Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete Chimneys

Théorie et résistance limite de cheminées en béton armé

Theorie und Grenzfestigkeit von Stahlbetonschornsteinen

H. J. BRETTLE
Associate Professor, School of Civil Engineering, University of New South Wales

1. Introduction

Reinforced concrete began to replace brickwork in chimney construction late in the 19th century. In America about 400 chimneys had been constructed before 1907 indicating rapid acceptance of concrete as a satisfactory material. In recent years use of the slip forming technique has increased to the extent that related specifications are now being included in chimney design codes. The use of high strength, heat resistant concretes placed by modern handling and compacting equipment has produced exceedingly tall stacks of up to 1200 feet high [15]. Some hollow circular concrete T. V. antennas have been erected to 1700 feet [16] using similar design procedures and construction methods. No doubt the prestressing technique will be introduced for the erection of still higher thin-walled concrete structures in the near future. LEONHARDT [16] suggests that towers of "3300 feet are attainable without great difficulty".

The most comprehensive document on the design of reinforced concrete chimneys is the ACI specification 505-54 [1] in which the elastic or permissible stress design method is fully covered. Theories for the determination of stresses due to dead, wind and earthquake loadings and a differential temperature gradient across the wall thickness are included.

In this paper, the theory for the ultimate strength analysis of hollow circular sections with allowance for a large flue hole in the wall is developed and an ultimate strength design method is proposed. The theory applies to stout sections in which the column strength is assumed unaffected by slenderness ratio L/d. The relative wall thickness to diameter ratio t/d is also assumed

sufficient to prevent crinkle buckling or ovalization failure of thin-walls. Failure is assumed to occur when the materials attain their ultimate strengths.

The only known experimental evidence on the ultimate strength of thin wall circular sections are the results of seven tests carried out at the University of New South Wales during 1968 and 1969. As this previously published theory [12, 13] related to bridge piers the specimens were without flue openings and not subjected to elevated temperatures. The test series supported the proposed theory within about 10%. No experimental evidence can be found in the literature on the effect of flue openings and elevated temperature on the ultimate strength of hollow circular sections. Until this has been done the theoretical approach, with due allowance for temperature effects on the material properties must be used for the ultimate strength design of reinforced concrete chimneys.

2. Temperature Effects

2.1. Material Stress-Strain Curves

Concrete stress-strain curves for axially loaded cylinders vary non-linearly from zero to the point of maximum compressive stress f'_c at a strain e'_c. Beyond this point the stress decreases with increasing strain, the relationship depending to some extent on the stiffness of the testing machine which affects the sudden rate of straining at failure. Although the ultimate strength f'_c of different concretes can be varied between wide limits, the strain e'_c at which f'_c first occurs remains reasonably constant and a value of 0.002 is usually adopted [7]. When plain concrete specimens are eccentrically loaded in compression such that tensile stress develops over portion of the specimen area, or when reinforced concrete beams are subjected to flexure, values of strain much greater than 0.002, can be measured before collapse occurs. The "Recommendations for an International Code of Practice" [7] suggests 0.0035 as the value of extreme fibre compressive strain e_{cu} at which failure occurs in such specimens. Strain values much higher than 0.0035 have been recorded in stability tests on columns in which off-loading has permitted time for measurement of these higher strains. The actual shape of the stress-strain curve for concrete is approximated by the dashed line on Fig. 1a.

The actual stress-strain curves can be approximated by a trapezoidal shape, based on the variables f'_c, e'_c and e_{cu}. This curve, first suggested by the author in 1958 [4], increases linearly from zero to the point fixed by the values f'_c and e'_c, then remains at constant stress f'_c while the strain increases to e_{cu}, when failure occurs. To adjust this trapezoidal shape to include the effect of temperature on the material properties, the parameters k_1, k_2 and k_3 are introduced where k_1 is the ratio of concrete ultimate strength at elevated

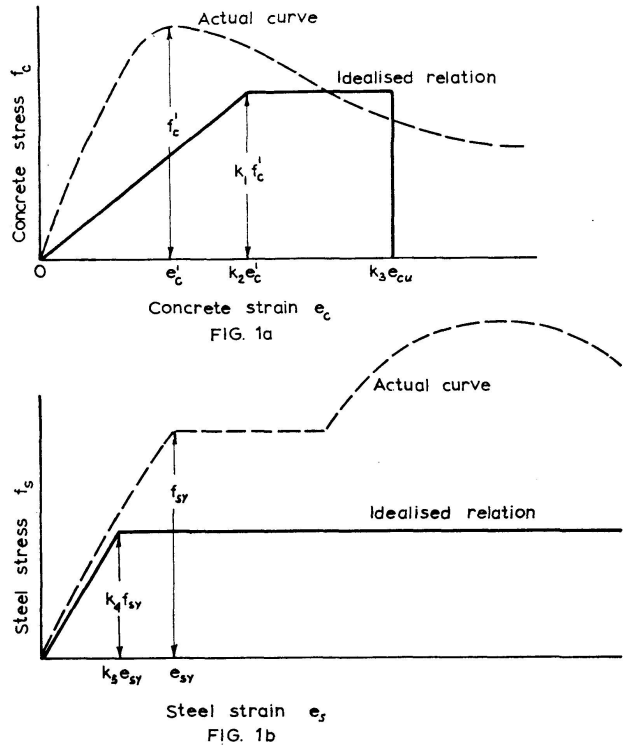


Fig. 1. Stress strain properties of concrete and steel.

temperature T to its ultimate strength at ambient temperature, k_2 is the ratio of concrete strain at elevated temperature T to its strain at ambient temperature, both strains occurring when maximum stress f'_c is first attained and k_3 is the ratio of the maximum value of extreme fibre strain in flexure at elevated temperature T to its value at ambient temperature. The idealised stress-strain curve adopted in this paper for concrete subjected to temperature rise is shown by the full line in Fig. 1 a.

The actual stress-strain curve for commercially available reinforcing steels is approximated by the dashed line in Fig. 1 b. This curve can be approximated by a stress-strain relation increasing linearly from zero to a point fixed by the yield stress f_{sy} and the yield strain e_{sy}, then remaining at constant stress f_{sy} while the strain continually increases. No upper limiting strain value has been considered. The adopted elasto-plastic shape has been adjusted for the effect of temperature by introducing parameters k_4 and k_5 where k_4 is the ratio of the steel yield stress at elevated temperature T to its yield stress f_{sy} at 20° C and k_5 is the ratio of the steel yield strain at elevated temperature T to its yield strain e_{sy} at 20° C. The adopted idealised stress-strain curve for reinforcing steels subjected to temperature is shown by the full line in Fig. 1 b.

2.2. Effect of Temperature on Ultimate Strength

Reinforced concrete chimneys are usually constructed with a lining of fire bricks which is separated from the concrete by an air cavity. The inner face

of the concrete nevertheless reaches temperatures well above that of the outer face which is cooled by the surrounding air. A temperature gradient usually exists across the thickness of the concrete wall. This gradient depends on such factors as the thickness and diameter of the firebrick lining, the width of the air space and of the concrete wall, the coefficients of heat conductivity and transmissibility of the chimney materials, the maximum temperature and velocity of the flue gas and the surrounding air temperature. The actual inner and outer wall surface temperatures can be calculated from the equations derived in the ACI chimney code [1].

Only a few measurements of temperature variation across the wall thickness of chimneys in operation have been published. The text book on chimney design by TAYLOR and TURNER [6] reports observation of differential temperatures for five chimneys lined with firebrick and one unlined wall and in all cases the maximum concrete temperature recorded reached only 130° C. In one chimney subjected to a 530° C flue gas temperature, an 18″ firebrick lining restricted the concrete shell inner face temperature to only 70° C. These observations indicate that the concrete shell temperatures can be greatly decreased by use of linings and a ventilated air gap.

Temperature gradients across concrete shell sections of chimneys develope maximum longitudinal compressive stresses on the hot inner face and maximum longitudinal tensile stresses on the cold outer face. Using the theory given in the ACI specification [1], it can be shown that a differential temperature of 200° C across a centrally reinforced concrete wall with a steel proportion of 0.01 and a modular ratio of 12, develops maximum compressive and tensile strains on the extreme inner and outer fibres of 0.00032 and 0.00098 respectively. Assuming the simple elastic theory applies and the cross-section remains uncracked, then this compressive strain produces a compressive stress of 800 psi. Thermal stresses are usually a major portion of the total stresses produced by dead, wind and earthquake loadings under working load conditions.

At ultimate load the cross-section is usually badly cracked in flexure. Consequently the theory for computing thermal stresses no longer applies. Concrete failure occurs when the extreme fibre strain e_{cu} reaches some upper limiting value and in this paper is assumed to be 0.0035 at ambient temperature. This value increases with temperature and as indicated later has been assumed to be about 0.007 at a temperature of 600° C. As the compressive strains at ultimate loads are from about 10 to 20 times those occurring due to temperature at working loads then thermal stresses at ultimate loads will be ignored. It is however important to know the effect of elevated temperatures on the ultimate strength characteristics of the materials used in chimneys. The maximum value of the wall mean temperature has been adopted as the appropriate temperature at which to evaluate the material properties at the collapse load.

2.3. Effect of Temperature on Concrete Properties

The effect of temperature on the properties of concrete depends on the type of cement, type of aggregate, mix properties, the number of thermal cycles, the time exposed to elevated temperatures, whether the concrete is tested hot or in the cooled state, the rate of cooling or quenching in water, etc. To simplify the present discussion only Portland cement concretes will be considered. Most investigators have examined the effect of temperature on the compressive strength and modulus of elasticity of concrete but few have shown the effect on the complete stress-strain characteristics. Generally experimenters have used the ratio of the values of the material properties at elevated temperatures to their related values at ambient temperatures. The values of ambient temperatures have varied slightly at different laboratories and 20° C has been adopted as a reasonable measure of this quantity to simplify comparison of published test results.

SAEMANN and WASHA [3] measured compressive strength and modulus of elasticity and other physical characteristics of cement mortars and concretes using gravel and lightweight expanded shale aggregates when subjected to temperatures up to 230° C. The ratio k_1 for both gravel and lightweight aggregate concrete decreased about 10% at 100° C and increased about 10% at 200° C consequently this relation was approximated by a straightline of constant value $k_1 = 1.0$. The secant modulus of elasticity at 1/3 ultimate stress was reported as the modulus of elasticity in this reference. The ratio of moduli of elasticities at elevated and ambient temperatures, denoted by k_1/k_2 was for both concretes approximated by a straight line decreasing from $k_1 = 1.0$ at 20° C to $k_1 = 0.6$ at 230° C.

In 1960 ZOLDNERS [5] published test results of seven physical properties of Portland cement concretes made from gravel, sandstone, limestone and lightweight expanded slag aggregates when subjected to temperatures up to 800° C. The specimens were heated to their required temperatures and either slowly cooled or quenched in water, then dried before being finally tested at ambient temperature. When the four different aggregate concretes were slowly cooled and tested at room temperature, the strength ratio k_1 could be approximated by two straight lines, one having a constant value of $k_1 = 1.0$ up to 200° C and the other then linearly decreasing to 0.5 k_1 at 600° C. The ratio k_1 for the four types of aggregate concrete subjected to water quenching could be approximated by one straight line for k_1 decreasing from 1.0 at 20° C to 0.5 at 600° C. In both tests the limestone concrete was less affected by temperature than the gravel concrete. The moduli of elasticities were determined using the ultrasonic pulse velocity method. The ratio of the modulus of elasticity at elevated to that at ambient temperature k_1/k_2 for the slowly cooled specimens could be approximated by two straight lines, one remaining constant at $k_1/k_2 = 1.0$ up to 200° C and the other then decreasing linearly to 0.2 k_1/k_2

at 600° C. The concrete properties in a chimney heated by flue gases on the inside and subjected to downpours of rain on the outside would probably be somewhere between these two sets of experimental values. The lower conservative relation for k_1 will be considered in the present comparison.

The experimental work by HARMATHY and BERNDT [8] on hydrated Portland cement specimens and on expanded shale lightweight aggregate concrete specimens was the only reference located relating to the effect of temperature on the complete stress-strain curve of concrete or concrete materials. The effect of temperature up to 800° C on the ultimate strength f'_c, modulus of elasticity E_c and the strain at failure of cylinders tested in their heated state was examined. As the load-deformation curve was obtained from the recorder of the test machine, the deformation or movement between the test machine plattens would include slackness in the test arrangement so the strain measurement would be slightly inaccurate. The tangent to the force-deformation curve at about one half of the ultimate force was used to calculate the modulus of elasticity. The values of both f'_c and E_c remained constant up to 200° C and then decreased linearly with temperature to about 70% and 50% of their respective values at 600° C. The test machine recorder obtained readings of the falling portion of the stress-strain curve slightly beyond the ultimate stress f'_c and its related strain value e'_c. However the reported maximum observed strains have been assumed equivalent to e'_c in this paper.

The contribution by CAMPBELL-ALLEN and DESAI [9] in 1967 shows a marked decrease in both compressive strength f'_c and modulus of elasticity of concrete when subjected to thermal cycles with the maximum temperature as low as 65° C. Expanded shale, fireclay brick and limestone aggregates were mixed with ordinary Portland cement using a water cement ratio of 0.4. After 20 cycles at 65° C both f'_c and E_c decreased to about 70% of their values at 20° C. After 20 cycles at 300° C, f'_c and E_c decreased to about 50% and 25% of their respective values at 20° C. This data included on Fig. 2 showed that the greatest reduction in the values of both f'_c and E_c was caused by the application of thermal cycles.

HANNANT [11] in 1967 examined the effect of continuous exposure of concrete to temperatures of about 93° C for periods of up to 18 months. Both gravel and limestone aggregates mixed with ordinary Portland cement at a water cement ratio of about 0.46 were examined. The limestone concrete strength decreased rapidly for the first three days and was 38% below its unheated control cylinder strength after being held at the steady temperature of 93° C for $1^1/_2$ years.

The eight authors mentioned above investigated the temperature variables most likely to deteriorate the structural properties of ordinary Portland cement concretes. In all cases their lowest observed relationships have been simplified by straight dashed line approximations in the preparation of Fig. 2. Again simple linear approximations for the lower boundaries of the stress

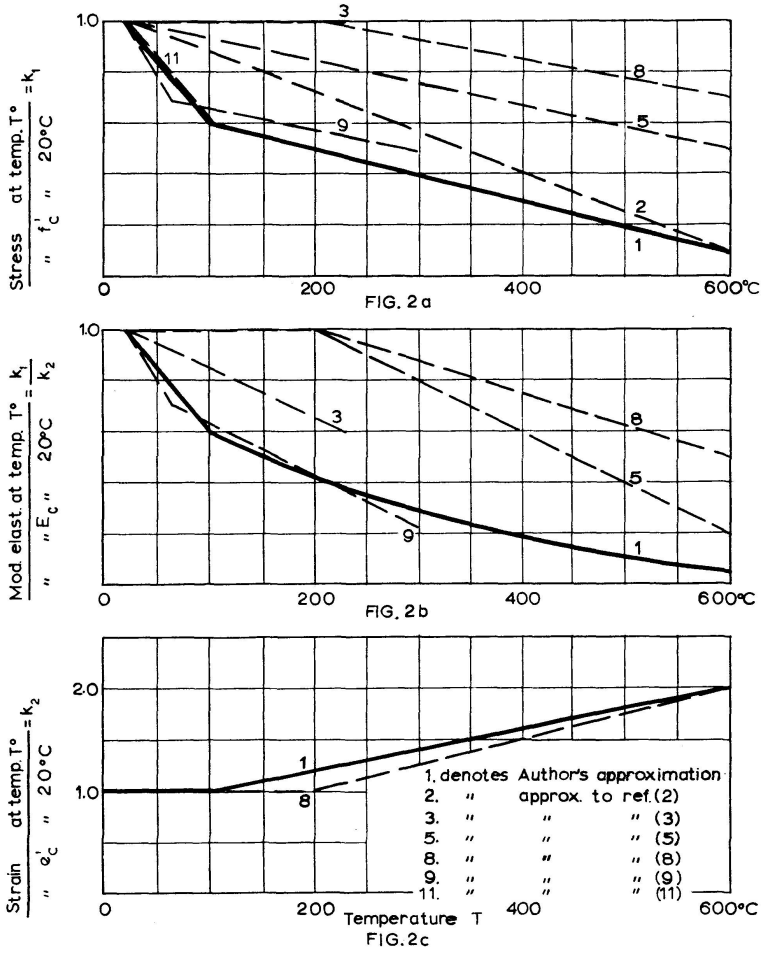


Fig. 2. Effect of temperature on concrete stress-strain properties.

parameter k_1 and the strain parameter k_2 were adopted as shown by the firm lines on Figs. 2a and 2c. The modulus of elasticity parameter k_1/k_2 was then computed and plotted as the firm line on Fig. 2b. It can be seen from Figs. 2a, 2b and 2c that the author's simplified approximations are a reasonable lower bound fit to the observed test results.

It should be noted that most of the previous authors have suggested particular cements, aggregates, water cement and aggregate cement ratios, etc., to produce better temperature resistant concretes. However it was thought prudent to adopt the lowest bound to all the observed results to obtain the most conservative estimates of the parameters k_1, k_2 and k_1/k_2 for use with the proposed theory.

No reference could be found where experimental results relate e_{cu} and temperature consequently k_3 is indefinite. It is probable that the experimental difficulties involved in measuring e_{cu} at an extreme fibre in an eccentric loading test on a column, or in a flexure test of a beam at elevated temperatures have not as yet been overcome. Until such experimental evidence becomes available the relationship between the ultimate strain e_{cu} and temperature T measured

by the parameter k_3 has been assumed similar to that between the strain e'_c and T measured by the parameter k_2 i.e., $k_3 = k_2$.

It will be seen from the author's approximations in Fig. 2a that the relation between k_1 and T can be reasonably represented by two straightllines expressed by the equations,

$$\begin{aligned} &20^\circ\,\mathrm{C} \leqq T \leqq 100^\circ\,\mathrm{C}, && k_1 = -0.005\,T + 1.1, \\ &100^\circ\,\mathrm{C} \leqq T \leqq 600^\circ\,\mathrm{C}, && k_1 = -0.001\,T + 0.7. \end{aligned} \tag{1}$$

Again from the author's approximation in Fig. 2c using two straight lines, the relation between k_2 and temperature can be expressed by the equations,

$$\begin{aligned} &20^\circ\,\mathrm{C} \leqq T \leqq 100^\circ\,\mathrm{C}, && k_2 = 1.0, \\ &100^\circ\,\mathrm{C} \leqq T \leqq 600^\circ\,\mathrm{C}, && k_2 = 0.002\,T + 0.8. \end{aligned} \tag{2}$$

Using the above two approximations, the modulus of elasticity ratio k_1/k_2 at ultimate load can be calculated from Eqs. (1) and (2) and expressed by the equations,

$$\begin{aligned} &20^\circ\,\mathrm{C} \leqq T \leqq 100^\circ\,\mathrm{C}, && \frac{k_1}{k_2} = -0.005\,T + 1.1, \\ &100^\circ\,\mathrm{C} \leqq T \leqq 600^\circ\,\mathrm{C}, && \frac{k_1}{k_2} = -0.5 + \frac{1100}{2\,T + 800}. \end{aligned} \tag{3}$$

Eqs. (3) were used to compute the modulus of elasticity ratio values at particular temperatures to enable plotting the author's adopted lower bound curve shown by the firm line on Fig. 2b. It should be noted that Eqs. (3) are only included for completeness and are not used for calculation purposes in this paper.

2.4. Effect of Temperature on Steel Properties

The temperature of chimney reinforcement depends on the wall temperature gradient and on the steel position within the wall. Usually layers of steel are placed adjacent the inner and outer wall surfaces, hence the mean wall temperature is considered a reasonable measure of mean steel temperature. The maximum value of the mean wall temperature used to evaluate the concrete properties is also used to determine the steel properties at the chimney ultimate strength. The present method of design of reinforced concrete chimneys suggested by the ACI standard code 505-54 [1] is based on permissible stresses of the materials. This code suggests that the reinforcing steel used in chimneys should conform to ASTM specification for deformed bars of intermediate and hard grade steels with yield stresses of 40, and 50 ksi respectively. Consequently only hot rolled steel having a yield stress within this range will be considered to simplify the presentation in this paper.

A paper by COPELAND and WOODMAN [10] shows the experimental relation between steel yield stress f_{sy} and modulus of elasticity E_s with temperature

T up to 600° C for both hot rolled bars having yield stresses varying from 42 to 53 ksi and for cold worked steels with yield stresses from 63 to 78 ksi. The experimental curves relating f_{sy} and E_s to T for both hot rolled and cold worked steels can be approximated by two straight lines, one up to 200° C and the other within the temperature range 200° C to 600° C.

The suggested relation between k_4 and temperature T for hot rolled steel shown by the two straight lines in Fig. 3a can be found from the equations;

$$\begin{aligned} &20^\circ\,\mathrm{C} \leqq T \leqq 200^\circ\,\mathrm{C}, && k_4 = -0.00055\,T + 1.011, \\ &200^\circ\,\mathrm{C} \leqq T \leqq 600^\circ\,\mathrm{C}, && k_4 = -0.00175\,T + 1.25. \end{aligned} \tag{4}$$

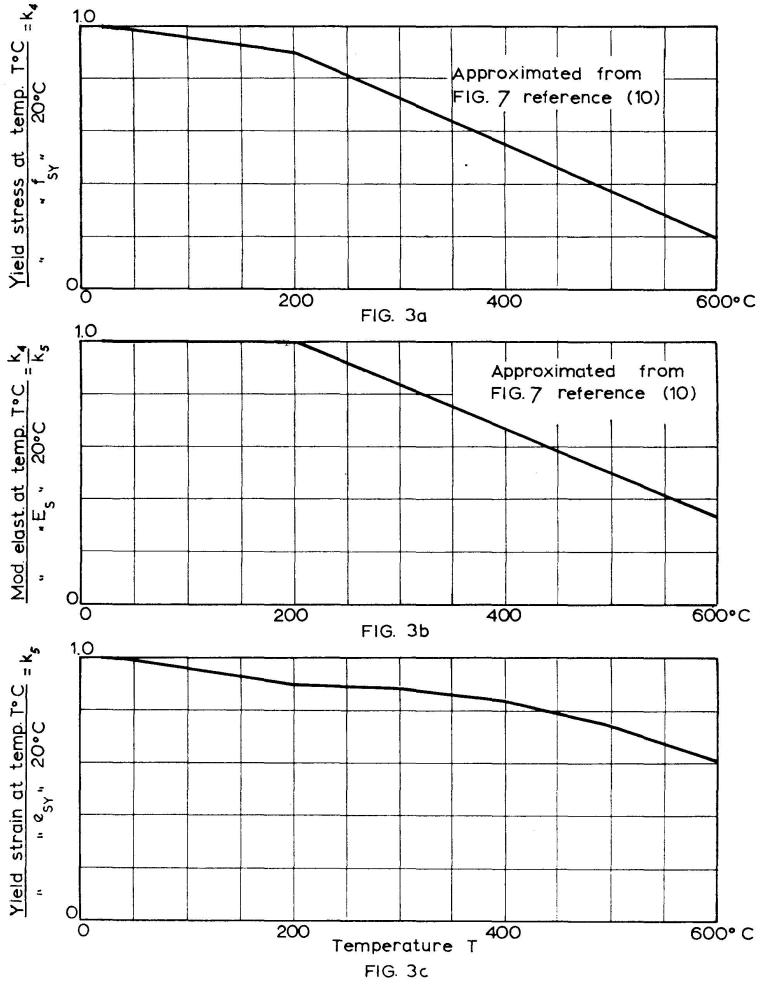


Fig. 3. Effect of temperature on steel stress-strain properties.

The relation between the ratio k_4/k_5 and temperature T can also be approximated by two straight lines as shown in Fig. 3b from which Eqs. (5) can be found.

$$\begin{aligned} &20^\circ\,\mathrm{C} \leqq T \leqq 200^\circ\,\mathrm{C}, && \frac{k_4}{k_5} = 1.0, \\ &200^\circ\,\mathrm{C} \leqq T \leqq 600^\circ\,\mathrm{C}, && \frac{k_4}{k_5} = -0.00167\,T + 1.333. \end{aligned} \tag{5}$$

From the above two sets of relations the ratio k_5 can be evaluated from Eqs. (6),

$$\begin{aligned} &20^\circ\,\mathrm{C} \leqq T \leqq 200^\circ\,\mathrm{C}, && k_5 = -0.00055\,T + 1.011, \\ &200^\circ\,\mathrm{C} \leqq T \leqq 600^\circ\,\mathrm{C}, && k_5 = 1.05 + \frac{150}{1.67\,T - 1.333}. \end{aligned} \tag{6}$$

Once the wall mean temperature is known then the parameters k_1, k_2, k_4 and k_5 can be evaluated from Eqs. (1), (2), (4) and (6).

3. Ultimate Strength Equations

The proposed ultimate strength analysis considers circular reinforced concrete sections with and without large flue openings. Wind acting from a direction opposite to the flue hole causes the greatest distress in a chimney cross-section. For a particular bending moment, the greatest concrete compressive strain e_1 develops at the flue edge indicated by point 1 in Fig. 4 and the greatest steel tensile strain e_2 occurs at point 2 in Fig. 4b. The neutral

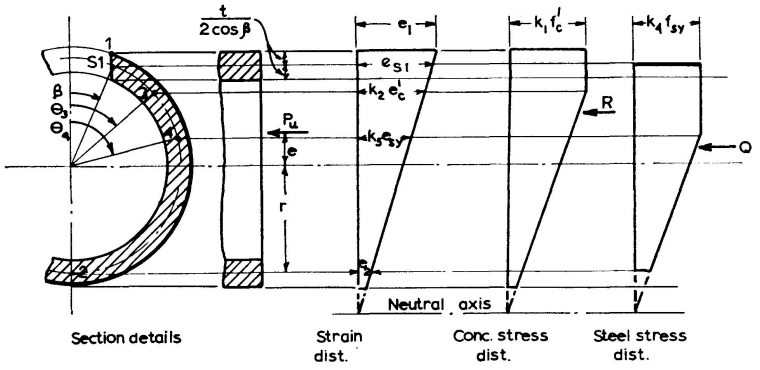


FIG. 4a COMPRESSION STRESS OVER WHOLE SECTION

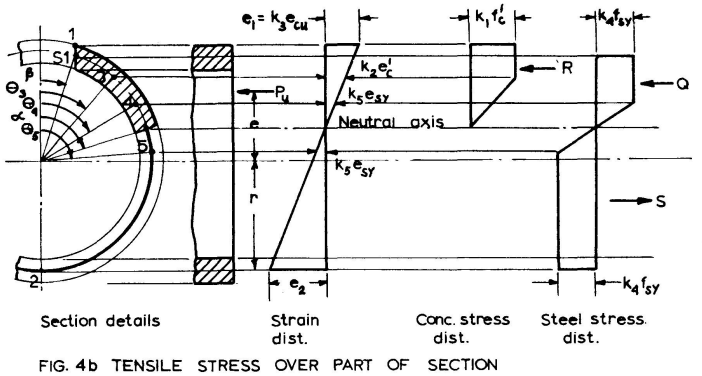


FIG. 4b TENSILE STRESS OVER PART OF SECTION

Fig. 4. Stress and strain distributions at ultimate load.

axis position is located on the chimney side away from the flue hole and its position is fixed by the e_2/e_1 ratio. The direction of the neutral axis is perpendicular to the line joining the centre of the flue hole with the centre of the circle forming the chimney section. Failure therefore occurs due to direct compression associated with uniaxial bending about this neutral axis position.

The centre of the circle forming the shape of the walls is taken as the point from which the load eccentricity is measured even though a large flue opening causes considerable shift of the true centre of gravity at this cross-section from the chimney centre line. The wall thickness has been assumed small when compared with the radius r of the section to ensure that as the section neutral axis approaches the extreme compression fibre, the integral $\int_{\beta}^{\alpha} r\,t\,d\theta$ gives a reasonable estimation of the total compression region. To assist the analysis, the individual reinforcing bars have been assumed to be replaced by a thin continuous steel shell of the same total steel area A_s and placed at the mid-wall position of the cross-section. The usual simplifying assumptions applicable to reinforced concrete structures of linear strain distribution, perfect bond between concrete and steel up to failure and the inability of concrete to sustain tensile stress have been adopted.

As described earlier the stress-strain curves for the concrete and steel are approximated by the idealised elasto-plastic curves shown by the firm lines in Fig. 1. The mean temperature T of the wall is assumed to affect the ultimate strength properties of the concrete and steel as given by the curves shown as firm lines on Figs. 2 and 3. As the analysis relates to the ultimate strength of thin wall cross-sections the effects of concrete shrinkage, creep and differential temperature stresses have been neglected.

3.1. Strain Distribution at Failure

Failure of a section is assumed to be imminent when the concrete extreme fibre strain e_1 attains some upper limiting value. When a concrete section is axially loaded such that the strain distribution is uniform all over a section then failure occurs when $e_1 = k_2 e'_c$. In the case where tensile stress exists over portion of a section i. e., when the neutral axis lies within the section as shown in Fig. 4b then failure occurs when $e_1 = k_3 e_{cu}$. For any other position of the neutral axis outside a section as shown in Fig. 4a, the extreme fibre strain e_1 attains a maximum value somewhere between these two limits. By adopting the simple relation between e_1 and the ratio e_2/e_1 as shown by two straight lines on Fig. 5, the upper limiting value of e_1 can be evaluated from either Eq. (7a) or (7b).

$$\text{For } \frac{e_2}{e_1} < 0, \qquad e_1 = k_3 e_{cu} \tag{7a}$$

$$\text{and } 0 < \frac{e_2}{e_1} < 1.0, \qquad e_1 = k_3 e_{cu} - (k_3 e_{cu} - k_2 e'_c)\frac{e_2}{e_1}. \tag{7b}$$

3.11. Tension on Part of Cross-Section

The neutral axis position is located by the ratio e_2/e_1. Assuming tensile strains are positive and compressive strains are negative then the ratio e_2/e_1

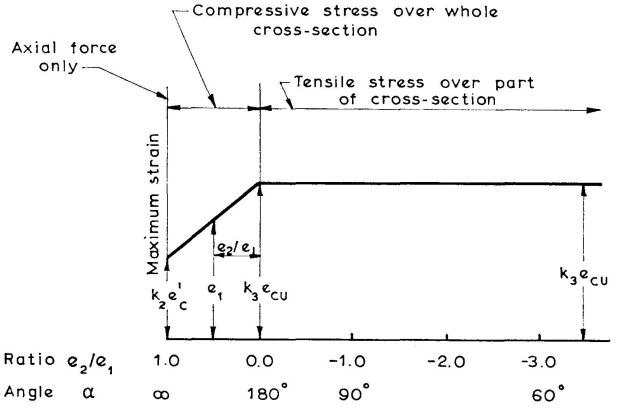


Fig. 5. Limiting values of maximum compressive strain at ultimate load.

is negative when the neutral axis is within a section. The neutral axis position can also be defined by the angle α as shown on Fig. 4b, and obtained from Eq. (8). To obviate the necessity of introducing negative signs for the e_2/e_1 ratio, its absolute value $|e_2/e_1|$ will be used when tension exists over part of the cross-section.

$$\text{For } \frac{e_2}{e_1} \leqq 0, \qquad \cos\alpha = \frac{\left|\frac{e_2}{e_1}\right|\left(\cos\beta + \frac{t}{2r\cos\beta}\right) + 1}{\left|\frac{e_2}{e_1}\right| - 1}. \tag{8}$$

Similarly the values of the steel extreme lower and upper fibre strains e_2 and e_{s1} respectively can be determined from Eqs. (9) and (10),

$$e_2 = \frac{k_3 e_{cu}(1+\cos\alpha)}{\cos\beta - \cos\alpha + \frac{t}{2r\cos\beta}}, \tag{9}$$

$$e_{s1} = \frac{k_3 e_{cu}\cos\beta}{\cos\beta - \cos\alpha + \frac{t}{2r\cos\beta}}. \tag{10}$$

The positions on the mean circumference where the compression strains attain the particular values $k_2 e'_c$ and $k_5 e_{sy}$ fixed by the angles θ_3 and θ_4 respectively are shown on Fig. 4b. These angles can be found from Eqs. (11) and (12).

$$\cos\theta_3 = \frac{k_2 e'_c}{k_3 e_{cu}}\left(\cos\beta - \cos\alpha + \frac{t}{2r\cos\beta}\right) + \cos\alpha, \tag{11}$$

$$\cos\theta_4 = \frac{k_5 e_{sy}}{k_3 e_{cu}}\left(\cos\beta - \cos\alpha + \frac{t}{2r\cos\beta}\right) + \cos\alpha. \tag{12}$$

The point on the mean circumference where the steel tensile strain equals $k_5 e_{sy}$ is defined by the angle θ_5. From the strain distribution on Fig. 4b Eq. (13) can be found,

$$\cos\theta_5 = \cos\alpha - \frac{k_5 e_{sy}}{k_3 e_{cu}}\left(\cos\beta - \cos\alpha + \frac{t}{2r\cos\beta}\right). \tag{13}$$

The angles θ_3, θ_4 and θ_5 shown on Fig. 4b vary with the relative magnitudes of $k_2 e'_c$, $k_5 e_{sy}$, e_1, e_2 and e_{s1}.

If $e_1 \leqq k_2 e'_c$ the concrete stress distribution varies linearly and $\cos\theta_3 = \cos\theta + \frac{t}{2r\cos\beta}$. In this paper since $e_1 = k_3 e_{cu} > k_2 e'_c$, linear concrete stress distribution need not be considered.

For $e_1 \geqq k_2 e'_c$ the angle θ_3 is found from Eq. (11).

For $e_{s1} \leqq k_5 e_{sy}$ the steel does not yield in compression and $\theta_4 = \beta$.

For $e_{s1} \geqq k_5 e_{sy}$ the steel yields in compression and the angle θ_4 is found from Eq. (12).

For $e_2 \leqq k_5 e_{sy}$ the steel does not yield in tension and $\theta_5 = \pi$.

For $e_2 \geqq k_5 e_{sy}$ the steel yields in tension and the angle θ_5 is found from Eq. (13).

3.12. Compression Over Whole Cross-Section

When compressive stresses exist over the whole cross-section both extreme fibre strains are negative hence the ratio e_2/e_1 is positive. The upper limiting value of e_1 as shown by the relationship on Fig. 5 can be found from Eq. (7b). This equation can be rewritten as Eq. (14) from which the lower steel fibre strain e_2 can be evaluated. From the geometry of the strain distribution shown in Fig. 4a the strain at the upper steel fibre position e_{s1} and the angles θ_3 and θ_4 can be calculated from Eqs. (15), (16) and (17),

i.e. for $0 \leqq \frac{e_2}{e_1} \leqq 1.0$.

$$e_2 = \frac{k_3 e_{cu} e_1 - e_1^2}{k_3 e_{cu} - k_2 e'_c}, \tag{14}$$

$$e_{s1} = e_1 + \frac{(e_2 - e_1)\frac{t}{2r\cos\beta}}{1 + \cos\theta + \frac{t}{2r\cos\beta}}, \tag{15}$$

$$\cos\theta_3 = \frac{\frac{k_2 e'_c}{e_2} - \frac{e_2}{e_1}}{1 - \frac{e_2}{e_1}}\left(1 + \cos\theta + \frac{t}{2r\cos\beta}\right) - 1, \tag{16}$$

$$\cos\theta_4 = \frac{\frac{k_5 e_{sy}}{e_1} - \frac{e_2}{e_1}}{1 - \frac{e_2}{e_1}}\left(1 + \cos\theta + \frac{t}{2r\cos\beta}\right) - 1. \tag{17}$$

Depending on the relative magnitudes of $k_2 e'_c$, $k_5 e_{sy}$, e_1, e_2 and e_{s1} so the angles θ_3 and θ_4 shown on Fig. 4a vary.

If $e_1 \leqq k_2 e'_c$ the concrete stress distribution varies linearly at failure and $\cos\theta_3 = \cos\beta + \frac{t}{2r\cos\beta}$. In this paper since $e_1 \geqq k_2 e'_c$ linear concrete stress distribution need not be considered.

For $e_2 \geqq k_2 e'_c$ the concrete stress distribution remains uniform at failure and $\theta_3 = \pi$.

For $e_1 \geqq k_2 e'_c \geqq e_2$, θ_3 is found from Eq. (16).

For $e_{s1} \leqq k_5 e_{sy}$, the steel does not yield in compression and $\theta_4 = \beta$.

For $e_2 > k_2 e'_c$, the steel stress remains uniform and $\theta_4 = \pi$.

For $e_{s1} > k_5 e_{sy} > e_2$, θ_4 is found from Eq. (17).

3.2. Equilibrium Conditions

3.21. Tension on Part of Cross-Section

The steel and the concrete stress distributions for the case where the neutral axis is inside the section at failure is shown on Fig. 4b. With the wall thickness t assumed small in comparison with the mean radius r, the concrete stress may be expressed as a function of the variable angle θ.

$$\text{For } \beta < \theta < \theta_3, \qquad f_c = k_1 f'_c.$$

$$\text{For } \theta_3 < \theta < \alpha, \qquad f_c = \frac{k_1 f'_c (\cos\theta - \cos\alpha)}{\cos\theta_3 - \cos\alpha}.$$

A small concrete elemental area in compression subtended by an angle $d\theta$ at the geometric centre is $(1-p) r t d\theta$. The compressive force acting on this concrete element is $dR = f_c (1-p) r t d\theta$.

The total compressive force in the concrete above the neutral axis is then,

$$R = 2\int_{\theta=\beta}^{\theta_3} k_1 f'_c (1-p) r t d\theta + 2\int_{\theta=\theta_3}^{\alpha} \frac{k_1 f'_c (\cos\theta - \cos\alpha)(1-p) r t d\theta}{\cos\theta_3 - \cos\alpha},$$

i.e.
$$R = 2 k_1 f'_c (1-p) r t A_1, \tag{18}$$

where
$$A_1 = \theta_3 - \beta + \frac{\sin\alpha - \sin\theta_3 + (\theta_3 - \alpha)\cos\alpha}{\cos\theta_3 - \cos\alpha}.$$

For thin wall sections e_{s1} approaches e_1 and for this case $e_1 = k_3 e_{cu}$. The ACI chimney code [1] does not permit $k_4 f_{sy} > 60$ ksi. Since in this paper $e_{s1} > k_4 e_{sy}$ a discontinuity will always occur in the idealized steel stress distribution at failure as indicated on Fig. 4b and no other steel compressive stress distribution need be considered.

The compressive steel stresses are,

$$\text{for } \beta \leqq \theta \leqq \theta_4, \qquad f_s = k_4 f_{sy},$$

$$\text{for } \theta_4 \leqq \theta \leqq \alpha, \qquad f_s = \frac{k_4 f_{sy} (\cos\theta - \cos\alpha)}{\cos\theta_4 - \cos\alpha}$$

and the total compressive force in the steel becomes,

$$Q = 2\int_{\theta=\beta}^{\theta_4} k_4 f_{sy}\, p\, r\, t\, d\theta + 2\int_{\theta=\theta_4}^{\alpha} \frac{k_4 f_{sy}(\cos\theta - \cos\alpha)\, p\, r\, t\, d\theta}{\cos\theta_4 - \cos\alpha},$$

i.e.
$$Q = 2 k_4 f_{sy}\, p\, r\, t \left[\theta_4 - \beta + \frac{\sin\alpha - \sin\theta_4 + (\theta_4 - \alpha)\cos\alpha}{\cos\theta_4 - \cos\alpha}\right]. \tag{19}$$

For small eccentricities of loading it is possible for $e_2 \leqq k_5 e_{sy}$ and in this case the steel will not yield in tension.

$$\text{For } \alpha \leqq \theta \leqq \pi, \qquad f_s = \frac{k_4 f_{sy} e_2 (\cos\alpha - \cos\theta)}{k_5 e_{sy}(1 + \cos\alpha)}$$

and the total tensile force in the steel is

$$S = 2\int_{\theta=\alpha}^{\pi} \frac{k_4 f_{sy} e_2\, p\, r\, t\,(\cos\alpha - \cos\theta)\, d\theta}{k_5 e_{sy}(1+\cos\alpha)} = \frac{2 k_4 f_{sy} e_2\, p\, r\, t\,[\sin\alpha + (\pi - \alpha)\cos\alpha]}{k_5 e_{sy}(1+\cos\alpha)}. \tag{20}$$

For larger eccentricities of loading i.e., when $e_2 > k_5 e_{sy}$ a discontinuity will occur in the idealized steel stress distribution at failure as indicated on Fig. 4b.

The tensile steel stress then becomes,

$$\text{for } \alpha \leqq \theta \leqq \theta_5, \qquad f_s = \frac{k_4 f_{sy}(\cos\alpha - \cos\theta)}{\cos\alpha - \cos\theta_5},$$

$$\text{for } \theta_5 \leqq \theta \leqq \pi, \qquad f_s = k_4 f_{sy}$$

and the total tensile force in the steel is,

$$S = 2\int_{\theta=\alpha}^{\theta_5} \frac{k_4 f_{sy}\, p\, r\, t\,(\cos\alpha - \cos\theta)}{\cos\alpha - \cos\theta_5} d\theta + 2\int_{\theta=\theta_5}^{\pi} k_4 f_{sy}\, p\, r\, t\, d\theta,$$

i.e.
$$S = 2 k_4 f_{sy}\, p\, r\, t \left[\pi - \theta_5 + \frac{\sin\alpha - \sin\theta_5 + (\theta_5 - \alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha - \cos\theta_5}\right]. \tag{20a}$$

Equilibrium of forces requires that,

$$P_u = R + Q - S.$$

This equation can be expressed in non-dimensionalised form as,

$$\frac{P_u}{2 k_1 f'_c (1-p) r t} = A_1 + q B_1, \tag{21}$$

where
$$q = \frac{k_4 f_{sy} p}{k_1 f'_c (1-p)},$$

where for $e_2 \leqq k_5 e_{sy}$,

$$B_1 = \theta_4 - \beta + \frac{\sin\alpha - \sin\theta_4 + (\theta_4 - \alpha)\cos\alpha}{\cos\theta_4 - \cos\alpha} + \frac{\left|\frac{e_2}{e_1}\right| [\sin\alpha + (\pi - \alpha)\cos\alpha]}{\frac{k_5 e_{sy}}{e_1}(1 + \cos\alpha)},$$

for $e_2 \geqq k_5 e_{sy}$,

$$B_1 = \theta_4 + \theta_5 - \beta - \pi + \frac{\sin\alpha - \sin\theta_4 + (\theta_4 - \alpha)\cos\alpha}{\cos\theta_4 - \cos\alpha} - \frac{\sin\alpha - \sin\theta_5 + (\theta_5 - \alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha - \cos\theta_5}.$$

A second equilibrium equation is obtained by considering the moments of forces about the neutral axis of the section. This yields the following equation,

$$P_u(e - r\cos\alpha) = R' + Q' + S',$$

where R', Q' and S' are respectively, the moments of the forces R, Q, and S about this axis. The moment of the force applied to a small concrete elemental area $(1-p)\,r\,t\,d\theta$ acting at a distance $r\,(\cos\theta - \cos\alpha)$ from the neutral axis is,

$$dR' = f_c(1-p)\,r^2\,t\,(\cos\theta - \cos\alpha)\,d\theta$$

and

$$R' = 2\int_{\theta=\beta}^{\theta_3} k_1 f_c'(1-p)\,r^2\,t\,(\cos\theta - \cos\alpha)\,d\theta + 2\int_{\theta=\theta_3}^{\alpha} \frac{k_1 f_c'(1-p)\,r^2\,t\,(\cos\theta - \cos\alpha)^2\,d\theta}{\cos\theta_3 - \cos\alpha},$$

i.e.
$$R' = 2\,k_1 f_c'(1-p)\,r^2\,t\,C_1, \tag{22}$$

where $C_1 = \sin\theta_3 - \sin\beta + (\beta - \theta_3)\cos\alpha$

$$+ \frac{(\alpha - \theta_3)(0.5 + \cos^2\alpha) - 1.5\sin\alpha\cos\alpha - 0.5\sin\theta_3\cos\theta_3 + 2\cos\alpha\sin\theta_3}{\cos\theta_3 - \cos\alpha}.$$

The moment Q' is obtained from the integral,

$$Q' = 2\int_{\theta=\beta}^{\theta_4} k_4 f_{sy}\,p\,r^2\,t\,(\cos\theta - \cos\alpha)\,d\theta + 2\int_{\theta=\theta_4}^{\alpha} \frac{k_4 f_{sy}\,p\,r^2\,t\,(\cos\theta - \cos\alpha)^2\,d\theta}{\cos\theta_4 - \cos\alpha},$$

i.e. $Q' = 2\,k_4 f_{sy}\,p\,r^2\,t\left[\sin\theta_4 - \sin\beta + (\beta - \theta_4)\cos\alpha\right.$

$$\left. + \frac{(\alpha - \theta_4)(0.5 + \cos^2\alpha) - 1.5\sin\alpha\cos\alpha - 0.5\sin\theta_4\cos\theta_4 + 2\cos\alpha\sin\theta_4}{\cos\theta_4 - \cos\alpha}\right]. \tag{23}$$

For small eccentricities i.e. when $e_2 \leqq k_5 e_{sy}$ the steel will not yield in tension. For $\alpha \leqq \theta \leqq \pi$ the total moment S' of the steel tensile force about the neutral axis becomes,

$$S' = 2\int_{\theta=\alpha}^{\pi} \frac{k_4 f_{sy} e_2\,p\,r^2\,t\,(\cos\alpha - \cos\theta)^2\,d\theta}{k_5 e_{sy}(1 + \cos\alpha)} =$$

$$\frac{2\,k_4 f_{sy} e_2\,p\,r^2\,t\,[(\pi - \alpha)(0.5 + \cos^2\alpha) + 1.5\sin\alpha\cos\alpha]}{k_5 e_{sy}(1 + \cos\alpha)}. \tag{24}$$

For $e_2 \geqq k_5 e_{sy}$ the moment S' is likewise given by the integral,

$$S' = 2\int_{\theta=\alpha}^{\theta_5} \frac{k_4 f_{sy}\,p\,r^2\,t\,(\cos\alpha - \cos\theta)^2\,d\theta}{\cos\alpha - \cos\theta_5} + 2\int_{\theta=\theta_5}^{\pi} k_4 f_{sy}\,p\,r^2\,t\,(\cos\alpha - \cos\theta)\,d\theta,$$

$$\text{i.e.}\quad S' = 2\,k_4 f_{sy}\,p\,r^2 t\left[\sin\theta_5 + (\pi-\theta_5)\cos\alpha + \frac{(\theta_5-\alpha)(0.5+\cos^2\alpha)+1.5\sin\alpha\cos\alpha+0.5\sin\theta_5\cos\theta_5-2\cos\alpha\sin\theta_5}{\cos\alpha-\cos\theta_5}\right]. \tag{24a}$$

The moment equilibrium equation can be expressed in non-dimensional form as,

$$\frac{P_u(e-r\cos\alpha)}{2\,k_1 f_c'(1-p)\,r^2 t} = C_1 + q\,D_1, \tag{25}$$

where for $e_2 \leqq k_5 e_{sy}$

$$D_1 = \sin\theta_4 - \sin\beta + (\beta-\theta_4)\cos\alpha + \frac{(\alpha-\theta_4)(0.5+\cos^2\alpha)-1.5\sin\alpha\cos\alpha-0.5\sin\theta_4\cos\theta_4+2\cos\alpha\sin\theta_4}{\cos\theta_4-\cos\alpha} + \frac{\left|\frac{e_2}{e_1}\right|[(\pi-\alpha)(0.5+\cos^2\alpha)+1.5\sin\alpha\cos\alpha]}{\frac{k_5 e_{sy}}{e_1}(1+\cos\alpha)}$$

and for $e_2 \geqq k_5 e_{sy}$

$$D_1 = \sin\theta_4 + \sin\theta_5 - \sin\beta + (\beta-\theta_4)\cos\alpha + (\pi-\theta_5)\cos\alpha + \frac{(\alpha-\theta_4)(0.5+\cos^2\alpha)-1.5\sin\alpha\cos\alpha-0.5\sin\theta_4\cos\theta_4+2\cos\alpha\sin\theta_4}{\cos\theta_4-\cos\alpha} + \frac{(\theta_5-\alpha)(0.5+\cos^2\alpha)+1.5\sin\alpha\cos\alpha+0.5\sin\theta_5\cos\theta_5-2\cos\alpha\sin\theta_5}{\cos\alpha-\cos\theta_5}.$$

It should be noted that the terms A_1, B_1, C_1 and D_1 are all non-dimensional as they are derived from trigonometric functions of the angles α, β, θ_3, θ_4, θ_5 and π and the strain ratios $\frac{e_2/e_1}{k_2 e_c'/e_1}$ and $\frac{e_2/e_1}{k_5 e_{sy}/e_1}$.

From Eqs. (21) and (25) the eccentricity ratio e/r becomes,

$$\frac{e}{r} = \cos\alpha + \frac{C_1 + q\,D_1}{A_1 + q\,B_1}. \tag{26}$$

The concrete area A_c and the steel area A_s of a chimney with a flue hole in the wall are respectively, $A_c = 2(1-p)\,r\,t(\pi-\beta)$ and $A_s = 2\,p\,r\,t(\pi-\beta)$.

In this paper the steel area is assumed uniformly distributed around the mid-wall position consequently the geometric and plastic centroids of both areas are located at the same position. A load placed at this position causes uniform stress and strain across a section and is defined as the axial load P_0, where $P_0 = 2\,k_1 f_c'(1-p)\,r\,t(\pi-\beta) + 2\,f_s\,p\,r\,t(\pi-\beta)$. When $k_2 e_c' < k_5 e_{sy}$ the steel does not yield before the concrete fails and,

$$f_s = \frac{k_4 f_{sy}\frac{k_2 e_c'}{e_1}}{\frac{k_5 e_{sy}}{e_1}},$$

i.e. $$P_0 = 2k_1 f'_c (1-p) r t (\pi-\beta)\left(1+\frac{\frac{k_2 e'_c}{e_1}}{\frac{k_5 e_{sy}}{e_1}} q\right). \tag{27}$$

From Eqs. (21) and (27) the chimney ultimate strength ratio P_u/P_0 becomes,

$$\frac{P_u}{P_0} = \frac{A_1 + q B_1}{(\pi-\beta)\left(1+\frac{k_2 e'_c/e_1}{k_5 e_{sy}/e_1} q\right)}. \tag{28}$$

When $k_2 e'_c \geqq k_5 e_{sy}$ the steel yields before concrete failure and $f_s = f_{sy}$

i.e. $$P_0 = 2k_1 f'_c (1-p) r t (\pi-\beta)(1+q) \tag{27a}$$

and $$\frac{P_u}{P_0} = \frac{A_1 + q B_1}{(\pi-\beta)(1+q)}. \tag{28a}$$

3.22. Compression Over Whole of Cross-Section

The stress distribution for the case where the neutral axis is outside the section at failure is shown in Fig. 4a. When t is small compared with r the concrete stress expressed as a function of θ becomes,

for $\beta \leqq \theta \leqq \theta_3$, $\quad f_c = k_1 f'_c$,

for $\theta_3 \leqq \theta \leqq \pi$, $\quad f_c = \frac{k_1 f'_c}{1+\cos\theta_3}\left[1+\cos\theta+\frac{e_2}{k_2 e'_c}(\cos\theta_3-\cos\theta)\right]$,

A small concrete radial elemental area subtended by an angle $d\theta$ at the geometric centre is $(1-p) r t d\theta$. The compressive force acting on this concrete element is $dR = f_c (1-p) r t d\theta$.

The total compressive force in the concrete is,

$$R = 2\int_{\theta=\beta}^{\theta_3} k_1 f'_c (1-p) r t d\theta + 2\int_{\theta=\theta_3}^{\pi} \frac{k_1 f'_c (1-p) r t}{1+\cos\theta_3}\left[1+\cos\theta+\frac{e_2}{k_2 e'_c}(\cos\theta_3-\cos\theta)\right] d\theta,$$

i.e. $$R = 2k_1 f'_c (1-p) r t A_2, \tag{29}$$

where $$A_2 = \theta_3 - \beta + \frac{\pi-\theta_3-\sin\theta_3+\frac{e_2/e_1}{k_2 e'_c/e_1}[(\pi-\theta_3)\cos\theta_3+\sin\theta_3]}{1+\cos\theta_3}.$$

For $e_2 > k_2 e'_c$, $\theta_3 = \pi$ and R can again be found from Eq. (29). The steel stresses may also be expressed as a function of the variable angle θ.

For $\beta \leqq \theta \leqq \theta_4$, $\quad f_s = k_4 f_{sy}$.

For $\theta_4 \leqq \theta \leqq \pi$, $\quad f_s = \frac{k_4 f_{sy}}{1+\cos\theta_4}\left[1+\cos\theta+\frac{e_2}{k_5 e_{sy}}(\cos\theta_4-\cos\theta)\right]$

and the total compressive force in the steel becomes,

$$Q = 2 f_{sy} p r t B_2, \tag{30}$$

where $$B_2 = \theta_4 - \beta + \frac{\pi - \theta_4 - \sin\theta_4 + \frac{e_2/e_1}{k_5\, e_{sy}/e_1}[(\pi-\theta_4)\cos\theta_4 + \sin\theta_4]}{1+\cos\theta_4}.$$

For $e_{s1} < k_5 e_{sy}$, $\theta_4 = \beta$ and for $e_2 > k_2 e_c'$, $\theta_4 = \pi$. Eq. (30) can again be used to evaluated Q for these two cases provided the steel yields. Otherwise Eq. (30) is multiplied by e_{s1}/e_{sy} to convert f_{sy} to the steel stress at point $s1$ shown on Fig. 4.

Equilibrium of forces requires that,

$$P_u = R + Q.$$

This equation can be expressed in non-dimensional form as,

$$\frac{P_u}{2 k_1 f_c' (1-p) r t} = A_2 + q B_2. \tag{31}$$

A second equilibrium equation is obtained by equating moments of internal and external forces. It is convenient to take moments about an axis passing through the lower steel fibre where the strain is e_2.

The following equation is then obtained,

$$P_u (e + r) = R' + Q',$$

where the moments of R and Q about this axis are denoted by R' and Q' respectively. The moment of the force applied to a small concrete elemental area $(1-p) r t d\theta$ acting at a distance $r(1+\cos\theta)$ from the lower fibre is,

$$dR' = f_c (1-p) r^2 t (1+\cos\theta) d\theta$$

and $$R' = 2\int_{\theta=\beta}^{\theta_3} k_1 f_c' (1-p) r^2 t (1+\cos\theta) d\theta$$

$$+ 2\int_{\theta=\theta_3}^{\pi} \frac{k_1 f_c' (1-p) r^2 t}{1+\cos\theta_3}\left[1 + \cos\theta + \frac{e_2}{k_2 e_c'}(\cos\theta_3 - \cos\theta)\right](1+\cos\theta)\, d\theta,$$

i.e. $$R' = 2 k_1 f_c' (1-p) r^2 t C_2, \tag{32}$$

where $$C_2 = \theta_3 - \beta + \sin\theta_3 - \sin\beta + \left[\frac{1.5(\pi-\theta_3) - 0.5\sin\theta_3\cos\theta_3 - 2\sin\theta_3}{1+\cos\theta_3}\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{e_2/e_1}{k_2\, e_c'/e_1}[(\pi-\theta_3)(\cos\theta_3 - 0.5) + \sin\theta_3 - 0.5\sin\theta_3\cos\theta_3]}{1+\cos\theta_3}\right].$$

For $e_2 \geqq k_2 e_c'$, $\theta_3 = \pi$ and R' can again be found from Eq. (32). In a similar manner, the moment of the steel force about the lower extreme fibre may be expressed as,

$$Q' = 2\,k_4 f_{sy}\,p\,r^2\,t\,D_2, \tag{33}$$

where $$D_2 = \theta_4 - \beta + \sin\theta_4 - \sin\beta + \left[\frac{1.5\,(\pi-\theta_4) - 0.5\cos\theta_4\sin\theta_4 - 2\sin\theta_4}{1+\cos\theta_4} + \frac{\frac{e_2/e_1}{k_4\,e_{sy}/e_1}\left[(\pi-\theta_4)(\cos\theta_4 - 0.5) - 0.5\sin\theta_4\cos\theta_4 + \sin\theta_4\right]}{1+\cos\theta_4}\right].$$

For $e_{s1} \leqq k_5\,e_{sy}$, $\theta_4 = \beta$ and for $e_2 = k_2\,e_c'$, $\theta_4 = \pi$.

Eq. (33) can again be used to evaluate Q' for these two cases, provided the steel yields otherwise Eq. (30) is multiplied by e_{s1}/e_{sy} to convert f_{sy} to the steel stress at point $s1$ shown on Fig. 4. Again it should be noted that the terms A_2, B_2, C_2 and D_2 are all non-dimensional as they are derived from trigonometric functions of the angles β, θ_3, θ_4 and π and the strain ratios $\frac{e_2/e_1}{k_2\,e_c'/e_1}$ and $\frac{e_2/e_1}{k_5\,e_{sy}/e_1}$.

The moment equilibrium equation can be expressed in non-dimensional form as,

$$\frac{P_u\,(e+r)}{2\,k_1 f_c'\,(1-p)\,r^2\,t} = C_2 + q\,D_2. \tag{34}$$

From Eqs. (31) and (34) the eccentricity ratio e/r becomes,

$$\frac{e}{r} = \frac{C_2 + q\,D_2}{A_2 + q\,B_2} - 1. \tag{35}$$

The axial capacity P_0 of a hollow circular section at failure is given either by Eq. (27) or (27a). From Eqs. (27) or (27a) and (31) the chimney ultimate strength ratio P_u/P_0 becomes,

$$\frac{P_u}{P_0} = \frac{A_2 + q\,B_2}{(\pi-\beta)\,(1+q)}. \tag{36}$$

4. Ultimate Strength Design

4.1. Design Charts

The theory has been presented in non-dimensional form to minimise the number of design charts for the large number of variables involved. The charts were produced to facilitate the direct proportioning of satisfactory chimney sections using the ultimate strength approach with minimum effort on the part of designers.

A computer programme written in Fortran IV language produced the data required for the design charts. The values of e_c', e_{cu}, e_{sy}, $t/2r$ and β were read into the programme for each particular case and the strain values at ambient temperature were modified when necessary for elevated temperatures up to

600° C. The ratio e_2/e_1 which located the position of the neutral axis was then varied from -15.0 to 1.0 in 0.05 increments. The upper limiting value of strain e_1 at which the concrete section was assumed to fail was fixed. Depending on the position of the neutral axis with respect to the cross-section and to the relative magnitudes of the material strains, the strain ratios $k_2 e'_c/e_1$ and $k_5 e_{sy}/e_1$ were calculated and the angles α, θ_3, θ_4, and θ_5 computed. The trigonometrical functions A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2 and D_2 were then evaluated.

To allow for material strengths $k_1 f'_c$ and $k_4 f_{sy}$ and the proportion of steel p, the steel ratio parameter q was introduced and varied from 0 to 1.0 in 0.1 increments. The ratios e/r and P_u/P_0 were then computed for the production of the ultimate strength design charts. The programme was run on an IBM 360/50 system computer for an extensive range of input data and design charts prepared for three different flue openings and four different grades of steel.

For vertical circular chimneys self weight acts along the centre of the circle forming the cross-section shape and the eccentricity e of this loading as defined in the notation is zero. For chimneys P_u is a maximum when it equals P_0 i.e., when it is located at the plastic centroid of the section. The introduction of a flue hole shifts the plastic centroid away from the centre of the circular shape. In these cases the shift of the plastic centroid is indicated by the maximum value of negative eccentricity shown on the related design charts. The effect of the self weight bending moment at a flue position has already been included in the design graphs where it can be seen that although e equals zero the P_u/P_0 ratio is less than it's maximum value. When using the included design charts only the moments of forces about the centre of the circular shape need be considered.

4.2. Effect of Ratio $t/2r$

In deriving the theory, the stress f_c was assumed uniform over a small elemental area $r\,t\,d\theta$ and $\int_{\theta=\beta}^{\alpha} r\,t\,(1-p)\,d\theta$ taken as a reasonable estimate of the total concrete area above the neutral axis. This is reasonably true provided $t/2r$ is small. When $t/2r$ is assumed to be zero point 1 becomes point $s1$ on Fig. 4 and $e_1 = e_{s1}$. This approximation simplifies the algebra and greatly reduces the required number of design charts. For the particular case shown on Fig. 6, it can be seen that as $t/2r$ changes from 0 to 0.2 the ultimate strength ratio changes by a maximum of about 2%. This minor effect does not appear to warrant the use of additional design charts and in the preparation of Figs. 9a to 12c the $t/2r$ ratio was taken as zero.

It should be noted that whereas $t/2r$ has little effect on the P_u/P_0 ratio, Eqs. (27) and (27a) show that the thickness t has a decisive effect on P_0. This is turn has a direct effect on P_u.

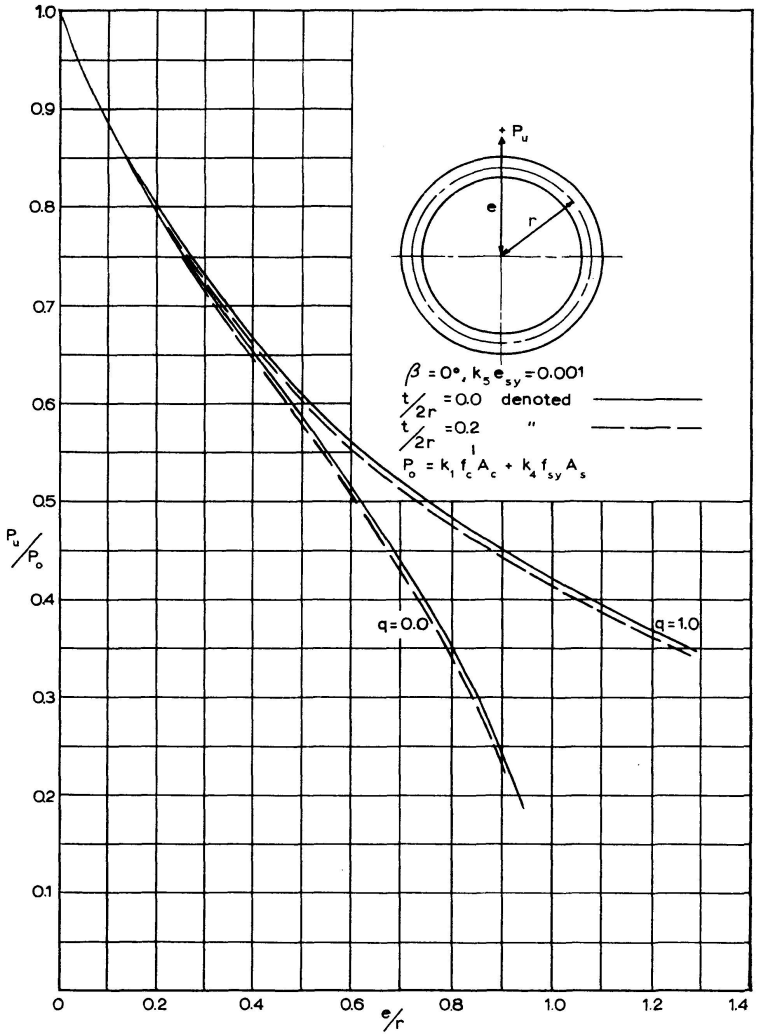


Fig. 6. Comparison of wall thickness ratio $t/2r$ variation.

4.3. Effect of Ratio $k_2 e'_c/e_1$

One set of experimental results shown on Fig. 2c indicated that the strain $k_2 e'_c$ increases 100% as the wall temperature T changes from 20° C to 600° C. No experimental results could be found for the strain $k_3 e_{cu}$ and it was assumed that $k_3 = k_2$. Only the ratio $k_2 e'_c/e_1$ is used in estimating the chimney ultimate strength. When tension acts on part of the cross-section this ratio becomes $k_2 e'_c/k_3 e_{cu}$ and when compression acts over the whole area it becomes $k_2 e'_c/(k_3 e_{cu} - \frac{e_2}{e_1}(k_3 e_{cu} - k_2 e'_c))$. Since $k_2 = k_3$ both strain ratios become independent of temperature.

The ratio $k_2 e'_c/e_1$ determines the shape of the concrete stress strain relation and hence the shape of the concrete stress block. In this paper the values adopted for e'_c, and e_{cu} were 0.002 and 0.0035 respectively. Assuming a 50% increase in e'_c the particular section shown on Fig. 7a indicates a maximum variation in the ultimate strength ratio P_u/P_0 of about 3%.

Again assuming a 100% increase in e_{cu}, the particular section shown on

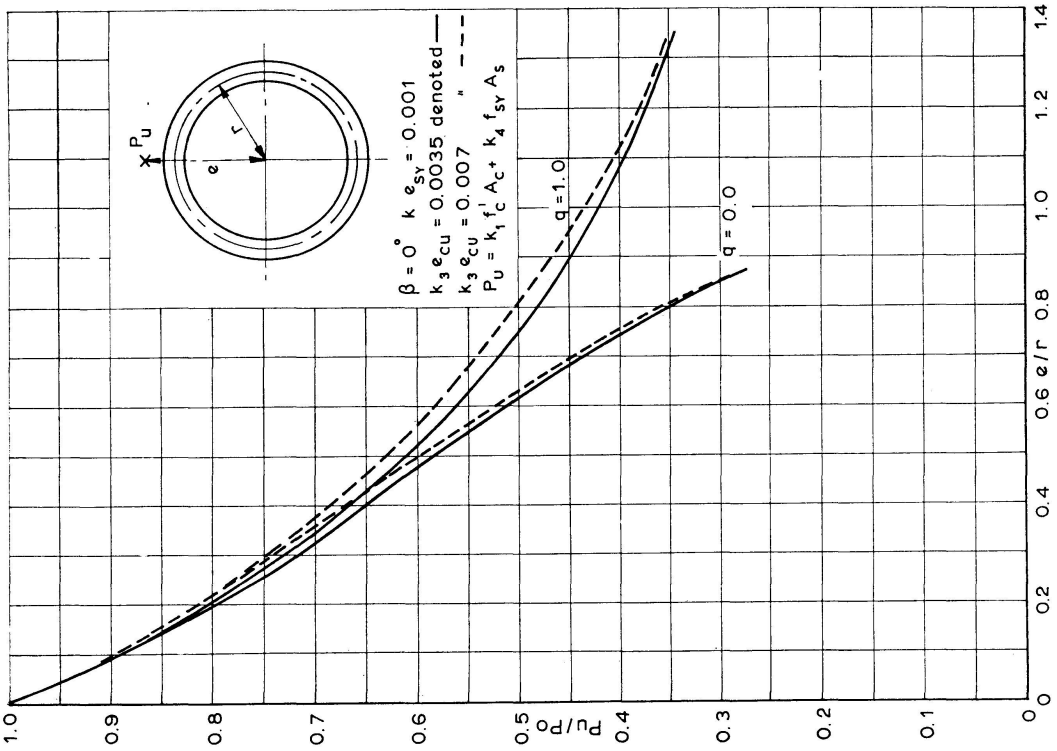


Fig. 7b. Comparison of concrete strain $k_3 e_{cu}$ variation.

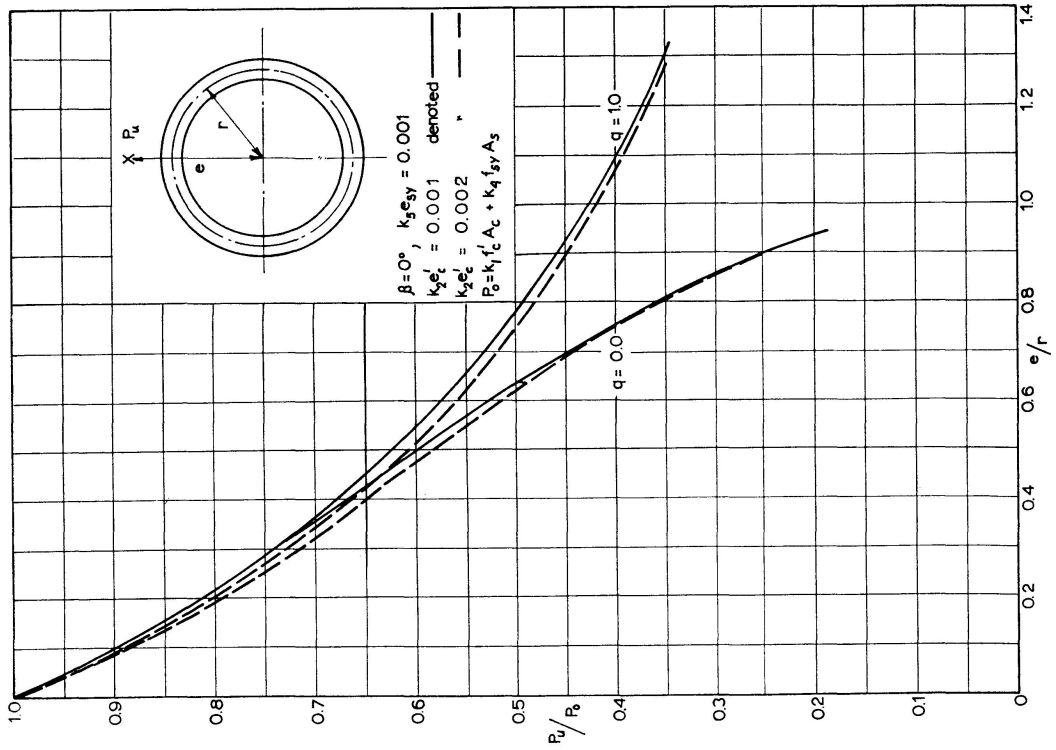


Fig. 7a. Comparison of concrete strain $k_2 e_c'$ variation.

Fig. 7b indicates a maximum variation in P_u/P_0 of about 4%. These small changes in P_u/P_0 do not warrant changing either e'_c or e_{cu} and the values of 0.002 and 0.0035 were used when computing the data for all the included design charts.

4.4. *Effect of Ratio* $k_5 e_{sy}/e_1$

The steel yield strain $k_5 e_{sy}$ shown on Fig. 3c decreases by 40% as the temperature T changes from 20° C to 600° C. Only the ratio $k_5 e_{sy}/e_1$ is used in computing the chimney ultimate strength. When tension acts on part of the cross-section this ratio becomes $k_5 e_{sy}/k_3 e_{cu}$ and when compression acts over the whole area it changes to $k_5 e_{sy}/(k_3 e_{cu} - \frac{e_2}{e_1}(k_3 e_{cu} - k_2 e'_c))$ and as $k_3 = k_2$ this ratio becomes $k_5 e_{sy}/k_2 (e_{cu} - \frac{e_2}{e_1}(e_{cu} - e'_c))$. Assuming a 100% increase in both $k_2 e'_c$ and $k_3 e_{cu}$, the particular section shown in Fig. 8a shows a maximum variation in P_u/P_0 of about 3%. This small change in P_u/P_0 does not warrant changing $k_2 e'_c$ and $k_3 e_{cu}$ and as previously indicated values of 0.002 and 0.0035 respectively were adopted when computing the data for all the included design charts.

Steels with yield stress f_{sy} varying from 30 to 60 ksi at ambient temperature can be used when designing chimneys. At 600° C $k_5 e_{sy}$ can be 60% of its value at 20° C so that $k_5 e_{sy}$ can vary from 0.0006 to 0.002. A 100% change in $k_5 e_{sy}$ i.e., from 0.001 to 0.002 for the particular section shown on Fig. 8b causes a maximum variation of about 6% in the P_u/P_0 ratio. Although the author believes 6% variation in P_u/P_0 is negligible it was thought appropriate to include separate sets of graphs for the four different $k_5 e_{sy}$ values of 0.0005, 0.001, 0.0015 and 0.002.

4.5. *Effect of Temperature T*

Change in temperature alters the strains $k_2 e'_c$, $k_3 e_{cu}$, $k_5 e_{sy}$ and the stresses $k_1 f'_c$ and $k_4 f_{sy}$. It has been shown that changes in $k_2 e'_c$, and $k_3 e_{cu}$ have a negligible effect on P_u/P_0 and although variation of $k_5 e_{sy}$ has little effect, charts for four different values have been prepared. The stresses $k_1 f'_c$ and $k_4 f_{sy}$ only occur in the steel ratio parameter q when computing e/r from Eqs. (26) or (35) and P_u/P_0 from Eqs. (28), (28a) or (36). Variation of $k_1 f'_c$ and $k_4 f_{sy}$ can therefore be accommodated by including a number of q constant curves. The ultimate strength design charts provided permit the designer to select these material stresses at will.

4.6. *Design Example*

A chimney section of base mean dia 40′ is subjected to a dead load ultimate axial force of 16,000 kips and a wind ultimate bending moment of 2,000,000 kip.in. The wall has a flue opening half angle $\beta = 20°$ and is subjected to a mean temperature $T = 100°$ C. Assuming that Portland cement gravel concrete

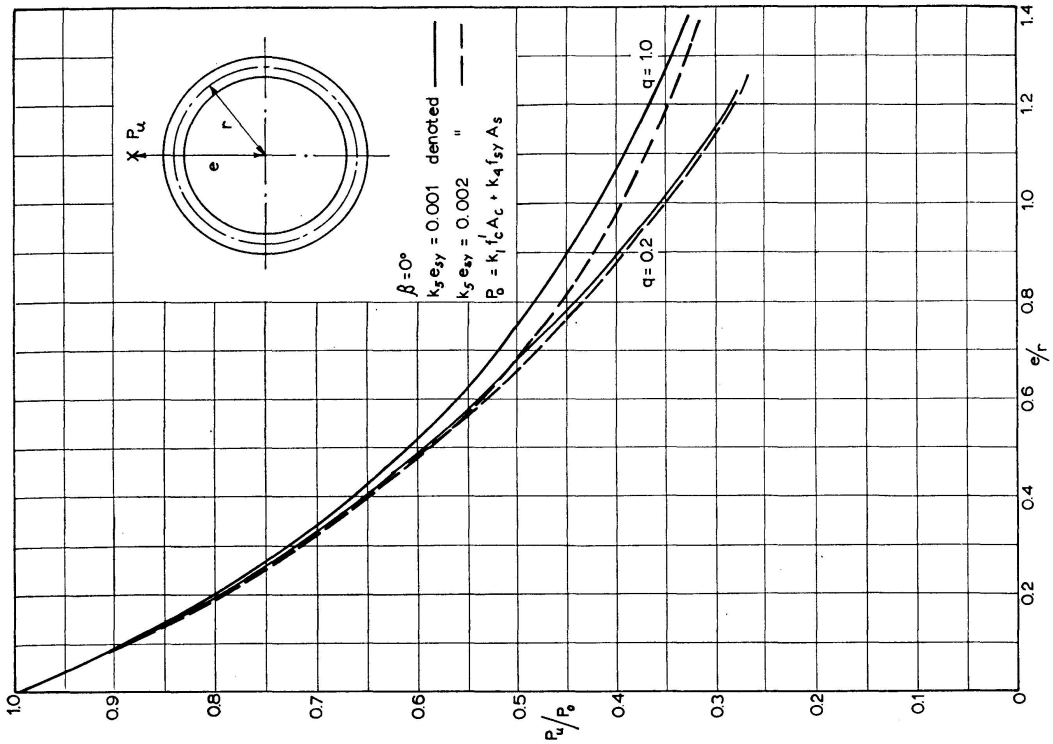


Fig. 8b. Comparison of steel strain $k_5 e_{sy}$ variation.

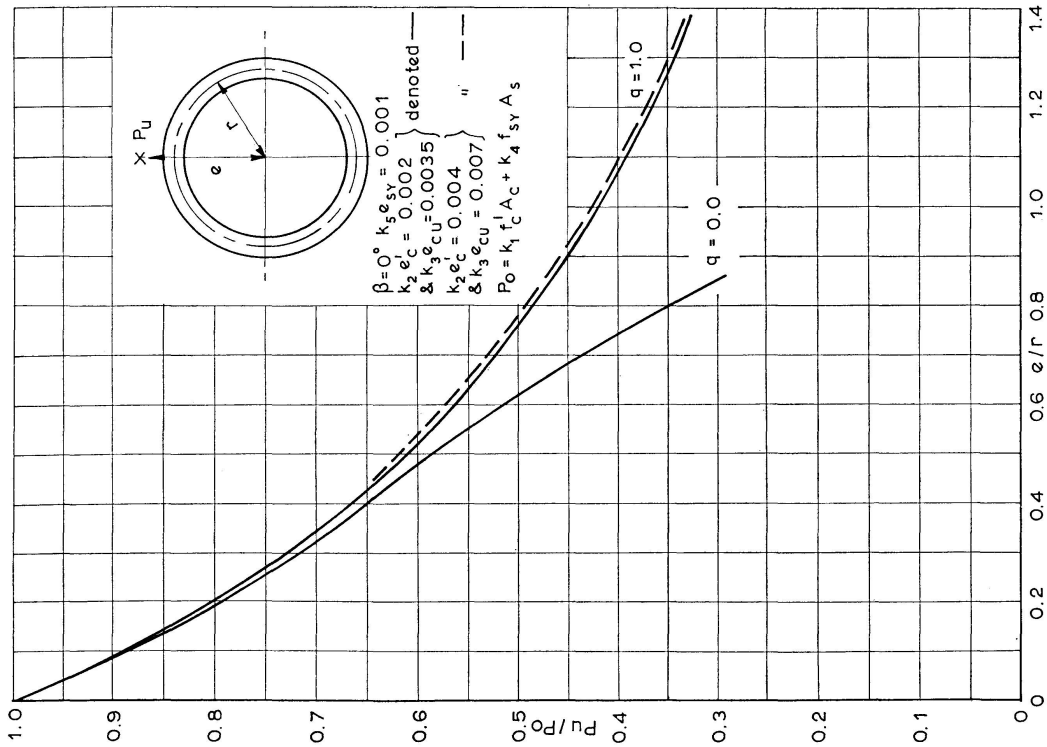


Fig. 8a. Comparison of variation of concrete strains $k_2 e'_c$ and $k_3 e_{cu}$.

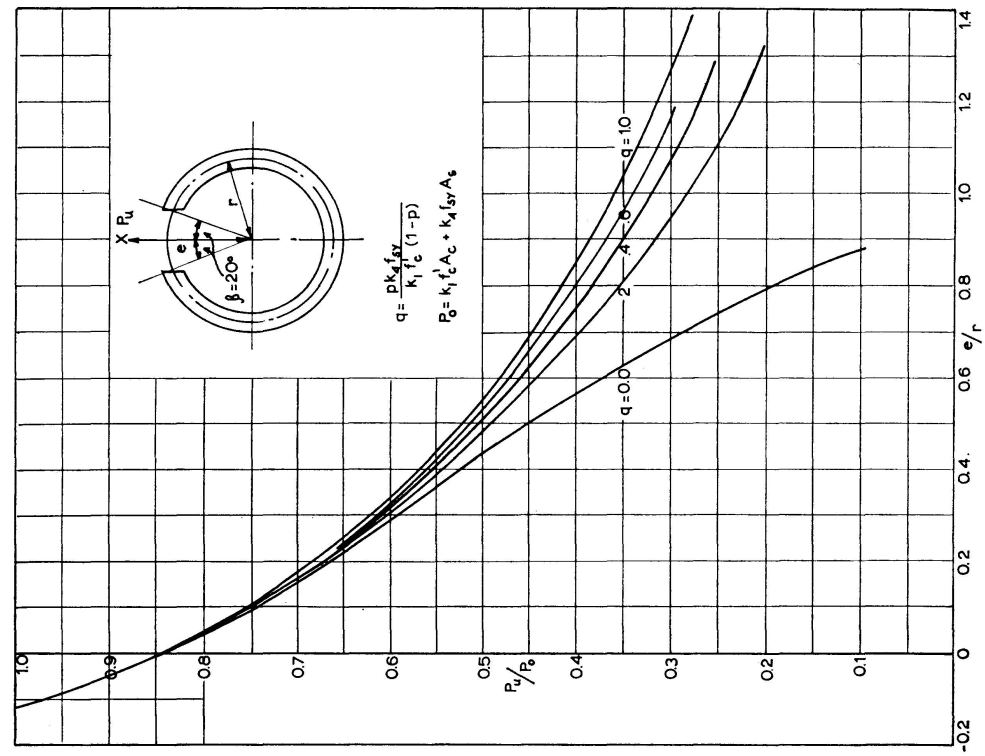


Fig. 9b. Ultimate strength design chart for $\beta = 20°$ and $k_5 e_{sy} = 0.0005$.

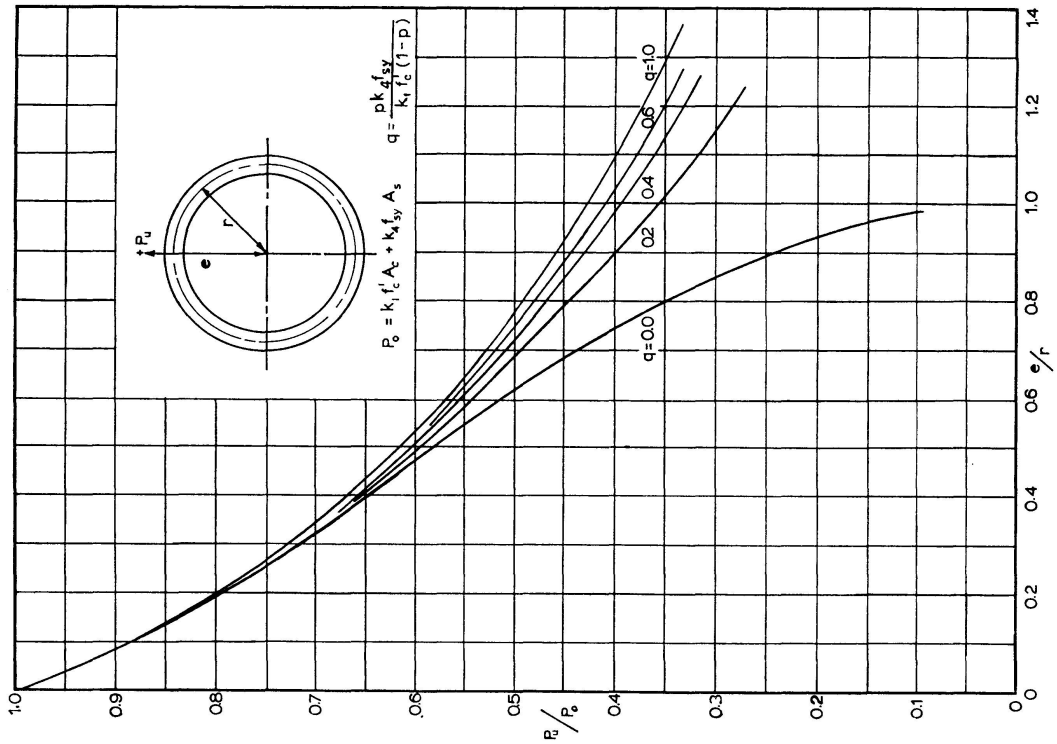


Fig. 9a. Ultimate strength design chart for $\beta = 0°$ and $k_5 e_{sy} = 0.0005$.

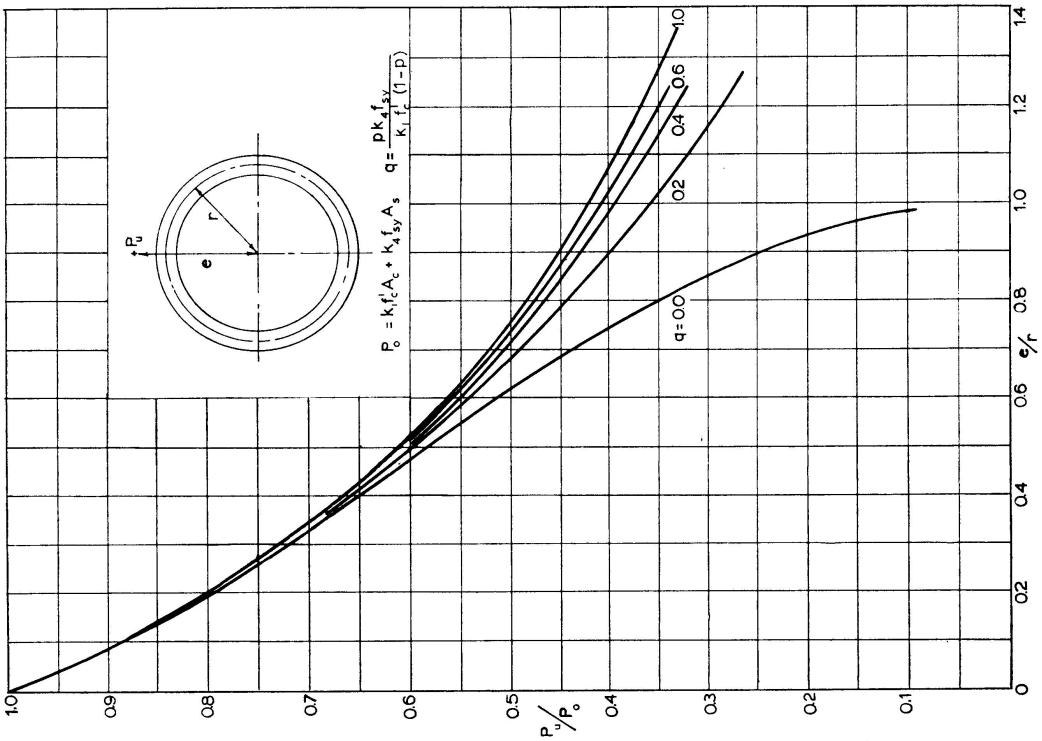


Fig. 10a. Ultimate strength design chart for $\beta = 0°$ and $k_5 e_{sy} = 0.001$.

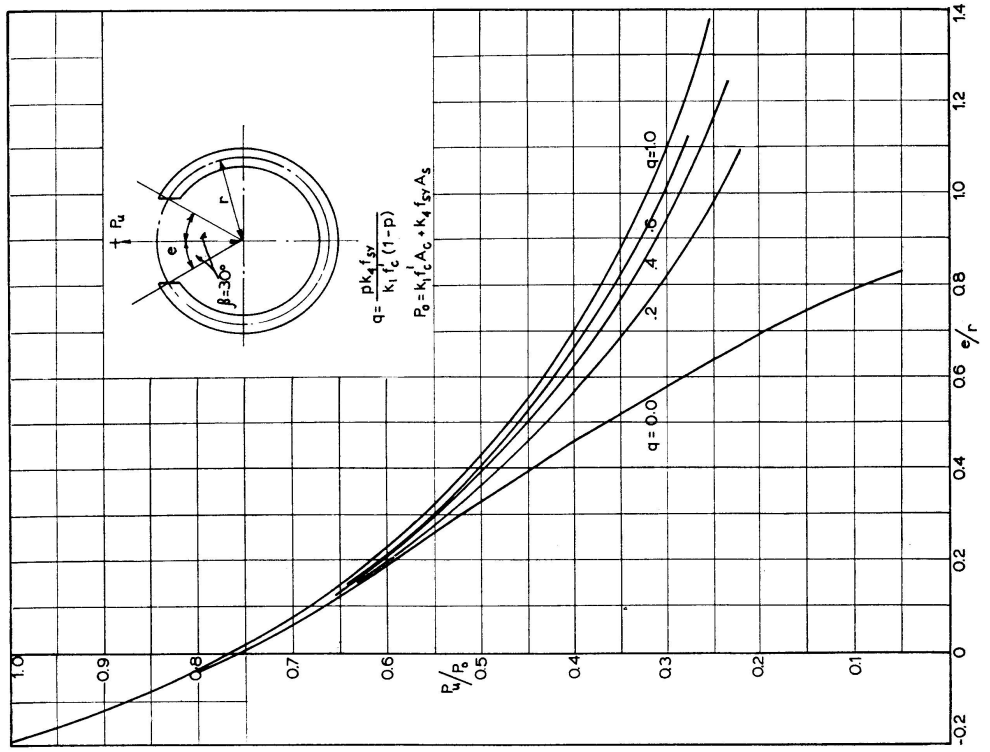


Fig. 9c. Ultimate strength design chart for $\beta = 30°$ and $k_5 e_{sy} = 0.0005$.

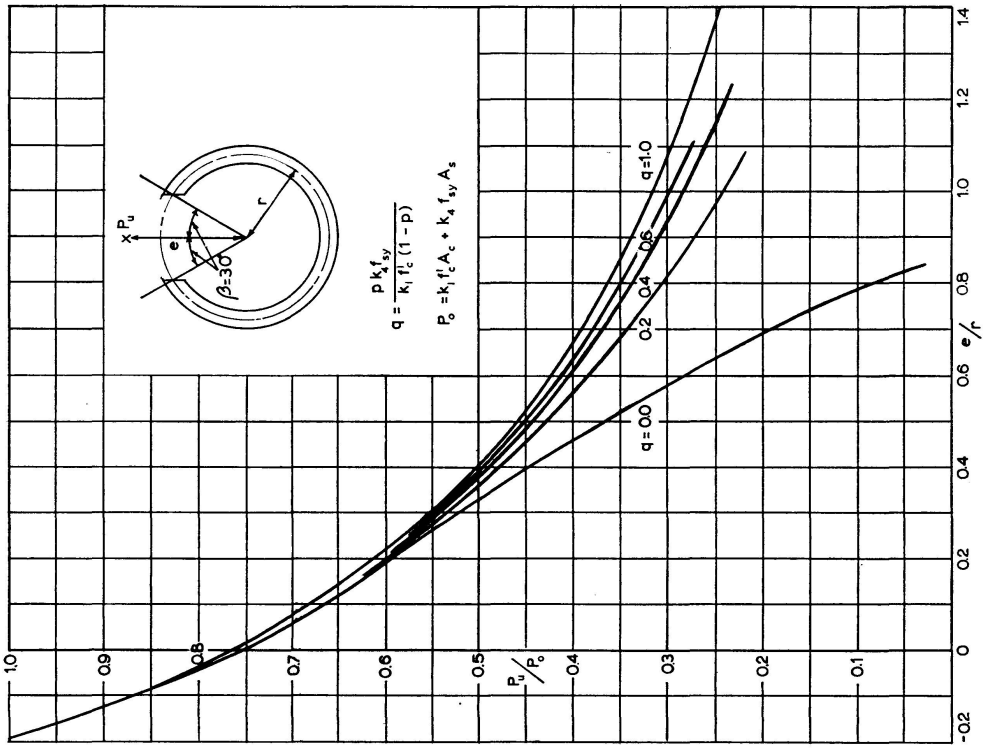


Fig. 10c. Ultimate strength design chart for $\beta = 30°$ and $k_5 e_{sy} = 0.001$.

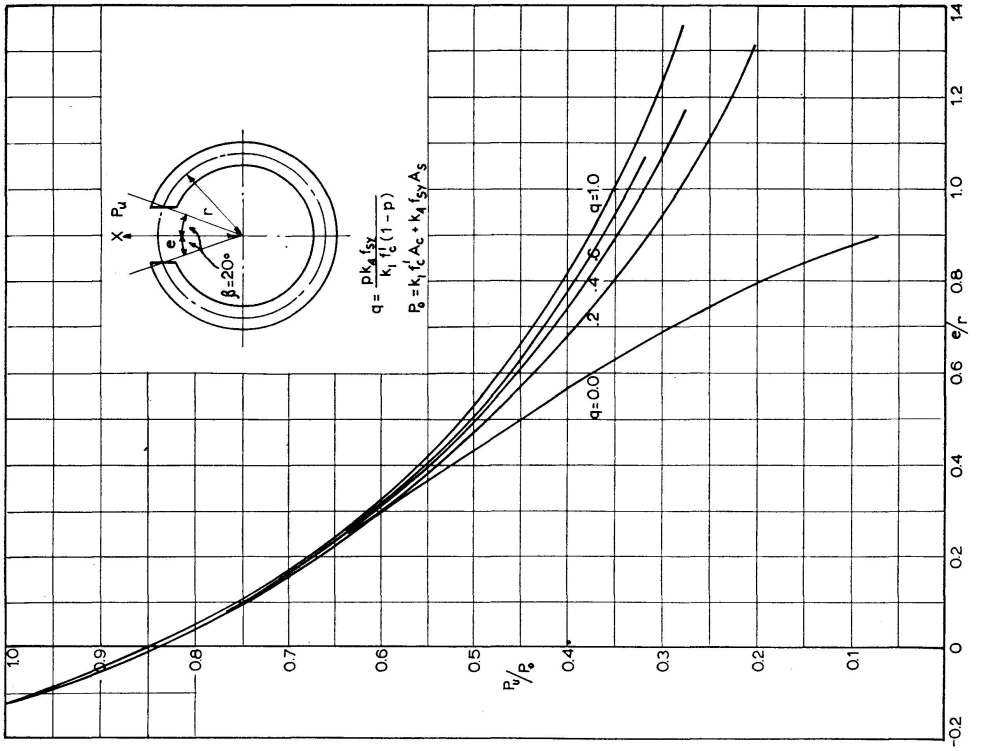


Fig. 10b. Ultimate strength design chart for $\beta = 20°$ and $k_5 e_{sy} = 0.001$.

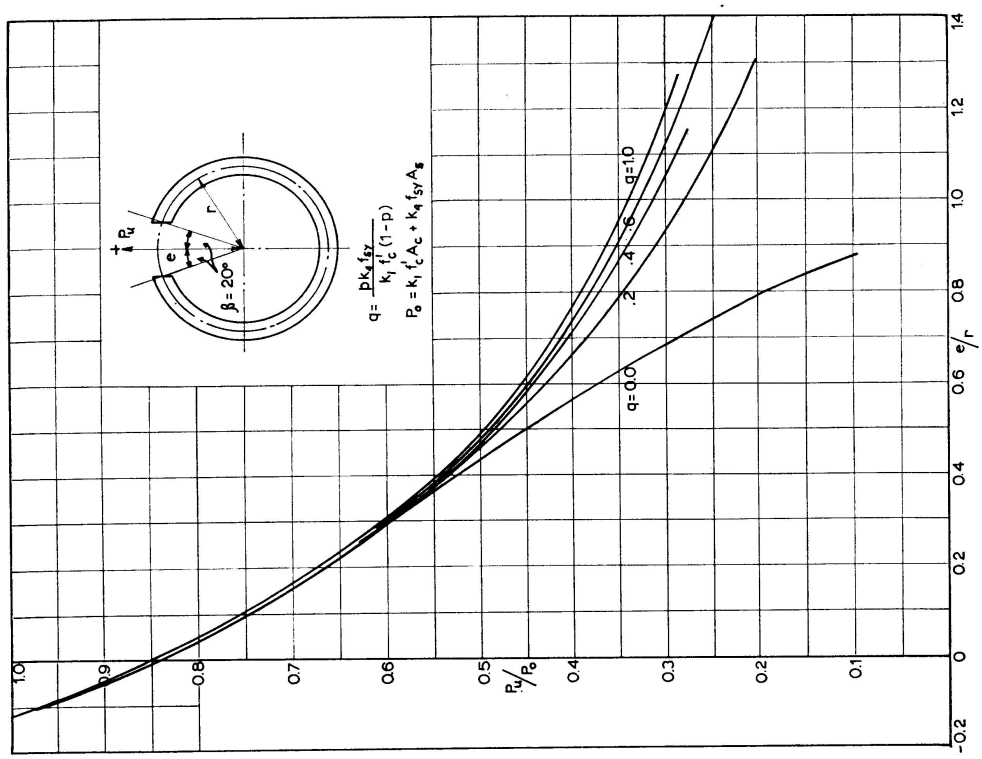


Fig. 11b. Ultimate strength design chart for $\beta = 20°$ and $k_5 e_{sy} = 0.0015$.

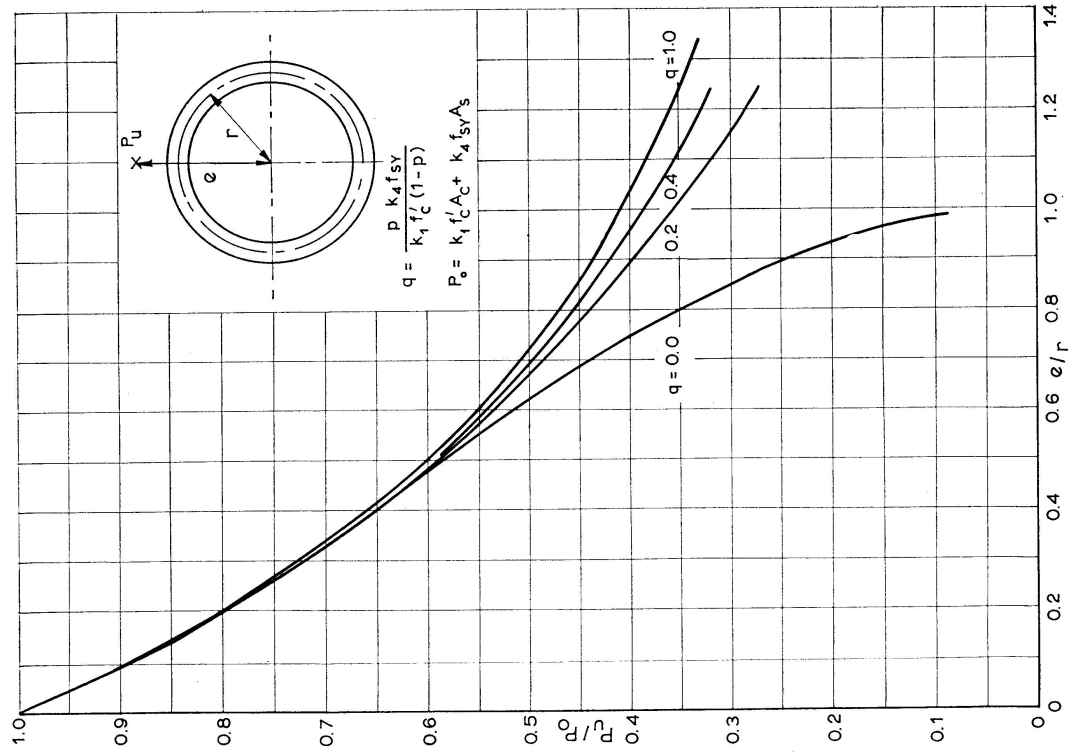


Fig. 11a. Ultimate strength design chart for $\beta = 0°$ and $k_5 e_{sy} = 0.0015$.

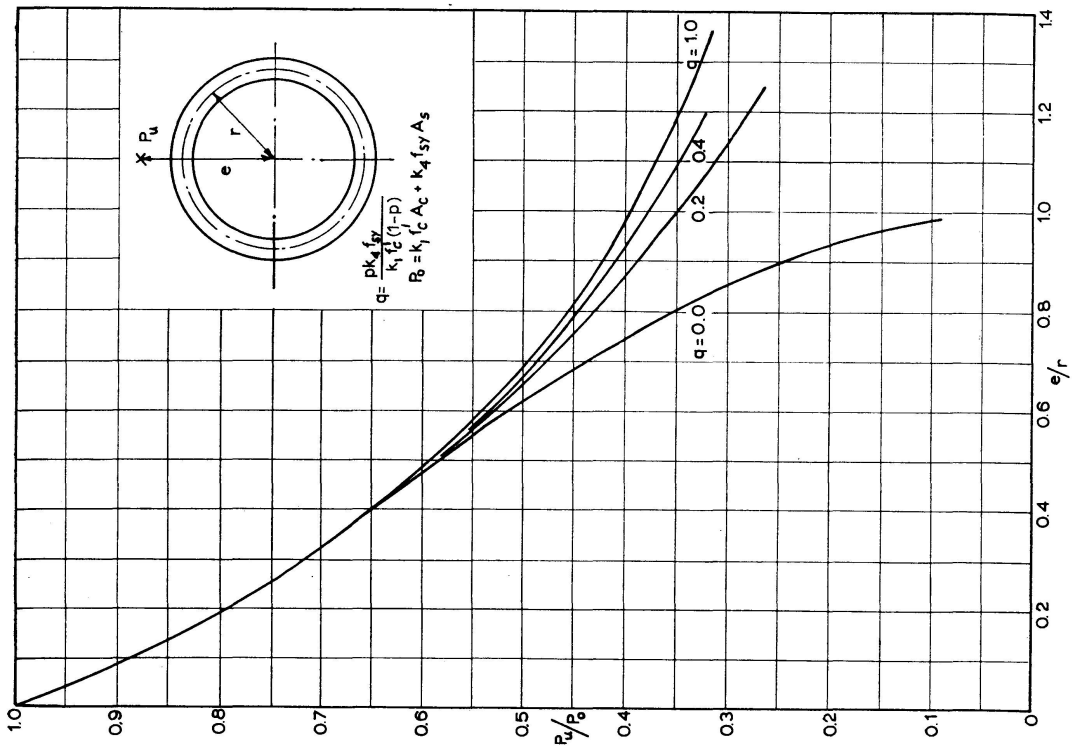


Fig. 12a. Ultimate strength design chart for $\beta = 0°$ and $k_5 e_{sy} = 0.002$.

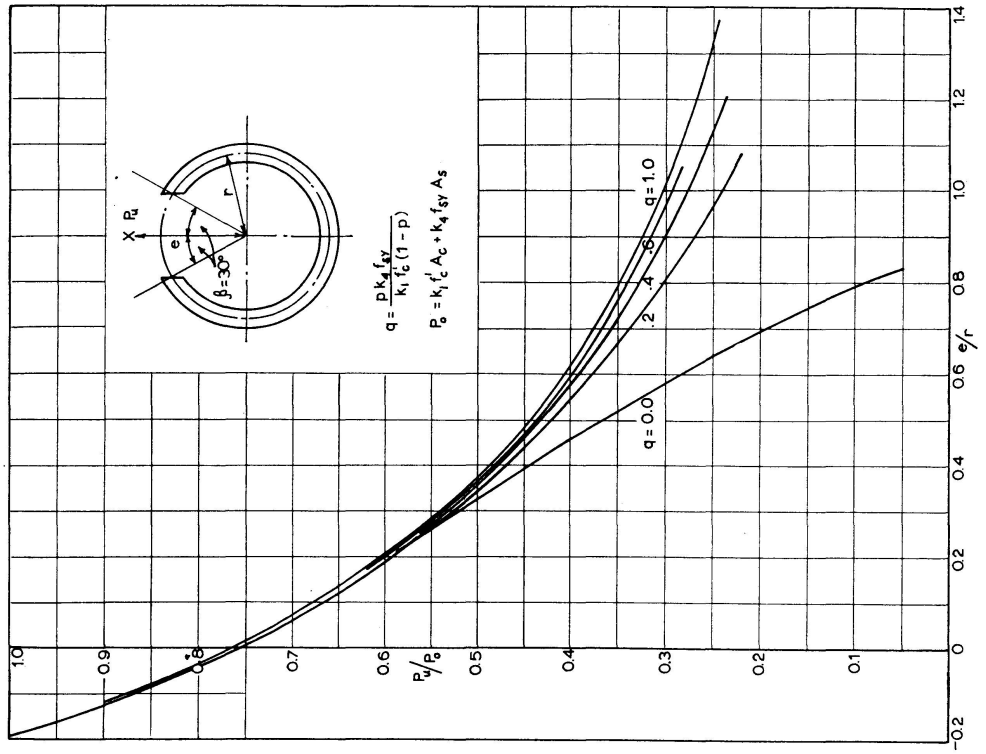


Fig. 11c. Ultimate strength design chart for $\beta = 30°$ and $k_5 e_{sy} = 0.0015$.

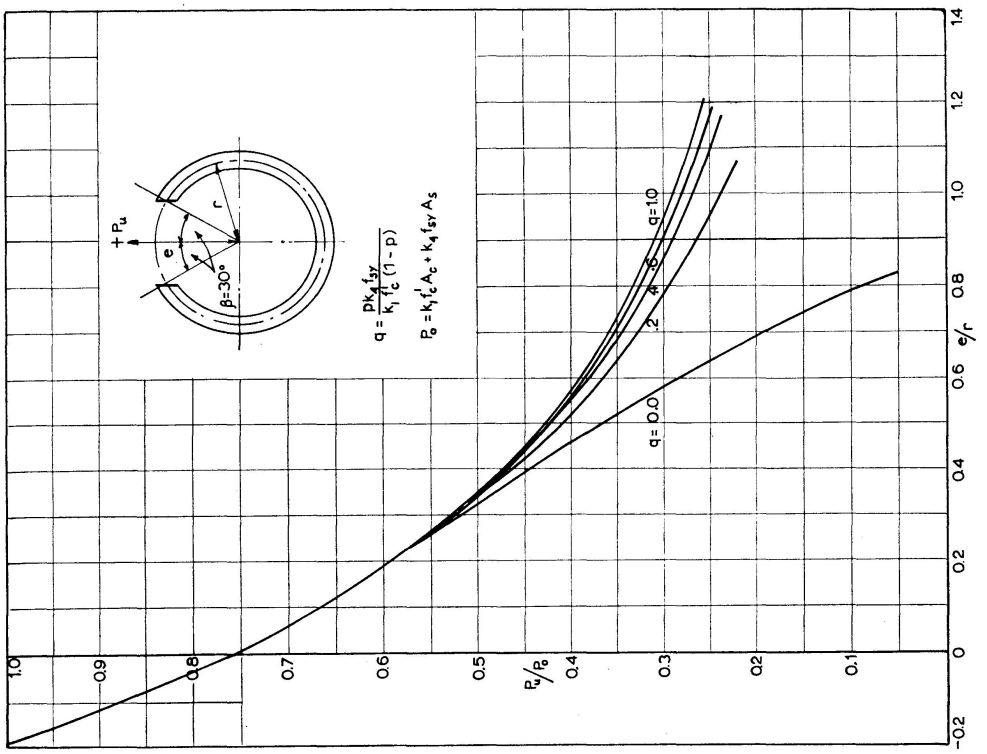


Fig. 12c. Ultimate strength design chart for $\beta = 30°$ and $k_5 e_{sy} = 0.002$.

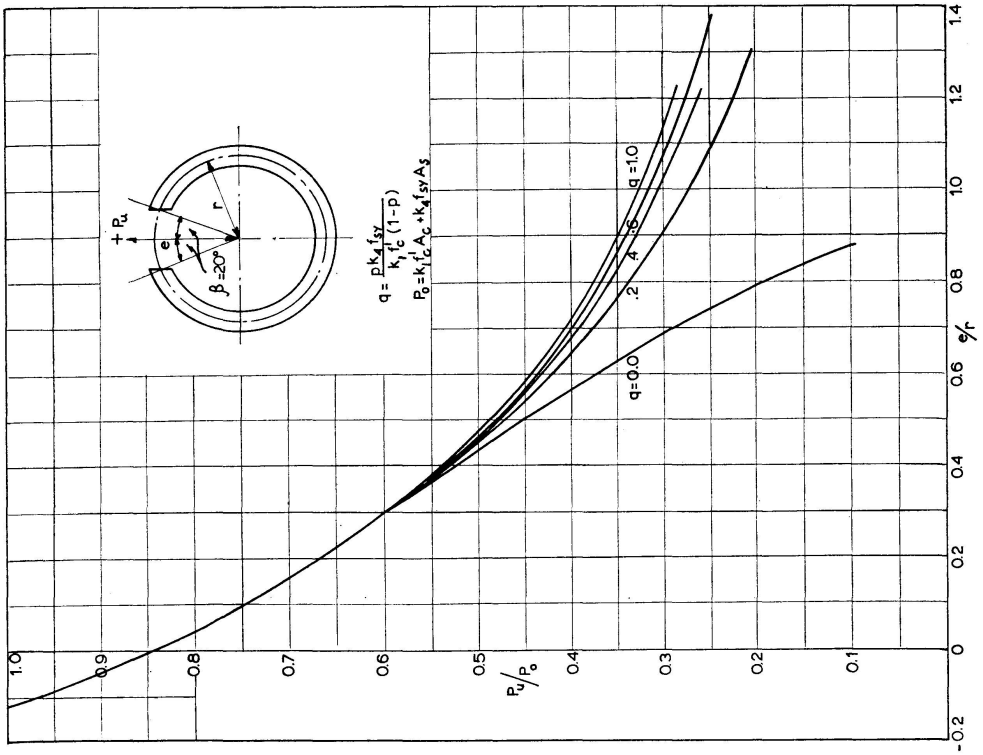


Fig. 12b. Ultimate strength design chart for $\beta = 20°$ and $k_5 e_{sy} = 0.002$.

of compressive strength $f'_c = 4\,\text{ksi}$ and structural grade steel of yield stress $f_{sy} = 33\,\text{ksi}$ are to be used, design a satisfactory cross-section at the chimney base.

From Figs. 2 and 3 $k_1 = 0.6$ Then $k_1 f'_c = 2.4\,\text{ksi}$,
$k_2 = 1.0$ $k_2 e'_c = 0.002$,
$k_4 = 0.95$ $k_4 f_{sy} = 31.4\,\text{ksi}$.
$k_5 = 0.95$ $k_5 e_{sy} = 0.00104 \simeq 0.001$.

Assuming the wall thickness $t = 10''$ and the steel proportion $= 0.01$ then the wall mean radius $r = 240\,\text{in.}$, the effective concrete area $A_c = 2 \times 240 \times 10\,(\pi - 0.348)\,(1 - 0.01) = 13{,}250\,\text{in}^2$, the steel area $A_s = 2 \times 240 \times 10\,(\pi - 0.348)\,0.01 = 134\,\text{in}^2$.

$$\therefore\ P_0 = 2.4 \times 13{,}250 + 31.4 \times 134 = 36{,}000\ \text{kips}.$$

Now eccentricity $$e = \frac{2{,}000{,}000}{16{,}000} = 125\ \text{in.}$$

$$\frac{e}{r} = \frac{125}{240} = 0.52,$$

steel ratio $$q = \frac{31.4 \times 0.01}{2.4\,(1 - 0.01)} = 0.132.$$

From Fig. 10b $$\frac{P_u}{P_0} = 0.46,$$

$$\therefore\ P_u = 0.46 \times 36{,}000 = 16{,}600\ \text{kips} > 16{,}000,$$

$\therefore$ adopt a $10''$ wall thickness.

5. Concluding Remarks

1. A procedure for determining the effect of elevated temperature on the flexural strength characteristics of reinforced concrete materials is suggested.

2. Ultimate strength analysis of hollow circular reinforced concrete sections is proposed.

3. Ultimate strength design charts for three sizes of flue opening and four different grades of steel are included for the direct design of chimneys.

4. Large variation of the values of several important design parameters show small effect on the ultimate strength ratio P_u/P_0 thereby minimizing the required number of the design charts.

5. The observed results of seven thin wall circular concrete specimens without flue openings, tested at ambient temperature in the Structures Laboratory of the Civil Engineering School, agree with the theoretical strengths predicted by the proposed theory within about 10%. No static or dynamic load tests could be found in the literature.

6. No experimental evidence could be found on the effect of ovalization, crinkle buckling, slenderness ratio, wind vibration, acidic gas attack, or work-

manship on the ultimate strength of hollow concrete sections and these factors have not been considered in the proposed theory.

6. Acknowledgements

This paper forms part of a study of the ultimate strength of thin wall concrete members in biaxial bending being conducted in the School of Civil Engineering at the University of New South Wales. The computer programmes were run by the Electrical Engineering School staff on their IBM 360/50 computer. The author wishes to thank Professor A. S. Hall for his general encouragement and Mr. J. M. Taylor for his production of computer data and the resulting design charts.

Key Words

Structural engineering, reinforced concrete, ultimate strength, bending and compression, temperature effects, computer.

7. Notation

P_0 = load at failure when placed at the plastic centre of the cross-sectional area.

P_u = load at failure when placed at an eccentricity e measured from the centre of the circle forming the section shape.

r = mean radius of the hollow section.

d = mean diameter of the hollow section.

t = wall thickness of the hollow section.

L = effective length of chimney.

e = eccentricity of compressive force P_u measured from the centre of the circle forming the section shape.

A_c = effective concrete cross-sectional area $= 2(1-p)\,r\,t\,(\pi-\beta)$.

A_s = total steel area in cross-section.

p = proportion of steel reinforcement in section $= A_s/2\,r\,t\,(\pi-\beta)$.

f_c = concrete stress.

f'_c = maximum concrete compressive stress obtained in a control cylinder test at ambient temperature.

E_c = concrete modulus of elasticity at any temperature $= \dfrac{k_1 f'_c}{k_2 e'_c}$.

f_s = steel stress.

f_{sy} = steel yield stress at ambient temperature.

E_s = steel modulus of elasticity at any temperature $= \dfrac{k_4 f_{sy}}{k_5 e_{sy}}$.

q = reinforcement ratio $= \dfrac{k_4 f_{sy} p}{k_1 f'_c (1-p)}$.

e_c = concrete strain.

e'_c = concrete strain when maximum stress f'_c is first attained in a control cylinder at ambient temperature.

e_{cu} = maximum concrete compressive strain at failure in a hollow section with tension over portion of the cross-section and at ambient temperature.

e_1 = compressive strain in concrete extreme upper fibre shown by point 1 in Fig. 4.

e_{s1} = compressive strain in steel extreme upper fibre shown by point s 1 in Fig. 4.

e_2 = strain in steel extreme lower fibre shown by point 2 in Fig. 4.

e_s = steel strain.

e_{sy} = steel yield strain at ambient temperature.

T = concrete chimney shell mean elevated temperature.

k_1 = ratio of concrete ultimate strength at temperature T to its ultimate strength f'_c at ambient temperature taken as 20° C.

k_2 = ratio of concrete strain at temperature T to its strain e'_c at ambient temperature, both strains occurring when maximum stress is first attained.

k_3 = ratio of maximum value of extreme fibre strain in flexure at temperature T to its maximum strain e_{cu} at ambient temperature.

k_4 = ratio of steel yield stress at temperature T to its yield stress f_{sy} at ambient temperature.

k_5 = ratio of steel yield strain at temperature T to its yield strain e_{sy} at ambient temperature.

Q = total compressive force in the steel.

R = total compressive force in the concrete.

S = total tensile force in the steel.

Q', R', S' = either the moment of Q, R or S respectively about the neutral axis when the neutral axis is within a section or the moment of Q, R or S respectively about the extreme lower steel fibre when the neutral axis is outside the section.

A_1, B_1, C_1, D_1 = non-dimensional trigonometric functions relevant only when the neutral axis is inside a section at failure.

A_2, B_2, C_2, D_2 = non-dimensional trigonometric functions relevant only when the neutral axis is outside a section at failure.

The following angles are all measured at the centre of the circle forming the section shape. They are measured from the centre line of the flue hole to some point on the mid-wall position.

α = angle defining a point on the mid-wall position through which the neutral axis passes.

β = angle defining a point on the mid-wall position that fixes the size of the flue opening.

θ = variable angle defining a typical point on the mid-wall position.
θ_3 = angle defining the point 3 shown in Fig. 4 at which the concrete strain equals $k_2 e'_c$.
θ_4 = angle defining the point 4 shown in Fig. 4 at which the steel compressive strain equals $k_5 e_{sy}$.
θ_5 = angle defining the point 5 shown in Fig. 4 at which the steel tensile strain equals $k_5 e_{sy}$.

8. References

1. American Concrete Institute Committee 505. "Specification for the Design and Construction of Reinforced Concrete Chimneys." ACI 505–54, Jour. A.C.I., Vol. 26, Sept. 1954, pp. 1–48 (Proc. A.C.I., Vol. 51).
2. Malhotra, H. L.: The Effect of Temperature on the Compressive Strength of Concrete. Mag. of Conc. Research, Vol. 28, No. 23, Aug. 1956, pp. 85–94.
3. Saemann, J. C. and Washa, G. W.: Variation of Mortar and Concrete Properties with Temperature. Jour. A.C.I., Vol. 29, No. 5, Nov. 1957, pp. 385–395.
4. Brettle, H. J.: The Flexural Strength and Elastic Properties of Pre-tensioned Concrete Beams of Rectangular Cross-Section. Ph.D. thesis, School of Civil Engg., Univ. of New South Wales, 1958, 399 p.
5. Zoldners, N. C.: Effect of High Temperatures on Concretes Incorporating Different Aggregates. Proc. A.S.T.M. Philadelphia, Vol. 60, 1960, pp. 1087–1108.
6. Taylor, C. P. and Turner, L.: Reinforced Concrete Chimneys. Concrete Pubs., Second Edit. 1960, 81 p.
7. American Concrete Institute and Cement and Concrete Association on "Recommendations for an International Code of Practice for Reinforced Concrete", A.C.I., 1965, 156 p.
8. Harmathy, T. Z. and Berndt, J. E.: Hydrated Portland Cement and Lightweight Concrete at Elevated Temperatures. Jour. A.C.I., No. 1, Jan. 1966, pp. 93–112 (Proc. A.C.I., Vol. 63).
9. Campbell-Allen, D. and Desai, P. M.: The Influence of Aggregate on Behaviour of Concrete at Elevated Temperatures. Nuclear Eng. and Design, Vol. 6, No. 1, Aug. 1967, pp. 65–77.
10. Copeland, W. R. and Woodman, G. C.: The Behaviour of Reinforcing Steels at Elevated Temperatures. Jour. I.E. Aust., Vol. 38, No. 3, March 1966, pp. 53–59.
11. Hannant, D. J.: Effects on Strength of Various Concretes of Sustained Temperatures near 100°C. Civil Engg. and Pub. Wks. Review, June 1967, pp. 665–667.
12. Brettle, H. J. and Warner, R. F.: Theory for the Ultimate Strength Design of Hollow Circular Reinforced Concrete Sections. Civil Engg. Trans. I.E. Aust., Vol. CE 9, No. 2, Oct. 1967, pp. 242–248.
13. Warner, R. F. and Brettle, H. J.: Ultimate Strength Design of Thin-Wall Circular Bridge Piers. Int. Assoc. for Bridge and Struct. Engg., Vol. 27, 1967, pp. 255–270.
14. Warner, R. F. and Brettle, H. J.: Strength of Reinforced Concrete in Biaxial Bending and Compression. Dept. of Civ. Engg., Univ. of New South Wales, Uniciv Report No. R-24, Nov. 1967, 29 p.
15. Stelle, W. W.: Tallest smoke stack for Mitchell Plant. Civil Engg., A.S.C.E., March 1969, pp. 44–47.
16. Leonhardt, F.: Modern Design of Television Towers. I.C.E. Lond., May 1969, pp. 265–291.

Summary

This paper describes the theoretical analysis of the ultimate strength of hollow circular reinforced concrete chimneys subjected to elevated temperatures. A method of design is suggested and design charts for three sizes of flue openings and four different grades of steel are included to simplify the design procedure.

No published results of ultimate strength tests of thin wall circular sections subjected to elevated temperatures can be found in the literature to compare with the proposed theory. Some observations of concrete test cylinders exposed to different heating and cooling procedures are available. Simplified approximations of the effect of elevated temperature on the ultimate strength characteristics of reinforced concrete materials are included to assist the design procedure.

Résumé

Le travail décrit l'analyse théorique de la charge de cheminées circulaires en béton armé exposées à de hautes températures. Une méthode de construction est proposée et des dessins pour trois différentes grandeurs d'ouverture de gaz d'échappement et pour quatre différentes qualités d'acier sont joints pour faciliter la procédure de construction.

Dans la littérature, on ne trouve pas de résultats de charges de sections circulaires à paroi mince sous l'influence de hautes températures, qui seraient comparables avec la théorie proposée. Il existe quelques observations d'éprouvettes cylindriques en béton, exposées à de différents modes de chauffage et de refroidissement. Des approximations simplifiées concernant des matériaux en béton sont également présentées dans ce travail.

Zusammenfassung

Die Arbeit beschreibt die theoretische Analyse der Traglast von kreisrunden Stahlbetonschornsteinen, die hohen Temperaturen ausgesetzt sind. Es wird eine Konstruktionsmethode vorgeschlagen und Zeichnungen für drei Grössen von Abgasöffnungen und vier verschiedene Klassen von Stählen gegeben, um das Konstruktionsvorgehen zu vereinfachen.

In der Literatur finden sich keine Resultate über Traglasten von dünnwandigen kreisrunden Querschnitten unter dem Einfluss hoher Temperaturen, die mit der vorgeschlagenen Theorie vergleichbar wären. Es bestehen einige Beobachtungen an Beton-Versuchszylindern, die verschiedenen Heiz- und Kühlvorgängen ausgesetzt sind. Vereinfachte Näherungen über den Einfluss hoher Temperaturen auf die Traglast-Charakteristiken von Betonmaterial sind in der vorliegenden Arbeit inbegriffen.

Discrete Analysis of Cylindrical Orthotropic Curved Bridge Decks

Analyse discontinue de chaussées de ponts courbes cylindriques et orthotropes

Unstetige Analyse zylindrischer orthotroper gebogener Brückenfahrbahnen

D. N. BURAGOHAIN
Ph. D., Assistant Professor in Civil Engineering, Indian Institute of Technology, Bombay, India

Introduction

The increasing use of curved bridges in modern highways and highway interchanges has created considerable interest in the analysis of such structures. A curved bridge may either be a box-section bridge or may consist of a deck slab with curved longitudinal girders with or without radial cross-girders. In the latter case, the structure may be treated as an equivalent cylindrical orthotropic curved slab in which the longitudinal girders may be treated as flexible supports for the slab or their stiffness properties may be merged with the slab. COULL and DAS [1] have presented exact analytical solutions for isotropic curved slabs with simply-supported straight edges. Orthotropic curved plate theory has been presented by YONEZAWA [2] and others and used by HEINS and HAILS [3] for analysis of stiffined curved plates using finite difference and by BELL and HEINS [4] for simply-supported curved bridge decks on flexible curved girders using a slope-deflection formulation. CHEUNG [5], on the other hand, has presented a finite strip solution for simply supported curved bridge decks possessing orthotropic properties. This paper reports the development of a discrete energy formulation for orthotropic curved slabs with arbitrary boundary conditions.

The development of the discrete energy formulation for straight isotropic slabs has already been reported [6]. The same technique has also been extended to isotropic curved slabs using polar coordinates [7]. The present formulation incorporates cylindrical orthotropic properties of the curved slab to make it directly applicable to the analysis of curved bridge decks.

Comparison of results of two illustrative examples are presented. The first

example is of an isotropic curved slab with simply supported straight edges analysed by COULL and DAS [1] and CHEUNG [5]. The second one is of a stiffened curved plate analysed by HEINS and HAILS [3]. Experimental results are available for both these examples.

Method of Analysis

The scheme of structural discretisation and the coordinate system (r, Φ, z) are shown in Fig. 1, and the arrangement of nodes for the two classes of ele-

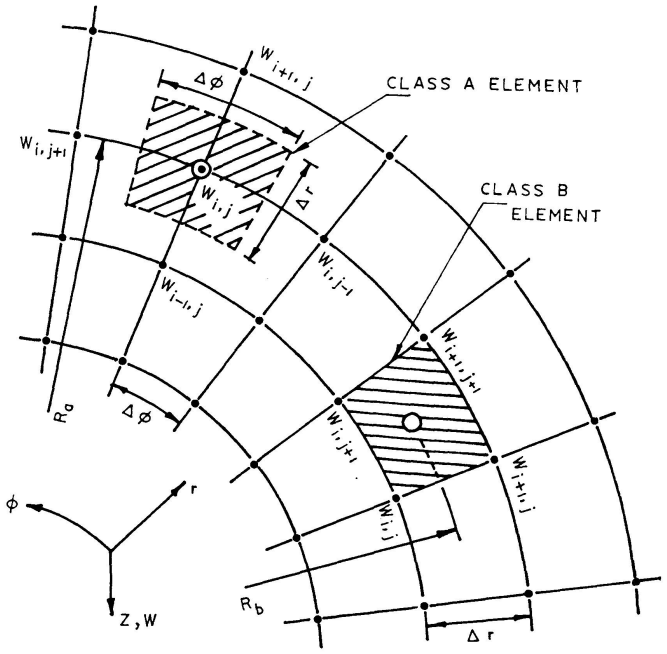


Fig. 1. Element discretization.

ments, class A and class B, are shown in the same figure. The total potential energy of the system is discretised into energy due to bending, contributed by class A elements, and energy due to twisting, contributed by class B elements. The potential energy π_a and π_b for class A and class B elements respectively will now be expressed in terms of the element nodal displacements using orthotropic theory.

Class A elements: The nodal displacements associated with class A elements are shown in Fig. 1 and the displacement vector $\{\delta_a\}$ is written as:

$$\{\delta_a\} = \{w_{i,j}\, w_{i+1,j}\, w_{i-1,j}\, w_{i,j+1}\, w_{i,j-1}\}^T, \tag{1}$$

where the right hand side denotes a column matrix written as the transpose of a row matrix. Using the classical thin plate theory, the internal strain components for a curved plate in bending consists of the curvatures χ_r and χ_Φ in r and Φ directions respectively, given by:

$$\{\epsilon_a\} = \begin{Bmatrix} \chi_r \\ \chi_\Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ -\left(\dfrac{\partial w}{r\,\partial r} + \dfrac{\partial^2 w}{r^2\,\partial \Phi^2}\right) \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

If an equally spaced grid is used for discretisation with Δr and $\Delta \Phi$ as the intervals in the r and Φ directions respectively, the right hand side of Eq. (2) may be expressed in finite difference form and the strain components $\{\epsilon_a\}$ will be related to the displacements $\{\delta_a\}$ through the relation matrix $[B_a]$ as:

$$\{\epsilon_a\} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta r^2} \\ -\left(\dfrac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2R_a \Delta r} + \dfrac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{R_a^2 \Delta \Phi^2}\right) \end{Bmatrix} = [B_a]\{\delta_a\}, \tag{3}$$

where
$$[B_a] = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\Delta r^2} & \dfrac{-1}{\Delta r^2} & \dfrac{-1}{\Delta r^2} & 0 & 0 \\ \dfrac{2}{R_a^2 \Delta \Phi^2} & \dfrac{-1}{2R_a \Delta r} & \dfrac{1}{2R_a \Delta r} & \dfrac{-1}{R_a^2 \Delta \Phi^2} & \dfrac{-1}{R_a^2 \Delta \Phi^2} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

The stress resultants for class A elements consist of the bending moments M_r and M_Φ in the radial and tangential directions respectively. Using cylindrical orthotropic theory, the stress resultants $\{N_a\}$ can be expressed in terms of the strain components $\{\epsilon_a\}$ through the elasticity relations as

$$\{N_a\} = \begin{Bmatrix} M_r \\ M_\Phi \end{Bmatrix} = [D_a]\{\epsilon_a\}, \tag{5}$$

where
$$[D_a] = \begin{bmatrix} D_r & D_1 \\ D_1 & D_\Phi \end{bmatrix}. \tag{6}$$

In Eq. (6), the radial and tangential bending rigidities D_r and D_Φ and the cross rigidity D_1 may be expressed more exactly as:

$$\begin{aligned} D_r &= \frac{E_r t^3}{12(1 - \nu_r \nu_\Phi)}, \qquad D_\Phi = \frac{E_\Phi t^3}{12(1 - \nu_r \nu_\Phi)}, \\ D_1 &= \frac{\nu_r E_\Phi t^3}{12(1 - \nu_r \nu_\Phi)} = \frac{\nu_\Phi E_r t^3}{12(1 - \nu_r \nu_\Phi)}, \end{aligned} \tag{7}$$

in which E_r, ν_r and E_Φ, ν_Φ are the modulus of elasticity and Poisson's ratio in the radial and tangential directions respectively. For an isotropic material

$$E_r = E_\Phi = E \quad \text{and} \quad \nu_r = \nu_\Phi = \nu. \tag{8}$$

The potential energy of a class A element is then obtained as

$$\pi_a = \iint \tfrac{1}{2}\{\delta_a\}^T [B_a]^T [D_a][B_a]\{\delta_a\} r\, dr\, d\Phi - \{\delta_a\}^T \{q\}, \tag{9}$$

where $\{q\}$ represents the external surface forces on the element, given by

$$\{q\} = \{Q \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \tag{10}$$

in which $Q = P$ for a concentrated load P at node $w_{i,j}$
and $Q = \int\int p_z r\, dr\, d\Phi$ for uniformly distributed load p_z normal to the slab.

Since all the matrices of Eq. (9) are constant, Eq. (9) may be written as:

$$\pi_a = \tfrac{1}{2}\{\delta_a\}^T [B_a]^T [D_a][B_a]\{\delta_a\} \Delta S_a - \{\delta_a\}^T \{q\}, \tag{11}$$

where ΔS_a is the class A elemental area given by $\Delta S_a = R_a \Delta r \Delta \Phi$, and $Q = p_z R_a \Delta r \Delta \Phi$ for uniformly distributed load.

Minimising the potential energy, the equilibrium equations are obtained from the condition $\delta \pi_a = 0$ as:

$$[B_a]^T [D_a][B_a]\{\delta_a\} \Delta S_a - \{q\} = 0, \tag{12}$$

which yields the class A element matrix $[k_a]$ as:

$$[k_a] = [B_a]^T [D_a][B_a] \Delta S_a \tag{13}$$

and $\{q\}$ as the element load vector.

Class B elements: The nodal displacements associated with the element for considering potential energy due to twisting alone are (Fig. 1):

$$\{\delta_b\} = \{w_{i+1,j+1}\, w_{i,j}\, w_{i+1,j}\, w_{i,j+1}\}^T. \tag{14}$$

The internal strains are due to the twisting curvature $\chi_{r\Phi}$ expressed by the strain matrix $\{\epsilon_b\}$ as:

$$\{\epsilon_b\} = \{\chi_{r\Phi}\} = \left\{-2\left(\frac{\partial^2 w}{r\,\partial r\,\partial \Phi} - \frac{\partial w}{r^2\,\partial \Phi}\right)\right\}. \tag{15}$$

Use of finite-difference relations in Eq. (15) to express $\{\epsilon_b\}$ in terms of $\{\delta_b\}$ through the relation matrix $[B_b]$ yields:

$$\begin{aligned}\{\epsilon_b\} &= \left\{-2\left(\frac{\partial^2 w}{r\,\partial r\,\partial \Phi} - \frac{\partial w}{r^2\,\partial \Phi}\right)\right\} \\ &= \left\{-2\left(\frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j} + w_{i,j} - w_{i,j+1}}{R_b \Delta r \Delta \Phi} - \frac{w_{i+1,j+1} + w_{i,j+1}}{2 R_b^2 \Delta \Phi} + \frac{w_{i,j} + w_{i+1,j}}{2 R_b^2 \Delta \Phi}\right)\right\} \\ &= [B_b]\{\delta_b\},\end{aligned} \tag{16}$$

where R_b = radius at the centre of class B element, and

$$[B_b]_{1\times 4} = [(c-d)\,(-c-d)\,(d-c)\,(c+d)], \tag{17}$$

where $$c = \frac{1}{R_b^2 \Delta \Phi} \quad \text{and} \quad d = \frac{2}{R_b \Delta r \Delta \Phi}.$$

The internal forces $\{N_b\}$ consist of the twisting moment $M_{r\Phi}$ alone and expressed in terms of the strain $\{\epsilon_b\}$ as:

$$\{N_b\} = \{M_{r\Phi}\} = \underset{1\times 1}{[D_b]}\{\epsilon_b\}, \tag{18}$$

where

$$\underset{1\times 1}{[D_b]} = [D_{r\Phi}]. \tag{19}$$

In Eq. (19), $D_{r\Phi}$ is the twisting rigidity given by $D_{r\Phi} = \frac{G_{r\Phi}\, t^3}{12}$, where $G_{r\Phi}$ is the shear modulus of elasticity. For an isotropic plate, $D_{r\Phi} = \frac{E\, t^3}{24\,(1+\nu)}$.

Following the same procedure as before, the potential energy of a class B element is obtained as

$$\begin{aligned} \pi_b &= \iint \tfrac{1}{2}\{\delta_b\}^T [B_b]^T [D_b][B_b]\{\delta_b\} r\, dr\, d\Phi \\ &= \tfrac{1}{2}\{\delta_b\}^T [B_b]^T [D_b][B_b]\{\delta_b\} \Delta S_b, \end{aligned} \tag{20}$$

where ΔS_b is the class B elemental area $R_b \Delta r \Delta \Phi$. No external load terms appear in Eq. (20), since all external loads are taken into account in class A elements.

On using the condition $\delta \pi_b = 0$, Eq. (20) yields the equilibrium equations as:

$$[B_b]^T (D_b][B_b]\{\delta_b\} \Delta S_b = 0 \tag{21}$$

and the class B element matrix $[k_b]$ as:

$$\underset{4\times 4}{[k_b]} = \underset{4\times 1}{[B_b]^T}\ \underset{1\times 1}{[D_b]}\ \underset{1\times 4}{[B_b]} \Delta S_b. \tag{22}$$

Boundary elements: Depending on its position along the boundaries, the class A element has eight other forms, denoted by A_2 through A_9 as shown in

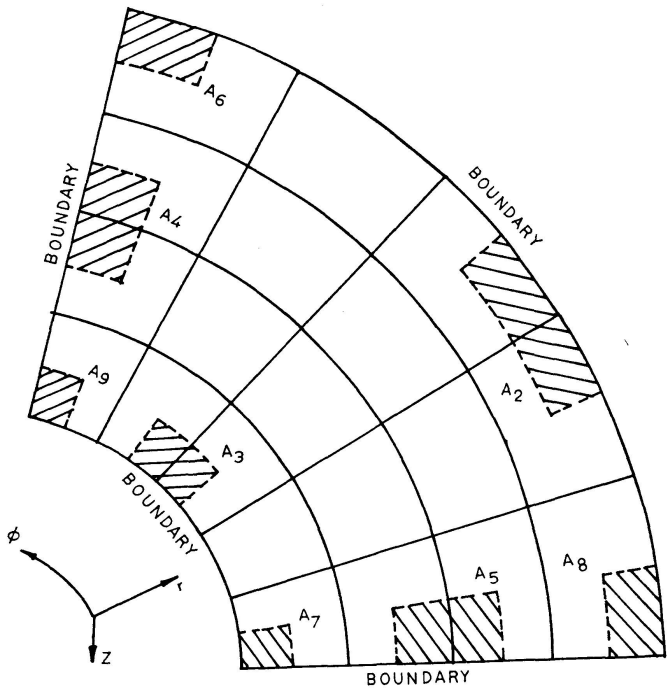


Fig. 2. Boundary elements.

Fig. 2, when the pivotal node $w_{i,j}$ lies on the boundary. For expressing $\{\epsilon_a\}$ in terms of displacements within the region, the rotation $\theta_1\left(=\frac{\partial w}{\partial r}\right)$ is introduced at the boundary r = constant, and the rotation $\theta_2\left(=\frac{\partial w}{r\,\partial \Phi}\right)$ is introduced at the boundary Φ = constant. Table 1 gives the finite difference expressions of the various terms in $\{\epsilon_a\}$ required for the boundary elements A_2 through A_9. The relation matrix $[B_a]$, the nodal displacement vector $\{\delta_a\}$ and the elemental area ΔS_a are modified accordingly for calculating the boundary element matrices according to Eq. (13).

Table 1. Finite difference expressions for different terms of strain components modified for boundary elements (see Fig. 2)

Terms of strain components	Finite difference expression for boundary elements	
	elements A_2, A_6, A_8[1])	elements A_3, A_7, A_9[1])
$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$	$\frac{2(\Delta r\,\theta_{1\,i,j}+w_{i-1,j}-w_{i,j})}{\Delta r^2}$	$\frac{2(w_{i+1,j}-w_{i,j}-\Delta r\,\theta_{1\,i,j})}{\Delta r^2}$
$\frac{\partial w}{r\,\partial r}$	$\frac{\theta_{1\,i,j}}{R_a}$	$\frac{\theta_{1\,i,j}}{R_a}$
	elements A_4, A_6, A_9[1])	elements A_5, A_7, A_8[1])
$\frac{\partial^2 w}{r^2\,\partial \Phi^2}$	$\frac{2(R_a\Delta\Phi\,\theta_{2\,i,j}+w_{i,j-1}-w_{i,j})}{R_a^2\Delta\Phi^2}$	$\frac{2(w_{i,j+1}-w_{i,j}-R_a\Delta\Phi\,\theta_{2\,i,j})}{R_a^2\Delta\Phi^2}$

[1]) For elements not mentioned against a term, the expression for the term is the same as used in equation (3).

Overall stiffness matrix: The overall stiffness matrix $[k_T]$ and the overall load vector $\{q_T\}$ of the structure are obtained by taking the sum of all the element matrices and element load vectors respectively, arranged corresponding to the overall nodal displacement vector $\{\delta_T\}$:

$$[k_T] = \sum_i [k_i] \tag{23}$$

and

$$\{q_T\} = \sum_j \{q_j\}, \tag{24}$$

where i stands for all the elements A, A_2 through A_9 and B, and j stands for the elements A and A_2 through A_9. The equilibrium equation is then obtained as:

$$[k_T]\{\delta_T\} = \{q_T\}. \tag{25}$$

The unknown displacements $\{\delta_T\}$ are evaluated by solving Eq. (25).

Stress resultants: Knowing $\{\delta_T\}$, the element nodal displacement vector $\{\delta_a\}$ or $\{\delta_b\}$ may be formed for each element. The bending moments M_r and

M_Φ are evaluated at the pivotal node i,j of class A elements using Eqs. (3) and (5), and the twisting moment $M_{r\Phi}$ is evaluated at the centre of class B elements using Eqs. (16) and (18).

Illustrative Examples

Two numerical examples are analysed using the method outlined above. The first one is an isotropic curved plate simply-supported at the straight edges and the second is a stiffened curved plate exhibiting orthotropic properties. The details are given below:

Example 1: This example has been investigated experimentally and analytically by COULL and DAS [1] and also analytically by CHEUNG [5]. The structure consists of a 3/16 inch thick curved plate of black perspex of inner radius 7 inch and outer radius 13 inch and simply supported along the straight edges with an included angle of 60° between the supports (Fig. 3). Results are

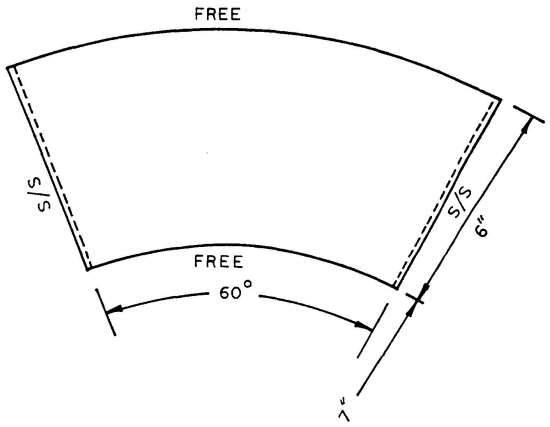


Fig. 3. Example 1.

obtained for three different load cases consisting of a unit concentrated load at mid-span at outer radius, mid-radius and inner radius. An 8×8 mesh is used in the present analysis.

Example 2: This example has been investigated experimentally and analytically by HEINS and HAILS [3]. It consists of a curved steel deck plate stiffened by 6 longitudinal curved girders of steel bulb Tee section (Fig. 4). The inner radius is 33.5 inch and outer radius 48.5 inch with the girders at equal intervals of 5 inch. The included angle is 120°. The supports are placed along the radial lines L_6 and R_6 and loads of 50 lb each are placed at the girders along the radial line R_3. This corresponds to the Run II test of HEINS and HAILS [3]. The orthotropic properties, determined by the authors [3] from model tests and adopted for analysis by finite difference, are

$D_r = 0.477 \times 10^3$ lb-in., $D_\Phi = 2631 \times 10^3$ lb-in.

and $D_{r\Phi} = 13.8 \times 10^3$ lb-in. with $\nu_r = \nu_\Phi = 0$.

The same values are used in the present analysis.

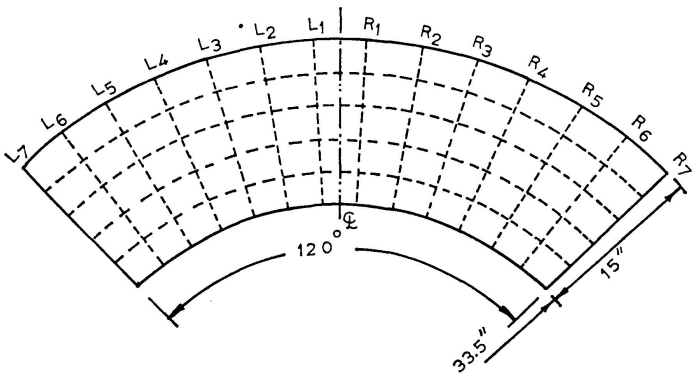


Fig. 4. Example 2.

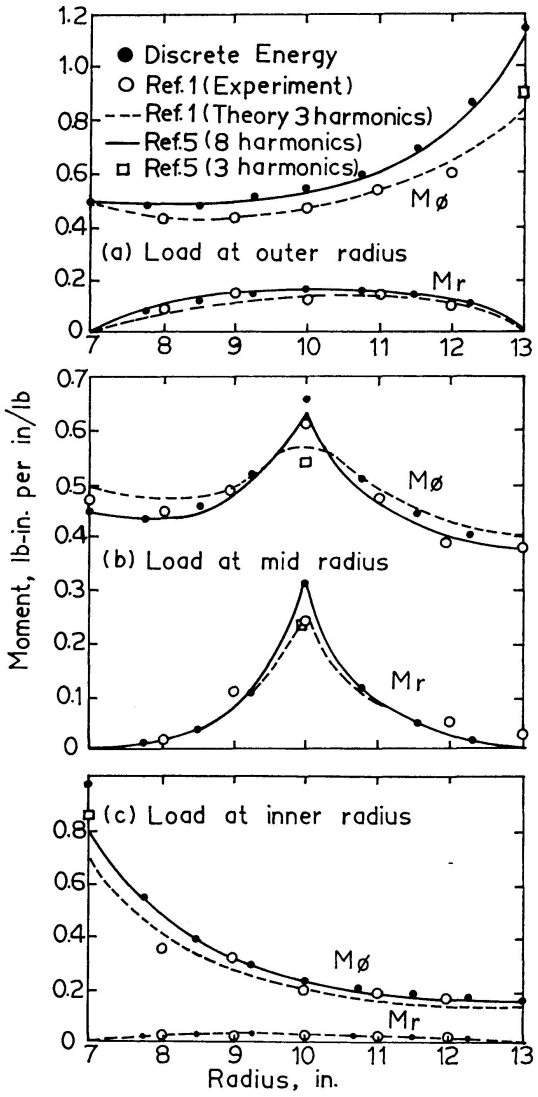


Fig. 5. Comparison of moments. Example 1.

Comparison of results: For example 1, the comparison of radial moments M_r and tangential moments M_Φ at mid-span is shown in Fig. 5. Poisson's ratio is taken as $\nu = 0.35$. Theoretical and experimental values of COULL and DAS [1] and the theoretical values of CHEUNG [5] are taken for comparison. It is seen that the results obtained by the "discrete energy" method proposed here are closer to those obtained by Cheung's finite strip method using 8 harmonics. At the points of application of loads, values of moments given by "discrete energy" method are higher than those of the finite strip method. It may be inferred that with the use of a greater number of harmonics the finite strip values will approach the "discrete energy" values. Eight curved finite strips have been used in Cheung's analysis while the present analysis uses an 8×8 mesh. Values of moments obtained by using 3 harmonics as reported in references 1 and 5 are generally lower. The difference is greater in the neighbourhood of concentrated loads and this may be attributed to the slow convergence of moments in the vicinity of concentrated loads.

For example 2, the radial distribution of deflection along the radial line L_1 (Fig. 4) and the circumferential distribution of deflection along the outer girder are compared with the experimental and theoretical values of HEINS and HAILS [3] and are shown in Fig. 6. It is seen that the results obtained by the "discrete energy" method using both the 5×11 mesh (5 panels radially and 11 panels circumferentially) and the 10×11 mesh are nearer to the experimental values. Furthermore, the difference between the results of these

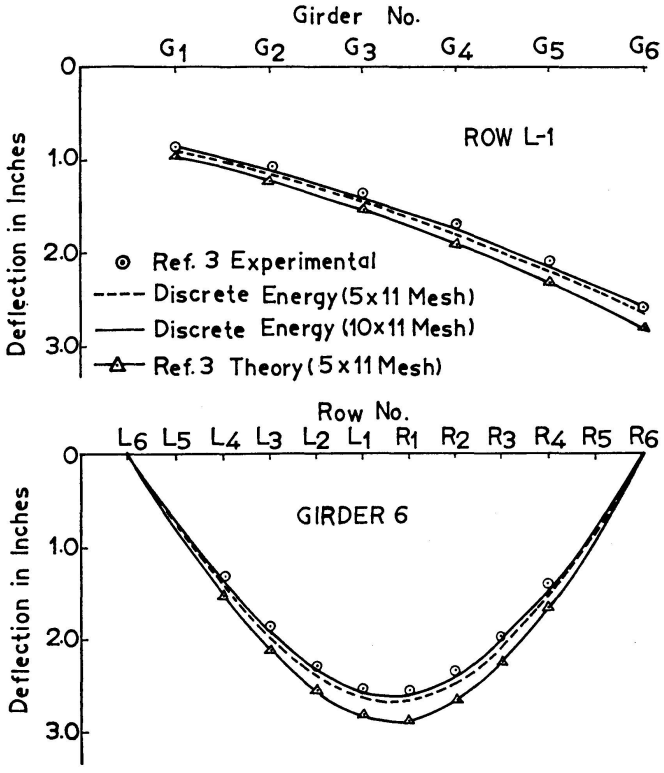


Fig. 6. Comparison of deflections. Example 2.

two meshes is very less. This emphasises the fact that even a coarse mesh can yield vera satisfactory results of deflections for the discrete energy method.

A Fortran program prepared for this formulation has taken approximately one minute on the CDC 3600 Computer to obtain each set of results. Half-banded Gaussian elimination technique has been used for the solution of the matrix equation.

Conclusions

It has been shown that the discrete energy formulation for orthotropic curved plates as presented here provides a convenient and efficient matrix method for obtaining moments and deflections in curved plate structures with any boundary condition and loading.

Compared with the finite element method, the matrix manipulations are simpler since no integrations are involved. The number of unknown displacements to be evaluated are also less. Compared with the finite difference method, the resulting matrix is symmetrical. As a result, the complete formulation and solution can be efficiently and conveniently processed by a digital computer.

References

1. Coull, A. and Das, P. C.: Analysis of curved bridge decks. Proceedings, The Institution of Civil Engineers, London, May 1967, Vol. 37, pp. 75–85.
2. Yonezawa, H.: Moments and free vibrations in curved girder bridges. Proceedings of the American Society of Civil Engineers. Journal of the Engineering Mechanics Division, February 1962, Vol. 88, No. EM 1, Proceedings Paper 3052, pp. 1–21.
3. Heins, C. P., Jr., and Hails, R. L.: Behaviour of stiffened curved plate model. Proceedings of the American Society of Civil Engineers. Journal of the Structural Division, November 1969, Vol. 95, No. ST 11, Proceedings Paper 6876, pp. 2353–2370.
4. Bell, L. C. and Heins, C. P.: Analysis of curved girder bridges. Proceedings of the American Society of Civil Engineers. Journal of the Structural Division, August 1970, Vol. 96, No. ST 8, Proceedings Paper 7462, pp. 1657–1673.
5. Cheung, Y. K.: The analysis of cylindrical orthotropic curved bridge decks. Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 29, Part 2, 1969, pp. 41–52.
6. Buragohain, D. N. and Ramesh, C. K.: A discrete analysis technique for folded plates with openings and overhangs. The Indian Concrete Journal, April 1971, Vol. 45, No. 4.
7. Buragohain, D. N. and Bhat, V. V.: Discrete analysis of curved plates in bending and plane stress. Proceedings of the symposium on "Recent developments in analytical, experimental and constructional techniques applied to engineering structures", held at Regional Engineering College, Warangal, India, on February 5–6, 1971.

Summary

The paper presents a method for analysing a curved bridge deck with arbitrary boundary conditions and loading and possessing cylindrical orthotropic material properties. Using classical thin plate theory in polar coordinates, extremum principles are utilised to derive element matrices for two classes of elements into which the structure is discretised: elements in bending and elements in twisting. Using matrix procedures, the entire formulation is automated on a digital computer. Comparison of results with available exact and approximate solutions shows the efficiency of the method.

Résumé

Le travail présente une méthode pour analyser la chaussée d'un pont courbe et orthotrope sous des conditions de limite et charges arbitraires. En utilisant la méthode classique sur les dalles minces dans les coordonnées polaires, on travaille avec des conditions extrêmes pour élaborer des matrices d'éléments pour les deux classes d'éléments en lesquelles la structure est divisée: éléments de flexion et éléments de torsion. En travaillant avec les procédures de matrices, la formulation entière est automatisée sur un computer digital. La comparaison des résultats avec des solutions exactes et approximatives disponibles montre l'efficacité de cette méthode.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit bietet eine Methode, um eine gekrümmte zylindrische orthotrope Brückenfahrbahn unter beliebigen Grenzbedingungen zu analysieren und zu belasten. Unter Anwendung der klassischen Theorie der dünnen Platten in Polarkoordinaten wird mit Extremalbedingungen gearbeitet, um diskretisierte Elementmatrizen zu gewinnen, in welchen die Struktur in Biegungs- und Drillelemente unterteilt ist. Bei Anwendung der Matrixverfahren wird die vollständige Formulierung automatisch von einem Digital-Computer ausgeführt. Der Vergleich der Resultate mit vorhandenen genauen und Näherungslösungen zeigt die Wirksamkeit dieser Methode.

Leere Seite
Blank page
Page vide

The Fatigue Strength of High Tensile Steel Wire Cable Subjected to Stress Fluctuations of Small Amplitude

Résistance à la fatigue de câbles de fil d'acier hautement stables sous l'influence de fluctuations d'effort de petite amplitude

Ermüdungsfestigkeit hochfester Stahldrahtkabel unter Einwirkung von Beanspruchungsschwankungen kleiner Amplitude

M. S. G. CULLIMORE
Senior Lecturer in Civil Engineering, University of Bristol

This work was prompted by an interest in the fatigue strength of stranded wire rope in suspension bridge hangars, where the rope sustains a tensile load which is normally less than half the ultimate failing load and suffers proportionally small fluctuations due to the varying live loads on the bridge. Under these conditions a long life might be expected and so the investigation was concerned with a study of the fatigue life of the cable at the lower stress end of the S-N curve, and in particular with the determination of the endurance limit.

As the capacity of the available fatigue testing equipment was insufficient to test full size ropes, 0.6 in (15 mm) diameter concrete pre-stressing strand was used in the experiments. It consisted of seven 0.2 in (5 mm) diameter wires of ultimate tensile strength 112.2 tonf/in^2 (1730 N/mm^2), and had the advantage that its geometry was simple compared with a multi-layer rope, and the individual wires were large enough for strain measurements to be made on them reasonably easily.

The initial objective of the fatigue tests was to establish the S-N curve for this cable in fluctuating direct tension at a mean stress of 40 tonf/in^2 (618 N/mm) which was considered relevant to the bridge suspender application. The maximum practicable speed of 800 load cycles per minute was used for all the tests and, in all but the early tests, an electrical cut off device was fitted which stopped the test after the failure of one wire.

The first set of specimens, each about 24 in (610 mm) long, were made with

Table I. Specimens with coned white metal ends

a) Mean stress = 40 tonf/in² (618 N/mm²)

	Stress fluctuation Semi-range r tonf/in² (N/mm²)					
	8 (123)	7 (108)	6.5 (100)	6.3 (97)	6 (93)	5.1 (79)
Cycles to failure $\times 10^{-6}$	1.240 1.067 0.581	1.293	5.07	1.516 0.745	5.91 1.833	1.764 1.053

b) Mean stress = 70 tonf/in² (1080 N/mm²)

	r tonf/in² (N/mm²)		
	8.9 (137)	6.3 (97)	5.1 (79)
Cycles to failure $\times 10^{-6}$	0.197 0.300	1.023	1.025

coned white metal ends fitting special adaptor sockets which enabled them to be held in the Losenhausen testing machine. The results of these tests, which are shown in Table 1, indicate a shorter life than might have been expected. It was thought that this might have been due to corrosion caused by the flux used in making the white metal ends, as all the fractures occurred near the ends in the region likely to have been affected by the flux. Thus, although white metal ends were more relevant to the bridge rope problem, because of the possibility that the basic fatigue behaviour of the cable was being obscured, it was decided that some other device should be adopted for holding the ends.

The most satisfactory device devised consisted of a pair of plain half-round cylindrical steel collets about $3^1/_2$ in (90 mm) long which fitted around the cable and were separated from it by pieces of 16 swg (1.6 mm) half-hard aluminium shim, pre-formed to fit inside the collets. The collets were held in the standard wedge grips of the testing machine and the initial gripping was assisted by a small bush lightly welded to the end of the wire which rested on top of the collets, so pulling them into the grips. This bush was shown to play very little part in transmitting load and, in cases where the weld bead was broken in the initial gripping, the bush could be removed leaving the cable gripped wholly by the collets.

During the welding of the bushes a large aluminium block was clamped around the end of the cable to act as a heat sink minimising the heating of the cable. Care was taken to prevent any weld splash reaching the specimen after

it has been demonstrated that a very tiny stray bead of weld had been the origin of a premature failure.

In all cases, and also with the specimens with white metal ends, failure occurred in one of the outer helical wires; in no case did a core wire fail. This same effect was observed by WARNER and HULSBOS [1] in tests on a similar 7-wire strand. The flexure of the helical wire as the tension load is applied to the cable causes local bending stresses which are about 7% higher than the average axial stress. Thus the range of stress variation for the helical wires is greater than that of the core wire and this, coupled with the residual stresses caused by pre-forming, might be expected to give them a lower fatigue life. However, measurements of strain indicate that, at the mean load used in the fatigue tests, the relative strain between the core and helical wires for a change of 1 ton (10 kN) in the tension was about 6×10^{-5}, and it is the fretting caused by this relative movement of the contacts between the wires that is the most probable cause of failure. Fretting will also occur between individual helical wires caused by flexure and consequent circumferential relative movement. Failures were seen to originate at the contacts between a helical wire and the core, between individual helical wires, and at the outside of the wires at the edge of the grips. No correlation between the fatigue strength and the type of failure was evident and a roughly equal number of specimens failed in each of the three ways.

No significant rise in temperature of the specimen was observed unless the test was continued after the first wire had fractured, when larger relative movements occurred.

The results of the fatigue tests on specimens with plain ends are shown in Table II. In analysing the data the results from the unbroken specimens were excluded and as only two specimens failed at 7.1 tonf/in² and three at 9.7 tonf/in² there was insufficient data for these two stress levels to be included.

Table II. Plain specimens

Mean stress 40 tonf/in² (618 N/mm²)

r tonf/in² N/mm²	7.1 (110)	9.7 (150)	11.1 (172)	12.5 (193)	13.8 (214)	15.2 (234)
$N=$ Cycles to failure $\times 10^{-6}$	9.34*	11.16*	1.23	1.20	0.382	0.412
	4.57*	3.07	4.37	0.67	0.821	1.33
	5.44*	2.12	0.706	0.814	3.16	0.283
	4.87*	5.66*	2.56	0.539	0.347	0.142
	4.75*	5.37*	8.02	0.314	0.354	0.429
	6.62	10.23*	11.4*	4.99		
	4.20	1.37		6.51*		
$\log^{-1}(\log \bar{N})$	—	—	2.389	0.906	0.656	0.394

* Unbroken.

A mean value of $\log N$, where N is the number of cycles to failure, was taken for each of the remaining four stress levels and the equation of the mean line to fit this data was determined as

$$\log N = \frac{58.0593}{r} - 0.6423 + 0.1600\, r,$$

where r is the semi-range of the stress fluctuation in tonf/in² (or $\log N = \frac{896.6852}{r} - 0.6423 + 0.01036\, r$ where r is in N/mm²). This curve is plotted in Fig. 1 which also shows the actual test results. Fig. 1 also shows the results for the cables with coned white-metal ends, already been referred to (Table I), which are shown to have a fatigue strength clearly inferior to those with plain ends.

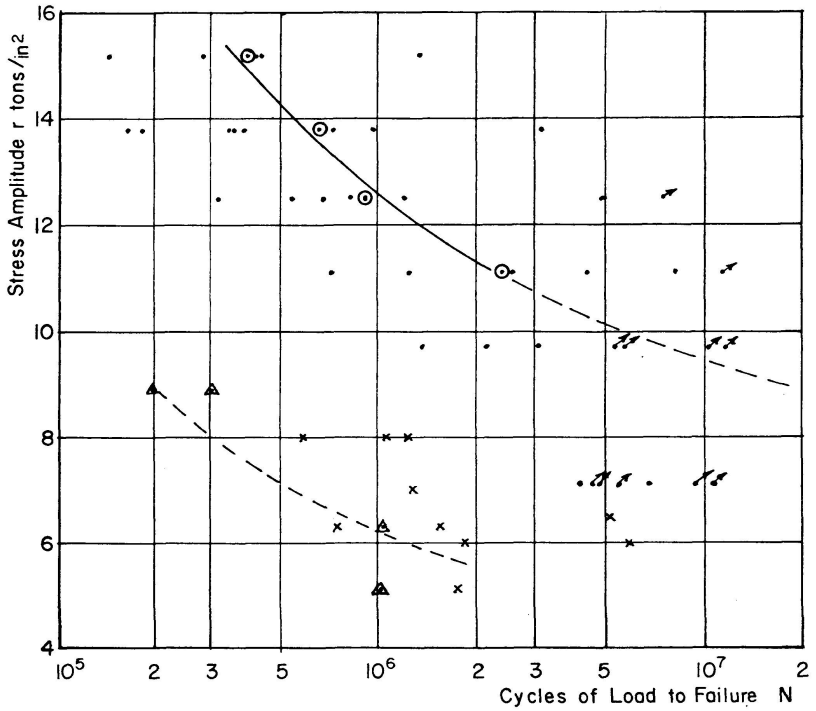


Fig. 1. Fatigue Tests on 7-wire Cable.

Key: • Plain ends, ⊙ $\log^{-1} \log \bar{N}$. White metal coned ends: × $\sigma_m = 40$ tons/in², △ $\sigma_m = 70$ tons/in².

The results are not readily comparable with those of previous investigations described by TIDE and VAN HORN [2], which include that already referred to [1] as these have used loading cycles with a constant lower stress and a varying upper stress and have been concerned with lives of up to the order of 2×10^6, i.e. much shorter than in this work. However, from the strength for a life of $N = 1 \times 10^6$ for a constant lower stress of 40% of the ultimate strength from reference [1] a simple linear Goodman relationship predicts a strength of 12.3 tonf/in² (190 N/mm²) at a mean stress of 40 tonf/in²

(618 N/mm^2), which is in good agreement with 12.6 tonf/in^2 (195 N/mm^2) at $N = 1 \times 10^6$ obtained from the mean line for these tests.

Fatigue data [3] on the wire of which the cable is made indicates an endurance limit at a mean stress of 40 tonf/in^2 (618 N/mm^2) of about 19 tonf/in^2 (294 N/mm^2), which is double that of the value for the cable (9.4 tonf/in^2 145 N/mm^2) predicted from the calculated mean line. Nevertheless this is a fluctuation of $\pm$ 23.5% on the mean stress, which is very much greater variation of live load on dead load than might normally be expected in practice.

An estimation of the "safe life" for 90% and 99% of survivals with 50% confidence, is shown in Table III. It will be noted that the endurance in the first case is under one third of the mean endurance, and in the second, about a third of that.

Table III. "Safe Life" Estimation
(50% Confidence)

Stress Amplitude $\pm r$ tonf/in^2	r as % of UTS	Actual Mean Endurance $\times 10^{-5}$	Estimated Endurance $\times 10^{-5}$ % of Survivals	
			90	99
11.1	9.9	23.49	6.25	2.06
12.5	11.2	9.06	2.50	0.86
13.8	12.3	6.56	1.90	0.68
15.2	13.6	3.94	1.28	0.51

The large scatter of the results is probably due to variations in the conditions initiating fretting, which causes failure. These may arise from uneven roughness at the contacts due to rusting and from disturbance of the lay of the cable in the initial gripping causing unequal stressing of the individual wires and changes of the geometry of the contacts between them. Both are, however, variations which can be expected in practice.

A feature of the calculated mean line in Fig. 1 is the absence of any obvious endurance limit of stress, below which no further damage would occur. Some confirmation of the absence of an endurance limit is provided by the results of a small number of two-step loading tests given in Table IV. These show that for a semi-range of stress $r = 15.2$ tonf/in^2 (234 N/mm^2) the mean life with a preliminary loading of $r = 9.7$ tonf/in^2 (150 N/mm^2) is less than that with a preliminary loading of 7.1 tonf/in^2 (110 N/mm^2). In both cases the mean life is less than that for a one step test at the higher stress, indicating that some damage has been caused by the preliminary stressing, which might therefore be assumed to be above the endurance limit. The values of $\sum n/N$, shown in the right hand column of Table IV, ranging from 0.592 to 1.276 with an average of 0.948, give some indication of the probable accuracy of Miner's rule in a cumulative damage estimation in this case.

Table IV. Two Step Loading Tests

a) Step 1, $r_1 = \pm$ 9.7 tonf/in² (150 N/mm²); $N_1^* = 7.834 \times 10^6$
Step 2, $r_2 = \pm 15.2$ tonf/in² (234 N/mm²); $N_2^* = 4.06 \times 10^5$

Specimen No.	Cycles of Load $\times 10^{-6}$		$\sum \frac{n}{N}$
	Step 1 n_1	Step 2 n_2	
1	5.663	0.233	1.276
2	5.373	0.196	1.152
3	0.172	0.237	0.606

Mean endurance at Step 2, Log^{-1} (log n_2) $= 2.21 \times 10^5$.

b) Step 1, $r_1 = \pm$ 7.1 tonf/in² (110 N/mm²); $N_1^* = 466.7 \times 10^6$
Step 2, $r_2 = \pm 15.2$ tonf/in² (234 N/mm²); $N_2^* = 4.06 \times 10^5$

Specimen No.	Cycles of Load $\times 10^{-6}$		$\sum \frac{n}{N}$
	Step 1 n_1	Step 2 n_2	
1	4.57	0.280	0.592
2	4.87	0.381	0.948
3	4.75	0.471	1.090
4	10.62	0.319	1.013
5	10.44	0.276	0.904

Mean endurance at Step 2, $\log^{-1}$ (log n_2) $= 3.38 \times 10^6$.

* Mean endurance from Fig. 1 for appropriate value of r.

Where fatigue failure results from surface cracks initiated by fretting – as in the cables tested – it has been shown [4] that there is a marked reduction of fatigue strength, and that the dominant parameters were the range of slip in the fretting area and the mean stress. Under fretting conditions the fatigue strength of a 100 tonf/in² (1540 N/mm²) steel, at a mean stress of 40 tonf/in² (618 N/mm²), could be reduced to ± 3 tonf/in² (45 N/mm²) for 3×10^7 cycles. Some fatigue damage was nearly always found to result from fretting with a slip range of a few ten thousandths of an inch which would lead to a reduced fatigue strength in subsequent higher loadings, even without fretting.

Although the fretting conditions in which the above results were obtained were not identical to those in the wire cable, and the composition of the steel was different, it is reasonable to conclude that the same principles apply and that small fluctuations of stress in the cable will cause fatigue damage, the effects of which must be taken into account in any cumulative damage assessment.

The importance of these small stresses in such a calculation is the probability of there being a much larger number of occurrences of them in a given period of time than of the higher stresses. The loads at the lower end of a

traffic loading spectrum have a larger frequency of occurrence than the larger ones. Vibrations, such as are excited by the wind, are also likely to cause a large number of low amplitude stress variations; an oscillation of frequency 14 Hz, for instance, existing for only 200 hours per year will accumulate 100 million cycles in ten years.

The conclusions of this investigation are that, for the stress levels examined, there is no lower value of the stress fluctuation below which failure of the cable will not occur in less than ten million cycles, and that it is not safe to assume endurances greater than this for other lower, stresses.

Notation

n Number of cycles of loading applied.
N Number of cycles of load to cause failure.
$\bar{N}$ Mean value of N for several specimens.
r Variation of the applied stress about a mean stress.
UTS Ultimate tensile stress.

Note: The S.I. equivalents to the values in British units have been rounded off.

Acknowledgement

The author wishes to thank GKN Somerset Wire Company for providing the material for the specimens.

References

1. Warner, R. F., and Hulsbos, C. L.: Fatigue Properties of Prestressing Strand. PCI Journal Feb. 1966.
2. Tide, R. H. R., and Van Horn, D. A.: A statistical study of the static and fatigue properties of high strength prestressing strand. Fritz Engineering Laboratory Report No. 309.2, Lehigh University Institute of Research.
3. Brereton C. F.: Notes on some push-pull alternating stress tests on corroded cold drawn stress relieved steel wire for prestressed concrete. Structural Engineer, Vol. 39, No. 10, October 1961, pp. 335–9.
4. Field, J. E., and Waters, D. M.: The fretting fatigue strength of a 100 tons/in^2 En 30 B steel. NEL Report No. 340, East Kilbride, Glasgow. National Engineering Laboratory. January 1968.

Summary

In the fatigue tests described the cable was subjected to comparatively small stress fluctuations about a mean stress approximating to the dead load stress appropriate to a structural application. Fatigue failure was caused by fretting at a stress lower than the fatigue strength of the wire of which the cable was made and, for the ranges examined, there was no endurance limit.

Résumé

Dans les tests de fatigue le câble était soumis à des fluctuations d'effort relativement petites autour d'un effort principal approximatif à l'effort de charge qui est attribué à une application structurelle. Des fautes de fatigue étaient causées par le frottement à un effort inférieur à la résistance de fatigue des fils dont le câble était composé. Pour le domaine examiné il n'existait pas de limite d'endurance.

Zusammenfassung

In den beschriebenen Ermüdungstests wurde das Kabel verhältnismässig kleinen Beanspruchungsschwankungen um einen Hauptbeanspruchungswert herum ausgesetzt, welcher annähernd der Traglastbeanspruchung in der baulichen Anwendung entspricht. Ermüdungsfehler entstanden durch Reibung bei einer Beanspruchung, welche kleiner war als die Ermüdungsfestigkeit der Drähte, aus denen das Kabel bestand. Für den untersuchten Bereich bestand kein Dauerhaftigkeitsgrenzwert.

Berechnung der Rissbildung bei auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Stahlbetonbauteilen

Analysis of Cracking in Reinforced Concrete Members Subjected to Bending and Shear

Calcul de la fissuration des éléments en béton armé, sollicités à la flexion à effort tranchant

I. DEUTSCH
Dozent Dr. Ing., Technische Hochschule Timişoara

1. Einführung

Die Rissbildung in gezogenen und auf reine Biegung beanspruchten Bauteilen wurde weitgehend untersucht. Für den am häufigsten auftretenden Fall der Biegung mit Querkraft trifft dies aber leider nicht zu. Eine Erklärung dafür könnte die Tatsache liefern, dass auch die Bemessung der Querbewehrung noch Gegenstand von Diskussionen ist und das Problem der Rissbildung erst nach einer relativen Klärung des Bruchsicherheitsnachweises angeschnitten wurde.

Der Verfasser setzt sich in dieser Arbeit zum Ziel, ausgehend von der allgemeinen Theorie der Rissbildung, von Ergebnissen eigener Versuche und den Untersuchungen verschiedener Forscher bezüglich des Bruchverhaltens von auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Stahlbetonbauteilen, Formeln für die Berechnung des Rissabstandes und der Rissweite abzuleiten. Diese Grössen werden gesondert gewonnen, je nachdem ob der Bruch durch das Biegemoment oder durch die Querkraft verursacht wird.

Dieser Aufsatz behandelt nur den ersten Fall, also die Rissbildung der auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Bauteile, die durch Biegung zum Bruch kommen. Die im Text vorkommenden Bezeichnungen wurden im Anhang zusammengefasst.

2. Die allgemeinen Gleichungen für den Rissabstand und die Rissweite

2.1. Grundlegende Annahmen

Die Ableitung der allgemeinen Gleichungen stützt sich auf verschiedene Annahmen. So wird vorausgesetzt, dass sich bei der Rissbildung (Stadium Ia) die Betondruckzone und die Zugbewehrung vollkommen elastisch verhalten. Dagegen wird für die Betonzugzone eine völlige Plastifizierung angenommen, trotzdem dies nicht ganz der Wirklichkeit entspricht. Es wird ferner angenommen, dass die Querschnitte eben bleiben.

Nach der Rissbildung (Stadium II) sind im Rissquerschnitt nur der gedrückte Beton und die vollkommen elastische Zugbewehrung aktiv. Zwischen den Rissen ist die Zusammenarbeit Beton-Bewehrung gesichert. Die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte wird beibehalten. Die Verteilung der Schubspannungen wird in der Druckzone parabolisch und in der Zugzone, allerdings nur bis zur Achse der Längsbewehrung, rechteckig vorausgesetzt.

Die Zugfestigkeit des Betons wurde im Einklang mit den rumänischen Normen [10] mit Hilfe von Biegeversuchen an Prismen $10 \times 10 \times 30$ cm bestimmt. Dabei wird eine völlige Plastifizierung der Zugzone angenommen, so dass für die Zugfestigkeit gilt:

$$R_t = 3{,}5 \frac{M}{b\,h^2}. \tag{1}$$

Der Einfluss der Haftspannungen auf das Rissverhalten der Stahlbetonbauteile ist komplex. Untersuchungen von J. Faury [7], R. L'Hermite [8] und M. M. Adam [9] zeigten, dass in der Nähe der Bewehrungsstäbe (in einem Umkreis von 2 cm) eine Plastifizierung des Betons auftritt. Deshalb ist die Berücksichtigung der wirklichen Haftverhältnisse schwierig und lohnt sich oft nicht. Vereinfachend kann für die Verteilung der Haftspannungen ein bestimmtes Gesetz angenommen, bei der Berechnung jedoch ein experimentell bestimmter Mittelwert angesetzt werden. So erscheint in der Formel für die Berechnung des Rissabstandes (s. Abschnitt 2.3) eine Konstante c_1, die von der Verteilung der Haftspannungen τ_{as} abhängt. Weiter wird aber gemäss den rumänischen Normen [10] für τ_{as} ein Rechteckdiagramm eingeführt.

Die Eigenspannungen wurden vernachlässigt. Ihre Berücksichtigung bereitet aber keine Schwierigkeiten.

2.2. Theorie der Rissbildung bei Biegung mit Querkraft

Der Einfachheit halber wird ein in Feldmitte konzentriert belasteter Einfeldbalken mit Rechteckquerschnitt betrachtet. Das Verhältnis a/h ist genügend gross um den Vorrang des Biegemomentes zu sichern und der Balken ist

so bewehrt, dass ein Biegebruch eintritt (Fig. 1). Die für diesen Lastfall entwickelte Theorie bleibt auch für andere Belastungen gültig.

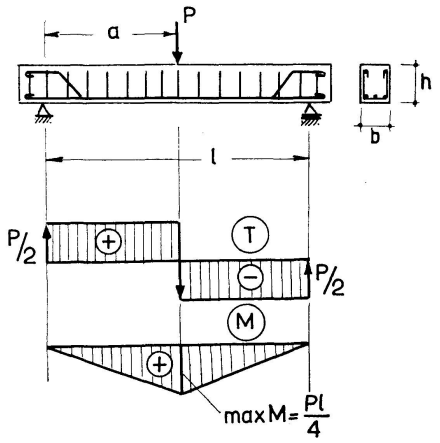


Fig. 1.

Fig. 2a zeigt den Verlauf der in Schrägrissen aufnehmbaren Rissmomente $M_{fi} = M_{bfi} + M_{afi}$. Gleichfalls ist die M^{I}-Kurve aufgetragen. Sie stellt für bestimmte Werte von T, μ und μ_t den Grenzwert von M_z dar, bei dem noch keine Schrägrisse auftreten. Bei einem unendlich kleinen Momentenzuwachs erscheint der erste Riss.

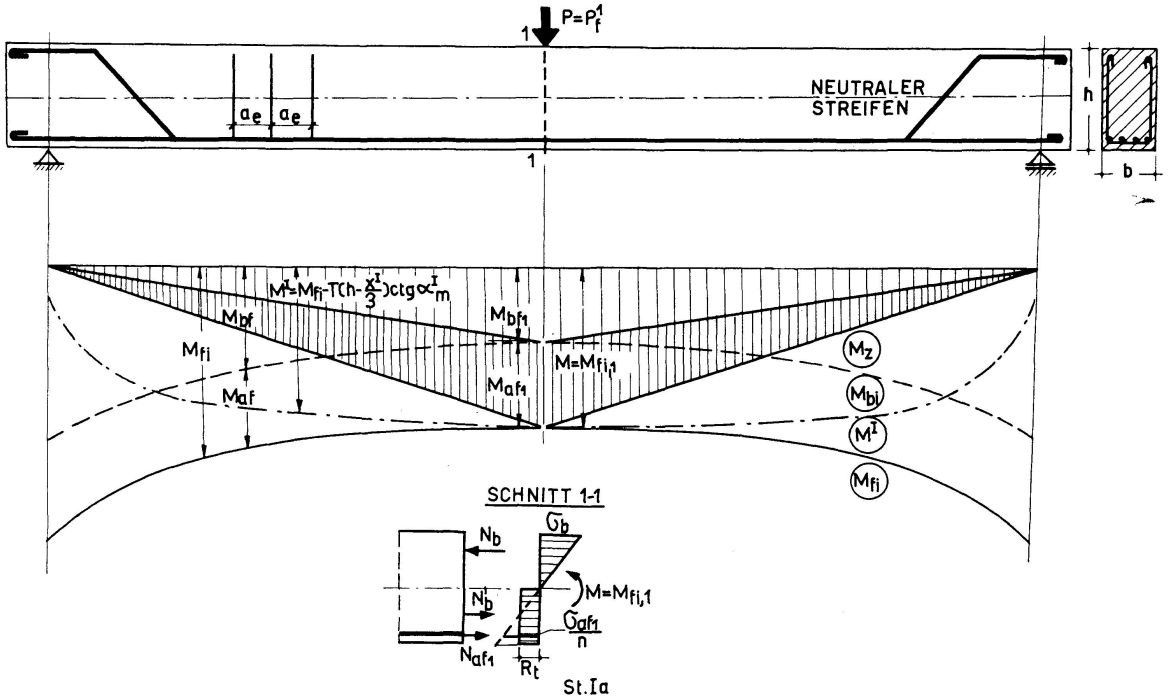


Fig. 2a.

Vor der Rissbildung sind die vom Beton und von der Bewehrung aufgenommenen Spannungen proportional mit den zugehörigen Schnittgrössen und verlaufen in Längsrichtung affin zum M_z-Diagramm (Stadium I). Steigt die

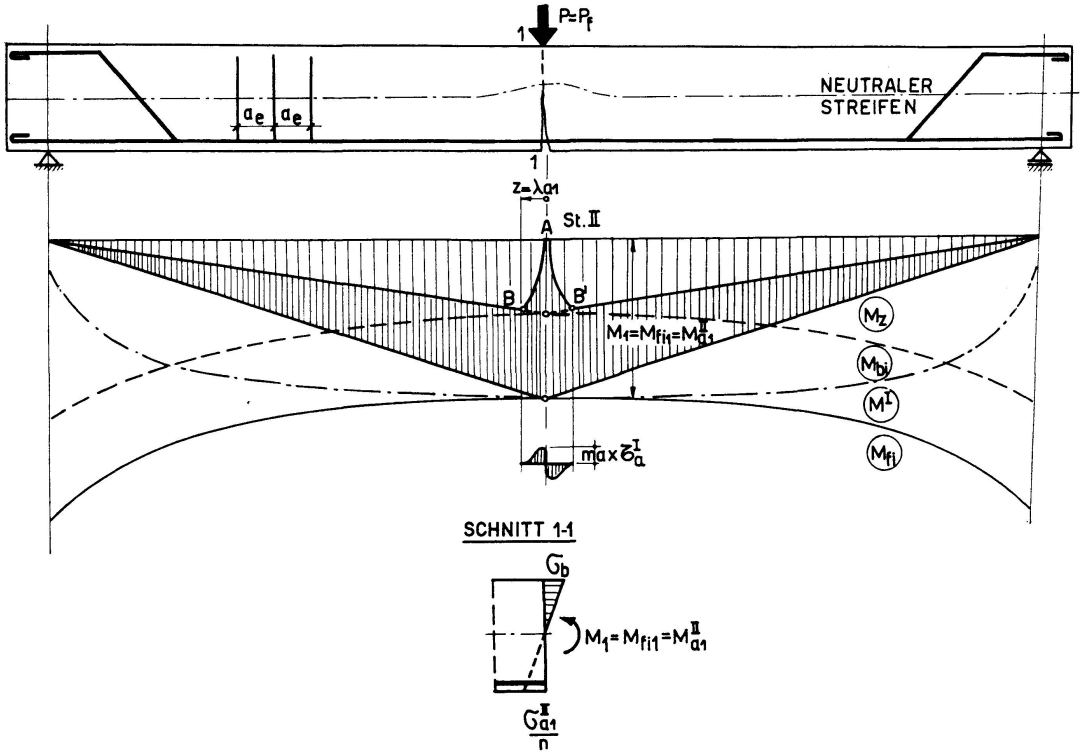


Fig. 2b.

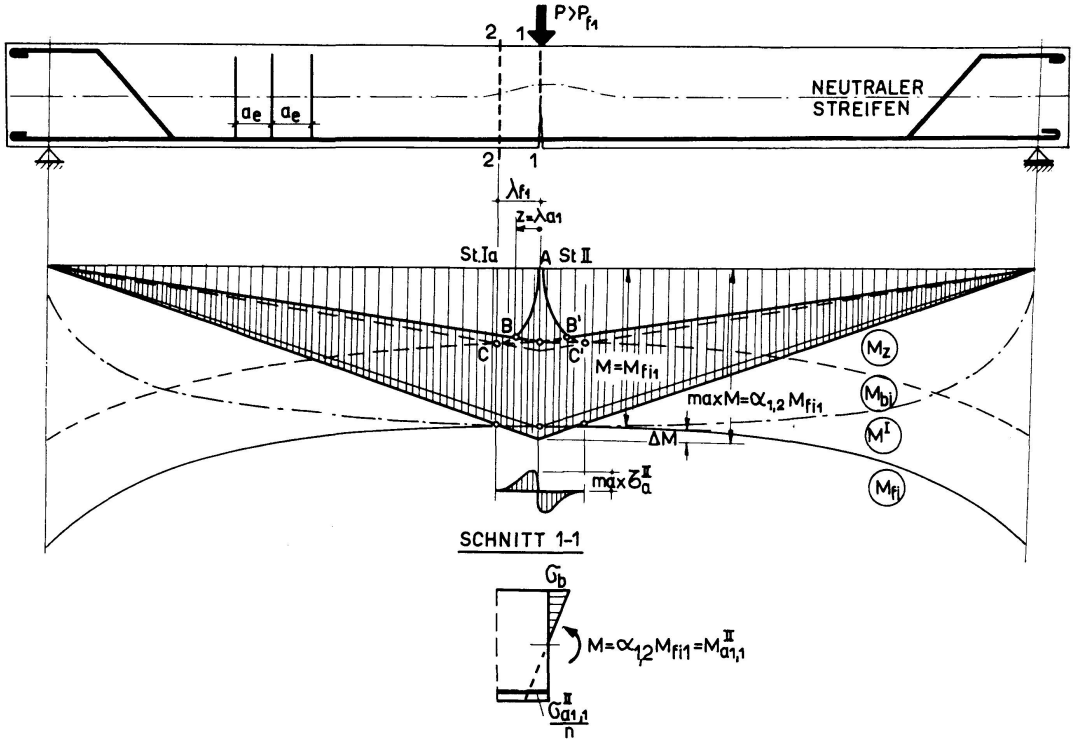


Fig. 2c.

Last von P auf P_{f1}, so dass im Schnitt 1—1 die Betonzugspannung σ_b' den Grenzwert R_t erreicht, so bildet sich ein Riss. Vor Erscheinen des Risses 1 befindet sich der Querschnitt 1—1 im Stadium Ia, mit:

$$\max M = M_{fi,1} = M_{bfi,1} + M_{afi,1}. \tag{2}$$

Die Figuren 2a und b zeigen die Phasen der Bildung des Risses 1. M_{bfi} und M_{afi} stellen die von dem gezogenen Beton bzw. von der Bewehrung aufgenommenen Momentenanteile im Stadium Ia dar. Im Rissquerschnitt wird der gesamte Zug von der Bewehrung aufgenommen.

Der Beton der dem Riss 1 benachbarten Schnitte übernimmt von der Bewehrung durch Haftspannungen einen Teil des Gesamtzuges. So fällt die Stahlspannung bei einem gleichzeitigen Anwachsen der Betonspannungen bis zu $\sigma_b' < R_t$ in einer Entfernung $z = \lambda_{a1}$ vom Riss (Zustand I). Im Schnitt 2—2 erhält man den der Bildung von Riss 2 vorangehenden Grenzzustand wenn die Beanspruchung bis zum Grenzwert $M_{fi,2}$ anwächst. (Dann gilt für die Betonzugspannung $\sigma_b' = R_t$, siehe Punkt C in Fig. 2c.)

Wie aus Fig. 2c ersichtlich, tritt dies in einem Abstand $\lambda_{f,1}$ vom Schnitt 1—1 ein. Gleich vor Erscheinen des Risses 2 gilt für die Last: $P > P_{f,1}$ und das Biegemoment im Schnitt 1—1 ist von $M_{fi,1}$ auf max. $M = M_{fi,1} + \Delta M_1 = \alpha_{1,2} M_{fi,1}$ angewachsen. Der Schnitt 2—2 befindet sich im Stadium Ia und bei einem unendlich kleinen Zuwachs der Belastung erscheint im Schnitt 2—2 der Riss 2 in Richtung der Hauptdrucklinie.

Dieser Gesetzmässigkeit folgt beim Wachsen der Belastung ein Ansteigen der Zahl der Risse bis auf n im Gebrauchszustand (Fig. 2d), so dass für den Schnitt 1—1 geschrieben werden kann:

$$\max M = \frac{M_B}{C} = M_G = \alpha_{1,n} M_{fi,1}. \tag{3}$$

Fig. 2d zeigt dass die $\overline{M}_a^{II}$-Linie in bezug auf die $\overline{M}$-Linie um eine veränderliche Grösse v versetzt ist, da es sich um Schrägschnitte handelt [3].

Die Stahlspannung im Stadium II, $\bar{\sigma}_{a,k}^{II}$, im Schrägriss k beträgt [3]:

$$\boxed{\bar{\sigma}_{a,k}^{II} = \frac{\overline{M}_k + \overline{T}_k (h_0 - X_k^{II}) \operatorname{ctg} \alpha_{m,k}^{II} - \overline{M}_{at,k}}{A_{a,k}\left(h_0 - \frac{X_k^{II}}{3}\right)}}, \tag{4}$$

wobei: $\overline{M}_k$ und $\overline{T}_k$ die Schnittgrössen im Gebrauchszustand sind.

Die Lage der Nullinie im Stadium II wird nach [4] aus der Gleichung

$$\xi_k^{II} = \frac{X_k^{II}}{h_0} = \frac{2\alpha_2 + \alpha_{t2}}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{4}{2\alpha_2 + \alpha_{t2}}} - 1\right] \tag{5}$$

bestimmt, mit

$$\alpha_2 = n\mu \tag{6}$$

und

$$\alpha_{t2} = n\mu_t \frac{a_t}{h_0} \frac{\sin \beta_t}{\sin \alpha_m^{II}} \cos(\beta_t - \varphi). \tag{7}$$

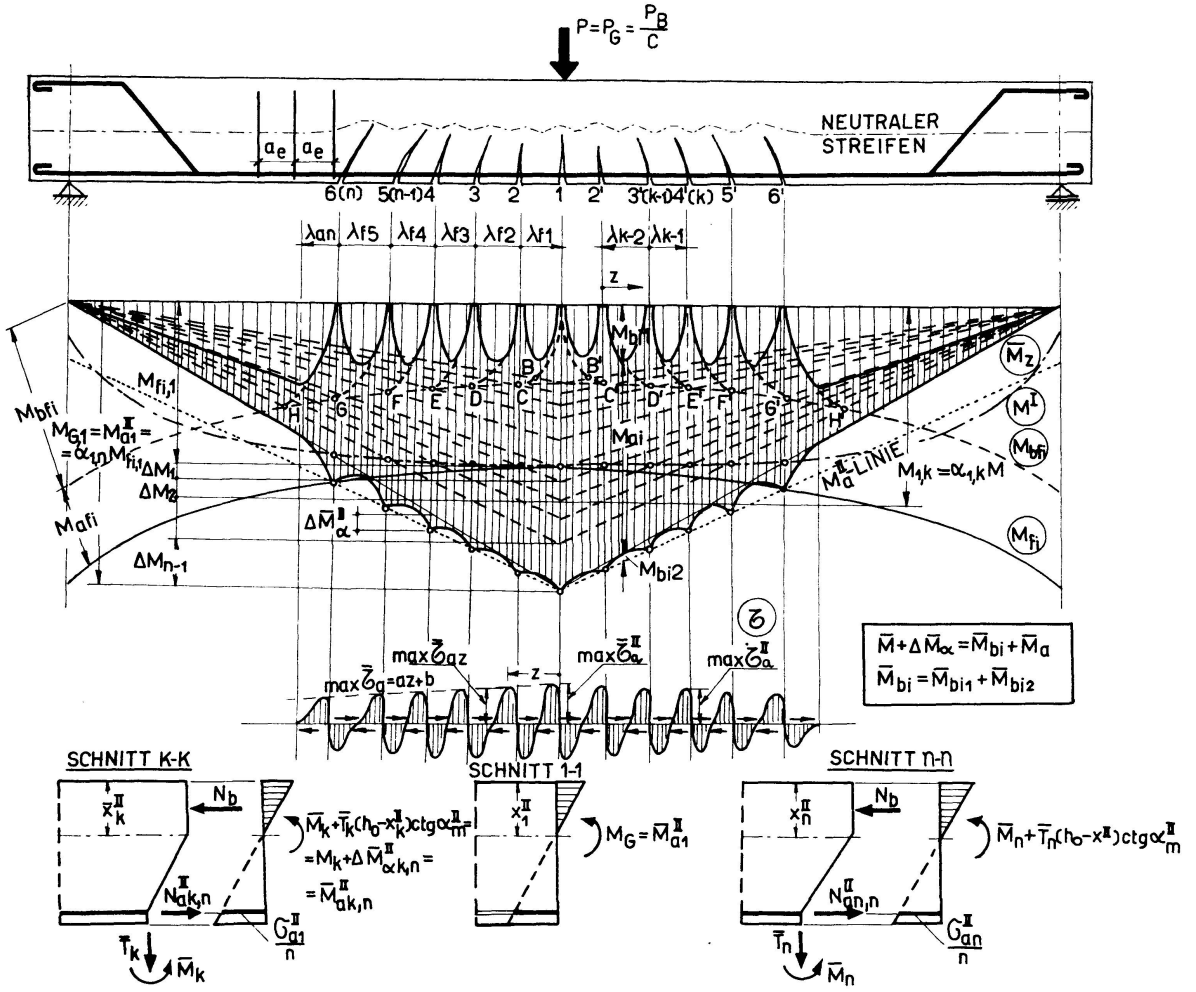


Fig. 2d.

Die mittlere Rissneigung $\alpha^{II}_{m,k}$ folgt aus der Beziehung [4]:

$$\operatorname{tg}\alpha^{II}_{m,k} = \frac{h_0 - X^{II}_k}{\dfrac{0{,}457\,h_0}{\operatorname{tg}\alpha^{I}_{m,k}} + 0{,}543\,h_0 - X^{II}_k}, \tag{8}$$

wobei die mittlere Neigung im Stadium Ia aus der Gleichung

$$\alpha^{I}_{m} = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \tag{9}$$

mit

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{T\,h}{M}(0{,}66 + 2{,}52\,n\,\mu_1) \tag{10}$$

berechnet wird.

Unter der Gebrauchslast ändert sich im Rissgebiet des Balkens (Fig. 2d) auch die Haftspannung von $\bar{\tau}^{II}_{am,1}$ im Schnitt 1—1 auf $\bar{\tau}^{I}_{am,n}$ für den letzten Riss im Schnitt n—n. Zwischen diesen beiden Werten kann ohne weiteres ein linearer Verlauf der Form

$$\bar{\tau}^{II}_{am} = \bar{\tau}^{II}_{am,1}\left[\frac{1-\beta'}{s_n}(s_n - z_k) + \beta'\right] \tag{11}$$

angenommen werden, mit:

$$s_n = \lambda_{f,1} + \lambda_{f,2} + \cdots + \lambda_{f,k} + \cdots + \lambda_{f,n}, \tag{12}$$

$$z_k = \lambda_{f,1} + \lambda_{f,2} + \cdots + \lambda_{f,k}, \tag{13}$$

$$\beta' = \frac{\bar{\tau}^{\mathrm{I}}_{am,n}}{\bar{\tau}^{\mathrm{II}}_{am,1}}. \tag{14}$$

Der β'-Wert hängt von der Qualität des Bewehrungsstahls ab, u. zw. können folgende Werte angenommen werden:

$$\beta' = 0{,}9 \quad \text{für Rundstahl (OB 38),}$$

$$\beta' = 0{,}65 \quad \text{für Profilstahl (PC).}$$

2.3. Rissabstand

Die Berechnung erfolgt für einen Riss $k+1$, es wird also λ_k (Fig. 3) bestimmt.

Im Schrägriss $k+1$ sind im Stadium Ia die Betonzugzone und die Bewehrung aktiv. Es gilt:

$$M_{k+1} + T_{k+1}\left(h - \frac{X^{\mathrm{I}}_{k+1}}{3}\right) \operatorname{ctg} \alpha^{\mathrm{I}}_{m,k+1} = M_{fi,k+1} = M_{bfi,k+1} + M_{afi,k+1} \tag{15}$$

mit:

$$M_{bfi,k+1} = \frac{A_{bt}}{\sin^2 \alpha^{\mathrm{I}}_{m,k+1}} z^{\mathrm{I}}_{b,k+1} R_t \tag{16}$$

und:

$$M_{afi,k+1} = 2\,n\,R_t\,A_a \frac{z^{\mathrm{I}}_a}{\sin \alpha^{\mathrm{I}}_{m,k+1}}. \tag{17}$$

Der Wert $M_{bfi,k+1}$ kann auch in der Form:

$$M_{bfi,k+1} = u \int_0^{\lambda_{f,k}} z\,\tau_{as}\,ds \tag{18}$$

angeschrieben werden.

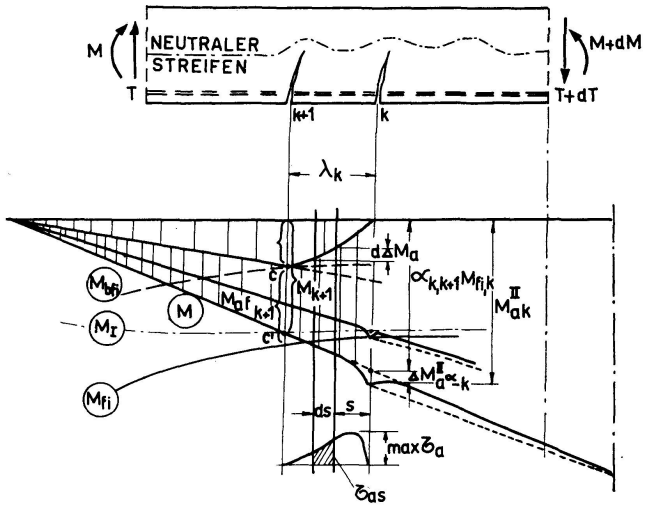


Fig. 3.

Werden die Beziehungen (16) und (18) gleichgesetzt, die Spannung τ_{as} als Funktion des Höchstwertes der Haftspannung max. τ_a ausgedrückt

$$\tau_{as} = \max \tau_a f\left(\frac{s}{\lambda_{f,k}}\right) \tag{19}$$

und die Bezeichnung $\varphi_k = \frac{s}{\lambda_{f,k}}$, also $ds = \lambda_{f,k} d\varphi_k$ eingeführt, so erhält man

$$\lambda_{f,k} = c_1 \frac{A_{bt}}{\sin^2 \alpha^{\mathrm{I}}_{m,k+1}} \frac{z^{\mathrm{I}}_{b,k+1}}{u\, z^{\mathrm{II}}_{a,k}} \frac{R_t}{\max \tau_a}. \tag{20}$$

Der Koeffizient c_1 hängt vom Verlauf der Haftspannung τ_{as} ab und wird aus der Beziehung:

$$c_1 = \frac{1}{\int_0^1 f(\varphi_k)\, d\varphi_k} \tag{21}$$

berechnet.

Wird für τ_{as} ein rechteckiges Diagramm im Einklang mit den rumänischen Vorschriften [10] und für das Verhältnis $\frac{z^{\mathrm{I}}_{b,k+1}}{z^{\mathrm{II}}_{a,k} \sin \alpha^{\mathrm{I}}_{m,k+1}}$ der Mittelwert 0,85 angenommen, so ergibt sich mit der Bezeichnung:

$$\beta_f = 0{,}85 \frac{R_t}{\omega_1 \max \tau_a} \tag{22}$$

die Formel für die Berechnung des Rissabstandes:

$$\boxed{\lambda_{f,k} = \beta_f \frac{A_{bt,k+1}}{\sin \alpha^{\mathrm{I}}_{m,k+1}}}, \tag{23}$$

wobei

$$A_{bt,k+1} = b\,(h - X^{\mathrm{I}}_{k+1}) \tag{24}$$

ist.

Der Wert X^{I} kann nach [5] berechnet werden:

$$\xi^{\mathrm{I}}_{k+1} = \frac{X^{\mathrm{I}}_{k+1}}{h} = \frac{2\, n\, \mu_1\, \delta \sin \alpha^{\mathrm{I}}_m + 1 - \frac{T}{2\, b\, h\, R_t} \sin 2\, \alpha^{\mathrm{I}}_m}{2\, n\, \mu_1 \sin \alpha^{\mathrm{I}}_m + 2 - \frac{T}{2\, b\, h\, R_t} \sin 2\, \alpha^{\mathrm{I}}_m}. \tag{25}$$

Der Koeffizient β_f ist eine variable Grösse und hängt von dem Verhältnis $\frac{R_t}{\max \tau_a}$ ab, das vom Durchmesser der Bewehrungsstäbe, von der Betondeckung, der Staboberfläche und einigermassen von der Betongüte bestimmt wird.

Der Wert β_f wurde auf Grund eigener Versuche [4] wie auch der Versuche anderer Forscher [6] bestimmt. Dabei wurde festgestellt, dass er so angenommen werden kann wie es in den rumänischen Normen [10] für reine Biegung vorgeschrieben ist, nämlich:

— für Rundstahl (OB-38) $$\beta_f = 0{,}5 + 30\frac{\mu}{d}, \tag{26}$$

— für Profilstahl (PC) $$\beta_f = 0{,}35 + 30\frac{\mu}{d}. \tag{27}$$

Die Beziehung (23) wird folgendermassen praktisch verwendet. Bei symmetrischer Belastung erscheint der erste Riss in Balkenmitte. Um die Entfernung $\alpha_{f,1}$ in der der zweite Riss auftritt zu bestimmen, muss die mittlere Neigung dieses Risses $\alpha^{\mathrm{I}}_{m,2}$ bekannt sein. Sie wird durch stufenweise Annäherung berechnet. Als Ausgangswert wird $\alpha^{\mathrm{I}}_{m,2} = \alpha^{\mathrm{I}}_{m,1} = 90°$ angenommen und $\lambda_{f,1}$ bestimmt. Diesem Wert entspricht ein anderes $\alpha^{\mathrm{I}}_{m,2}$, das zur zweiten Annäherung dient.

Bei der Berechnung der anderen $\lambda_{f,k}$-Werte werden folgende Ausgangsgrössen benützt: für $\lambda_{f,2}$ das dem Schnitt $z_3 = 2\lambda_{f,1}$ entsprechende $\alpha^{\mathrm{I}}_{m,3}$, für $\lambda_{f,3}$ das dem Schnitt $z_4 = \lambda_{f,1} + 2\lambda_{f,2}$ zugehörige $\alpha^{\mathrm{I}}_{m,4}$ und im allgemeinen für $\lambda_{f,k}$ der dem Schnitt $z_{k+1} = \lambda_{f,1} + \lambda_{f,2} + \cdots + 2\lambda_{f,k-1}$ entsprechende Wert $\alpha^{\mathrm{II}}_{m,k+1}$.

Gewöhnlich genügt die erste Annäherung, da die wirkliche Rissneigung wenig von der angenommenen abweicht (maximale Abweichung: 2%).

2.4. Rissweite unter Gebrauchslasten

Fig. 4 zeigt den Verlauf der Stahldehnungen ϵ^{II}_a und ϵ_{am} für den auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Balken im Stadium II.

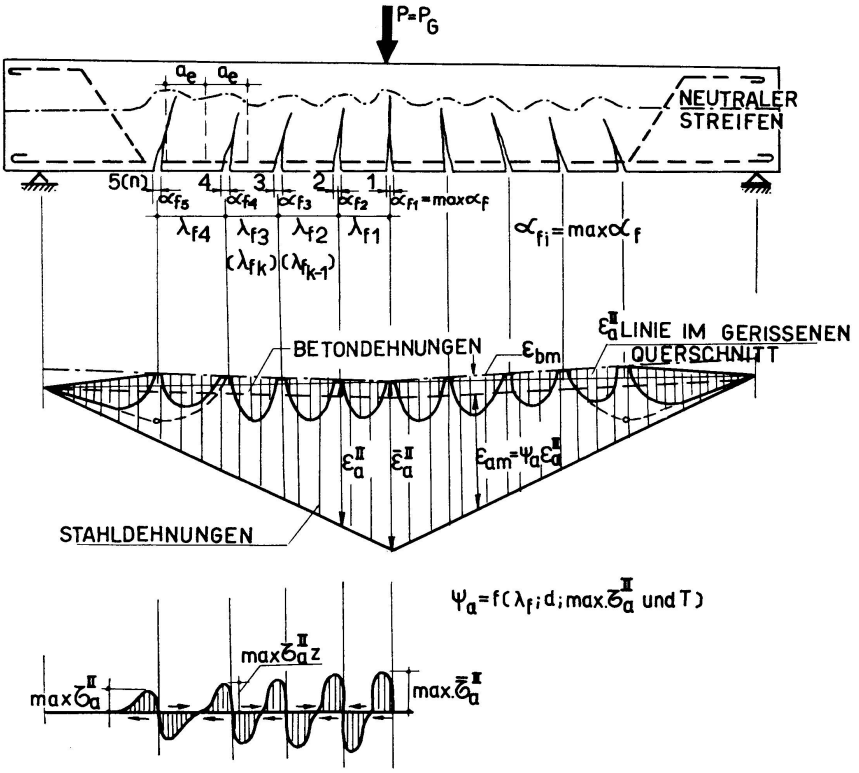


Fig. 4.

Die Rissweite wird getrennt für einen beliebigen Riss (k), für den Riss in Balkenmitte (1) und für den letzten Riss (n), der unter der Gebrauchslast auftritt, bestimmt.

Im allgemeinen wird die Rissweite von der Bedingung abgeleitet dass die Summe von Rissweite und Dehnung des benachbarten Betons gleich sei mit der Stahldehnung über die gleiche Länge.

a) Rissweite für einen beliebigen Riss (k)

$$\alpha_{f,k} = \tfrac{1}{2}(\epsilon_{am,k} - \epsilon_{tm,k})(\lambda_{f,k} + \lambda_{f,k-1}). \tag{28}$$

Bei Vernachlässigung der elastischen Verformungen des Betons zwischen den Rissen und mit der Bezeichnung

$$\psi_{a,k} = \frac{\epsilon_{am,k}}{\epsilon^{II}_{a,k}}, \qquad \epsilon^{II}_{a,k} = \frac{\bar{\sigma}^{II}_{a,k}}{E_a} \tag{29}$$

erhält man:

$$\boxed{\alpha_{f,k} = \psi_{a,k} \frac{\bar{\sigma}^{II}_{a,k}}{E_a} \frac{1}{2}(\lambda_{f,k} + \lambda_{f,k-1})}, \tag{30}$$

wobei $\psi_{a,k}$ das Zusammenwirken zwischen dem gezogenen Beton und der Bewehrung berücksichtigt.

Für die Bestimmung der Werte von $\psi_{a,k}$ wird der tatsächliche Verlauf von $\bar{\sigma}^{II}_a$ (Fig. 5) durch einen polygonalen ersetzt. So kann geschrieben werden:

$$\psi_{a,k} = \frac{\bar{\sigma}^{II}_{a,k} + \bar{\sigma}^{I}_{am,k}}{2\,\bar{\sigma}^{II}_{a,k}}. \tag{31}$$

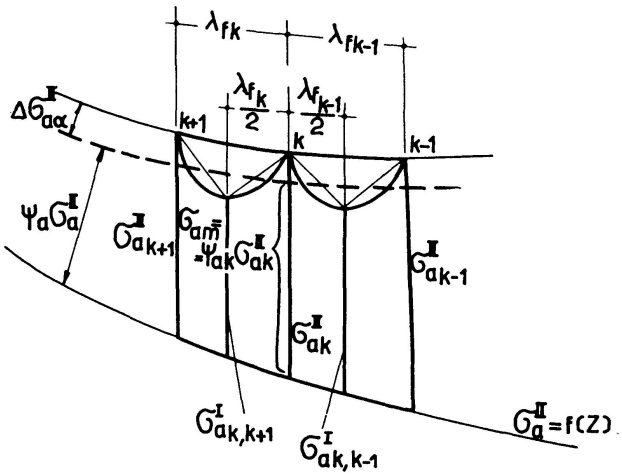


Fig. 5.

Nach einigen Umformungen erhält man:

$$\psi_{a,k} = 1 - \beta \frac{\dfrac{A_{bt}}{\sin \alpha^{I}_{m,k}}}{A_a} \frac{R_t}{\bar{\sigma}^{II}_{a,k}}. \tag{32}$$

In der Gleichung (32) wurde die Bezeichnung:

$$\bar{\beta} = \frac{0{,}85}{4} \frac{\bar{\tau}^{II}_{am,k}}{\bar{\tau}^{I}_{am,k}} \tag{33}$$

benützt. Für den Wert $\bar{\beta}$ wurden auf Grund der Versuche folgende Gleichungen aufgestellt:

— für Rundstahl (OB 38)

$$\bar{\beta} = 0{,}2\,(1-0{,}6\,V)\left[\frac{0{,}1}{s_n}(s_n - z_k) + 0{,}9\right], \tag{34}$$

— für Profilstahl (PC)

$$\bar{\beta} = 0{,}3\,(1-0{,}5\,V)\left[\frac{0{,}38}{s_n}(s_n - z_k) + 0{,}65\right] \tag{35}$$

mit den Bezeichnungen:

$$s_n = \lambda_{f,1} + \lambda_{f,2} + \cdots + \lambda_{f,k} + \cdots + \lambda_{f,n}, \tag{36}$$

$$z_k = \lambda_{f,1} + \lambda_{f,2} + \cdots + \lambda_{f,k} \tag{37}$$

und V das Verhältnis zwischen der Dauerlast und der Gesamtlast.

b) Rissweite für den Riss in Balkenmitte (1)

$$\boxed{\alpha_{f,1} = \psi_{a,1} \frac{\bar{\sigma}^{II}_{a,1}}{E_a} \lambda_{f,1}}. \tag{38}$$

Die Grössen $\psi_{a,1}$ und $\bar{\beta}$ werden aus den Beziehungen (32), (34) und (35) bestimmt.

c) Rissweite für den letzten Riss (n)

Die Weite dieses Risses hat den kleinsten Wert und kann aus der Beziehung:

$$\boxed{\alpha_{f,n} = \psi_{a,n} \frac{\bar{\sigma}^{II}_{a,n}}{E_a}\left(\lambda_{a,n} + \frac{1}{2}\lambda_{f,n-1}\right)}, \tag{39}$$

wobei $\lambda_{a,n}$ die aktive Länge der Bewehrung in der Nachbarschaft des letzten Risses darstellt (Fig. 6), bestimmt werden.

Aus Fig. 6a ist ersichtlich, dass der Wert $\lambda_{a,n}$ durch Gleichsetzen des Abfalls der Beanspruchung ΔM_a auf der Länge $\lambda_{a,n}$ mit dem $M_{b,c}$-Wert im Stadium I bestimmt werden kann.

$$\Delta M_a = M^{I}_{b,c}. \tag{40}$$

Dabei sind:

$$\Delta M_a = \int_0^{\lambda_{a,n}} z\,\tau_{as}\,ds \cong u\,\lambda_{a,n}\,z^{II}_{a,n}\,\omega_1 \max \tau_a \tag{41}$$

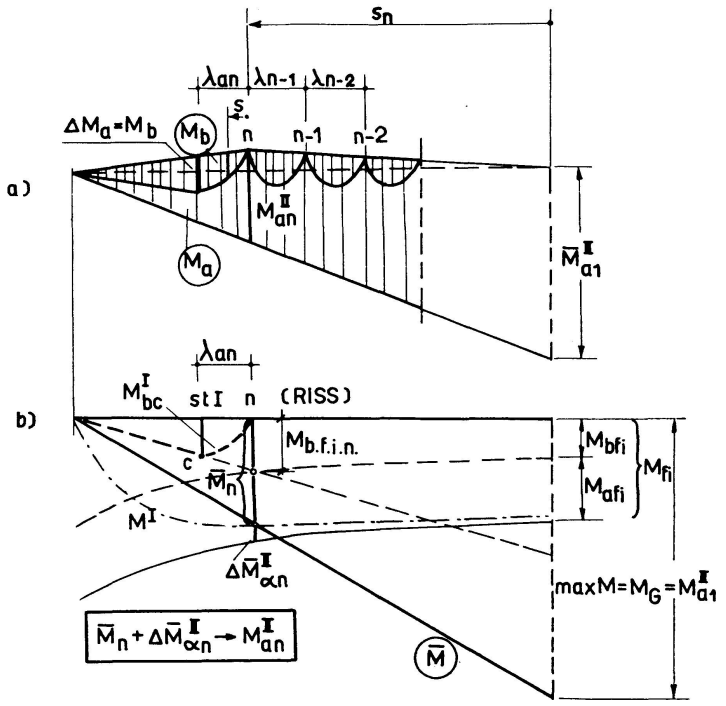


Fig. 6.

und $M^{\mathrm{I}}_{b,c}$, für den Fall eines linearen Momentenverlaufs:

$$M^{\mathrm{I}}_{b,c} = \frac{M_{bfi,n}}{\frac{l}{2} - s_n}\left(\frac{l}{2} - s_n - \lambda_{a,n}\right). \tag{42}$$

Wird in (42) $M_{bfi,n}$ ersetzt und anschliessend (42) und (41) in (40) eingesetzt, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\lambda_{a,n} = \frac{\lambda_{f,n-1} - \left(\frac{l}{2} - s_n\right)}{\lambda_{f,n-1} + \left(\frac{l}{2} - s_n\right)}, \tag{43}$$

mit:

$$\lambda_{f,n-1} = \beta_f \frac{A_{bt}}{\sin \alpha^{\mathrm{I}}_{m,n}}. \tag{44}$$

Auf gleiche Weise erhält man für eine gleichförmig verteilte Last:

$$\lambda_{a,n} = \frac{\frac{l}{2} - s_n}{2\lambda_{f,n-1}}\left[\sqrt{\left(\frac{l}{2} - s_n\right)^2 + 4\lambda^2_{f,n-1}} - \left(\frac{l}{2} - s_n\right)\right]. \tag{45}$$

Der Wert $\psi_{a,n}$ wird genauso wie $\psi_{a,k}$ bestimmt:

$$\psi_{a,n} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{8} + \frac{\bar{\sigma}^{\mathrm{II}}_{a,n-1}}{4\,\bar{\sigma}^{\mathrm{II}}_{a,n}} + \frac{n}{2}\bar{\gamma}\frac{W^{\mathrm{II}}_{a,n}}{W_{b,id}} - \bar{\beta}\frac{\frac{A_{bt}}{\sin \alpha^{\mathrm{I}}_{m,n}}}{A_a}\frac{R_t}{\bar{\sigma}^{\mathrm{II}}_{a,n}}\right). \tag{46}$$

Die Art der Belastung wird durch $\bar{\gamma}$ erfasst, uzw. gilt:

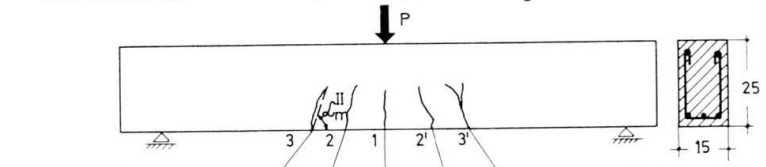
— für eine Einzellast in Feldmitte:

$$\bar{\gamma} = 1 - \frac{2\lambda_{a,n}}{l}, \tag{47}$$

— für eine gleichförmig verteilte Last:

$$\bar{\gamma} = 1 - \left(\frac{2\lambda_{a,n}}{l}\right)^2. \tag{48}$$

BALKEN A-01 B 250 · OL 38 · $\mu = 0{,}010$ · $\mu_{tA} = 0{,}0047$ · $\frac{\mu}{d} = 0{,}00835$



LAST-STUFE	3P (tf)	RISSÖFFNUNG 1/100mm					$\Sigma \alpha_f$ (1/100mm)
6	1.50		5	5	2		12
7	2,00	6	7	7	7	4	31
8*	2,50	8	9	10	9	9	45
9	3,00	8	10	12	9	9	48
10	3,50	10	11	20	9	9	59
11	4.00	11	11	150	10	9,5	191,5
12	4,65	11	11	400	10	10	442

* GEBRAUCHSLAST

St. Ia RISSBILDUNGSZUSTAND

M_f (tfm)	VERSUCH	1,0	0,8	0,81	0,9	1,0
	THEORETISCH [4]	1,049	0,885	0,75	0,885	1,049
	Δ%	− 4,6	− 9,6	+ 8,0	+ 1,7	− 4,6

St.II GEBRAUCHSZUSTAND C = 1,8

α_m^{II} (Grade)	VERSUCH	70°	72°	87°	81°	65°	
	THEORETISCH [4]	60°	61°30'	90°	61°30'	60°	
	Δ%	+ 16,6	+ 18,1	− 3,3	+ 31,5	+ 8,3	
λ_f (cm)	VERSUCH		13,5	11,6	13,0	12,8	$M_G = \frac{M_B}{C} = 1{,}29$ tfm
	THEORETISCH [GL · 16]		13,05	12,65	12,65	13,05	
	Δ%		+3,5	− 8,3	+ 2,8	− 1,9	
G_a^{II} kgf/cm²	THEORETISCH [GL · 3]	1590	1810	1875	1810	1590	
α_f (1/100) mm	VERSUCH	8	9	10	9	9	
	THEORETISCH [GL · 21]	7,04	9,45	9,85	9,45	7,04	
	Δ%	+ 13,6	− 4,8	− 1,5	− 4,8	+27,8	

St. III BRUCHZUSTAND

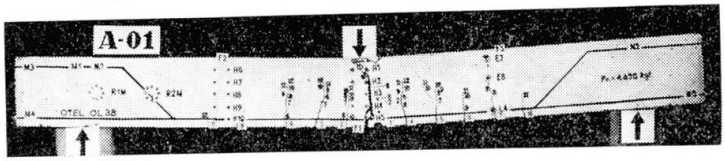


Fig. 7a.

Weiter sind:

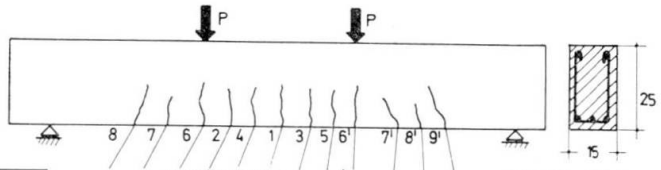
$$W_{a,n}^{II} = A_a z_{a,n}^{II}, \tag{49}$$

$$W_{b,id} = \frac{I_{b,id}}{Y_{bt}} \tag{50}$$

und $\bar{\beta}$ folgt aus (34) und (35) mit $s_n = z_k$.

* * *

BALKEN B-01 B 228 · OL 38 · $\mu = 0{,}01$ $\mu_{1A} = 0{,}0047$. $\frac{\mu_1}{d} = 0{,}00835$



LAST-STUFE	3P (tf)	RISSÖFFNUNG 1/100mm												Σ4 (1/100 mm)
5	2,2													
6	2,5		2	3	3	3	3	3	3	3	3	3		29
7	3.0	3	5	8	7	8	8	8	8	8	8	8	3	82
8 *	3,75	7	8	13	9	10	12	13	12	13	10	10	6	123
9	4,75	7	9	13	10	15	13	13	14	13	10	10	7	134
10	5,75	7	9	13	10	25	13	13	14	13	10	10	8	145
11	6,80	8	10	13	11	280	14	13	15	13	11	10	8	406

* GEBRAUCHSLAST

RISSBILDUNGSZUSTAND

St Ia										
M_f (tfm)	VERSUCH	1,25	0,9	←	0.7	→	0,95	1,0	1,2	
	THEORETISCH [4]	1,21	0,88	←	0,73	→	0,88	1,21	–	
	Δ%	+3,3	+2,3		+2,7		+8,0	−17,4	–	

St II		GEBRAUCHSZUSTAND								C = 1,8
α_m^{II} GRADE	VERSUCH	64°	72°	←	M = konst-90°	→	60°	55°		
	THEORETISCH [4]	56°	58°	←	90°	→	58°	56°		
	Δ%	+ 14,3	+24,2	←	± 0,00	→	+3,5	−1,8		
λ_f (cm)	VERSUCH			←	λ_{fm} = 11,7	→				
	THEORETISCH [GL·16]	14,1	13,3	←	λ_{fm} = 12,25	→	13,3	14,1		
	Δ%			←	−4,5	→				
G_a^{II} (kgf/cm²)	THEORETISCH [GL·3]	1355	1720	←	1825	→	1720	1355	–	
α_f (1/100) mm	VERSUCH	7	8	13	←	α_{fm} 11,2	→	13	10	10	6
	THEORETISCH [GL·21]	6,5	10	11,3	←	α_{fm} = 10,9	→	11,3	10	6,5	–
	Δ%	+7,7	−20,0	+15	←	2,8	→	+15	0	+54	–

St. III BRUCHZUSTAND

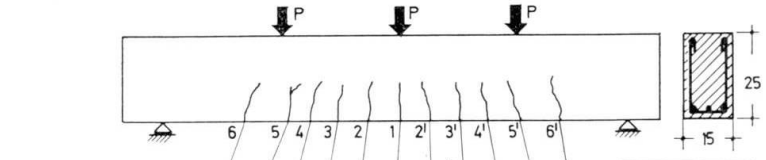


Fig. 7 b.

Aus den obigen Ausführungen ist es ersichtlich, dass die Rissweite unter Gebrauchslast über die Länge des Balkens unterschiedlich ist, u. zw. im allgemeinen am grössten in Feldmitte und am kleinsten im Schnitt n. Um die so berechneten Rissweiten mit den Normwerten vergleichen zu können wird der Mittelwert gebildet, der folgender Beziehung genügen muss:

$$\alpha_{f_M} \leqq \text{zul}\,\alpha_f . \tag{51}$$

BALKEN C-01 B 194.0L 38 · $\mu = 0{,}01$; $\mu_A = 0{,}0047$ $\frac{\mu}{d} = 0{,}00835$



RISSÖFFNUNG 1/100 mm

LAST-STUFE	3P (tf)												$\Sigma\alpha_f$ (1/100mm)
6	2			2	2	2	2	2	2				12
7	2,5			3	3	4	4	4	4	2	2		26
8	3,0	2	3	4	4	6	7	7	6	4	4	3	50
9 *	3,75	4	6	6	6	8	9	9	8	6	6	5	73
10	5,0	5	6	6	8	10	18	12	9	8	6	5	93
11	6,0	5	6	7	8	12	25	15	10	8	6	5	107
12	6,6	5	7	8	9	14	260	20	10	9	7	6	355

* GEBRAUCHSLAST

St. I-a RISSBILDUNGSZUSTAND

M_f (tfm)	VERSUCH	1,0	1,0	0,83	0,83	0,665	0,665	0,665	0,83	0,83	0,83	1,0
	THEORETISCH [4]	1,08	0,97	0,827	0,80	0,745	0,695	0,745	0,80	0,827	0,97	1,08
	Δ %	−7,4	+3,1	+0,4	+3,8	−10,7	−4,3	−10,7	+3,8	+0,4	−16,5	−7,4

St. II GEBRAUCHSZUSTAND C=1,8

α_m^{II} (GRAD)	VERSUCH	60°	75°	80°	80°	87°	90°	90°	85°	85°	75°	62°30'
	THEORETISCH [4]	55°30'	73°30'	76°	79°	80°30'	90°	80°30'	79°	76°	73°30'	55°30'
	Δ %	+8,1	+2,0	+5,3	+1,3	+8,1	0	+11,8	+7,6	+11,8	+2,0	+12,6
λ_f (cm)	VERSUCH	12,7	12	12	11	11,2	10,2	11,7	10,2	13,0	12,7	
	THEORETISCH [GL. 16]	13,65	12,7	12,45	12,18	12,05	12,05	12,18	12,45	12,7	13,65	
	Δ %	−0,7	−5,5	−3,6	−9,7	−7,1	−15,4	−3,9	−18,1	−2,4	−7,0	
G_a^{II} (kgf/cm²)	THEORETISCH [GL. 3]	1260	1390	1495	1605	1710	1795	1710	1605	1495	1390	1260
α_f (1/100) mm	VERSUCH	4	6	6	6	8	9	9	8	6	6	5
	THEORETISCH [GL. 21]	5,35	7,5	7,9	8,4	8,85	9,3	8,85	8,4	7,9	7,5	5,35
	Δ %	−25,2	−20	−24	−28,6	−9,6	−3,2	+1,7	−4,8	−24	−20	−4,8

$M_G = \frac{M_B}{C} = 1{,}22$ tfm

St III BRUCHZUSTAND

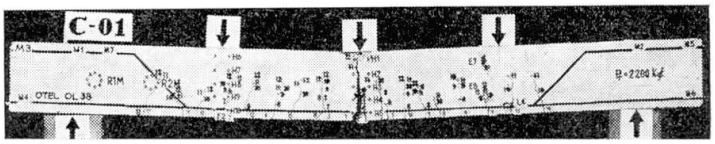
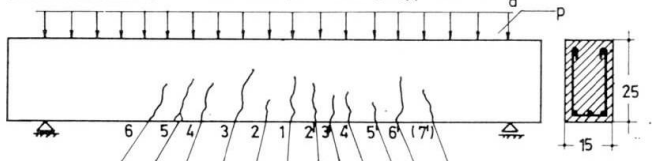


Fig. 7c.

In den Fig. 7a—7d sind für vier Balken mit verschiedener Belastung die Rissbilder, die Bruchbilder, die gemessenen Rissweiten wie auch die berechneten Rissabstände und Rissweiten angegeben.

BALKEN D-01 B 220·0L38 · μ = 0,010 · μ_{tA} = 0,0065 $\frac{\mu}{d}$ = 0,00835



RISSÖFFNUNG 1/100mm

LAST-STUFE	P= pl (tf)													$\Sigma\alpha_f$ (1/100mm)
5	1,5													
6	2,0						2				2			4
7	3,0				3		4	3	3	3	4	1		20
8	4,5	2	4	4	6	4	6	6	6	6	6	3	3	56
9 *	5,5	4	7,5	7	8	8	8	7	8	8	7,5	6,5	4,5	84
10	6,5	4	8	7	12	9	10	8	8	8	8	7	5	94
11	8,0	5	8	8	50	10	12	9	9	9	9	8	5	142
12	10	6	10	9	150	12	12	12	10	9	9	9	6	254

* GEBRAUCHSLAST

St I-a RISSBILDUNGSZUSTAND

M_f (tfm)	VERSUCH	1,12	1,12	0,9	0,75	1,0	0,65	0,75	0,75	0,65	1,12	1,12
	THEORETISCH [4]	1,18	0,95	0,82	0,75	0,71	0,7	0,71	0,75	0,82	0,95	1,18
	Δ%	−5,1	+18	+9,8	0	+41	−7,2	+5,6	0	−2,08	+18	−5,1

St II GEBRAUCHSZUSTAND C = 1,8

α_m^{II} (Grade)	VERSUCH	60°	60°	73°	75°	82°	90°	87°	87°	85°	61°	51°
	THEORETISCH [4]	55°	59°	65°	72°	79°	90°	79°	72°	65°	59°	55°
	Δ%	+9,1	+1,7	+17,3	+4,2	+3,8	0	+10,1	+20,8	+30,8	+3,4	+7,3
λ_f (cm)	VERSUCH	13	16	14,5	9	10	11	9	13	11	12	13,8
	THEORETISCH [GL·16]	13,75	12,9	12,4	12,1	12,0	12,0	12,1	12,4	12,9	13,0	–
	Δ%	−5,8	+24	+16,9	+25,6	+16,7	−8,3	+25,6	+4,8	+14,7	−7,7	–
G_a^{II} (kgf/cm²)	THEORETISCH [GL·3]	1299	1478	1598	1685	1730	1740	1730	1685	1598	1478	1299
α_f (1/100) mm	VERSUCH	4	7,5	7,0	8	8	8	7	8	8	7,5	6,5	4,5
	THEORETISCH [GL·21]	5,86	8,22	8,6	8,9	8,92	8,95	8,92	8,9	8,6	8,22	5,86	–
	Δ%	−31,8	−8,8	−18,6	−10,1	−10,3	−10,6	−21,5	−10,1	−7,0	−8,8	+10,9	–

$M_G = \frac{M_B}{C} = 1{,}39$ tfm

St III BRUCHZUSTAND

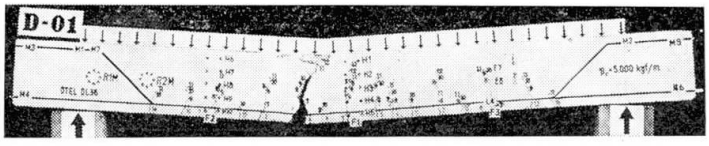


Fig. 7d.

3. Schlussfolgerungen

Die theoretischen Ausführungen können zusammen mit den Versuchsergebnissen einige Klärungen bezüglich der Rissbildung bei Stahlbetonbalken mit Biegung und Querkraft bringen. Davon seien erwähnt:

1. Bei Biegung mit Querkraft hängt der Rissabstand und die Rissweite von der Gestaltung des Balkens (Art der Bewehrung, Verhältnis $\frac{M}{T h_0}$ usw.) ab.

2. Die Kennwerte λ_f und α_f für Balken mit Biegebruch können nicht mit den entsprechenden Formeln für reine Biegung bestimmt werden, wie dies von den gültigen Vorschriften [6], [10], [11] und [12] zugelassen wird, da die erhaltenen Werte im allgemeinen von Versuchen nicht bestätigt sind. Die in diesem Aufsatz abgeleiteten Gleichungen (23), (30), (38) und (39) liefern, mit einer mittleren Abweichung von $\pm 15\%$, zuverlässige Vergleichswerte.

3. Die Untersuchungen ergaben, dass der Rissabstand hauptsächlich von folgenden Parametern abhängt:

— Durchmesser der Zugbewehrung;
— Prozentsatz der Längs- und Querbewehrung;
— Oberflächenbeschaffenheit der Bewehrungsstäbe;
— Verhältnis $\frac{M}{T h_0}$ (das die Lage und die mittlere Neigung der Risse bestimmt);
— Betondeckung;
— Belastungsschema;
— Betonqualität.

4. Die Rissweite wird von den obigen Parametern, zu welchen die folgenden hinzukommen, bestimmt:

— Art der Belastung (kurzzeitig statisch, dynamisch usw.);
— Stahlspannung in der Längsbewehrung (σ_a^{II}) wie auch in der Querbewehrung (σ_{al}^{II});
— Stahlqualität.

5. Ist die Bedingung:

$$T \leqq b h_0 R_t \tag{43}$$

erfüllt und das Verhältnis $\frac{\mu\%}{d}$ grösser als die in Tafel 1 angegebenen Werte, so ist es nicht notwendig den Grenzzustand der Rissöffnung zu berücksichtigen, ausgenommen die Fälle wenn Impermeabilität verlangt wird.

Tafel 1

Stahlqualität	*zul* $\alpha_f = 0{,}1$ mm	*zul* $\alpha_f = 0{,}2$ mm	*zul* $\alpha_f = 0{,}3$ mm
OB-38	0,5	0,4	0,3
PC	0,55	0,45	0,35

Bezeichnungen

A_a	Querschnitt der Längszugbewehrung.
a	Abstand vom Schwerpunkt der Zugbewehrung zum Zugrand des Balkens.
a_t	Abstand zwischen den Stäben der Querbewehrung, längs der Balkenachse gemessen.
b	Breite des Querschnitts.
d	Durchmesser der Längsbewehrung.
E_a	Elastizitätsmodul des Stahls.
E_b	Elastizitätsmodul des Betons.
h	Balkenhöhe.
$h_0=(h-a')$	Nutzhöhe.
M_z	Biegemoment.
M_{fi}	Aufnehmbares Rissmoment im Schrägschnitt.
M_a; M_a^{II}	Momentenanteil der Zugbewehrung im allgemeinen bzw. im Rissschnitt, Stadium II.
M_{at}	Momentenanteil der Querbewehrung nach der Rissbildung.
$n=\frac{E_a}{E_b}$	Verhältnis der E-Moduli von Stahl und Beton.
$R_t=3{,}5\frac{M}{b\,h^2}$	Betonzugfestigkeit.
T_z	Querkraft.
u	Umfang der Zugstäbe.
W_{id}	Ideeller Widerstandsmodul des Betonquerschnitts bezogen auf die Zugfaser des Querschnitts (im Stadium I).
$W_a^{\mathrm{II}}=A_a\,Z_a^{\mathrm{II}}$	Widerstandsmodul der Längsbewehrung im Stadium II.
X; X^{I}; X^{II}	Höhe der Betondruckzone im allgemeinen, im Stadium I und im Stadium II.
z^{II}	Hebelarm der inneren Kräfte im Stadium II.
z	Abszisse eines beliebigen Querschnitts.
α_m; α_m^{I}; α_m^{II}	Mittlere Neigung der Risse im allgemeinen, bei ihrem Auftreten (im Stadium Ia), beziehungsweise im Stadium II.
α_f	Rissweite in der Höhe der Zugbewehrung.
β_f; $\tilde{\beta}$	Unterschiedliche Koeffizienten für die Berechnung von λ_f und α_f.
β_t	Neigung der Zugresultante für die Querbewehrung.
$\delta=\frac{h_0}{h}$	Bezogene Nutzhöhe des Balkenquerschnittes.
λ_f	Rissabstand bei Biegung mit Querkraft.
λ_a	Aktive Länge der Bewehrung beim Auftreten der geneigten Risse bei Biegung mit Querkraft.
ω_1	Vollheitsgrad des τ_a-Diagramms.

ψ_a Koeffizient der das Zusammenwirken des Zugbetons und der Zugbewehrung zwischen den Rissen kennzeichnet.

φ Neigung der Schrägrissnormalen.

$\mu = \frac{A_a}{b\,h_0}; \mu_1 = \frac{A_a}{b\,h}$ Bewehrungsgrade der Längsbewehrung.

σ_b' Betonzugspannung.

$\sigma_a; \sigma_a^{\mathrm{I}}; \sigma_a^{\mathrm{II}}$ Zugspannung in der Längsbewehrung im allgemeinen, im Stadium I, im Stadium II.

$\tau_{as}; \tau_{am}$ Haftspannung im Schnitt mit der Abszisse s; Mittelwert der Haftspannung.

$\tau_{am}^{\mathrm{II}}; \tau_{am}^{\mathrm{II}}$ Mittlere Haftspannung im Stadium II, beziehungsweise im Gebrauchszustand.

Literatur

1. C. Avram: Curs de beton armat partea II-a. Calculul şi alcătuirea elementelor de consţructii, Litografia Invăţămîntului Timişoara, 1955.
2. C. Avram, I. Deutsch, I. Filimon, A. Mihăescu ş. a.: Espacement et ouverture des fissures des éléments prismatiques en béton armé soumis à la torsion pure, Documentation préliminaire, 11e Session plénière CEB Bruxelles, Octobre 1966.
3. I. Deutsch: Contribuţii la studiul fisurării elementelor de beton armate solicitate la încovoiere cu forţă tăietoare (Teză de doctorat) I.P.T., 1970.
4. I. Deutsch: Contributions to the analysis of cracking in reinforced concrete members subjected to bending an Shear. CEB, Commission «Effort Tranchant» Paris, Mars, 1971.
5. I. Deutsch: Teoria formării şi apatiţiei fisurilor înclinate la elementele de beton armat solicitate la încovoiere cu forţă tăietoare. Buletinul IPT, seria Construcţii, nr. 2, 1970.
6. F. Leonhardt: Rapport sur la Proposition de modification du chapitre R.4–22 «Effort Tranchant des Recommandations Internationales Unifiées CEB». Documentation préliminaire 11e Session plénière CEB, Bruxelles, Octobre 1966.
7. H. Lossier und I. Faury: La fissuration du béton armé Paris, Annales I.T.B.T.P., 1944, mars.
8. R. L'Hermite: Le comportement du béton autour des armatures. Paris, Annales I.T.B.T.P., 1944, mars.
9. M. M. Adam: Fissuration des réservoirs en béton armé. Paris, Annales I.T.B.T.P., 1963, mai-juin.
10. STAS 8000 – 1967 Bucureşti.
11. NITU 3 – 49 Moscova.
12. DIN 1045.
13. CP 114.

Zusammenfassung

Die Arbeit behandelt die Theorie der Rissbildung und -öffnung unter Gebrauchslasten, für den Fall der auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Stahlbetonbauteile. Ausgehend von der allgemeinen Theorie der Rissbildung, von Ergebnissen eigener Versuche und den Untersuchungen verschiedener Forscher, werden Formeln aufgestellt, die dann anzuwenden sind, wenn ein Biegebruch vorauszusehen ist. Bauteile, die durch Schubbruch versagen, werden in einer anderen Arbeit behandelt.

Der Rissabstand und die Rissweite im Gebrauchszustand können mit genügender Genauigkeit aus den Formeln (23), (30), (38) und (39) berechnet werden. Auf Grund der theoretischen und Versuchsergebnisse konnten die Empfehlungen im Absatz «Schlussfolgerungen» gegeben werden.

Summary

The theory of formation, outset and width of cracks under service loads in reinforced concrete members subjected to bending and shear, is analysed in this paper. Design relationships for reinforced concrete members subjected to bending and shear (provided failure occurs by bending) are derived, based on the general theory of formation and outset of cracks and on the author's experimental results. The case when failure occurs by shear will form the subject of a further paper.

The spacing and width of cracks under service loads can be determined with sufficient accuracy by using relationships (23), (30), (38) and (39). A set of recommendations for practical design, based on the author's theoretical and experimental results, is given in the chapter entitled "Conclusions".

Résumé

L'article est consacré à la théorie de la formation, apparition et largeur des fissures dans les éléments en béton armé, sollicités à la flexion à effort tranchant, soumises aux charges de service. Sur la base de la théorie générale de la formation et apparition des fissures, compte tenu aussi des résultats expérimentaux obtenus par l'auteur, on déduit des formules pour le calcul pratique des éléments en béton armé sollicités à la flexion à effort tranchant (en supposant que la ruine se produise par flexion). Le cas où la ruine est causée par l'effort tranchant fera l'objet d'un article ultérieur.

L'espacement et la largeur des fissures sous les charges de service peuvent être déterminés avec une précision suffisante à l'aide des formules (23), (30), (38) et (39). Dans le chapitre intitulé «Conclusions», on donne des recommandations pour les practiciens, basées sur les résultats théoriques et expérimentaux obtenus par l'auteur.

Three Dimensional Lateral Load Analysis of Multistorey Structures

Analyse tridimensionnelle de charge latérale aux structures à plusieurs étages

Dreidimensionale seitliche Lastanalyse von mehrstöckigen Bauten

JACOB GLÜCK
Senior Lecturer

MENACHEM GELLERT
Senior Lecturer

Faculty of Civil Engineering, Technion-Israel Institute of Technology

Introduction

Multistory buildings consisting of more than one type of stiffening elements, namely frames, simple or coupled prismatic or nonprismatic shear walls, etc., must generally be analyzed by considering the interaction between the various elements. In case of structures with symmetric lay-out in plane and symmetric lateral load, the statical scheme may be reduced to a two-dimensional one, while in the asymmetric case a three-dimensional scheme must be considered.

The lateral load analysis of multistory structures consists of two types of methods: 1. The discrete method whereby a highly redundant statically indeterminate structure is obtained and for which a large capacity high speed digital computer is essential. 2. The continuous method whereby the discrete structure is replaced by a continuous one, by substituting horizontal connecting beams by a uniform continuous lamella system; the solution is approximate but can be obtained manually or by the aid of a small electronic digital computer.

The discrete method for three-dimensional analysis includes the one presented by WEAVER [5] which treats structures with rectangular patterned lay-out and prismatic beams and columns, as space frames with horizontal rigid lamellas at floor levels. WINOKUR [6] treats structures consisting of plane frames, prismatic or nonprismatic shear walls with the principal axes not parallel to system axes, by a three-dimensional approach. A continuous method for three-dimensional analysis was given by the author in a previous paper [3]. It treats structures consisting of simple or coupled, prismatic or

nonprismatic shear walls and frames with asymmetric lay-out in plane, normal strains in frame columns and shear walls being neglected.

The object of this paper is to provide a more complete three-dimensional analysis including the influence of normal strains in frame columns and shear walls. As mentioned by CLOUGH [2] and WEAVER [5] the influence of normal strains is considerable in this case and is not to be neglected. The unknown of the problem are the continuous functions of the shear forces in the lamella system. These functions are derived from a system of second degree nonhomogeneous differential equations with constant coefficients. The homogeneous part of the solution is related to an eigenvalue problem of the degree equal to the number of unknown shear force functions. Knowing the eigenvalues and eigenvectors of the homogeneous part, the problem may be reduced by separation of variables to second order nonhomogeneous linear differential equations, each one having as unknown a basic function. The number of independent equations equals the number of unknown shear force functions. With the basic functions known all interior forces and displacements of the individual stiffening elements may be established.

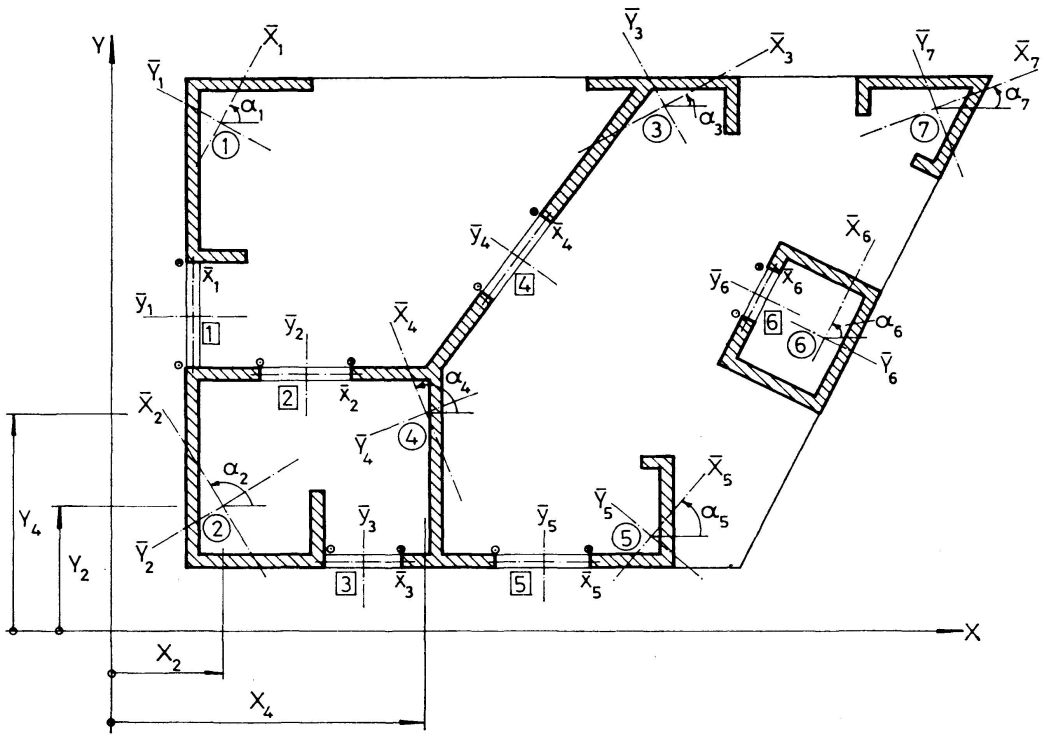


Fig. 1. Floor plane of asymmetric structure.

Fig. 1 shows a horizontal section of an asymmetric structure, where the circled numbers refer to the shear walls and those enclosed in squares refer to connecting beams transformed into a continuous lamella system. The principal axes of the shear wall cross sections are denoted with $\bar{X}_i$ and $\bar{Y}_i$ which are element axes, and overall system axes being denoted with X, Y, Z.

Assumptions and Limitations

1. Floors are undeformable in their planes and have no stiffness normal to these planes.
2. The discrete structure is substituted by a continuous one in which connecting beams are replaced by a uniform distributed lamella system.

Geometric and Elastic Properties of Shear Walls

The relation between internal actions and displacements, including warping effect and neglecting Saint-Venant torsion, in element axes expressed in matrix form, is

$$\bar{\boldsymbol{Q}}_i = -\bar{\boldsymbol{K}}_i \bar{\boldsymbol{D}}_i(z)''', \tag{1}$$

in which

$$\bar{\boldsymbol{Q}}_i = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{xi} \\ \bar{Q}_{yi} \\ \bar{Q}_{\theta i} \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Terms $\bar{Q}_{xi}$ and $\bar{Q}_{yi}$ represent the respective shear forces in the $\bar{X}_i$ and $\bar{Y}_i$ directions and $\bar{Q}_{\theta i}$ the torque in shear wall i.

The stiffness matrix of shear wall i is

$$\bar{\boldsymbol{K}}_i = \begin{bmatrix} E\bar{J}_{yi} & 0 & 0 \\ 0 & E\bar{J}_{xi} & 0 \\ 0 & 0 & EJ_{wi} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

in which $\bar{J}_{xi}$ and $\bar{J}_{yi}$ = the respective moments of inertia about the $\bar{X}_i$ and $\bar{Y}_i$ axes; and J_{wi} = the sectorial moment of inertia of shear wall i referred to shear center.

The displacement vector of shear wall i in local axes passing through shear center is:

$$\bar{\boldsymbol{D}}_i(z) = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i(z) \\ \bar{v}_i(z) \\ \bar{\theta}_i(z) \end{Bmatrix}, \tag{4}$$

in which $\bar{u}_i(z)$, $\bar{v}_i(z)$ = the respective displacement functions in $\bar{X}_i$ and $\bar{Y}_i$ directions; and $\bar{\theta}_i(z)$ = a function of rotation about $\bar{Z}_i$ axis.

Equilibrium equations of the whole structure refer to the (X, Y, Z) system axes. Transformation of the geometric and physical properties of the shear walls into this system is possible by combined rotation and translation (5).

The rotation matrix is

$$\boldsymbol{R}_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & 0 \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

and she translation is expressed by

$$\boldsymbol{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Y_i \\ 0 & 1 & X_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

in which X_i and Y_i = global coordinates of shear center of element i. Transformation of the displacement vector of element i is given by

$$\bar{\boldsymbol{D}}_i(z) = \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{T}_i \boldsymbol{D}(z), \tag{7}$$

in which

$$\boldsymbol{D}(z) = \begin{Bmatrix} u(z) \\ v(z) \\ \theta(z) \end{Bmatrix}. \tag{8}$$

Terms $u(z)$, $v(z)$ = the respective displacement functions in the X and Y directions of the system origin; and $\theta(z)$ = a function of rotation about the Z-axis.

Stiffness matrices $\boldsymbol{K}_i$ for the system axes are obtained by the congruent transformation (5).

$$\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{T}_i^T \boldsymbol{R}_i^T \bar{\boldsymbol{K}}_i \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{T}_i, \tag{9}$$

in which $\boldsymbol{R}_i^T$ and $\boldsymbol{T}_i^T$ = the transpose of $\boldsymbol{R}_i$ and $\boldsymbol{T}_i$ respectively.

Transformation of the action vector into the system axes is given by (5).

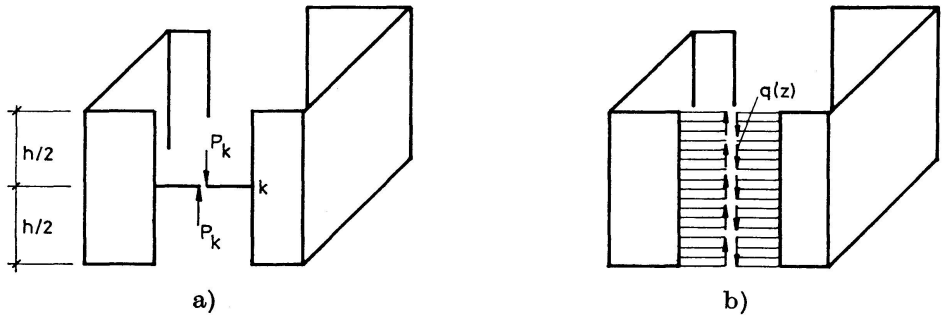
$$\boldsymbol{Q}_i = \boldsymbol{T}_i^T \boldsymbol{R}_i^T \bar{\boldsymbol{Q}}_i. \tag{10}$$

Substituting Eqs. (1), (7) and (9) into Eq. (10) results

$$\boldsymbol{Q}_i = -\boldsymbol{K}_i \boldsymbol{D}(z)'''. \tag{11}$$

Geometric and Elastic Properties of Connecting Beams

In evaluating the influence of connecting beams on the shear wall it is assumed that the stiffness of the latter is high compared with that of the former, in which case the walls may be regarded as rigid indeformable bodies. In this case the mid point of the connecting beam is a contraflexure point with zero bending moment. Cutting the connecting beam at this point, only



a) b)

Fig. 2.

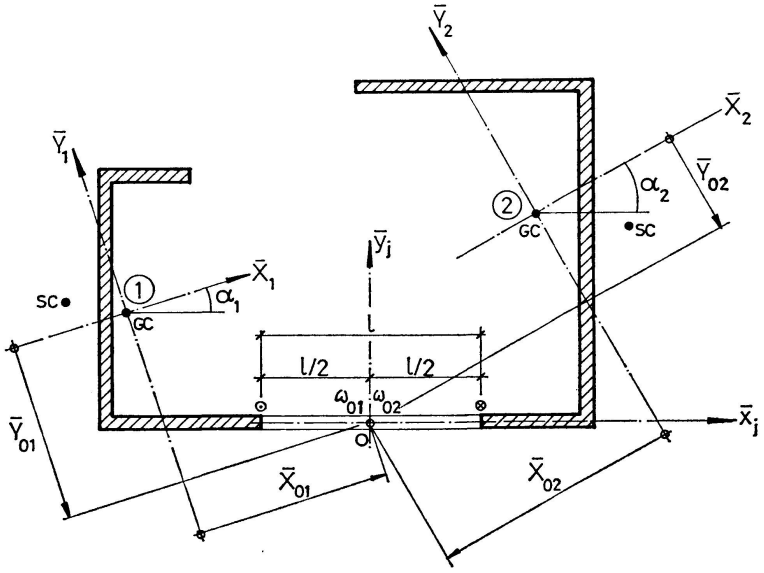
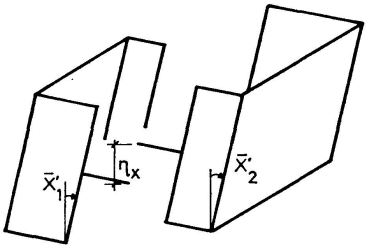
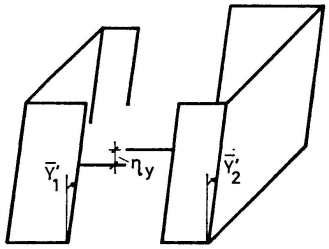


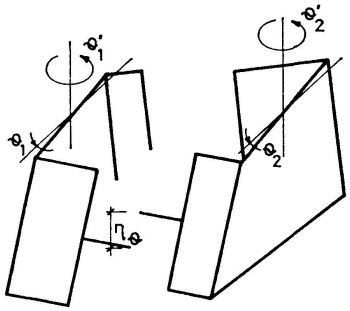
Fig. 3. Cross section of coupled nonprismatic shear wall.



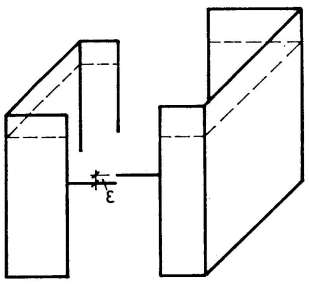
a) Due to displacement in $\bar{X}$ direction only.



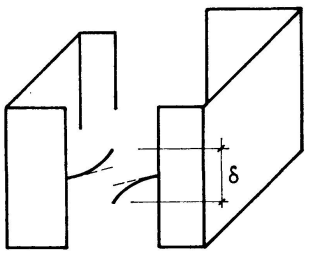
b) Due to displacement in $\bar{Y}$ direction only.



c) Due to warping only.



d) Due to displacement in $\bar{Z}$ direction only.



e) Due to shear and bending deformation of the connecting beams.

Fig. 4. Gaps in cut ends due to displacements in $\bar{X}$, $\bar{Y}$ and $\bar{Z}$ directions and rotation.

a shear force at the two sides of the cut, as shown in Fig. 2a, will suffice to provide continuity at this point. This shear force is transformed in a equivalent distributed shear force (by dividing it by story height), as shown in Fig. 2b.

Fig. 3 shows a cross section of a coupled shear wall with the cut connecting beam at the mid point. Due to lateral deflection and torsion of the shear walls, the cut ends will incur a gap η (see Fig. 4a, b, c), which written in matrix form is

$$\eta_j = \eta_{jx} + \eta_{jy} + \eta_{j\theta} = \boldsymbol{e}_l^T \bar{\boldsymbol{D}}_l(z)' - \bar{\boldsymbol{e}}_r^T \bar{\boldsymbol{D}}_r(z)', \tag{12}$$

in which

$$\boldsymbol{e}_l = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{l0} \\ \bar{Y}_{l0} \\ w_{l0} \end{Bmatrix}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{r0} \\ \bar{Y}_{r0} \\ w_{r0} \end{Bmatrix}. \tag{14}$$

In Eqs. (13) and (14) $\bar{X}_{l0}$, $\bar{Y}_{l0}$ and $\bar{X}_{r0}$, $\bar{Y}_{r0}$ = coordinates of mid point 0, in left element centroid local axes respective right; and w_{l0}, w_{r0} = sectorial coordinates of point 0 respectively to left and right element shear center.

Substituting Eq. (7) into Eq. (12) results

$$\eta_j(z) = (\boldsymbol{e}_l^T \boldsymbol{T}_l \boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{e}_r^T \boldsymbol{T}_r \boldsymbol{R}_r) \boldsymbol{D}(z)', \tag{15}$$

denoting

$$\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_l^T \boldsymbol{T}_l \boldsymbol{R}_l - \boldsymbol{e}_r^T \boldsymbol{T}_r \boldsymbol{R}_r. \tag{16}$$

Eq. (15) gets

$$\eta_j(z) = \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{D}(z)'. \tag{17}$$

The gap at cut end due to axial displacements of the shear walls may be written as

$$\delta_j(z) = -\boldsymbol{U}_j^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{U} \int_0^z dz \int_z^H \boldsymbol{q}(z)\, dz - \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{F} \int_0^z dz \int_z^H \boldsymbol{p}\, dz, \tag{18}$$

in which

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{EA_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{EA_n} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{q}(z) = \begin{Bmatrix} q_1(z) \\ q_2(z) \\ \vdots \\ q_m(z) \end{Bmatrix}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix}. \tag{21}$$

It is assumed that the shear force function $q_j(z)$ in lamella system is positiv when producing tension in the left shear wall (denoted with $\odot$) and compression in the right one (denoted with $\otimes$). In Eq. (21) $\boldsymbol{p}$ = the exterior vertical load vector acting along G. C. lines of the shear walls. In Eq. (18) $\boldsymbol{U}_j, \boldsymbol{V}_j$ = Boolean vectors related to positiv action of respectively $q_j(z)$ and p_i. If tension is produced by $q_j(z)$ in the shear walls connected by lamella system j, a plus one appears in vector U_j, and a minus one if compression, and a zero for all other coupled shear walls. If the exterior vertical loads acting in the left or right shear wall connected by lamella system j are in the positive direction of $q_j(z)$ (upward in the left and downward in the right), a plus one appears in vector V_j and for the negative direction a minus one, and a zero for all other shear walls. For the example building given in Fig. 1 the matrix $\boldsymbol{U}$ containing all vectors $\boldsymbol{U}_j$ is

$$\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \ldots . \boldsymbol{U}_6) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Due to shear and bending of the connecting beam the gap which results, is

$$\varphi_j = f_j q_j(z), \tag{23}$$

in which

$$f_j = \left(\frac{L_j^3}{12 E J_j} + \frac{L_j}{G \bar{A}_j}\right) h. \tag{24}$$

In Eq. (24) $\bar{A}_j$ = the effective area of the connecting beam cross section; and J_j its moment of inertia.

Compatibility Equation

The compatibility condition at the cut end of the connecting beams at row j may be expressed as follows:

$$-\eta_j + \delta_j + \varphi_j = 0. \tag{25}$$

Substituting Eqs. (17), (18) and (23) into Eq. (25) and differentiating twice, results

$$-\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{D}(z)''' + f_j q_j(z)'' - \boldsymbol{U}_j^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{U} \boldsymbol{q}(z) - \boldsymbol{V}_j^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{p} = 0. \tag{26}$$

Denoting

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & f_m \end{bmatrix}, \tag{27}$$

$$\boldsymbol{e} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{Bmatrix}. \tag{28}$$

The system of differential equations expressing compatibility at cut ends of all lamella systems may be expressed in matrix form as:

$$-\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{D}(z)''' + \boldsymbol{f}\,\boldsymbol{q}(z)'' - \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{q}(z) - \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{p} = 0. \tag{29}$$

For the example building given in Fig. 1, assuming that all vertical loads act downward, the matrix V containing all vectors V_j is

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \ldots \boldsymbol{V}_6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Equilibrium Equation

Denoting
$$\boldsymbol{e}_j^T = \boldsymbol{R}_l^T\,\boldsymbol{T}_l^T\,\boldsymbol{e}_l - \boldsymbol{R}_r^T\,\boldsymbol{T}_r^T\,\boldsymbol{e}_r \tag{31}$$

and
$$\boldsymbol{e}^T = (\boldsymbol{e}_1^T, \boldsymbol{e}_2^T, \ldots \boldsymbol{e}_m^T). \tag{32}$$

The basic equation of bending for the whole structure in system coordinates may be written in the form

$$-\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{D}(z)''' = \boldsymbol{Q}_0 + \boldsymbol{e}^T\,\boldsymbol{q}(z), \tag{33}$$

in which
$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{K}_i, \tag{34}$$

$$\boldsymbol{Q}_0 = \begin{Bmatrix} Q_{x0} \\ Q_{y0} \\ Q_{\theta 0} \end{Bmatrix}. \tag{35}$$

Terms Q_{x0} and Q_{y0} represent the respective shear forces in X and Y directions and $Q_{\theta 0}$ the torque through system axis Z due to exterior loading.

Isolating $\boldsymbol{D}(z)$ from Eq. (33) and substituting in Eq. (29) results

$$+\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{K}^{-1}\,\boldsymbol{Q}_0 + \boldsymbol{e}\,\boldsymbol{K}^{-1}\,\boldsymbol{e}^T\,\boldsymbol{q}(z) - \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{q}(z) - \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{p} + \boldsymbol{f}\,\boldsymbol{q}(z)'' = \boldsymbol{0}. \tag{36}$$

Denoting
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{U}, \tag{37}$$

$$\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{K}^{-1}\,\boldsymbol{e}^T, \tag{38}$$

$$\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{K}^{-1}\,\boldsymbol{Q}_0 + \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{p}. \tag{39}$$

Eq. (36) may be written in the form

$$\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{q}(z)'' - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{q}(z) = \boldsymbol{c}. \tag{40}$$

Solution of the System of Differential Equations

The solution of Eq. (40) is involved with an eigenvalue problem of the matrix

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}). \tag{41}$$

The eigenvalues r of the matrix $\boldsymbol{S}$ are the roots of the m degree characteristic equation.

$$\det(\boldsymbol{f}^{-1})\det(r\boldsymbol{f}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = 0. \tag{42}$$

Matrices $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ are real and symmetric and $\boldsymbol{f}$ is positive definite, thus the eigenvalues of matrix $\boldsymbol{S}$ are real.

Denoting with

$$r_i = \lambda_i^2 \tag{43}$$

the eigenvector $\boldsymbol{A}_i$ defined by an arbitrary constant for each eigenvalue r_i, is determined by solving the homogeneous system of algebraic equations

$$\lambda^2\boldsymbol{f}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}. \tag{44}$$

It is to be mentioned that between two distinct eigenvectors $\boldsymbol{A}_i$ and $\boldsymbol{A}_j$ orthogonality relation is satisfied, i. e.

$$\boldsymbol{A}_i^T(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{A}_i^T\boldsymbol{f}\boldsymbol{A}_j = 0, \qquad \text{for } i \neq j \tag{45}$$

and for $i=j$

$$\lambda^2\boldsymbol{A}_i^T\boldsymbol{f}\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}_i^T(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{A}_i. \tag{46}$$

The vector $\boldsymbol{q}(z)$ may be expressed with aid of the eigenvectors in the following form

$$\boldsymbol{q}(z) = \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\psi_i(z) \tag{47}$$

or in matrix form

$$\boldsymbol{q}(z) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\psi}(z), \tag{48}$$

in which

$$\boldsymbol{\psi}(z) = \begin{Bmatrix}\psi_1(z)\\ \psi_2(z)\\ \vdots\\ \psi_m(z)\end{Bmatrix}, \tag{49}$$

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots \boldsymbol{A}_m). \tag{50}$$

Substituting Eq. (47) into Eq. (40) results

$$\boldsymbol{f}\sum_i \boldsymbol{A}_i\psi_i(z)'' - (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\sum_i \boldsymbol{A}_i\psi_i(z) = \boldsymbol{c}. \tag{51}$$

Premultiplying Eq. (51) with $\boldsymbol{A}_i^T$ and considering Eq. (45) results

$$\boldsymbol{A}_i^T\boldsymbol{f}\boldsymbol{A}_i\psi_i(z)'' - \boldsymbol{A}_i^T(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{A}_i\psi_i(z) = \boldsymbol{A}_i^T\boldsymbol{c}. \tag{52}$$

Substituting Eq. (46) into Eq. (52) results

$$\psi_i(z)'' - \lambda_i^2 \psi_i(z) = \varrho_i \boldsymbol{c}, \tag{53}$$

in which

$$\varrho_i = \frac{\boldsymbol{A}_i^T}{\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{f} \boldsymbol{A}_i}. \tag{54}$$

The general solution of Eq. (53) for λ_i real, is [4]:

$$\psi_i(z) = \psi_i(0) \operatorname{ch} \lambda_i z + \frac{1}{\lambda_i} \psi_i(0)' \operatorname{sh} \lambda_i z + \frac{1}{\lambda_i} \varrho_i \int_0^z \boldsymbol{c} \operatorname{sh} \lambda_i (z-\xi)\, d\xi \tag{55a}$$

and for λ_i imaginary:

$$\psi_i(z) = \psi_i(0) \cos \lambda_i z + \frac{1}{\lambda_i} \psi_i(0)' \sin \lambda_i z + \frac{1}{\lambda_i} \varrho_i \int_0^z \boldsymbol{c} \sin \lambda_i (z-\xi)\, d\xi, \tag{55b}$$

in which ξ is a dummy variable.

The solution which satisfies the boundary conditions

$$\psi_i(0) = 0, \tag{56}$$

$$\psi_i(H)' = 0, \tag{57}$$

for λ_i real, is given by

$$\psi_i(z) = \frac{-1}{\lambda_i \operatorname{ch} \lambda_i H} \varrho_i \operatorname{sh} \lambda_i z \int_0^H \boldsymbol{c} \operatorname{ch} \lambda_i (H-\xi)\, d\xi + \frac{1}{\lambda_i} \varrho_i \int_0^z \boldsymbol{c} \operatorname{sh} \lambda_i (z-\xi)\, d\xi \tag{58a}$$

and for λ_i imaginary by

$$\psi_i(z) = \frac{-1}{\lambda_i \cos \lambda_i H} \varrho_i \sin \lambda_i z \int_0^H \boldsymbol{c} \cos \lambda_i (H+\xi)\, d\xi + \frac{1}{\lambda_i} \varrho_i \int_0^z \boldsymbol{c} \sin \lambda_i (z-\xi)\, d\xi. \tag{58b}$$

Knowing the functions $\psi_i(z)$ the shear forces in the continuous lamella system "j" are determined with Eq. (48) and in the connecting beam at story k having ordinate Z_k.

$$P_{kj} = \int_{Z_k - h/2}^{Z_k + h/2} q_j(z)\, dz. \tag{59}$$

The displacement vector may be calculated by three successive integrations of Eq. (33). The three vectors of the integration constants are determined from the boundary conditions

$$\boldsymbol{D}(0) = \boldsymbol{0}, \tag{60}$$

$$\boldsymbol{D}(0)' = \boldsymbol{0}, \tag{61}$$

$$\boldsymbol{D}(H)'' = \boldsymbol{0}. \tag{62}$$

The shear forces and torque in shear wall i, are

$$\bar{\boldsymbol{Q}}_i(z) = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{xi}(z) \\ \bar{Q}_{yi}(z) \\ \bar{Q}_{\theta i}(z) \end{Bmatrix} = -\bar{\boldsymbol{K}}_i \bar{\boldsymbol{D}}_i(z)''' + \sum_l \boldsymbol{e}_l \boldsymbol{q}_l(z) - \sum_r \boldsymbol{e}_r \boldsymbol{q}_r(z). \tag{63}$$

In Eq. (63) the sum on l refers to connecting beams joining the shear wall from left and r that from right.

The bending moments and bimoments in shear wall i are given by

$$\bar{\boldsymbol{M}}_i(z) = \begin{Bmatrix} \bar{M}_{xi}(z) \\ \bar{M}_{yi}(z) \\ \bar{B}_i(z) \end{Bmatrix} = -\bar{\boldsymbol{K}}_i \bar{\boldsymbol{D}}_i(z)''. \tag{64}$$

The normal forces in the shear walls i are given by

$$N_i(z) = \sum_j \int_z^H q_j(z)\,dz + \int_z^H p_i\,dz. \tag{65}$$

In Eq. (65) the sum on j refers to lamella systems connected to shear wall i.

The above presented method may be generalized for structures having step wise variations in shear wall stiffness and/or stiffness or span of connecting beams.

The general solution given by Eq. (53) depends on two constants $\psi_i(0)$ and $\psi_i(0)'$.

Let us assume a structure with a sudden change in the geometric characteristics of shear walls and/or connecting beam at level $Z=d$. For analysis purposes the structure may be seen as divided in two zones each one with constant geometric characteristics. The lower zone from level $Z=0$ to $Z=d$ will be denoted with I and the one from $Z=d$ to $Z=H$ with II. For each zone the solution for $\boldsymbol{q}(z)$ may be written in the form

$$\boldsymbol{q}_I(z) = \boldsymbol{A}_I \boldsymbol{\psi}_I(z), \tag{66}$$

$$\boldsymbol{q}_{II}(z) = \boldsymbol{A}_{II} \boldsymbol{\psi}_{II}(z). \tag{67}$$

Each of these solutions depends on the corresponding arbitrary constants $\psi(0)$ and $\psi(0)'$. They are determined from the following boundary conditions:

At level $Z=0$ with zero shear forces in the lamella system

$$\boldsymbol{q}_I(0) = \boldsymbol{0}. \tag{68}$$

At level $Z=d$ with equal shear forces in the lamella systems of zone I and II

$$\boldsymbol{q}_I(d) = \boldsymbol{q}_{II}(d). \tag{69}$$

At level $Z=d$ with equal variations in shear forces in the lamella systems of zone I and II

$$\boldsymbol{q}_I(d)' = \boldsymbol{q}_{II}(d)'. \tag{70}$$

At level $Z=H$ with variations in shear forces in the lamella system equal to zero

$$\boldsymbol{q}_{II}(H) = \boldsymbol{0}. \tag{71}$$

These boundary conditions will result in a system of $4m$ linear algebraic equations. Since the condition $\boldsymbol{q}_I(0)=\boldsymbol{0}$ is reduced to $\psi_I(0)=0$ the system may be reduced to $3m$ equations. Generally for a structure with g changes in characteristics a system of $(2g+1)m$ equations will be obtained.

Conclusions

On the basis of the present method a general program may be prepared for lateral load analysis of multistory structures with arbitrary lay out of stiffening elements and sudden changes in characteristics including the effect of exterior vertical loads. The influence of normal strains in shear walls and columns are included.

List of Symbols and Notations

Upper bar	magnitudes in particular system of axes
i	index for shear wall
j	index for connecting beam or lamella system
A	cross section area
$\boldsymbol{A}_i$	eigenvector belonging to eigenvalue λ_i
B	bimoment
$\boldsymbol{D}(z)$	displacement vector
E	modulus of elasticity
$\boldsymbol{F}$	flexibility matrix to normal strains
G	shear modulus
J_{xi}, J_{yi}, J_{wi}	moment of inertia in X respective Y direction and sectorial moment of inertia
$\boldsymbol{K}$	stiffness matrix
L	clear span of connecting beam
$\boldsymbol{M}$	3×1 vector consisting bending moment in X and Y direction and bimoment with respect to the origin of the system axes
N	normal force
P_k	shear force in connecting beam at story level k
$\boldsymbol{R}$	rotation matrix
$\boldsymbol{T}$	translation matrix
$\boldsymbol{Q}$	3×1 vector consisting shear forces in X and Y direction and torsion moment with respect to origin of the system axes
$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$	vector defined in the text
X, Y, Z	coordinates
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$	matrices defined in the text
d	ordinate of characteristic change level

$\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_l, \boldsymbol{e}_r$	vectors defined in the text
$\boldsymbol{f}$	flexibility matrix of lamella system
g	number of changes in characteristics of stiffening elements
h	story height
m	number of lamella systems
n	number of shear walls
$\boldsymbol{p}$	vertical load vector
$\boldsymbol{q}(z)$	shear force function in lamella system
$\psi(z)$	function defined in the text
x, y, z	particular system of axes for connecting beams
α	angle between main axis $\bar{X}$ and system axes X
$\boldsymbol{\varrho}_i$	vector defined in the text
η, δ, φ	gap at cut end due to bending and shear of connecting beams, respectively strains in shear walls and bending and warping of the shear walls
λ_i	eigenvalue
θ	torsion angle
w	sectorial coordinate

References

1. Despeyroux, J.: Shear Walls with n Rows of Openings. Symposium on Tall Buildings, Univ. of Southampton, April 1966, Pergamon Press, 1967.
2. Clough, R., King, I. P. and Wilson, E. L.: Structural Analysis of Multistory Buildings. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 9 7, ST 3, Proc. Paper 3925, June 1964, pp. 19–34.
3. Gluck, J.: Lateral Load Analysis of Asymmetric Multistory Structures. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 96, No. ST 2, Proc. Paper 7089, February 1970, pp. 317–333.
4. Mikusinsky, J.: Operational Calculus. Pergamon Press, 1958.
5. Weaver, W. and Nelson, M. F.: Three-Dimensional Analysis of Tier Buildings. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 92, No. ST 6, Proc. Paper 5019, December 1966, pp. 385–404.
6. Winokur, A. and Gluck, J.: Lateral Loads in Asymmetric Multistory Structures. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST 3, Proc. Paper 5842, March 1968, pp. 645–656.

Summary

A method for three dimensional analysis of multistorey structures based on the continuum approach is presented. There are no restrictions referring to types of stiffening elements and layout in floor plane. The number of stiffening elements which may be included in analysis is practically not limited.

The loads may be vertical and lateral at arbitrary locations. Elastic working of thin-walled members is included in analysis, as well as axial deformations in vertical elements.

Résumé

On présente une méthode pour l'analyse tridimensionnelle des structures à plusieurs étages, basée sur l'approchement du continuum. Il n'existe pas de restrictions quant aux types des éléments raidisseurs et du layout dans le plan de l'étage. Le nombre des éléments raidisseurs qui peuvent être compris dans l'analyse n'est pratiquement pas limité. Les charges peuvent agir verticalement ou latéralement à des endroits arbitraires. Le travail élastique de membres à parois minces est compris dans l'analyse, aussi bien que les déformations axiales dans les éléments verticaux.

Zusammenfassung

Es wird eine Methode zur dreidimensionalen Analyse mehrstöckiger Bauten auf Grund der Kontinuum-Näherung vorgelegt. Es bestehen keine Einschränkungen hinsichtlich der Typen der Versteifungselemente und des Entwurfes in der Stockwerksebene. Die Zahl der Versteifungselemente, die in die Analyse einbezogen werden können, ist praktisch nicht begrenzt. Die Lasten können vertikal und seitlich an beliebigen Stellen wirken. Das elastische Arbeiten dünnwandiger Glieder ist in der Analyse inbegriffen, ebenso axiale Deformationen in Vertikalelementen.

Dynamics of Asymmetric Multistory Structures

Dynamique de structures asymétriques à plusieurs étages

Dynamik asymmetrischer mehrstöckiger Bauten

J. GLÜCK
Senior Lecturer

M. GELLERT
Senior Lecturer

A. DANAY
Graduate Student

Faculty of Civil Engineering, Technion-Israel Institute of Technology

Introduction

In multistory building design impulsive lateral loads and earthquake ground motion lead to a dynamic analysis of such structures. A rigorous solution of the problem involves a large amount of numerical calculations which may be carried out with aid of digital computers only. It is well known that severe earthquakes will produce nonlinear dynamic response while in the case of a moderate earthquake ground motion the response of the structure may be assumed linear. Herein is described a method for linear dynamic response of multistory structures.

Previous reports treat extensively linear and nonlinear dynamic analysis of multistory buildings by the discrete method, but most of them involve symmetric structures which leads to two-dimensional analytical models [4], [5]. A three-dimensional discrete model for linear dynamic analysis of multistory buildings was presented by WEAVER [13]. The structure is laid out in a rectangular grid pattern and consists of shear walls and columns with principal axes parallel to those of the system. A threedimensional model for statical analysis was presented by WINOKUR [14].

Another common approach to lateral load analysis of multistory structures is based on the continuous-medium concept, in which the discrete structure is represented by a continuous one, by replacing the horizontal connecting beams and frame by an equivalent continuous medium. The forces borne in this medium are assumed to be proportional to the second derivative of the displacement. The statical analysis of two-dimensional models was presented by

CHITTY [3], BECK [2], ROSMAN [11], DESPEYROUX [6] and others, and the dynamics of this model were presented by OSAWA [9] and others [10], [8]. A three dimensional model for statical analysis was presented in a previous paper [7], and the dynamics by BARUCH [1]. This model neglects the displacements due to normal strains in columns and shear walls. As mentioned by previous investigators the effect of normal strains in shear walls is of considerable magnitude and is not to be neglected in dynamic analysis of multistory structures.

The object of this paper is to present a more accurate approach to the linear dynamic analysis of asymmetric multistory structures, using a three-dimensional continuous model, including the effects due to normal strains in columns and shear walls. The lay-out of the stiffening elements in the plane of the structure is arbitrary, without restrictions as to shape of the shear wall cross section, direction of its principal axes and orientation of the frames. Vlasov's thin-walled bar theory is used for establishing the torsional properties of shear walls with non-prismatic section, in which the centroid and shear center do not coincide. The equations of motion for lateral and normal displacement functions are formulated in matrix form. The evaluation of the normal modes leads to an eigenvalue problem of order $2n+12$, independent of the number of stories, n being the total number of coupled shear walls. With the normal modes known the dynamic response to impulsive lateral loads and earthquake ground motion may be evaluated.

Fig. 1 shows a horizontal section of an asymmetric structure, where the circled numbers refer to the shear walls and those enclosed in squares refer to

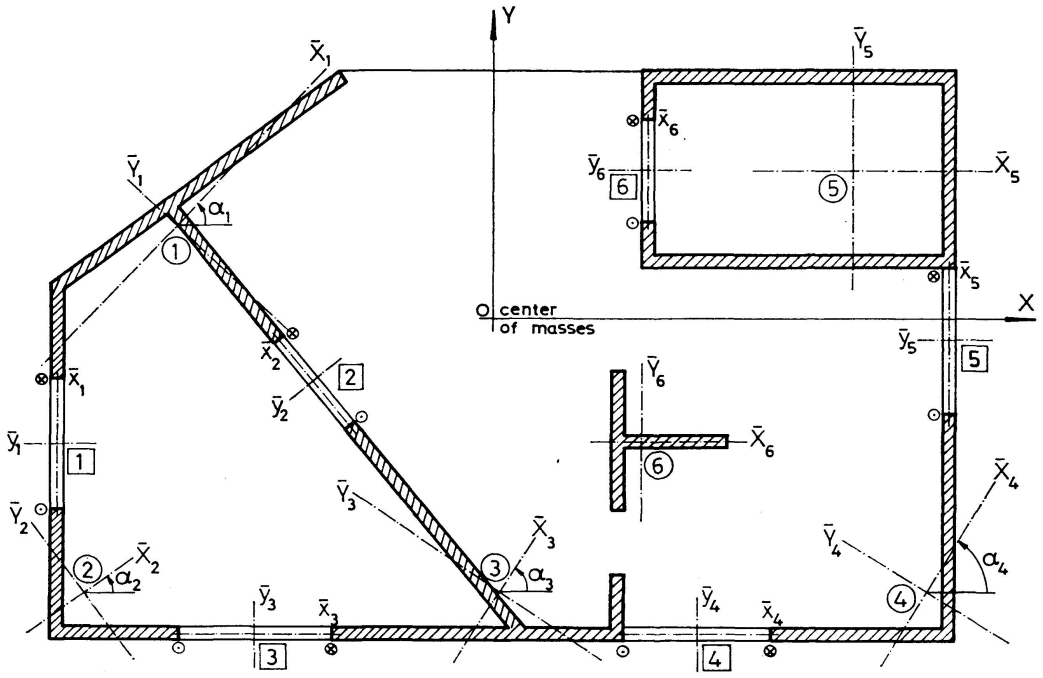


Fig. 1. Floor plane of asymmetric structure.

connecting beams transformed into a continuous medium. The local system of axes $(\bar{X}_i, \bar{Y}_i)$ coincides with the principal axes of shear wall cross section. System axes are denoted with X, Y, Z.

Assumptions and Limitations

1. Floors have infinite plane rigidity and negligible rigidity perpendicular to their plane.
2. Columns, beams, shear walls etc. have uniform geometric properties with regard to height.
3. Shear deformations in shear walls are negligible.

Geometrie and Elastic Properties of Shear Walls

The relation between actions and displacements, expressed in matrix form, for local axes, including warping effect, is given by:

$$\bar{\boldsymbol{p}}_i(z) = \bar{\boldsymbol{K}}_i \boldsymbol{D}_i(z)^{\mathrm{IV}} - \bar{\boldsymbol{K}}_{Ti} \bar{\boldsymbol{D}}_i(z)'', \tag{1}$$

in which

$$\bar{\boldsymbol{p}}_i(z) = \begin{Bmatrix} \bar{p}_{xi}(z) \\ \bar{p}_{yi}(z) \\ \bar{p}_i(z) \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Terms $\bar{p}_{xi}(z)$ and $\bar{p}_{yi}(z)$ = the respective lateral load in $\bar{X}_i$ and $\bar{Y}_i$ directions and $\bar{p}_i(z)$ the torque in shear wall i.

The stiffness matrices of shear wall i are:

$$\bar{\boldsymbol{K}}_i = \begin{vmatrix} E\bar{J}_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & E\bar{J}_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & E\bar{J}_{wi} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$\bar{\boldsymbol{K}}_{Ti} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\bar{J}_{Ti} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

in which $\bar{J}_{xi}$ and $\bar{J}_{yi}$ = the respective moments of inertia about the $\bar{X}_i$ and $\bar{Y}_i$ axes; $\bar{J}_{wi}$ = the sectorial moment of inertia of shear wall i; and $\bar{J}_{Ti}$ = the Saint-Venant torsion coefficient of shear wall i.

The displacement vector of shear center of wall i in local axes is:

$$\bar{\boldsymbol{D}}_i(z) = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i(z) \\ \bar{v}_i(z) \\ \theta_i(z) \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

in which $\bar{u}_i(z)$, $\bar{v}_i(z)$ = the respective displacement functions in $\bar{X}_i$ and $\bar{Y}_i$ directions; and $\theta_i(z)$ = the rotation function about $\bar{Z}_i$ axis.

Equilibrium equations of the whole structure refer to the (X, Y, Z) system axes. Transformation of the geometric and physical properties from local into system axes is obtained by combined rotation and translation [12].

Transformation of the displacement vector is given by:

$$\bar{\boldsymbol{D}}_i(z) = \boldsymbol{T}_i \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{D}(z), \tag{6}$$

in which the rotation matrix is given by:

$$\boldsymbol{R}_i = \begin{vmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & 0 \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{7}$$

the translation matrix is given by:

$$\boldsymbol{T}_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -Y_i \\ 0 & 1 & X_i \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{8}$$

and the system displacement vector is:

$$\boldsymbol{D}(z) = \begin{Bmatrix} u(z) \\ v(z) \\ \theta(z) \end{Bmatrix}. \tag{9}$$

Terms X_i, Y_i = the coordinates of shear center of wall in system axes; $u(z)$, $v(z)$ = the respective displacement functions in X and Y directions of the system axes; and $\theta(z)$ = the rotation function about Z axis.

Stiffness matrices $\boldsymbol{K}_i$ for system axes are obtained by congruent transformation (12).

$$\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{T}_i^T \boldsymbol{R}_i^T \bar{\boldsymbol{K}}_i \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{T}_i, \tag{10}$$

in which $\boldsymbol{R}_i^T$ and $\boldsymbol{T}_i^T$ = the transpose of $\boldsymbol{R}_i$ and $\boldsymbol{T}_i$ respectively.

Stiffness matrix $\boldsymbol{K}_{Ti}$ does not change with transformation.

$$\boldsymbol{K}_{Ti} = \bar{\boldsymbol{K}}_{Ti}. \tag{11}$$

Transformation of the action vector into system axes is given by (12)

$$\boldsymbol{p}_i(z) = \boldsymbol{T}_i^T \boldsymbol{R}_i^T \bar{\boldsymbol{p}}_i(z). \tag{12}$$

Substituting Eqs. (1) and (6) in Eq. (12) yields:

$$\boldsymbol{p}_i(z) = \boldsymbol{K}_i \boldsymbol{D}(z)^{\mathrm{IV}} - K_{Ti} D(z)''. \tag{13}$$

Geometric and Elastic Properties of Connecting Beams

Since the stiffness of the shear walls is much more higher than that of the connecting beams, the walls may be assumed rigid, undeformable compared with the latter. In this case the mid point of the connecting beam is a contra-

flexure point with zero bending moment. In a cut at this section as shown in Fig. 2a only a shear force will suffice to provide continuity. These concentrated shear forces are transformed into an equivalent distributed shear force (by dividing it by story height) acting on a continuous media with shear stiffness equal to that of the cut connecting beam divided by story height as shown in Fig. 2b.

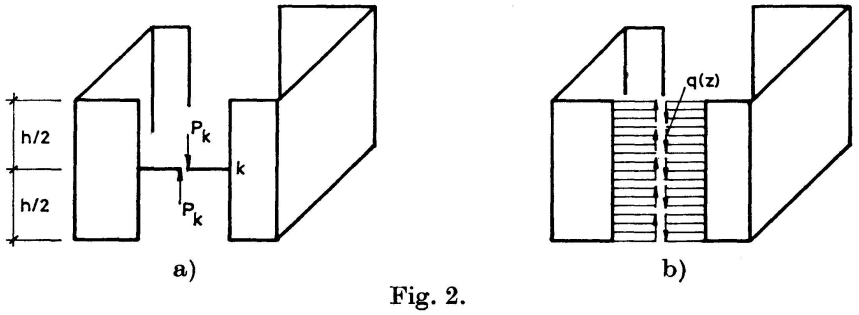


Fig. 2.

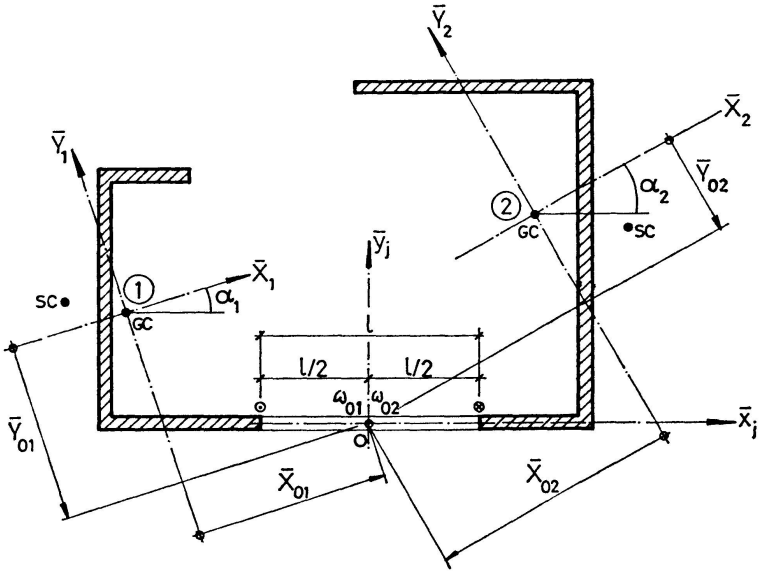


Fig. 3. Cross section of coupled nonprismatic shear wall.

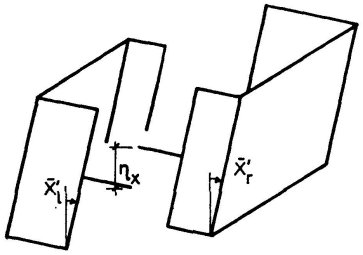
A cross section of a coupled shear wall with notations used in the text is shown in Fig. 3. Lateral deflections and rotation of the shear wall at the cut ends will result in a gap η (see Fig. 4a, b, c) which expressed in a matrix form is:

$$\eta_j = \eta_{jx} + \eta_{jy} + \eta_{j\theta} = -\boldsymbol{e}_l^T \bar{\boldsymbol{D}}_l(z)' + \boldsymbol{e}_r^T \bar{\boldsymbol{D}}_r(z)', \tag{14}$$

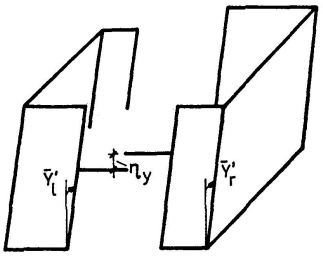
in which

$$\boldsymbol{e}_l = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{l0} \\ \bar{Y}_{l0} \\ \bar{w}_{l0} \end{Bmatrix}, \tag{15}$$

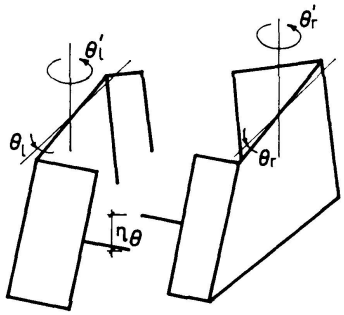
$$\boldsymbol{e}_r = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{r0} \\ \bar{Y}_{r0} \\ \bar{w}_{r0} \end{Bmatrix}. \tag{16}$$



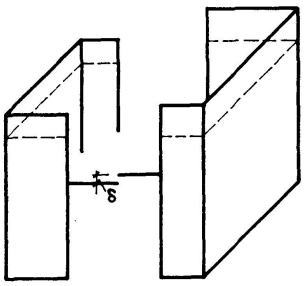
a) Due to displacement in $\bar{X}$ direction only.



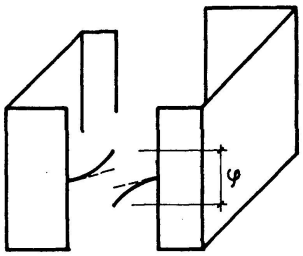
b) Due to displacement in $\bar{Y}$ direction only.



c) Due to warping only.



d) Due to displacement in $\bar{Z}$ direction only.



e) Due to shear and bending deformation of the connecting beams.

Fig. 4. Gaps in cut ends due to displacements in $\bar{X}$, $\bar{Y}$ and $\bar{Z}$ directions and rotation.

In Eqs. (15) and (16), $\bar{X}_{l0}$, $\bar{Y}_{l0}$ and $\bar{X}_{r0}$, $\bar{Y}_{r0}$ = coordinates of mid point 0 in left element local axes respective right; and $\bar{w}_l$ and $\bar{w}_r$ the sectorial coordinates, respectively left and right element shear centers.

Substituting Eq. (6) into Eq. (14) yields:

$$\eta_j(z) = -(\boldsymbol{e}_l^T \boldsymbol{R}_l \boldsymbol{T}_l - \boldsymbol{e}_r^T \boldsymbol{R}_r \boldsymbol{T}_r) \boldsymbol{D}(z)', \tag{17}$$

denoting

$$\boldsymbol{e}_J = \boldsymbol{e}_l^T \boldsymbol{R}_l \boldsymbol{T}_l - \boldsymbol{e}_r^T \boldsymbol{R}_r \boldsymbol{T}_r. \tag{18}$$

Eq. (17) may be written as

$$\eta_j(z) = -\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{D}(z)'. \tag{19}$$

The gap at cut ends due to axial displacements of the shear walls may be written as

$$\delta_j(z) = \boldsymbol{U}_j^T \boldsymbol{W}, \tag{20}$$

in which

$$\boldsymbol{W}(z) = \begin{Bmatrix} W_1(z) \\ W_2(z) \\ \vdots \\ W_n(z) \end{Bmatrix}. \tag{21}$$

In Eq. (21) $\boldsymbol{W}$ is the vector of axial displacements of the shear walls; n = the total number of coupled shear walls of the structure.

It is assumed that $q_j(z)$ is positive when producing tension in the left shear wall (denoted with $\odot$) and compression in the right one (denoted with $\otimes$). In Eq. (20) $\boldsymbol{U}_j$ = a Boolean vector related to positive action of $q_j(z)$. If tension is produced in the shear walls connected to continuous media j, a plus one appears in vector $\boldsymbol{U}_j$, a minus one if compression, and a zero for all other coupled shear walls. For the example building given in Fig. 1 the matrix U containing all vectors U_j is

$$\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \boldsymbol{U}_3 \ldots \boldsymbol{U}_6), \tag{22}$$

in which

$$\boldsymbol{U} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Due to shear and bending of the connecting beam, the gap which results at cut ends is given by

$$\varphi_j = f_j q_j(z), \tag{24}$$

in which

$$f_j = \left(\frac{L_j^3}{12 E I_j} + \frac{L_j}{G \bar{A}_j}\right) h. \tag{25}$$

In Eq. (25), $\bar{A}_j$ = the effective area of the connecting beam cross section; and I_j its moment of inertia.

Compatibility Equations

The compatibility equations at the cut end of the connecting beams at row j may be expressed as follows:

Substituting Eqs. (19), (20), and (24) into Eq. (26) results

$$-\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{D}(z)' + f_1 q_j(z) + \boldsymbol{U}_j^T \boldsymbol{W}(z) = 0. \tag{27}$$

Denoting

$$\boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} f_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & f_2 \ldots 0 \\ \vdots & \\ 0 & f_s \end{vmatrix}, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{e} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_s \end{Bmatrix}, \tag{29}$$

in which s = the total number of connecting beams.

The system of differential equations expressing compatibility at cut ends of connecting beams may be expressed in matrix form as:

$$-\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{D}(z)' + \boldsymbol{f}\,\boldsymbol{q}(z) + \boldsymbol{U}^T\,\boldsymbol{W}(z) = \boldsymbol{0}, \tag{30}$$

in which

$$\boldsymbol{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{Bmatrix}. \tag{31}$$

Equations of Motion

Denoting

$$\boldsymbol{e}_j^T = \boldsymbol{T}_l^T\,\boldsymbol{R}_l^T\,\boldsymbol{e}_l - \boldsymbol{T}_r^T\,\boldsymbol{R}_r^T\,\boldsymbol{e}_r \tag{32}$$

and

$$\boldsymbol{e}^T = (\boldsymbol{e}_1^T\,\boldsymbol{e}_2^T \ldots \boldsymbol{e}_s^T). \tag{33}$$

The equations of motion for given dynamic loads may be written:

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{D}(z,t)^{\mathrm{IV}} - \boldsymbol{K}_T\,\boldsymbol{D}(z,t)'' - \boldsymbol{e}^T\,\boldsymbol{q}(z,t)' + \boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{D}}(z,t) = \boldsymbol{p}(z,t), \tag{34}$$

$$\boldsymbol{F}^{-1}\,\boldsymbol{W}(z,t)'' + \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{q}(z,t) + \boldsymbol{M}^*\,\ddot{\boldsymbol{W}}(z,t) = \boldsymbol{P}(z,t), \tag{35}$$

in which

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{K}_i, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{K}_T = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{K}_{Ti}, \tag{37}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_p \end{vmatrix}, \tag{38}$$

$$\boldsymbol{M}^* = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & & m_n \end{vmatrix}, \tag{39}$$

$$\boldsymbol{p}(z,t) = \begin{Bmatrix} p_x(z,t) \\ p_y(z,t) \\ p_\theta(z,t) \end{Bmatrix}, \tag{40}$$

$$\boldsymbol{P}(z,t) = \begin{Bmatrix} P_1(z,t) \\ P_2(z,t) \\ \vdots \\ P_n(z,t) \end{Bmatrix}, \tag{41}$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{E\,A_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{E\,A_2} & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & & \dfrac{1}{E\,A_n} \end{vmatrix}. \tag{42}$$

In Eq. (36), N = the total number of shear walls (coupled or not); in Eq. (38), m = the average mass per unit height; in Eq. (39), $m_1, m_2, \ldots m_n$ = the masses of the shear walls, per unit height; J_p = the polar moment of inertia per unit height:

$$J_p = \int \rho^2 dm, \tag{43}$$

in which ρ = the radius vector in horizontal plane.

By solving the vector of the shear force functions from Eq. (30) results

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}^{-1}\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{D}' - \boldsymbol{f}^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{W}. \tag{44}$$

The substitution of Eq. (44) ind Eqs. (34) and (35) yields the following systems of equations:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{D}^{\mathrm{IV}} - (\boldsymbol{K}_T + \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{f}^{-1}\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{D}'' + \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{f}^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{W}' + \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{p}, \tag{45}$$

$$\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{W}'' - \boldsymbol{U}\boldsymbol{f}^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{W} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{f}^{-1}\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{D}' + \boldsymbol{M}^*\ddot{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{P}. \tag{46}$$

A generalized vector of displacements $\boldsymbol{X}(z,t)$ is defined by

$$\boldsymbol{X}(z,t) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{D}(z,t) \\ \boldsymbol{W}(z,t) \end{Bmatrix}. \tag{47}$$

Eqs. (45) and (46) may then be written as:

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{X}^{\mathrm{IV}}(z,t) + \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{X}''(z,t) + \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{X}'(z,t) + \boldsymbol{d}\,\boldsymbol{X}(z,t) + \boldsymbol{g}\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{L}, \tag{48}$$

in which

$$\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix}, \tag{49}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} -(\boldsymbol{K}_T + \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{f}^{-1}\boldsymbol{e}) & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{F}^{-1} \end{vmatrix}, \tag{50}$$

$$\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{f}^{-1}\boldsymbol{U}^T \\ \boldsymbol{U}\boldsymbol{f}^{-1}\boldsymbol{e} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix}, \tag{51}$$

$$\boldsymbol{d} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{U}\boldsymbol{f}^{-1}\boldsymbol{U}^T \end{vmatrix}, \tag{52}$$

$$\boldsymbol{g} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}^* \end{vmatrix}, \tag{53}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P} \end{Bmatrix}. \tag{54}$$

Eqs. (48) represent a system of $n+3$ differential equations with the same number of unknown functions (3 lateral displacement functions $u(z,t)$, $v(z,t)$, $\theta(z,t)$ and n axial displacement functions $w_1, w_2, \ldots w_n(z,t)$.

Homogeneous Solution of the System of Differential Equations

The proposed solution is:

$$\boldsymbol{X}_h(z,t) = \boldsymbol{A}\, e^{rz} \sin \omega t = \boldsymbol{X}_h(z) \sin \omega t, \tag{55}$$

in which r = the characteristic value; ω = the circular frequency and $\boldsymbol{A}$ = the characteristic vector

$$\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n+3} \end{Bmatrix}. \tag{56}$$

Substitution of Eq. (55) into the homogeneous part of Eq. (48) yields

$$(r^4 \boldsymbol{a} + r^2 \boldsymbol{b} + r\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} - \omega^2 \boldsymbol{g})\, \boldsymbol{A}\, e^{rz} \sin \omega t = \boldsymbol{0}. \tag{57}$$

The condition for existence of nonzero $\boldsymbol{A}$ in Eq. (57) is vanishing of the determinant of the coefficients. The characteristic equation is therefore

$$\det (r^4 \boldsymbol{a} + r^2 \boldsymbol{b} + r\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} - \omega^2 \boldsymbol{g}) = 0. \tag{58}$$

In Eq. (58) there are two unknowns, r and ω, the solution of which requires a second equation. This equation will be obtained from the boundary conditions. For a given ω^2, $2n+12$ eigenvalues r are obtained, and for each one a corresponding eigenvector $\boldsymbol{A}$ will be calculated.

The normal mode $\boldsymbol{X}_n(z,t)$ for a given ω_n^2 is

$$\boldsymbol{X}_{hn}(z) = \sum_{i=1}^{2n+12} \boldsymbol{A}_i C_i e^{r_i z} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{D}_{hn}(z) \\ \boldsymbol{W}_{hn}(z) \end{Bmatrix}. \tag{59}$$

The solution obtained contains $2n+12$ constants which are calculated from the boundary equations, expressed by a system of $2n+12$ homogeneous algebraic equations. The solution of this system calls for vanishing of the coefficients determinant.

Boundary Conditions

At $z=0$ with lateral and normal deflections = 0

$$\boldsymbol{D}_h(0) = \boldsymbol{0}, \tag{60}$$

$$\boldsymbol{W}_h(0) = \boldsymbol{0}. \tag{61}$$

At $z=0$ with full restraint at support

$$\boldsymbol{D}_h'(0) = \boldsymbol{0}. \tag{62}$$

At $z=H$ with moments in shear walls = 0

$$\boldsymbol{D}_h''(0) = \boldsymbol{0}. \tag{63}$$

At $z=H$ with shear forces at the top of the structure = 0

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{D}_h'''(H) - (\boldsymbol{K}_T + \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{f}^{-1}\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{D}_h'(H) + \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{f}^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{W}_h(H) = \boldsymbol{0}. \tag{64}$$

At $z=H$ with normal strains at the top of the shear walls = 0

$$\boldsymbol{W}_h'(H) = \boldsymbol{0}. \tag{65}$$

In case of structures with foundations on elastic subgrade similar boundary conditions may be expressed.

General Solution of the System of Differential Equations

Assuming that the dynamic load may be expressed in the form

$$\boldsymbol{L}(z,t) = \boldsymbol{L}(z)\Phi(t), \tag{66}$$

in which $L(z)$ = a vector showing the distribution of the load with height of the structure

$$\boldsymbol{L}(z) = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{p}(z)\\ \boldsymbol{P}(z)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_x(z)\\ p_y(z)\\ p_\theta(z)\\ P_1(z)\\ P_2(z)\\ \vdots\\ P_n(z)\end{Bmatrix} \tag{67}$$

and $\Phi(t)$ = a time function, Eq. (48) may be written:

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{X}^{\mathrm{IV}}(z,t) + \boldsymbol{b}\boldsymbol{X}''(z,t) + \boldsymbol{c}\boldsymbol{X}'(z,t) + \boldsymbol{d}\boldsymbol{X}(z,t) + \boldsymbol{g}\ddot{\boldsymbol{X}}(z,t) = \boldsymbol{L}(z)\Phi(t). \tag{68}$$

The solution proposed for Eq. (68) will be the sum of the normal modes $\boldsymbol{X}_{hi}(z)$ multiplied by a corresponding time function $B_i(t)$, i. e.

$$\boldsymbol{X}(z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{X}_{hi}(z)\,B_i(t). \tag{69}$$

Premultiplying Eq. (68) with $\boldsymbol{X}_{hn}(z)^T$ and integrating results

$$\int_0^H \boldsymbol{X}_{hn}(z)^T[\boldsymbol{a}\boldsymbol{X}^{\mathrm{IV}}(z,t) + \boldsymbol{b}\boldsymbol{X}''(z,t) + \boldsymbol{c}\boldsymbol{X}'(z,t) + \boldsymbol{d}\boldsymbol{X}(z,t) + \boldsymbol{g}\ddot{\boldsymbol{X}}(z,t)]\,dz = \int_0^H \boldsymbol{X}_{hn}^T(z)\,\boldsymbol{L}(z)\Phi(t)\,dz. \tag{70}$$

Substituting Eq. (69) into Eq. (70) yields

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^H [\boldsymbol{D}_{hn}^T (\boldsymbol{a}_{11} \boldsymbol{D}_{hi}^{IV} + \boldsymbol{b}_{11} \boldsymbol{D}_{hi}'' + \boldsymbol{c}_{12} \boldsymbol{W}_{hi}') + \boldsymbol{W}_{hn}^T (\boldsymbol{b}_{22} \boldsymbol{W}_{hi}'' + \boldsymbol{d}_{22} \boldsymbol{W}_{hi} + \boldsymbol{c}_{21} \boldsymbol{D}_{hi}')] dz\, B_i(t) + \int_0^H (\boldsymbol{D}_{hn}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{D}_{hi} + \boldsymbol{W}_{hn}^T \boldsymbol{M}^* \boldsymbol{W}_{hi}) dz\, \ddot{B}_i(t) = \int_0^H (\boldsymbol{D}_{hn}^T \boldsymbol{p} + \boldsymbol{W}_{hn}^T \boldsymbol{P}) dz\, \Phi(t). \tag{71}$$

Due to orthogonality of the normal modes all crossed products of two normal modes are equal to zero, leading to the decoupling of the normal modes.

Denoting the generalized mass with

$$M_n = \int_0^H [\boldsymbol{D}_{hn}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{D}_{hn} + \boldsymbol{W}_{hn}^T \boldsymbol{M}^* \boldsymbol{W}_{hn}] dz, \tag{72}$$

the generalized exciting force with

$$L_n \Phi(t) = \Phi(t) \int_0^H [\boldsymbol{D}_{hn}^T \boldsymbol{p} + \boldsymbol{W}_{hn}^T \boldsymbol{P}] dz \tag{73}$$

and the generalized stiffness with

$$K_n = \int_0^H [\boldsymbol{D}_{hn}^T (\boldsymbol{a}_{11} \boldsymbol{D}_{hn}^{IV} + \boldsymbol{b}_{11} \boldsymbol{D}_{hn}'' + \boldsymbol{c}_{12} \boldsymbol{W}_{hn}') + \boldsymbol{W}_{hn}^T (\boldsymbol{b}_{22} \boldsymbol{W}_{hn}'' + \boldsymbol{d}_{22} \boldsymbol{W}_{hn} + \boldsymbol{c}_{21} \boldsymbol{D}_{hn}')] dz, \tag{74}$$

the uncoupled equation of motion for the n-th mode will be:

$$K_n B_n(t) + M_n \ddot{B}_n(t) = L_n \Phi(t). \tag{75}$$

The solution of Eq. (75) may be written

$$B_n = \frac{\gamma_n}{\Omega_n^2} \int_0^t \Phi(\tau) \sin \Omega_n (t-\tau)\, d\tau, \tag{76}$$

in which

$$\Omega_n^2 = \frac{K_n}{M_n} \tag{77}$$

and

$$\gamma_n = \frac{L_n}{M_n}. \tag{78}$$

In case of earthquake motion the dynamic load vector may be expressed in the form

$$\boldsymbol{L}(z) \Phi(t) = - \begin{Bmatrix} \boldsymbol{M} \ddot{\boldsymbol{D}}_0(t) \\ \boldsymbol{M}^* \ddot{\boldsymbol{W}}_0(t) \end{Bmatrix}. \tag{79}$$

The components of the earth acceleration vector may be independent and variable according to $n+3$ different time functions

$$\ddot{\boldsymbol{D}}_0(t) = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_0(t) \\ \ddot{v}_0(t) \\ \ddot{\theta}_0(t) \end{Bmatrix} \tag{80}$$

and

$$\ddot{\boldsymbol{W}}_0(t) = \begin{Bmatrix} \ddot{W}_{10}(t) \\ \ddot{W}_{20}(t) \\ \vdots \\ \ddot{W}_{n0}(t) \end{Bmatrix}. \tag{81}$$

Denoting with

$$\gamma_{B_n} = -\frac{\int_0^H \boldsymbol{D}_{hn}^T(z)\,\boldsymbol{M}\,dz}{M_n} \tag{82}$$

and

$$\gamma_{N_n} = -\frac{\int_0^H \boldsymbol{W}_{hn}^T(z)\,\boldsymbol{M}^*\,dz}{M_n}. \tag{83}$$

The solution of Eq. (75) may be expressed

$$B_n(t) = \frac{1}{\Omega_n^2}\int_0^t [\gamma_{B_n}\ddot{\boldsymbol{D}}_0(\tau) + \gamma_{N_n}\ddot{\boldsymbol{W}}_0(\tau)]\sin\Omega(t-\tau)\,d\tau. \tag{84}$$

Interior Forces and Displacements

Knowing the displacement vector $\boldsymbol{D}(z,t)$ for system axes, that for local axes $\bar{\boldsymbol{D}}_i(z,t)$ for shear wall i will be obtained by Eq. (6).

The shear force vector $\boldsymbol{q}(z,t)$ is calculated from Eq. (44).

The shear force in the connecting beam belonging to row j and storey k with ordinate z_k is given by

$$P_{Kj} = \int_{Z_K-h/2}^{Z_K+h/2} q_j(z,t)\,dz. \tag{85}$$

The shear forces and torque in shear wall i are

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{Q}}_i(z,t) = \begin{Bmatrix} Q_{xi}(z,t) \\ Q_{yi}(z,t) \\ Q_{\theta i}(z,t) \end{Bmatrix} &= -\bar{\boldsymbol{K}}_i \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\boldsymbol{D}}_i(z)'''\, B_i(t) \\ &+ \boldsymbol{K}_T \sum_{i+1}^{\infty} \bar{\boldsymbol{D}}_i(z)'\, B_i(t) + \sum_l \boldsymbol{e}_l q_l(z,t) - \sum_r \boldsymbol{e}_r q_r(z,t).\end{aligned} \tag{86}$$

In Eq. (86) the sum on l refers to connecting beams joining the shear wall from left and r that from right.

The bending moments and bimoment in shear wall are given by

$$\bar{\boldsymbol{M}}_i(z,t) = \begin{Bmatrix} M_{xi}(z,t) \\ M_{yi}(z,t) \\ B_i(z,t) \end{Bmatrix} = -\bar{K}_i \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\boldsymbol{D}}_i(z)''\, B_i(t). \tag{87}$$

Conclusions

A general method for dynamic analysis of multistory structures is presented. On the basis of this method a computer program may be prepared for dynamic analysis of multistory structures with arbitrary layout of shear walls. With adequate boundary conditions the method may be applied for cases with sudden changes in height of the geometric properties and loads. For g number of changes the evaluation of normal modes leads to an eigenvalue problem of order $(2n+12)(g+1)$. The influence of normal strains in the shear wall is included. Vertical dynamic loads can be taken into account.

List of Symbols and Notations

Upper bar	magnitudes in local systems of axes.
i	index for shear wall.
j	index for connecting beam or continuous media.
$\boldsymbol{A}$	characteristic vector.
A	cross section area.
B	bimoment.
$B(t)$	displacement time function.
C_i	constants.
$\boldsymbol{D}(z)$	lateral displacement vector.
$\boldsymbol{D}_0(t)$	earth acceleration vector.
E	modulus of elasticity.
$\boldsymbol{F}$	flexibility matrix to normal strains.
G	shear modulus.
H	height of the structure.
J_{xi}, J_{yi}, J_{wi}	moment of inertia in X respective Y direction and sectorial moment of inertia.
J_T	Saint-Venant torsion coefficient.
$\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}_T$	stiffness matrices.
L	clear span of connecting beam.
$\boldsymbol{L}$	load vector.
$\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}^*$	mass matrices.
$\boldsymbol{M}_i$	3×1 vector consisting bending moment in X and Y direction and bimoment with respect to local axes.
M_n	generalized mass.
M_x, M_y	moments.
N	total number of shear walls (coupled or not).
$\boldsymbol{P}(z,t), \boldsymbol{p}(z,t)$	dynamic load vectors.
P_k	shear force in connecting beam at story level k.
P_n	generalized exciting force.

$\boldsymbol{R}$	rotation matrix.
$\boldsymbol{T}$	translation matrix.
$\boldsymbol{Q}$	3×1 vector consisting shear forces in X and Y direction and torsion moment with respect to origin of the system axes.
$\boldsymbol{U}$	matrix dfined in the text.
X, Y, Z	coordinates.
$\boldsymbol{X}$	generalized displacement vector.
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{g}$	matrices defined in the text.
$\boldsymbol{e}_l, \boldsymbol{e}_r$	vector defined in the text.
$\boldsymbol{f}$	flexibility matrix of lamella system.
g	number of changes in characteristics of stiffening elements.
h	story height.
i, j, k, l, r	indexes.
n	number of shear walls having joints with connecting beams.
$q(z)$	shear force function in lamella system.
r	characteristic values.
x, y, z	local system of axes for connecting beams.
s	number of lamella systems.
α	angle between main axis $\bar{X}$ and system axis X.
φ, δ, η	gap at cut end due to bending and shear of connecting beam, respectively strains in shear walls and bending and warping of the shear walls.
ω	circular frequency.
$\Phi(t)$	load time functions.
Ω_n	circular frequency of the nth decoupled equations.
w	sectorial coordinate.
$u(z), v(z), \theta(z)$	lateral displacement functions in X and Y directions and rotation with respect to origin of the system axes.
$W_1(t), -W_n(t)$	axial displacement functions.

Acknowledgement

The present paper is part of the junior author's D. Sc. thesis. Thanks are due to the Technion, Israel Institute of Technology, for financing this research.

References

1. Baruch, M., Glück, J. and Mendelson, E.: Earthquake Analysis of Asymmetric Multistory Structures. Publication No. 117, Faculty of Civil Engineering, Technion-Israel Institute of Technology, Sept. 1968.
2. Beck, H.: Contribution to the Analysis of Coupled Shear Walls. Journal of ACI, August 1962, pp. 1055–1070.

3. CHITTY, L.: On the Cantilever Composed of a Series of Parallel Beams Interconnected by Cross Members. Philosophical Magazine, Oct. 1947, pp. 685–699.
4. CLOUGH, R. W. and BENUSKA, K. L.: Nonlinear Earthquake Behaviour of Tall Buildings. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 93, No. EM 3, Proc. Paper 5292, June 1967, pp. 129–146.
5. CLOUGH, R. W. and BENUSKA, K. L.: Inelastic Earthquake Response of Tall Buildings. Proceedings, 3rd World Conference on Earthquake Engineering, Wellington, New Zealand, 1965.
6. DESPEYROUX, J.: Shear Walls with a Row of Openings. Symposium on Tall Buildings, Univ. of Southampton, April, 1966, Pergamon Press, 1967.
7. GLÜCK, J.: Lateral Load Analysis of Asymmetric Multistory Structures. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 96, No. ST 2, Proc. Paper 7089, Febr. 1970, pp. 317–333.
8. GLÜCK, J. and GELLERT, M.: Continuous Method for Structural Analysis of Multistory Structures, Memoirs ISBE, Zürich (to be published).
9. OSAWA, Y.: Seismic Analysis of Core-Wall Buildings. Proc. 3rd Conference on Earthquake Engineering, New Zealand, 1965, Vol. II, pp. 458–475.
10. PASTERNAK, P. L.: Proektirovanie Zelezobetonih Konstrukzee. Stroizdat, Moskva, 1966.
11. ROSMAN, P.: Beitrag zur Untersuchung des Zusammenwirkens von waagerecht belasteten Wänden und Stockwerkrahmen bei Hochbauten. Beton und Stahlbetonbau, Febr. 1963.
12. WEAVER, W. and NELSON, M. P.: Three-Dimensional Analysis of Tier Buildings. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 92, No. ST 6, Proc. Paper 5019, Dec. 1966, pp. 385–404.
13. WEAVER, W. JR., NELSON, M. F. and MANNING, T. A.: Dynamics of Tier Buildings. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 94, No. EM 6, Proc. Paper 6293, Dec. 1968, pp. 1455–1474.
14. WINOKUR, A. and GLÜCK, J.: Lateral Loads in Asymmetric Multistory Structures. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST 3, Proc. Paper 5842, March 1968, pp. 645–656.

Summary

A general method for three dimensional dynamic analysis of asymmetric multistorey structures based on the continuum method approach is presented. There are no restrictions referring to types of stiffening elements and layout in floor plane. The dynamic loads may be vertical and lateral at arbitrary locations. The lateral and axial displacements of the shear walls are selected as independent variables. Normal strains and vertical dynamic loads and earth accelerations can also be taken into account.

Résumé

On présente une méthode générale pour l'analyse tridimensionnelle de structures asymétriques à plusieurs étages basée sur la méthode approchée du

continuum. Il n'existe pas des restrictions quant au types des éléments raidisseurs et au layout dans le plan des étages. Les charges dynamiques peuvent agir verticalement ou latéralement à des endroits arbitraires. Les déplacements latéraux et axiaux des parois de cisaillement sont sélectionnés comme variables indépendants. Des sollicitations normaux et des charges dynamiques verticaux ainsi que des accélérations terrestres peuvent également être prises en considération.

Zusammenfassung

Es wird eine allgemeine Methode für die dreidimensionale Analyse von asymmetrischen mehrstöckigen Bauten auf Grund der Kontinuum-Näherungsmethode dargelegt. Es bestehen keine Einschränkungen hinsichtlich der Typen von Versteifungselementen und des Entwurfs in der Stockwerkebene. Die dynamischen Belastungen können vertikal und seitlich an beliebigen Stellen wirken. Die seitlichen und axialen Verschiebungen der Schubwände werden als unabhängige Variable gewählt. Normale Beanspruchungen und vertikale dynamische Belastungen sowie Erdbeschleunigungen können ebenfalls berücksichtigt werden.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Stability of Plates Using Rectangular Bar Cells

Stabilité de dalles utilisant des éléments de barre rectangulaires

Festigkeit von Platten bei Anwendung rechteckiger Stabelemente

A. HRENNIKOFF
Sc.D., Research Professor Emeritus of Civil Engineering. The University of British Columbia, Vancouver B.C., Canada

C. I. MATHEW
M.Sc., (Eng.), Principal, Government Polytechnic Kalamassery, Kerala, India

RAJAN SEN
Graduate Student, Dept. of Civil Engineering. The University of British Columbia, Vancouver B.C., Canada

General Principles

The plate model must be composed of the elements endowed with proper elastic properties, as manifested by their plane stress and flexural stiffness matrices. The plane stress loads are assumed to increase gradually and in unison to the critical value. Once the critical condition has been reached, the model suffers a flexural deformation of a variable magnitude in some definite mode. Both the plane stress and the flexural deformations are considered small. The plane stress condition in the model is assumed to remain constant in the course of buckling and the energy of flexural deformation independent of the plane stress.

As the structure buckles the increment T of its total energy remains zero. This quantity is made up of the energy of deformation U and the potential energy of the loads V.

Thus,
$$T = U + V = 0. \tag{1}$$

With the plane stress being unaffected by buckling, U in this equation equals the flexural energy of the buckled structure with no contribution from the plane stress. The other part of the total energy, $V = -\sum P\epsilon$, is negative. The quantities ϵ are the components of displacements of the points of application of the loads P in the directions of the loads, suffered in the

course of buckling. The quantities U and ϵ depend on the mode of buckling described by the displacements w, θ^x and θ^y of the nodes of the model. The required displacements and with them the critical load are found by minimizing T. Both the bar and the no-bar cells may be used in analysis, the rectangular bar cells being particularly convenient for explicit formulation of the principal steps of the method.

Stability of Bar Cell Model

The model carries a set of in-plane loads P, described as having a unit intensity, and causing stresses S in its bars. As the loading is increased proportionately to the level of critical intensity f, the stresses are increased to fS. Since the structure in the course of buckling is in a state of neutral equilibrium, the virtual work equation is applicable to it. The virtual deformation is considered to be made up of the movements ϵ in the expression for V from the pre-buckling condition to the post-buckling one. These displacements are brought about by flexure of the bars resulting in decreases λ in the lengths of their projections (Fig. 1) unto the plane of the plate.

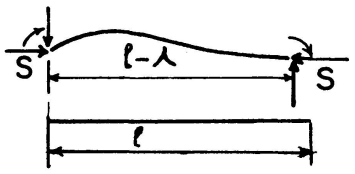


Fig. 1.

Thus, $$\sum(fP\epsilon) = \sum(fS\lambda). \tag{2}$$

Although the loads P are present only in a few locations, the stresses fS and their λ values exist usually in all bars. The transverse forces and the end moments in the bars do not enter the equation since they are balanced by the oppositely directed forces in the adjacent members. The stresses S are considered positive for compression and negative for tension. The quantity λ always signifies a decrease in length, and is used without a sign.

Eq. (1) thus becomes: $$T = U - f\sum(S\lambda) = 0. \tag{3}$$

Both the energy of flexural deformation U and the length changes λ are quadratic functions of the flexural nodal displacements, called collectively δ.

Minimizing T, $$\frac{\partial U}{\partial \delta} - f\sum\left(S\frac{\partial \lambda}{\partial \delta}\right) = 0. \tag{4}$$

Both terms of this equation are linear functions of the displacements δ.

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = [K]_m\{\delta\} \quad \text{and} \quad \sum\left(S\frac{\partial \lambda}{\partial \delta}\right)[K_s]_m\{\delta\}.$$

$[K]_m$ is the flexural stiffness matrix of the model, assembled from 12×12 stiffness matrices of the individual (rectangular) cells $[K]$. Similarly, $[K_s]_m$ is the stability matrix of the model, and $[K_s]$ – the stability matrix of the individual cell, while $\{\delta\}$ is the column vector of the flexural nodal displacements. The individual terms of $[K_s]$ are $\sum\left(S\frac{\partial^2\lambda}{\partial\delta_m\,\partial\delta_n}\right)$, the sums of the products of the stresses S in the bars of the cell and the second derivatives of their λ values taken with regard to the nodal displacements δ_m and δ_n corresponding to the location of the term in the matrix.

Eq. (4) may be written: $$([K]_m - f[K_s]_m)\{\delta\} = 0. \tag{5}$$

This equation expresses an eigenvalue problem satisfied only by some particular values of f associated with the particular modes of nodal displacements δ. The lowest eigenvalue has the greatest practical importance. At the same time the usual mathematical procedure for solution of equations of this kind produces the highest eigenvalue. This calls for transformation of Eq. (5) by dividing it by $-f$.

Then $$\left([K_s]_m - \frac{1}{f}[K]_m\right)\{\delta\} = 0. \tag{6}$$

The highest eigenvalue $1/f$ of this equation corresponds to the lowest value of f in Eq. (5).

Rectangular Bar Cell in Stability Analysis

It is convenient to use the plane stress cells of the type shown on Fig. 2. These cells, not described in literature, call for an explanation. The framework of each cell consists of the main system of the side and diagonal bars and the secondary system of the corner bars and the subdivided side bars, joined to the primary at the four corner nodes. The secondary system is not needed when the Poisson's ratio μ equals 1/3. At the other values of μ it is active only when the cell is subjected to pure shear. In conditions of uniform tension,

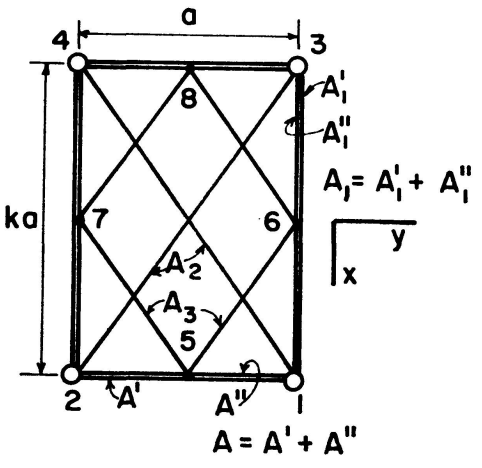


Fig. 2.

compression and shearless bending in the directions of x and y axes the secondary side bars add their areas to the primary, and the corner bars remain inactive.

By subjecting the cell to uniform normal and shearing strains in x and y directions and applying the conditions of equivalence with the plate-prototype [2], the cross-section areas of the bars are found:

$$\begin{aligned} A &= A' + A'' = \frac{k^2-\mu}{2k(1-\mu^2)} at, \\ A_1 &= A_1' + A_1'' = \frac{1-\mu k^2}{2(1-\mu^2)} at, \\ A_2 &= \frac{\mu(k^2+1)^{3/2}}{2k(1-\mu^2)} at. \end{aligned} \tag{8}$$

The areas of the bars of the secondary system A'', A_1'', and A_3 are not required in applications.

The first two columns of the 8×8 stiffness matrix of the cell (i.e., for $u_1 = 1$ and $v_1 = 1$ in Fig. 3) are given in Table 1. The other columns may be obtained by the considerations of symmetry. The matrix is symmetrical about the principal diagonal.

The bar cells used in flexure are of the type introduced by YETTRAM and HUSSEIN [3]. They consist of the side and diagonal bars endowed with flexural

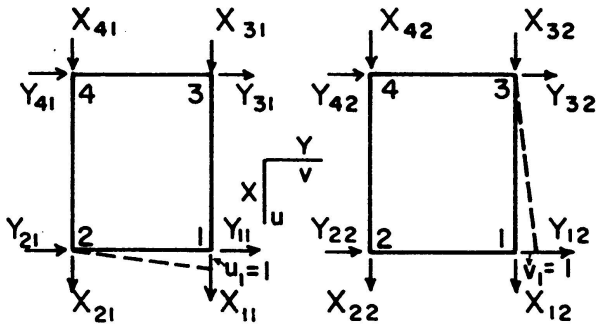


Fig. 3.

Table 1. Stiffness Matrix Terms – Plane Stress – Rectangular Cell

Action 1, $u_1=1$. Fig. 3		Action 2, $v_1=1$. Fig. 3	
$X_{11} = \frac{4+k^2(1-3\mu)}{8k(1-\mu^2)} Et$	$Y_{11} = \frac{1}{8(1-\mu)} Et$	$X_{21} = \frac{1}{8(1-\mu)} Et$	$Y_{12} = \frac{1-3\mu+4k^2}{8k(1-\mu^2)} Et$
$X_{21} = -\frac{(1-3\mu)k}{8(1-\mu^2)} Et$	$Y_{21} = \frac{1-3\mu}{8(1-\mu^2)} Et$	$X_{22} = \frac{1-3\mu}{8(1-\mu^2)} Et$	$Y_{22} = \frac{1+\mu-4k^2}{8k(1-\mu^2)} Et$
$X_{31} = \frac{-4+k^2(1+\mu)}{8k(1-\mu^2)} Et$	$Y_{31} = \frac{1-3\mu}{8(1-\mu^2)} Et$	$X_{32} = \frac{1-3\mu}{8(1-\mu^2)} Et$	$Y_{32} = \frac{1-3\mu}{8k(1-\mu^2)} Et$
$X_{41} = -\frac{k}{8(1-\mu)} Et$	$Y_{41} = -\frac{1}{8(1-\mu)} Et$	$X_{42} = -\frac{1}{8(1-\mu)} Et$	$Y_{42} = \frac{1}{8k(-\mu^2)} Et$

stiffnesses for bending out of the plane of the plate; their side bars possess also torsional stiffnesses. The 12×12 flexural stiffness matrix is given in Reference [3].

As the nodes of the stressed cell undergo flexural displacements w, θ^x and θ^y, its bars, carrying direct stresses S, undergo shortenings λ of their projected lengths involved in the stability matrix. The actual absence of the corner bars in the flexural cell is treated as the presence of bars of zero flexural stiffness. Such treatment is legitimate because the shape of the deflected bar is independent of the flexural stiffness, which thus may be assumed zero. Possessing no flexural stiffnesses the corner bars do not affect flexure of the side bars to which they connect.

Length Changes λ of the Main Bars

Taking the side bar 2–1 as an example, the shortening of its bent length λ is influenced only by the four corner displacements w_1, w_2, θ_1^x, and θ_2^x. The equation of the deflection curve w (Fig. 4) is expressed by the moment-area

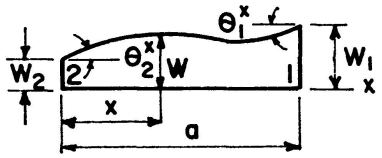


Fig. 4.

relations in terms of the four nodal displacements, and then the quantity $\lambda_{21} = \frac{1}{2}\int_0^a \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx$ is evaluated:

$$\lambda_{21} = 0.6\frac{w_1^2}{a} + 0.6\frac{w_2^2}{a} + \frac{1}{15}a\,(\theta_1^x)^2 + \frac{1}{15}a\,(\theta_2^x)^2 - 1.2\frac{w_1 w_2}{a} - 0.1\,w_1(\theta_1^x) - 0.1\,w_1(\theta_2^x) + 0.1\,w_2(\theta_1^x) + 0.1\,w_2(\theta_2^x) - \frac{1}{30}(\theta_1^x)(\theta_2^x)a. \tag{9}$$

The length change of the half-side bar λ_{25} is found by integration of the same expression over the length $\frac{1}{2}a$

$$\lambda_{25} = 0.3\frac{w_1^2}{a} + 0.3\frac{w_2^2}{a} + \frac{17}{960}a\,(\theta_1^x)^2 + \frac{47}{960}a\,(\theta_2^x)^2 - 0.6\frac{w_1 w_2}{a} - \frac{23}{160}w_1(\theta_1^x) + \frac{7}{160}w_1(\theta_2^x) + \frac{23}{160}w_2(\theta_1^x) - \frac{7}{160}w_2(\theta_2^x) - \frac{1}{60}a\,(\theta_1^x)(\theta_2^x). \tag{10}$$

The λ values of the other side bars and their half lengths may be expressed by similar equations with some other corner displacements replacing the four involved in Eqs. (9) and (10). For example, λ_{13} requires modification of Eq. (9), in which the length a is replaced by ka and the corner movements w_2, w_1, θ_2^x and θ_1^x, are changed respectively to w_1, w_3, θ_1^y and θ_3^y. The complete corre-

spondence of various λ to λ_{21} and λ_{25} in Eqs. (9) and (10) is presented in Table 2. Strict adherance to the shape of the curve in Fig. 4 determines some of the signs in these relations.

Table 2. Length Changes λ (Eqs. (9) and (10)) – Correspondence of Terms in Different Bars, Fig. 2

Bars (Fig. 2)	2–1 Eq. (9)	3–4	1–3	2–4	2–5 Eq. (10)	5–1	4–7	7–3	1–6	6–3	2–8	8–4
Length	a	a	a	a	a	a	a	a	ka	ka	ka	ka
Node Movements	w_1	w_3	w_3	w_4	w_1	w_2	w_3	w_4	w_3	w_1	w_4	w_2
	w_2	w_4	w_1	w_2	w_2	w_1	w_4	w_3	w_1	w_3	w_2	w_4
	θ_1^x	θ_3^x	θ_3^y	θ_4^y	θ_1^x	$-\theta_2^x$	θ_3^x	$-\theta_4^x$	θ_3^y	$-\theta_1^y$	θ_4^y	$-\theta_2^y$
	θ_2^x	θ_4^x	θ_1^y	θ_2^y	θ_2^x	$-\theta_1^x$	θ_4^x	$-\theta_3^x$	θ_1^y	$-\theta_3^y$	θ_2^y	$-\theta_4^y$

The rotations θ_1^x and θ_1^y of the node 1 result in flexural components of rotation $(\theta_1^x - k\,\theta_1^y)\,\mathrm{Sin}\,\alpha$ of the end 1 of the diagonal 4–1, as may be observed by examining the vector diagrams of Fig. 5. Similar relations hold also for the end 4. The end 2 of the diagonal 2–3 undergoes flexure $(\theta_2^x + k\,\theta_2^y)\,\mathrm{Sin}\,\alpha$, and the end 3 behaves similarly. This means that the expression for λ_{41} may be obtained from the Eq. (9) for the side member 2–1 by making in it proper replacements for the length of the member, the end rotations and the numbering of the nodes. Thus

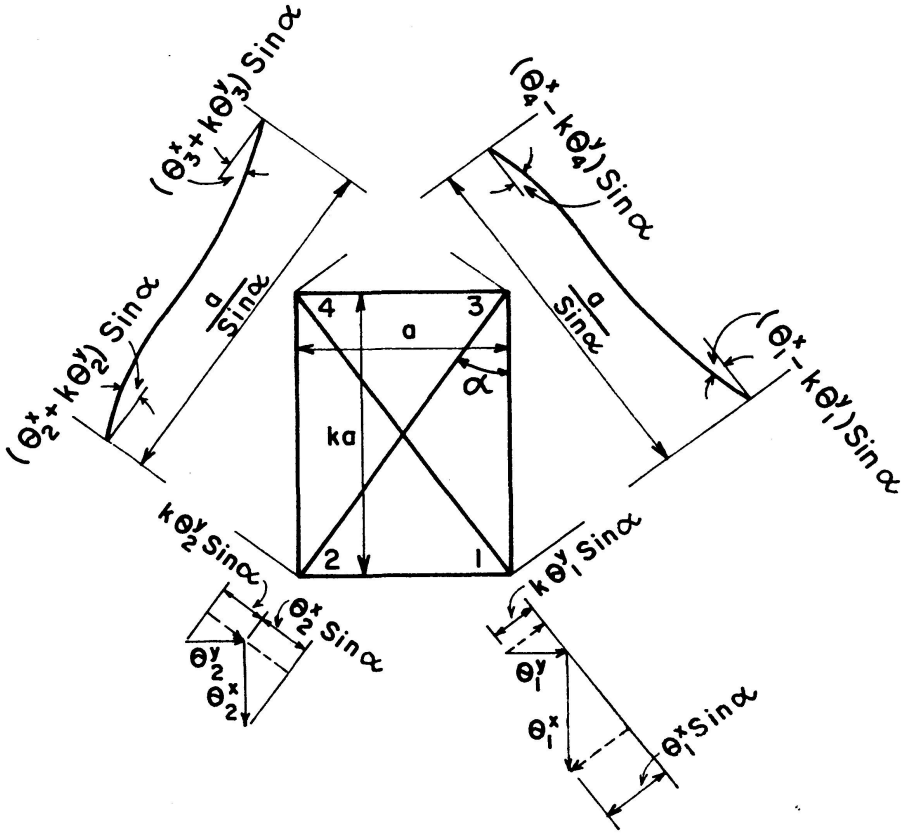


Fig. 5.

$$\lambda_{41} = \operatorname{Sin}\alpha\left[0.6\frac{w_1^2}{a}+0.6\frac{w_4^2}{a}+\frac{1}{15}a\,(\theta_1^x)^2+\frac{k^2}{15}a\,(\theta_1^y)^2+\frac{1}{15}a\,(\theta_4^x)^2+\frac{k^2}{15}a\,(\theta_4^y)^2\right.$$
$$-1.2\frac{w_1 w_4}{a}-0.1\,w_1(\theta_1^x)+0.1\,k\,w_1(\theta_1^y)-0.1\,w_1(\theta_4^x)+0.1\,k\,w_1(\theta_4^y)$$
$$+0.1\,w_4(\theta_1^x)-0.1\,k\,w_4(\theta_1^y)+0.1\,w_4(\theta_4^x)-0.1\,k\,w_4(\theta_4^y)-\frac{2\,k}{15}a\,(\theta_1^x)(\theta_1^y) \qquad (11)$$
$$-\frac{2\,k}{15}a\,(\theta_4^x)(\theta_4^y)-\frac{1}{30}a\,(\theta_1^x)(\theta_4^x)+\frac{k}{30}a\,(\theta_1^y)(\theta_4^x)+\frac{k}{30}a\,(\theta_1^x)(\theta_4^y)$$
$$\left.-\frac{k^2}{30}a\,(\theta_1^y)(\theta_4^y)\right].$$

The expression for λ_{23} is found from λ_{41} by replacing k by $-k$ and changing the numbers of the nodes 4 and 1 to 2 and 3 respectively.

Length Changes λ of the Corner Bars

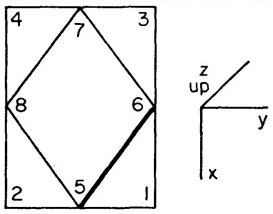
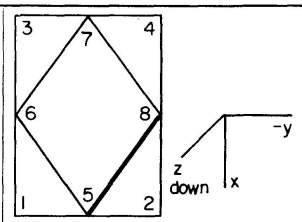
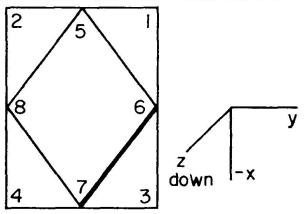
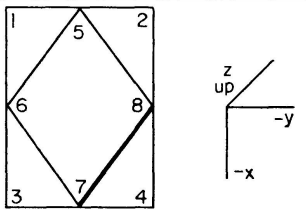
Determination of the values λ for the corner bars is explained on the example of λ_{56}. Flexure of this bar is naturally influenced by the transverse displacements and flexural rotations of the end points 5 and 6, which in their turn result from the movements w, θ^x and θ^y of the nodes 1, 2 and 3, the fourth node having no effect on the member 5–6.

The transverse displacements and the flexural corner rotations of the points 5 and 6 are found separately for each of the nine significant nodal displacements of the cell, using the Eq. (9) and the Table 2. With the movements of the ends of the bar 5–6 available, determination of λ_{56} follows the general routine.

$$\lambda_{56} = \operatorname{Sin}\alpha\left[\frac{3}{16}\frac{w_1^2}{a}+0.3\frac{w_2^2}{a}+0.3\frac{w_3^2}{a}+\frac{9}{320}a\,(\theta_1^x)^2+\frac{17}{960}a\,(\theta_2^x)^2+\frac{1}{120}a\,(\theta_3^x)^2\right.$$
$$+\frac{9\,k^2}{320}a\,(\theta_1^y)^2+\frac{k^2}{120}a\,(\theta_2^y)^2+\frac{17\,k^2}{960}a\,(\theta_3^y)^2-\frac{3}{16}\frac{w_1 w_2}{a}-\frac{3}{16}\frac{w_1 w_3}{a}-\frac{3}{32}w_1(\theta_1^x)$$
$$-\frac{1}{32}w_1(\theta_2^x)-\frac{1}{16}w_1(\theta_3^x)+\frac{3\,k}{32}w_1(\theta_1^y)+\frac{k}{16}w_1(\theta_2^y)+\frac{k}{32}w_1(\theta_3^y)-\frac{33}{80}\frac{w_2 w_3}{a}$$
$$-\frac{13}{160}w_2(\theta_1^x)+\frac{23}{160}w_2(\theta_2^x)+\frac{3}{80}w_2(\theta_3^x)-\frac{7\,k}{40}w_2(\theta_1^y)-\frac{k}{40}w_2(\theta_2^y)$$
$$+\frac{9\,k}{80}w_2(\theta_3^y)+\frac{7}{40}w_3(\theta_1^x)-\frac{9}{80}w_3(\theta_2^x)+\frac{1}{40}w_3(\theta_3^x)+\frac{13\,k}{160}w_3(\theta_1^y)-\frac{3\,k}{80}w_3(\theta_2^y)$$
$$-\frac{23\,k}{160}w_3(\theta_3^y)-\frac{1}{40}a\,(\theta_1^x)(\theta_2^x)+\frac{1}{80}a\,(\theta_1^x)(\theta_3^x)+\frac{3\,k}{320}a\,(\theta_1^x)(\theta_1^y) \qquad (12)$$
$$-\frac{3\,k}{160}a\,(\theta_1^x)(\theta_2^y)-\frac{13\,k}{320}a\,(\theta_1^x)(\theta_3^y)+\frac{1}{120}a\,(\theta_2^x)(\theta_3^x)-\frac{13\,k}{320}a\,(\theta_2^x)(\theta_1^y)$$
$$-\frac{k}{480}a\,(\theta_2^x)(\theta_2^y)+\frac{29\,k}{960}a\,(\theta_2^x)(\theta_3^y)-\frac{3\,k}{160}a\,(\theta_3^x)(\theta_1^y)-\frac{k}{240}a\,(\theta_3^x)(\theta_2^y)$$
$$\left.-\frac{k}{480}a\,(\theta_3^x)(\theta_3^y)+\frac{k^2}{80}a\,(\theta_1^y)(\theta_2^y)-\frac{k^2}{40}a\,(\theta_1^y)(\theta_3^y)+\frac{k^2}{120}a\,(\theta_2^y)(\theta_3^y)\right].$$

The expressions for the λ values of the three other corner bars may be deduced from the expression for λ_{56} by rotating the cell through 180 degrees about one of the coordinate axes and by that bringing the bar under consideration into the location of the bar 5–6 in Fig. 2. The correspondence of the terms follows from the numbering of the displaced joints as presented in Table 3.

Table 3. Analogy in Parameters and Locations. Between λ_{56} (Eq. (12)) and λ Values of Three Other Corner Bars

			
λ_{56}	λ_{58}	λ_{76}	λ_{78}
w_1	$-w_2$	$-w_3$	w_4
w_2	$-w_1$	$-w_4$	w_3
w_3	$-w_4$	$-w_1$	w_2
θ_1^x	θ_2^x	$-\theta_3^x$	$-\theta_4^x$
θ_2^x	θ_1^x	$-\theta_4^x$	$-\theta_3^x$
θ_3^x	θ_4^x	$-\theta_1^x$	$-\theta_2^x$
θ_1^y	$-\theta_2^y$	θ_3^y	$-\theta_4^y$
θ_2^y	$-\theta_1^y$	θ_4^y	$-\theta_3^y$
θ_3^y	$-\theta_4^y$	θ_1^y	$-\theta_2^y$

Stability Matrix of Rectangular Bar Cells with $\mu = 1/3$

In models with $\mu = 1/3$ the corner bars are absent. The plane stress displacements of the nodes under unit loading are found in the usual way by the computer, and their knowledge allows to determine the length changes in the bars. Knowing these and the cross-section areas of the bars (Eq. 8), their stresses are easily found. Intermultiplication of bar stresses and the second derivatives of the λ values gives the terms of the stability matrix ($\mu = 1/3$) presented in Table 4.

Direct Stresses in Secondary Bars of Cells with Arbitrary μ

These members are stressed only in pure shear condition, and only when μ is distinct from 1/3. Since the cell in its geometry and bar areas is symmetrical about the axes x and y through its centre, and the corner loads under pure shear antisymmetrical, the bar stresses F, F_1 and F_2 in the secondary bars must be also antisymmetrical, as is shown in Fig. 6. From equilibrium of mid-side joints it follows that

$$\frac{F}{\operatorname{Sin}\alpha} = \frac{F_1}{\operatorname{Cos}\alpha} = F_2. \tag{13}$$

Thus all F stresses in a particular cell are expressible through one of them.

Since the stresses F or F_1 in the two halves of each side bar are equal and opposite in sign the mean stresses S in side bars are independent of F and may be found from the nodal displacements and the total side bar areas, as has been explained for the cell with $\mu = 1/3$.

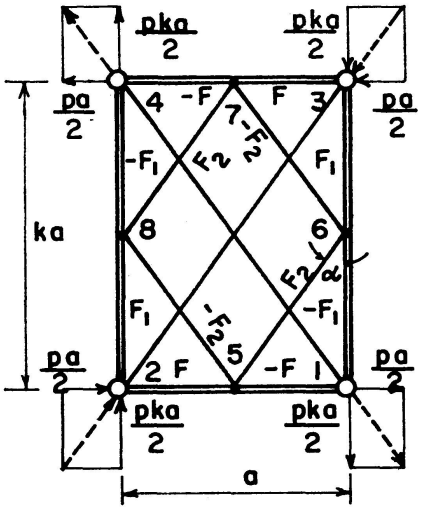


Fig. 6.

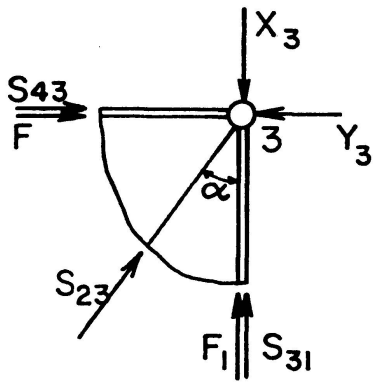


Fig. 7.

In general case of in-plane loads the stresses F differ from cell to cell. A convenient way to determine them is explained by reference to Fig. 7, representing the free body diagram of forces at one of the nodes of the cell, the node 3 in this case. The nodal forces X_3 and Y_3 are found as the products of the corresponding rows of the stiffness matrix and the vector of nodal displacements, and the stresses in the bars of the main system S_{43}, S_{23} and S_{31} – from the nodal displacement and the bar areas. Then F and F_1 follow from $\sum X = 0$ and $\sum Y = 0$, and F_2 – from Eq. (13).

The total contribution to the terms of the stability matrix by one of the side bars, such as the bar 4–3 (Fig. 5) is

$$(S_{47} - F)\frac{\partial^2 \lambda_{47}}{\partial \delta_m \partial \delta_n} + (S_{47} + F)\frac{\partial^2 \lambda_{73}}{\partial \delta_m \partial \delta_n} = S_{47}\left(\frac{\partial^2 \lambda_{43}}{\partial \delta_m \partial \delta_n} - F\frac{\partial^2 \lambda_{47}}{\partial \delta_m \partial \delta_n} + F\frac{\partial^2 \lambda_{73}}{\partial \delta_m \partial \delta_n}\right).$$

This means that the effects of the F and F_1 stresses in the halves of the secondary side bars are simply added on to the effects of the mean stresses (like S_{43}) in the stability matrix of Table 4. The contributions of the stress F are assembled in the auxiliary stability matrix of Table 5, which must be added to the main stability matrix, when Poisson's ratio of the model is distinct from 1/3.

Table 4. Stability Matrix. Rectangular Bar Cell. $\mu = 1/3$

	w_1	θ_1^x	θ_1^y	w_2	θ_2^x	θ_2^y
w_1	$\frac{1.2S_{21}}{a}+\frac{1.2S_{13}}{ka}$ $+\frac{1.2S_{41}}{a}\operatorname{Sin}\alpha$					
θ_1^x	$-0.1S_{21}$ $-0.1S_{41}\operatorname{Sin}\alpha$	$\frac{2aS_{21}}{15}$ $+\frac{2aS_{41}}{15}\operatorname{Sin}\alpha$				
θ_1^y	$0.1S_{13}$ $+0.1kS_{41}\operatorname{Sin}\alpha$	$-\frac{2kaS_{41}}{15}\operatorname{Sin}\alpha$	$\frac{2kaS_{13}}{15}$ $+\frac{2k^2aS_{41}}{15}\operatorname{Sin}\alpha$			
w_2	$-\frac{1.2S_{21}}{a}$	$0.1S_{21}$	0	$\frac{1.2S_{21}}{a}+\frac{1.2S_{24}}{ka}$ $+\frac{1.2S_{23}}{a}\operatorname{Sin}\alpha$		
θ_2^x	$-0.1S_{21}$	$-\frac{aS_{21}}{30}$	0	$0.1S_{21}$ $+0.1S_{23}\operatorname{Sin}\alpha$	$\frac{2aS_{21}}{15}$ $+\frac{2aS_{23}}{15}\operatorname{Sin}\alpha$	
θ_2^y	0	0	0	$0.1S_{24}$ $+0.1kS_{23}\operatorname{Sin}\alpha$	$\frac{2kaS_{23}}{15}\operatorname{Sin}\alpha$	$\frac{2kaS_{24}}{15}$ $+\frac{2k^2aS_{23}}{15}$ Si
w_3	$-\frac{1.2S_{13}}{ka}$	0	$-0.1S_{13}$	$-\frac{1.2S_{23}}{a}\operatorname{Sin}\alpha$	$-0.1S_{23}\operatorname{Sin}\alpha$	$-0.1kS_{23}$ Si
θ_3^x	0	0	0	$0.1S_{24}\operatorname{Sin}\alpha$	$-\frac{aS_{23}}{30}\operatorname{Sin}\alpha$	$-\frac{kaS_{23}}{30}$ Sin
θ_3^y	$0.1S_{13}$	0	$-\frac{kaS_{13}}{30}$	$0.1kS_{24}\operatorname{Sin}\alpha$	$-\frac{kaS_{23}}{30}\operatorname{Sin}\alpha$	$-\frac{k^2aS_{23}}{30}$ Sir
w_4	$-\frac{1.2S_{41}}{a}\operatorname{Sin}\alpha$	$0.1S_{41}\operatorname{Sin}\alpha$	$-0.1kS_{41}\operatorname{Sin}\alpha$	$-\frac{1.2S_{24}}{ka}$	0	$-0.1S_{24}$
θ_4^x	$-0.1S_{41}\operatorname{Sin}\alpha$	$-\frac{aS_{41}}{30}\operatorname{Sin}\alpha$	$\frac{kaS_{41}}{30}\operatorname{Sin}\alpha$	0	0	0
θ_4^y	$0.1kS_{41}\operatorname{Sin}\alpha$	$\frac{kaS_{41}}{30}\operatorname{Sin}\alpha$	$-\frac{k^2aS_{41}}{30}\operatorname{Sin}\alpha$	$0.1S_{24}$	0	$-\frac{kaS_{24}}{30}$

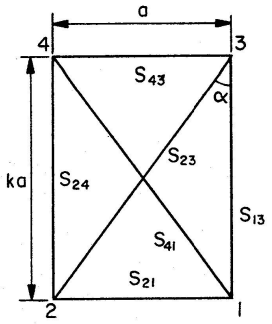
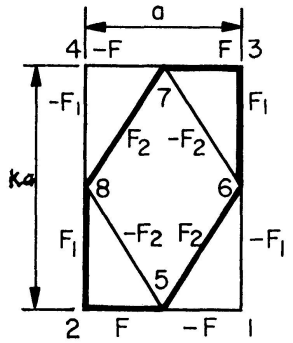
w_3	θ_3^x	θ_3^y	w_4	θ_4^x	θ_4^y
Symmetrical					
$\frac{S_{43}}{\iota}+\frac{1.2S_{13}}{ka}$ $\frac{1.2S_{23}}{a}\mathrm{Sin}\,\alpha$					
$0.1S_{43}$ $0.1S_{23}\mathrm{Sin}\,\alpha$	$\frac{2aS_{43}}{15}$ $+\frac{2aS_{23}}{15}\mathrm{Sin}\,\alpha$				
$.1S_{13}$ $.1kS_{23}\mathrm{Sin}\,\alpha$	$\frac{2kaS_{23}}{15}\mathrm{Sin}\,\alpha$	$\frac{2kaS_{13}}{15}$ $+\frac{2k^2aS_{23}}{15}\mathrm{Sin}\,\alpha$			
$-\frac{1.2S_{43}}{a}$	$0.1S_{43}$	0	$\frac{1.2S_{43}}{a}+\frac{1.2S_{24}}{ka}$ $+\frac{1.2S_{41}}{a}\mathrm{Sin}\,\alpha$		
$-0.1S_{43}$	$-\frac{aS_{43}}{30}$	0	$0.1S_{43}$ $+0.1S_{41}\mathrm{Sin}\,\alpha$	$\frac{2aS_{43}}{15}$ $+\frac{2aS_{41}}{15}\mathrm{Sin}\,\alpha$	
0	0	0	$-0.1S_{24}$ $-0.1kS_{41}\mathrm{Sin}\,\alpha$	$-\frac{2kaS_{41}}{15}\mathrm{Sin}\,\alpha$	$\frac{2kaS_{24}}{15}$ $+\frac{2k^2aS_{41}}{15}\mathrm{Sin}\,\alpha$

Table 5. Addition to Stability Matrix. Rectangular Bar Cell. Any μ.

	w_1	θ_1^x	θ_1^y	w_2	θ_2^x	θ_2^y	w_3	θ_3^x	θ_3^y	w_4	θ_4^x	θ_4^y
w_1	$-\frac{0.825F}{a}$											
θ_1^x	$-\frac{13F}{80}$	$-\frac{7aF}{120}$										
θ_1^y	$+\frac{13kF}{80}$	$\frac{kaF}{192}$	$-\frac{7k^2aF}{120}$									
w_2	0	$\frac{3F}{40}$	$-\frac{19kF}{80}$	$\frac{0.825F}{a}$								
θ_2^x	$\frac{3F}{40}$	0	$-\frac{19kaF}{320}$	$-\frac{13F}{80}$	$\frac{7aF}{120}$							
θ_2^y	$\frac{19kF}{80}$	$-\frac{19kaF}{320}$	0	$-\frac{13kF}{80}$	$\frac{kaF}{192}$	$\frac{7k^2aF}{120}$						
w_3	0	$\frac{19F}{80}$	$-\frac{3kF}{40}$	$-\frac{33F}{40a}$	$-\frac{3F}{20}$	$-\frac{3kF}{20}$	$\frac{0.825F}{a}$					
θ_3^x	$-\frac{19F}{80}$	0	$-\frac{19kaF}{320}$	$\frac{3F}{20}$	$\frac{aF}{60}$	$\frac{5kaF}{192}$	$\frac{13F}{80}$	$\frac{7aF}{120}$				
θ_3^y	$-\frac{3kF}{40}$	$-\frac{19kaF}{320}$	0	$\frac{3kF}{20}$	$\frac{5kaF}{192}$	$\frac{k^2aF}{60}$	$\frac{13kF}{80}$	$\frac{kaF}{192}$	$\frac{7k^2aF}{120}$			
w_4	$\frac{33F}{40a}$	$-\frac{3F}{20}$	$+\frac{3kF}{20}$	0	$\frac{19F}{80}$	$\frac{3kF}{40}$	0	$-\frac{3F}{40}$	$-\frac{19kF}{80}$	$-\frac{0.825F}{a}$		
θ_4^x	$\frac{3F}{20}$	$-\frac{aF}{60}$	$\frac{5kaF}{192}$	$-\frac{19F}{80}$	0	$-\frac{19kaF}{320}$	$-\frac{3F}{40}$	0	$-\frac{19kaF}{320}$	$\frac{13F}{80}$	$-\frac{7aF}{120}$	
θ_4^y	$-\frac{3kF}{20}$	$\frac{5kaF}{192}$	$-\frac{k^2aF}{60}$	$\frac{3kF}{40}$	$-\frac{19kaF}{320}$	0	$\frac{19kF}{80}$	$-\frac{19kaF}{320}$	0	$-\frac{13kF}{80}$	$\frac{kaF}{192}$	$-\frac{7k^2aF}{120}$

Symmetrical



Bar Stiffnesses

A word of caution concerning the proportions of the bar cells is in order. Examination of expressions of extensional bar stiffnesses, Eq. (8), shows that the cross-section area of the longer side bar becomes zero, i. e., the bar vanishes, when $\mu k^2 = 1$. With the longer side bars absent the plate model ceases to be a structure and becomes a mechanism. Cells of this kind are inadmissible. When the cell's aspect ratio $k > \sqrt{2}$, the quantity μk^2 may exceed unity making the stiffnesses of the longer side bars, both extensional and flexural, negative. The torsional stiffnesses of side bars become also negative when $\mu > 1/3$.

Experience shows that models with negative bar stiffnesses result in lower precision, even though the results improve on reduction of the mesh size. The lack of precision appears to be associated with the stiffness matrix and not the stability matrix. For this reason it is recommended that the cells are so proportioned that the quantity μk^2 be kept under a value lower than unity, such as 0.9. Should a high aspect ratio k become imperative a substitute problem involving a lower μ may be solved. The effect of such substitution on the value of critical load is not great and may sometimes be corrected on the basis of theoretical considerations.

Examples

The examples considered involve rectangular plates in the following conditions of loading:

a) Uniform compression in one direction.
b) Uniform and equal compressions in two perpendicular directions.
c) Uniform shear in the direction of edges.

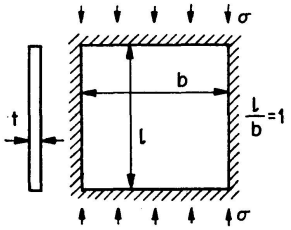
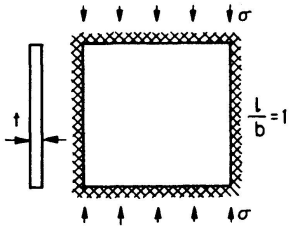
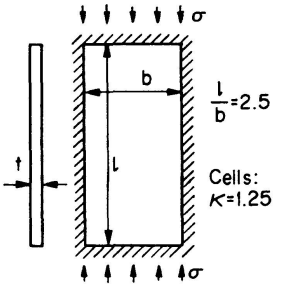
With regard to the plane stress action the plates are assumed free at the edges, while in their flexural action they are considered either simply supported or fixed at the edges.

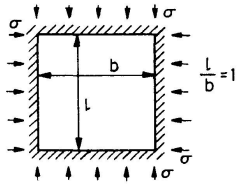
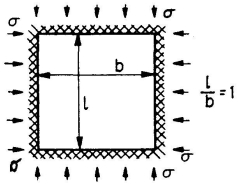
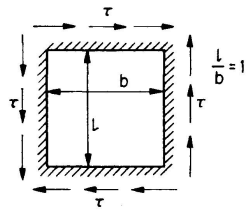
The critical unit stress, compression or shear, depending on the problem, is given by the formula

$$\delta_{cr} \,(\text{or } \tau_{cr}) = \beta \frac{\pi^2 D}{b^2 t}. \tag{14}$$

Here b is the dimension of the plate in the direction normal to the direction of compression in case a), and in either of the two perpendicular directions in cases b) and c); t is the plate thickness; $D = \frac{E t^3}{12\,(1-\mu^2)}$ is the elastic constant and β the parameter whose exact values, stated in references [1], [4] and [5] depend of the type of loading, the flexural edge restraints and the ratio of the sides of the plate.

Table 6. Critical Buckling Stresses in Plates. % Errors of Finite Element Solutions. Bar and No-Bar Cells.

Problem	μ	μk^2	Bar or No-bar	% Error		
				Model Mesh		
				3×3	4×4	6×6
 Exact $\beta = 4.00$	0.3	0.3	No-Bar	−8.88	−5.75	−2.80
	0.3	0.3	Bar	−10.0	−5.75	−2.75
	0.1	0.1	Bar	−9.5	−5.5	−1.75
	0.45	0.45	Bar	−10.2	−6.5	−3.0
 Exact $\beta = 10.07$	0.3	0.3	No-Bar	—	−7.80	−4.56
	0.3	0.3	Bar	−13.0	−8.60	−5.17
	0.1	0.1	Bar	−13.1	−8.60	−4.37
	0.45	0.45	Bar	−13.1	−9.0	−5.17
				3×6	4×8	6×12
 Exact $\beta = 4.133$	0.3	0.469	No-Bar	—	−7.10	−3.75
	0.3	0.469	Bar	−5.0	−4.05	−2.82
	0.1	0.156	Bar	−11.2	−8.15	−5.10
	0.45	0.703	Bar	−1.55	−1.97	−1.20
				4×4	6×6	8×8
As directly above, except $l/b = k = 1.5$ Exact $\beta = 4.339$	0.1	0.225	Bar	−8.8	−6.13	−4.4
	0.333	0.75	Bar	−2.59	−3.1	−2.58
	0.45	1.012	Bar	−49.0	−8.84	−3.23
				4×4	6×6	8×8
As directly above, except $l/b = k = 1.75$ Exact $\beta = 4.071$	0.1	0.306	Bar	−10.0	−7.6	−5.04
	0.333	1.025	Bar	−3.26	−4.7	−3.82
	0.45	1.375	Bar	−85.4	−64.6	−40.4

Problem	μ	Bar or No-Bar	% Error		
			Model Mesh		
			3×3	4×4	6×6
 Exact $\beta = 2.00$	0.3	No-Bar	−12.95	−5.5	−2.75
	0.3	Bar	−9.3	−5.84	−2.66
	0.1	Bar	−8.96	−5.2	−2.32
	0.45	Bar	−10.2	−6.5	−3.04
 Exact $\beta = 5.315$	0.3	No-Bar	—	−6.38	−4.46
	0.3	Bar	−16.0	−8.8	−4.9
	0.1	Bar	−12.9	−8.7	−4.57
	0.45	Bar	−11.4	−8.76	−5.26
 Exact $\beta = 9.34$	0.3	No-Bar	−12.1	−10.2	−6.47
	0.3	Bar	−22.0	−11.6	−6.42
	0.1	Bar	−17.95	−10.3	−6.07
	0.45	Bar	−32.6	−15.1	−6.73
As directly above, except $l/b = k = 1.25$ Exact $\beta = 7.71$	0.3	No-Bar	—	−9.92	−6.00
	0.3	Bar	−23.1	−11.8	−5.95
	0.1	Bar	−18.5	−10.35	−5.52
	0.45	Bar	−34.8	−15.9	−6.3

 Edges Simply Supported in Flexure

 Edges Clamped in Flexure

The results of solution are much similar in all types of loading, and for the reason of economy of space only a few of them are presented in Table 6, in the form of % errors of the coefficient β found by the bar and the no-bar cells, with the minus sign indicating a deficiency in the approximate values.

Here are some observations on the results:

1. When the bar stiffnesses are positive the results of the bar cell solutions are good and closely comparable to the ones obtained with the no-bar cells.
2. The approximate values are lower than the exact values.
3. On making the mesh finer, while retaining the same aspect ratio of cells, the precision usually improves somewhat faster than in the ratio of the linear dimensions of cells.
4. The precision does not seem to be influenced by the type of loading or the manner of edge restraints.
5. In the use of oblong cells when $\mu k^2 > 1$ the results are irregular and at times very inaccurate, but they usually improve as the mesh becomes finer.
6. Within the limits $\mu k^2 < 1$ the results seem to become less precise as k is increased.

Conclusion

Bar Cells and No-Bar Cells in Stability Analysis

In spite of basic similarities of the proceedures used with the bar and the no-bar cells; there are significant distinctions between the two, which it is advisable to have clearly stated.

1. The loss of precision in case of bar cells with high values of μk^2 is an important weakness. This defect however may be eliminated either by suitably proportioned cells or by hybrid solutions involving no-bar cell stiffness matrix and bar cell stability matrix.
2. The stiffness and stability matrices used in the no-bar cell solutions (1) are theoretically deficient because of the lack of slope conformity along the edges of cells. The error arising from this source in uniform and some other regular, loading conditions is apparently small. What this error may be in more complicated loading conditions is uncertain. The bar cells on the other hand are fully conformable at the nodes, the only locations where the adjacent cells meet.
3. The bar cell solutions presented here contains in explicit form all the necessary information and data required in stability analysis of any arbitrarily loaded rectangular plate. The necessary cell stability matrices Tables 4 and 5, cover all kinds of loading described by the stresses S. On the other hand the no-bar cell analysis requires a multiplicity of stability matrices, only a few of which, applicable to certain simple types of cell loading, are given explicitly. The complete generality of the proposed bar cell stability matrix makes it superior to its no-bar cell counterpart.

Notation

A, A', A''	cross-sectional areas of short side-bars of cells, total, primary, secondary.
A_1, A_1', A_1''	cross-sectional areas of longer side bars of cells, total, primary, secondary.
A_2, A_3	cross-sectional areas of diagonal and corner bars.
D	elastic flexural constant of plate.
E	modulus of elasticity.
F, F_1, F_2	additional stresses in members of secondary bar system.
$[K], [K]_m$	stiffness matrices of cell and of model.
$[K_s], [K_s]_m$	stability matrices of cell and of model.
P	plane stress loads.
S	with and without subscripts, bar stresses, direct.
T	increment of total energy of model on buckling.
U	increment of energy of deformation on buckling.
V	increment of potential energy on buckling.
X, Y	components of forces.
X, Y	with subscripts – members of plane stress stiffness matrix.
a	smaller dimension of cell.
b	dimension of plate along y axis.
f	critical intensity of load.
k	aspect ratio of cell.
l	length.
t	thickness of plate.
w	deflection of plate and of bar.
w	with subscripts – node and joint displacements.
x, y	rectangular coordinates.
α	angle of diagonal bar.
β	parameter defining critical load.
ϵ	displacement of point of application of load.
λ, λ	with subscripts – shortening of projection of bar length caused by flexure.
$\delta, \delta_m, \delta_n$	movements of the nodes.
σ_{cr}	critical normal unit stress.
τ_{cr}	critical unit shear stress.
θ^x, θ^y	with and without subscripts – nodal rotations.

Acknowledgement

The research forming the basis of this paper was conducted with financial assistance of the National Research Council of Canada.

References

1. KAPUR, K. K. and HARTZ, B. J.: Stability of Plates Using Finite Element Method. Jour. Eng. Mech. Div., ASCE, E.M. 2, Vol. 92, April, 1966.
2. HRENNIKOFF, A.: Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method. Jour. of Applied Mechanics, ASME, Vol. 63, December, 1941.
3. YETTRAM, A. L. and HUSEIN, H. M.: Grid Framework Method for Plates in Bending. Jour. of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 91, June 1965.
4. TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C. and TOPP, L. J.: Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. Jour. of the Aeronautical Sciences, Vol. 23, No. 9, September 1956.
5. TIMOSHENKO, S. P. and GERE, J. M.: Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill Book Co. Inc. New York, N.Y. 1961.

Summary

The finite element method, making use of rectangular bar cells, is applied to the problem of stability of rectangular plates under the action of in-plane loads. The method is similar in principle to the method involving no-bar cells, proposed by K. K. KAPUR and B. J. HARTZ [1]. The application of the method is demonstrated on several examples, whose exact solutions are available. Investigation is also made of the effects of bar stiffnesses on precision under the influence of the aspect ratio of cells and the Poisson's ratio of the material.

Résumé

La méthode des éléments finis qui utilise des éléments de barre rectangulaires est appliquée au problème de la stabilité de dalles rectangulaires sous l'influence de charges planes. Cette méthode est en principe similaire à celle qui travaille avec des éléments non-barres, proposée par K. K. Kapur et B. J. Hartz. L'application de la méthode est montrée dans plusieurs exemples dont les solutions exactes sont connues. Des recherches sont faites sur l'effet de la rigidité de la barre, en particulier sous l'influence de la disposition des éléments et du coefficient de Poisson.

Zusammenfassung

Die Methode der finiten Elemente, welche mit rechteckigen Stabelementen arbeitet, wird auf das Problem der Festigkeit rechteckiger Platten unter der Wirkung ebener Lasten angewandt. Diese Methode ist im Prinzip ähnlich wie jene, welche mit Nicht-Stab-Elementen arbeitet und die von K. K. Kapur und B. J. Hartz vorgeschlagen wird. Die Anwendung der Methode wird an zahlreichen Beispielen gezeigt, deren genaue Lösungen vorhanden sind. Untersucht wurden auch die Auswirkungen der Elementverteilung und der Poisson'schen Zahl auf die Stabsteifigkeit.

Vergleiche zwischen Hängebrücken und Schrägkabelbrücken für Spannweiten über 600 m

Comparative Investigations Between Suspension Bridges and Cable-stayed Bridges for Spans Exceeding 600 m

Comparaisons entre ponts suspendus et ponts à haubans pour portées dépassant 600 m

F. LEONHARDT
Prof. Dr. Ing., Stuttgart[1])

W. ZELLNER
Dipl.-Ing., Stuttgart[1])

1. Einleitung

Der Gedanke, Brückenbalken an schrägen Seilen oder Ketten aufzuhängen, ist uralt. Um 1820 herum sind jedoch einige Schrägseilbrücken eingestürzt; der berühmte französische Ingenieur NAVIER hat damals die Schrägseilbrücken als ungeeignet verurteilt und empfohlen, echte Hängebrücken zu bauen. So kam es, dass die Schrägseilbrücke rund 120 Jahre lang fast nicht mehr angewandt wurde, bis F. DISCHINGER 1938 die Wirksamkeit straff gespannter Schrägseile zur Versteifung von Hängebrücken nachwies [1] und daraus eine Kombination von Hängebrücke mit Schrägseilen entwickelte. Dies führte dazu, dass etwa 1953 die DEMAG die Strömsund-Brücke in Schweden mit Schrägkabeln baute und kurz darauf die Stadt Düsseldorf die Nordbrücke über den Rhein durch die Firma Hein, Lehmann und Co. als Harfen-Schrägkabelbrücke ausführen liess [2] (Fig. 1). Inzwischen sind zahlreiche Schrägseil- und Schrägkabelbrücken gebaut worden, zunächst vor allem in Deutschland, später aber auch in anderen Ländern. Heute gehört die Schrägkabelbrücke zu den Standardsystemen für Spannweiten von etwa 80 bis 400 m. Häufig hörte man die Meinung, dass Schrägkabelbrücken nur bis etwa 400 m Spannweite günstig und wirtschaftlich seien, für die grösseren Spannweiten jedoch nach

---

[1]) Vortrag auf der Österreichischen Stahlbautagung in Baden bei Wien am 30. September 1971.

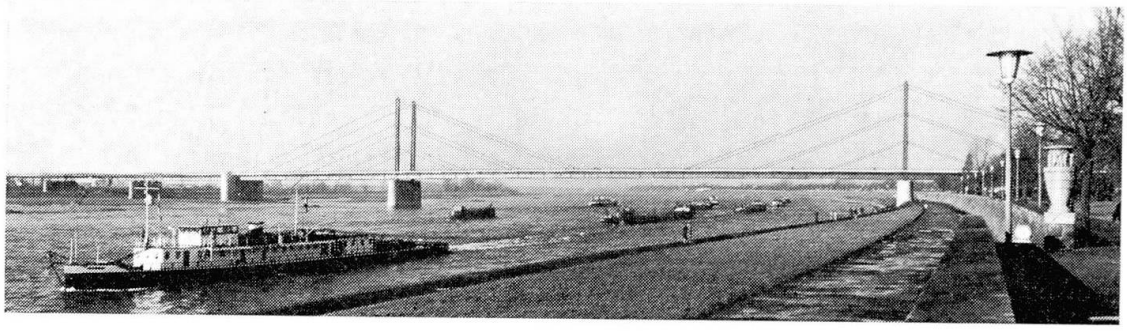


Fig. 1. Rheinbrücke Düsseldorf Nord.

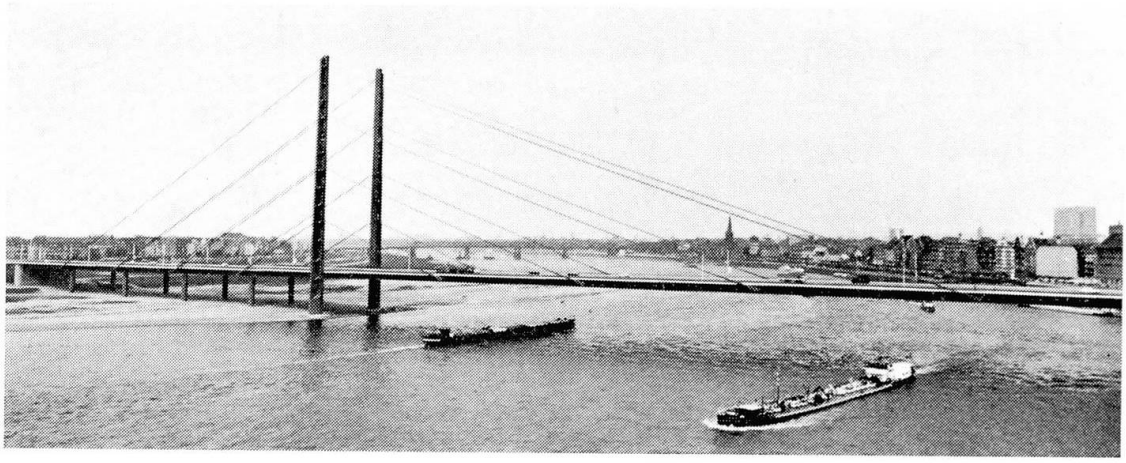


Fig. 2. Kniebrücke Düsseldorf.

wie vor der klassischen Hängebrücke der Vorzug gehöre. Diese auch in der Literatur mehrfach anzutreffende Meinung war jedoch nicht unterbaut, und schon beim Bau der Kniebrücke Düsseldorf (Fig. 2) hegte der 1. Verfasser Zweifel, ob diese Meinung richtig sei, entspricht doch diese Brücke mit ihrer von einem Pylonen aus aufgehängten Hauptöffnung von 320 m Spannweite in Wirklichkeit einer Mittelöffnung von über 600 m, wenn man auf beiden Seiten Pylone stellt. Bei dieser Brücke war trotz der einseitigen Aufhängung nicht die geringste Schwierigkeit bei der Bemessung der Fahrbahntafel oder hinsichtlich der Durchbiegung gegeben, lediglich die aerodynamische Stabilität beim Freivorbau von einer Seite aus schien problematisch zu sein, doch zeigten sich keine nennenswerten Schwingungen.

Die günstigen Erfahrungen bei der Kniebrücke veranlassten die Verfasser, bei Brücken für grössere Spannweiten von 750 bis 1500 m einmal dieser Frage gründlich nachzugehen. Vorweg sei gesagt, dass das Ergebnis der Untersuchungen eindeutig zeigte, dass auch für die sehr grossen Spannweiten die Schrägkabelbrücke technisch und wirtschaftlich, besonders aber hinsichtlich der Windstabilität, der klassischen Hängebrücke weit überlegen ist, wenn man gewisse Entwurfsmerkmale beachtet. Im folgenden soll über diese Untersuchungen berichtet werden.

2. Gründe und Voraussetzungen für den Erfolg der Schrägkabelbrücken

Es sei zunächst aufgezeigt, welche Entwicklungsmerkmale zu dem grossen Erfolg der Schrägkabelbrücken in den letzten 15 Jahren geführt haben.

An *erster* Stelle stehen wohl der hohe Stand unserer Theorien zur Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke unter Berücksichtigung der Verformungen und die zugehörigen elektronischen Rechenprogramme, die uns erlauben, in kurzer Zeit vergleichende Untersuchungen durchzuführen und so die Entwürfe zu optimieren.

Als *zweites* Merkmal darf ich den hohen Stand der Entwicklung der Leichtfahrbahnen anführen, die einmal 1935 mit sogenannten Stahlzellenplatten in Stuttgart durch SCHAECHTERLE und LEONHARDT [3] [4] begonnen hat und die dann nach dem Krieg, insbesondere dank der Weiterentwicklung der Schweisstechnik mit der orthotropen Platte bei der Rheinbrücke Köln-Mühlheim (W. Cornelius) ihre erste Grossanwendung fand.

Drittens war wesentlich, dass diese leichte stählerne Fahrbahntafel als kontinuierliches Flächentragwerk gleichzeitig als Obergurt der Querträger und Obergurt der Hauptträger herangezogen wurde (Fig. 3). Mit der Fahrbahntafel können so ohne Schwierigkeiten verhältnismässig grosse Normalkräfte in der Längsrichtung der Brücke aufgenommen werden. Das leichte Gewicht der Fahrbahntafeln ist natürlich eine wesentliche Voraussetzung für sehr grosse Spannweiten, ebenso wichtig ist aber das räumliche Zusammenwirken aller Tragelemente.

Als *viertes* Merkmal ist die Kontinuität des Balkentragwerkes über die gesamte Brückenlänge, insbesondere an den Pylonen, hervorzuheben. Noch heute bauen die Amerikaner ihre Hängebrücken mit Bewegungsfugen an den

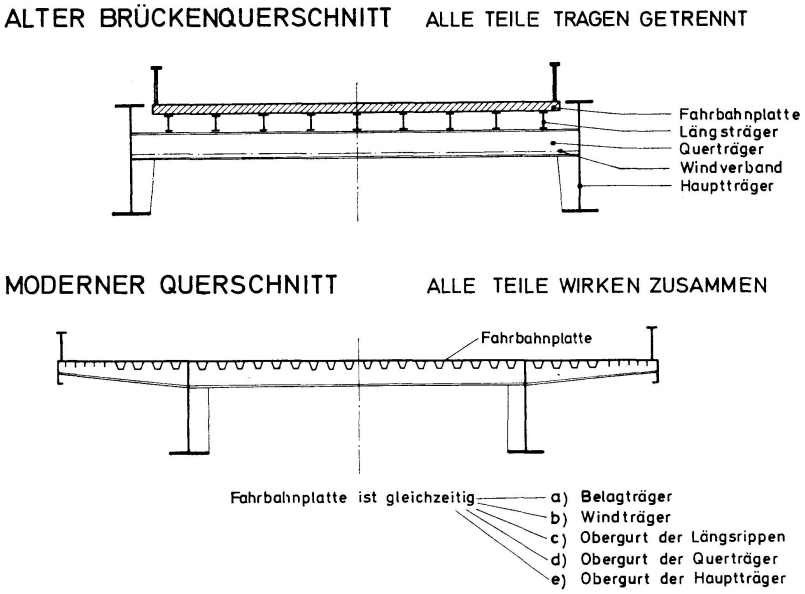


Fig. 3. Alter und moderner Brückenquerschnitt.

Pylonen, noch heute werden immer wieder Entwürfe – auch für Schrägkabelbrücken – aufgestellt, bei denen in der Mitte der Hauptöffnung ein Einhängeträger mit Bewegungsfugen angeordnet ist. All diese Fugen schwächen die Widerstandsfähigkeit der Fahrbahntafel gegen Windkräfte, sie verursachen aber auch unangenehme Knicke in der Biegelinie und erfordern mehrere Fahrbahnübergänge, die stets als schwacher Punkt unserer Brücken anzusehen sind. Schon 1938 hat der 1. Verfasser bei der Rheinbrücke Köln-Rodenkirchen durchgesetzt, dass die Versteifungsträger über alle drei Öffnungen hinweg fugenlos kontinuierlich gebaut wurden und dass die Brücke kein eigentlich festes Lager erhielt, sondern gewissermassen in der Längsrichtung schwimmend an den Kabeln aufgehängt war.

Das gleiche Prinzip führt auch bei den Schrägkabelbrücken zu den günstigsten Verhältnissen, indem sich eine Art Festpunkt in der Mitte der Hauptöffnung ausbildet und die Längenänderungen infolge Temperatur und dergleichen nach beiden Seiten symmetrisch etwa gleich gross werden. Nebenbei

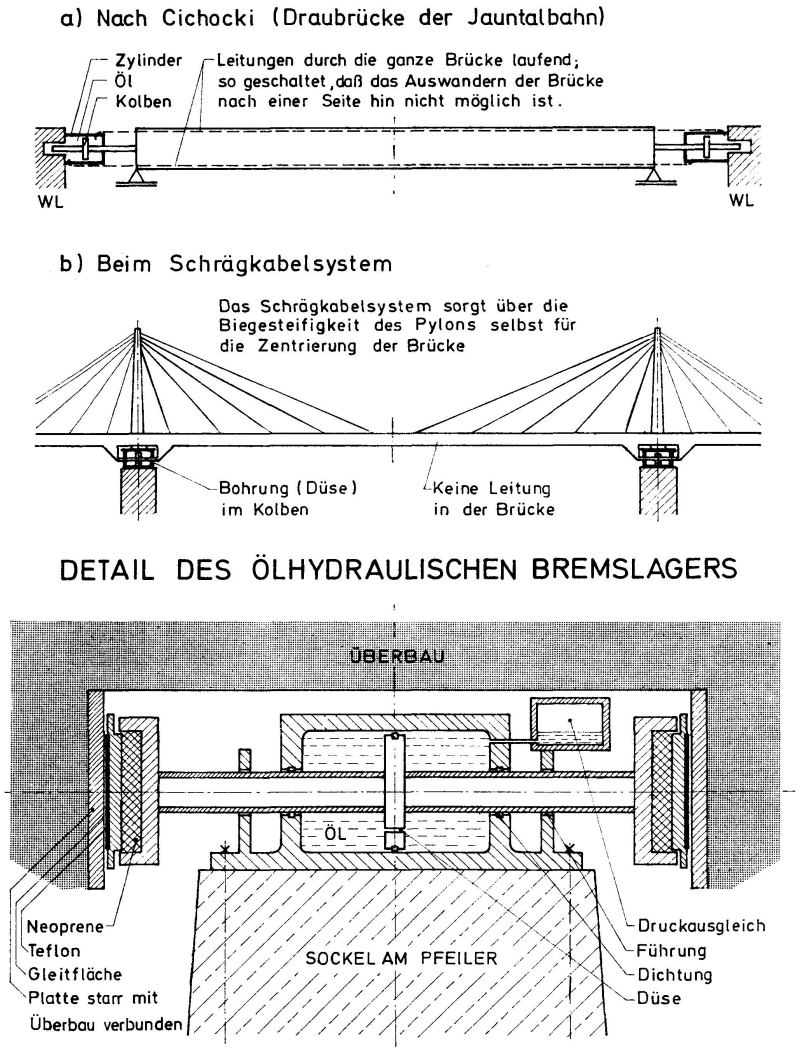
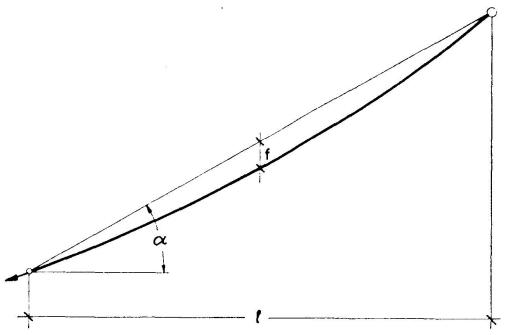


Fig. 4. Bremskraftableitung bei Eisenbahnbrücken über ölhydraulische Puffer an den Pylonen.

sei bemerkt, dass Längsbewegungen durch Bremskräfte oder dergleichen durch Gummipuffer begrenzt werden können (Fig. 4). Bei Eisenbahnbrücken sind ölhydraulische Puffer geeignet, wie sie erstmals an der Draubrücke der Jauntalbahn in Kärnten nach einem Vorschlag von F. CICHOCKI zur Ausführung kamen [5]. Sie erlauben die langsamen Längenänderungen infolge Temperatur ohne Widerstand und widerstehen den kurzzeitigen Bremskräften wie feste Lager. Während bei einer Balkenbrücke oder Hängebrücke noch eine doppelte Ölleitung zwischen zwei Puffern durch die ganze Brücke geführt werden muss, damit das Auswandern der Brücke nach einer Seite hin verhindert wird, sorgt das Schrägkabelsystem selbst für die Zentrierung. Damit wird die hydraulische Pufferung wesentlich einfacher.

Die Kontinuität verringert die horizontalen Durchbiegungen der Fahrbahntafel unter Wind ganz erheblich und trägt daher zweifellos auch zur Windstabilität bei. Die Kontinuität an den Pylonen ist zur Aufnahme der Horizontal-Komponenten der Schrägkabelkräfte eine absolute Notwendigkeit.

Als *fünftes* Merkmal ist die durch hohe zulässige Spannungen der Schrägkabel erzielbare Steifigkeit zu erwähnen. Die Durchbiegungen der Schrägkabelbrücken hängen ganz wesentlich von den Längenänderungen der Schrägkabel unter zunehmender Last ab. Diese Längenänderungen sind aber nicht wie bei einem geraden Zugstab nur eine Funktion der Dehnung des Stahles, die sich aus σ/E ergibt, sondern sie hängen von der Änderung des Durchhanges des Kabels ab, der sich mit der dritten Potenz der Spannung verändert (Fig. 5). H. ERNST [6] hat die in Fig. 5 gezeigte Formel für die Längssteifigkeit von



$$FE_i = \frac{FE_0}{1 + \frac{\gamma^2 l^2 E_0}{12\,\sigma^3}}$$

F ... Querschnittsfläche des Seiles oder Kabels
E_i ... scheinbarer E-Modul des Seiles mit Durchhang
E_0 .. E-Modul des geraden Seiles
γ ... spez. Gewicht des Seilmaterials (mit Zuschlag für Korrosionsschutz)
l ... horizontale Länge des Seiles
σ ... Zugspannung im Seil
FE_i ist unabhängig von α

Fig. 5. Formel von Ernst für die Kabelsteifigkeit.

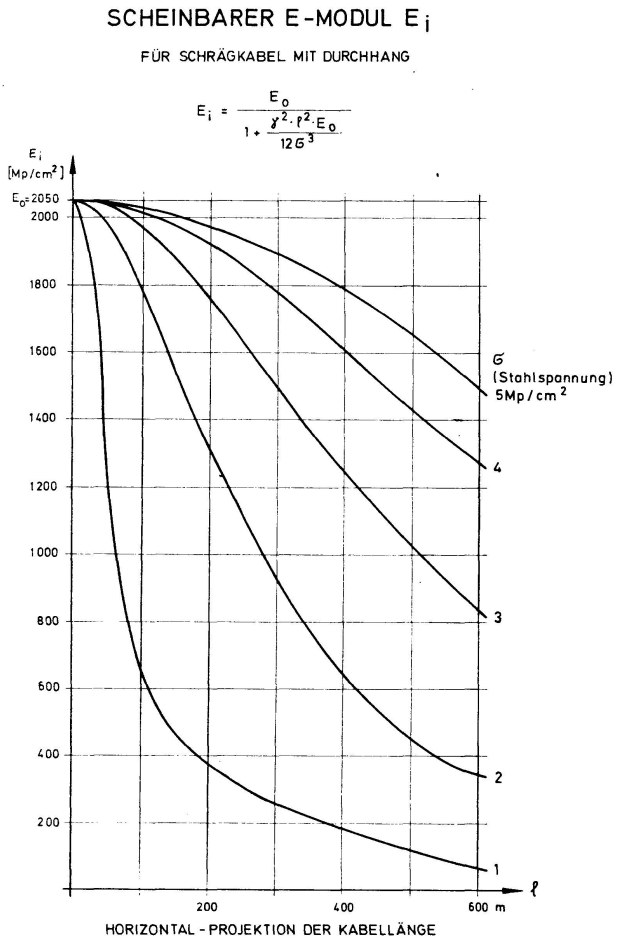


Fig. 6. Abhängigkeit der Kabelsteifigkeit von Spannung und Länge.

Seilen entwickelt, die einen scheinbaren E-Modul E_i zur Berücksichtigung des Seildurchhanges angibt. Darin ist E_0 der E-Modul des geraden Seiles und l die horizontal gemessene Seil-Spannweite. Trägt man diesen fiktiven E-Modul abhängig von der Spannweite l für verschiedene Stahlspannungen σ auf (Fig. 6), so zeigt sich der überragende Einfluss der Spannung im Seil oder Kabel. Hat man zum Beispiel unter Eigengewicht eine Kabelspannung von nur 1 Mp/cm², so ist die Steifigkeit eines solchen Kabels bei 600 m Spannweite fast Null, während bei einer Spannung von 5 Mp/cm² immerhin noch 80% der Steifigkeit des geraden Kabels erhalten bleiben. Diese Kurven erklären ohne weiteres, weshalb die frühen Schrägseilbrücken selbst schon bei kleinen Spannweiten keine ausreichende Steifigkeit aufwiesen, solange nur niedrige Spannungen zugelassen werden konnten. Sie zeigen aber auch, wie notwendig es gerade bei den grossen Spannweiten ist, Kabel zu verwenden, die hohe Spannungen ertragen, wobei die Festigkeit der Kabelanker eine wesentliche Rolle spielt, was später noch behandelt werden wird.

Man hat natürlich die Möglichkeit, bei sehr langen Schrägkabeln die Veränderung des Durchhanges durch Aussteifungsseile, wie sie in Fig. 7 gezeigt sind, zu verkleinern, so dass der Verlust an Steifigkeit der Kabel durch Veränderung des Durchhanges auch bei mehr als 300 m horizontaler Kabellänge

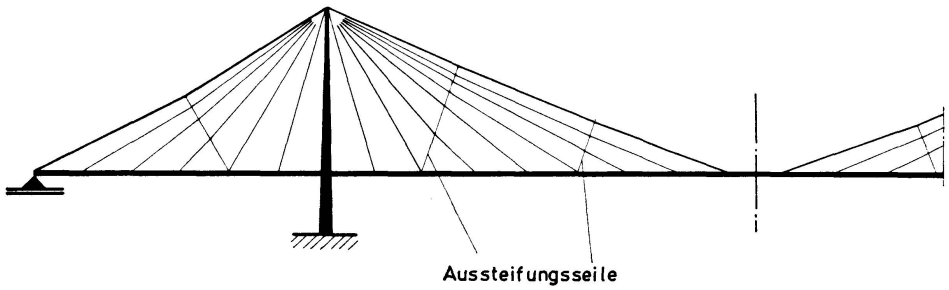


Fig. 7. Anordnung von Aussteifungsseilen.

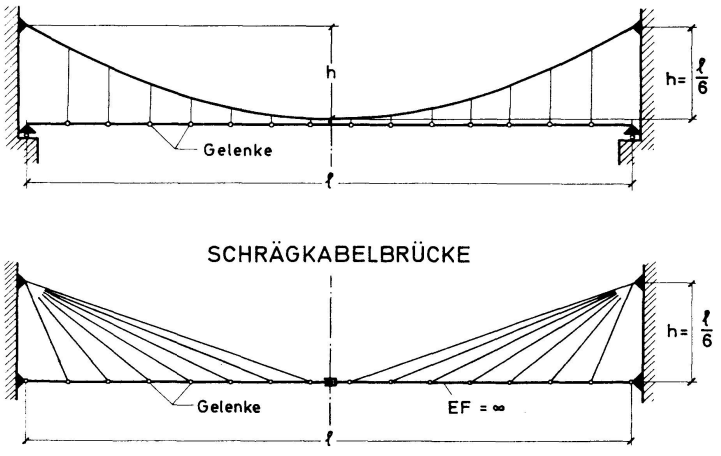
auf unter 10% begrenzt werden kann. Die Aussteifungsseile, die nur Zugkräfte aufnehmen können, haben die Aufgabe, den maximalen Durchhang der Hauptkabel zu fixieren, was ein kleiner gestalterischer Nachteil ist.

Gerade das Merkmal «Steifigkeit durch hohe Kabelspannungen» ist für die weitere Entwicklung wichtig.

3. Begründung der Überlegenheit der Schrägkabelbrücken über Hängebrücken für grosse Spannweiten

3.1. Vergleich der Steifigkeit

Die Begründung wird durch vergleichende Untersuchungen von Schrägkabel- und Hängebrücken gegeben. Zunächst betrachten wir die Steifigkeit der Hängewerke allein, indem Durchbiegungen mehrerer Systeme miteinander verglichen werden. Dafür nehmen wir statisch bestimmte Grundsysteme an, von denen wir durch Vergleichsrechnungen wissen, dass sich damit die Kabelkräfte und Durchbiegungen mit guter Näherung ergeben (Fig. 8).



Annahmen: Kabel: max $\sigma = 7{,}2$ Mp/cm^2
$E_{Kabel} = 2050$ Mp/cm^2
Der Einfluß der Längsdehnung im Balken wird vernachlässigt (EF = ∞)

Fig. 8. Einfeld-Systeme zum Vergleich der Durchbiegungen.

Die Kabel seien am Kabelsattel auf den Pylonen horizontal festgehalten und für eine maximal zulässige Stahlspannung von 7,2 Mp/cm² (wird später begründet) bemessen bei einem E-Modul $E_0 = 2050$ von Mp/cm². Der Versteifungsträger habe zunächst keine Biegesteifigkeit, d. h. an jeder Aufhängung wird ein Gelenk angenommen. Wir vernachlässigen die Durchbiegungen infolge von Normalkräften im Balken. Die Höhe des Kabelsattels über der Fahrbahn ist mit $^1/_6$ der Spannweite angenommen. Dies ist für Hängebrücken natürlich zu hoch; später werden auch andere Pfeilverhältnisse der Kabel betrachtet.

Die Verkehrslast wurde zu 60% des Eigengewichtes angenommen, was etwa den Verhältnissen bei deutschen Verkehrslast-Vorschriften entspricht.

Belasten wir nun die ganze Hauptöffnung (Fig. 9), so ergeben sich sowohl für die Hängebrücke als auch für die Schrägkabelbrücke verhältnismässig kleine, fast gleiche Durchbiegungen. Belasten wir jedoch nur die halbe Spann-

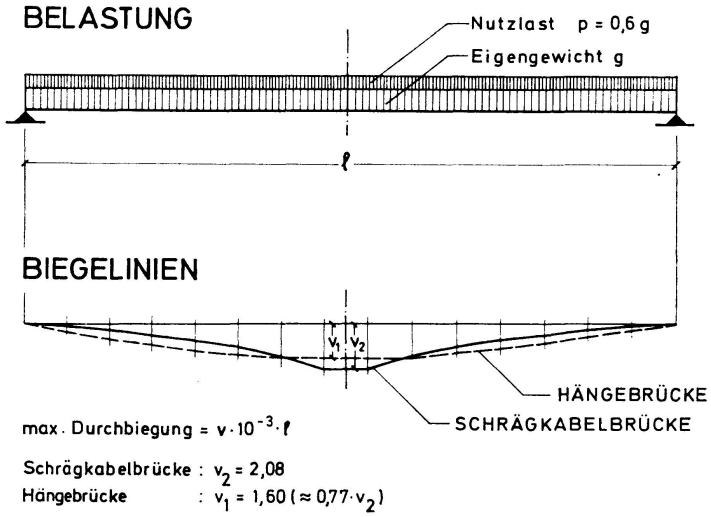


Fig. 9. Durchbiegungen des Einfeld-Systems unter Vollast.

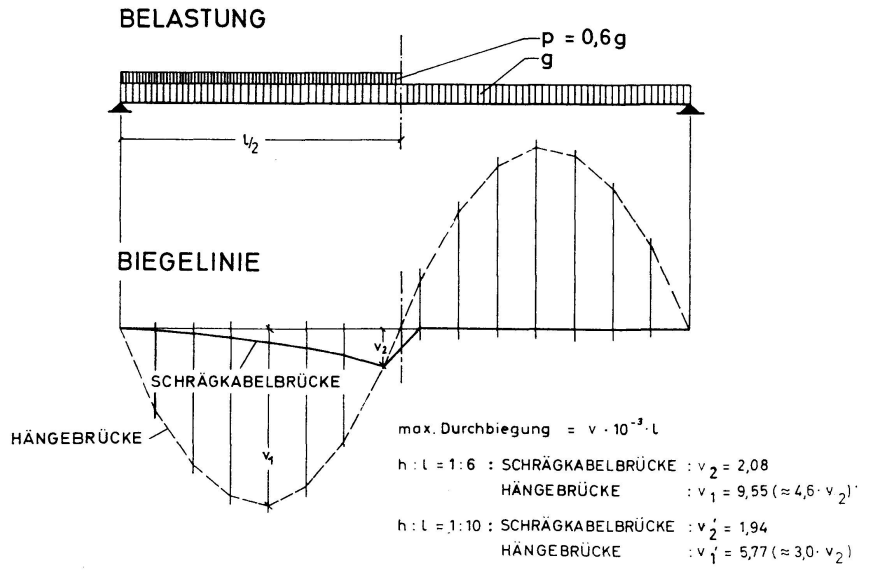


Fig. 10. Durchbiegungen des Einfeld-Systems unter halbseitiger Last.

weite einseitig (Fig. 10), so führt die Weichheit des Hängekabels zu Durchbiegungen, die rund 4,6mal so gross sind wie die entsprechende Durchbiegung der Schrägkabelbrücke. Während sich das Hängebrückenkabel stark unsymmetrisch verformen muss, um ins Gleichgewicht zu kommen, tragen die Schrägkabel die Last direkt zu den festgehaltenen Pylonenköpfen. Die Hängebrücke braucht daher Versteifungsträger mit einer hohen Biegesteifigkeit oder verhältnismässig hohes Eigengewicht, um die Durchbiegungen bei einseitiger Belastung in erträglichen Grenzen zu halten; bei der Schrägkabelbrücke genügt dagegen ein leichter Balken.

Wenn man bei der Hängebrücke die Pylonenhöhe über der Fahrbahn auf $^1/_{10}$ der Spannweite reduziert, so bleiben die Durchbiegungen dennoch dreimal so gross wie bei der Schrägkabelbrücke.

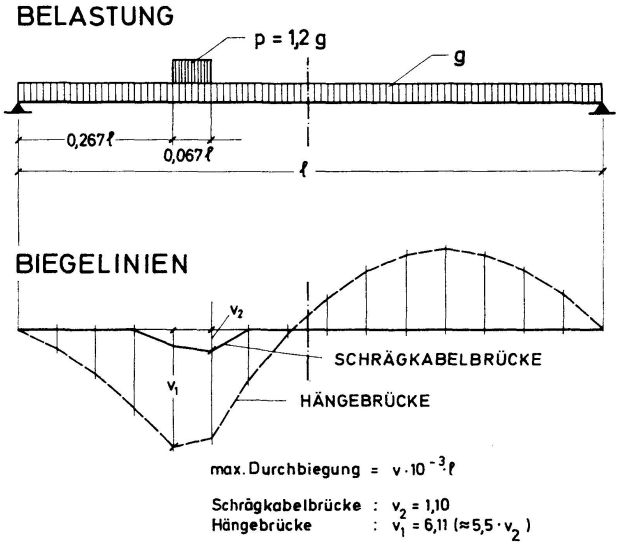


Fig. 11. Durchbiegungen des Einfeld-Systems unter Einzellast.

Auch bei einer konzentrierten Einzellast (Fig. 11) zeigt sich die überlegene Steifigkeit der Schrägkabelbrücke mit vielen Kabeln recht deutlich, indem bei der Hängebrücke rund 5,5mal grössere Durchbiegungen auftreten als bei der Schrägkabelbrücke.

Bei diesen Vergleichen war der Pylonenkopf horizontal festgehalten; die horizontale Ausbiegung der Pylonen hat jedoch einen starken Einfluss auf die Durchbiegungen, den wir noch zu betrachten haben. Hierfür wählen wir das System der dreifeldrigen Hängebrücke (Fig. 12) mit einem günstigen Verhältnis der Spannweiten der Seitenöffnung zur Hauptöffnung von 0,4. Wir nehmen am Fuss gelenkig gelagerte Pylonen an, weil erfahrungsgemäss in horizontaler Richtung sehr biegesteife Pylonen hohe Mehrkosten verursachen und dafür nur eine geringe Verbesserung einbringen.

Belasten wir nun die ganze Mittelöffnung (Fig. 13), so wird die Durchbiegung der Hängebrücke um 55% grösser als die der Schrägkabelbrücke, weil sich die mit einem straffen Kabel rückverankerten Pylonen der Schrägkabelbrücke weit weniger neigen als diejenigen der Hängebrücke. In der Seitenöffnung

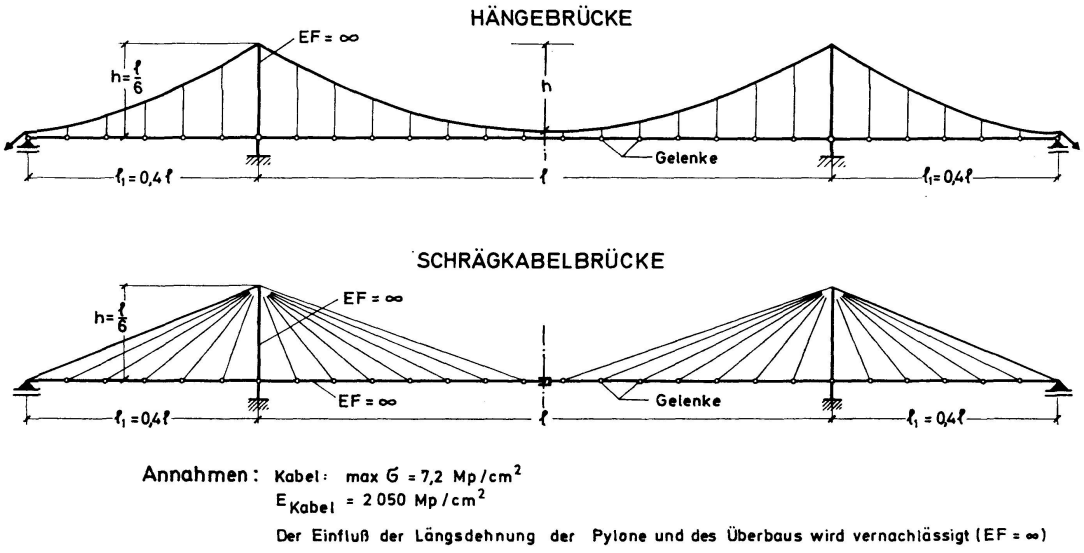


Fig. 12. Dreifeld-System zum Vergleich der Durchbiegungen.

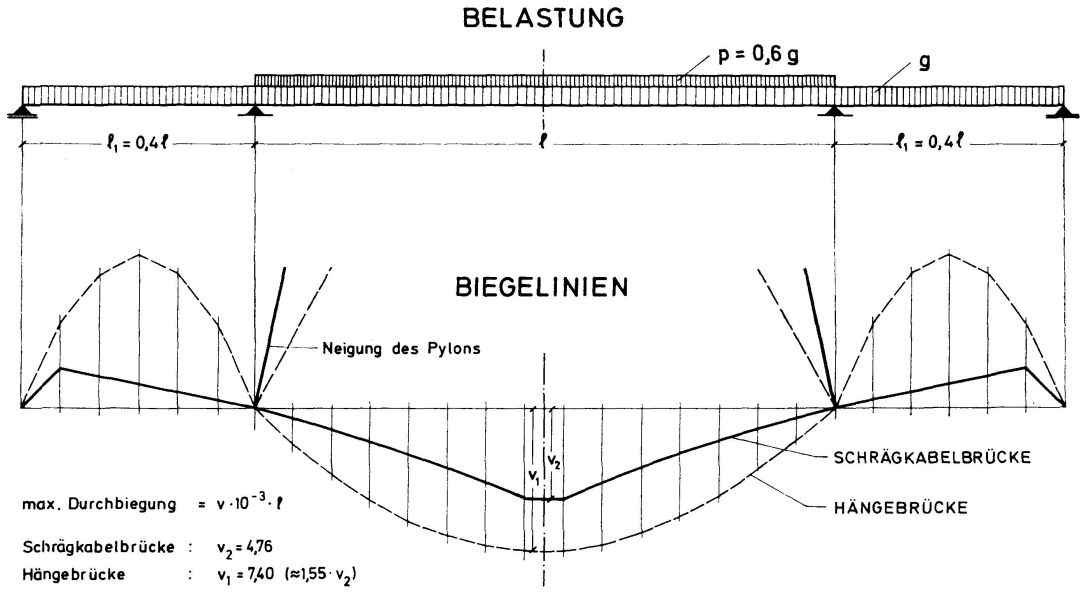


Fig. 13. Durchbiegungen des Dreifeld-Systems unter Vollast im Mittelfeld.

biegt sich die Hängebrücke gar 3,85mal mehr durch als die Schrägkabelbrücke. Der Pylonenkopf bewegt sich bei der Hängebrücke um einen Betrag von 0,26% der Hauptspannweite, bei der Schrägkabelbrücke nur um 0,1%, also weniger als die Hälfte, dabei könnte man die Ausbiegung des Pylonen der Schrägkabelbrücke durch etwas stärkere Rückhaltekabel leicht noch verringern.

Diese Vergleiche der Durchbiegungen zeigen, dass wir bei der Hängebrücke viel steifere Längsträger brauchen als bei der Schrägkabelbrücke, um zu grosse Durchbiegungen bzw. Neigungswechsel und Krümmungen zu vermeiden. Dies macht sich vor allem bemerkbar, wenn derartige Brücken für Eisenbahnlasten zu bauen sind.

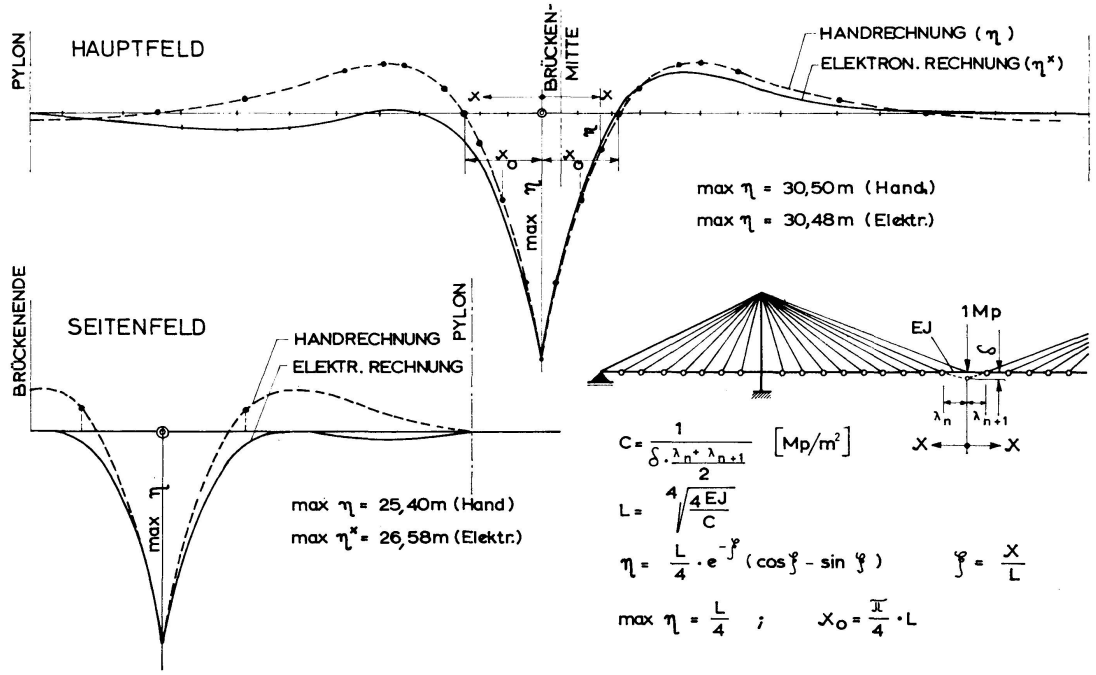


Fig. 14. Einflusslinien der Biegemomente des Brückenbalkens im Vergleich zu solchen des elastisch gebetteten Balkens.

Die Formen der Biegelinie der Schrägkabelbrücke weisen darauf hin, dass maximale negative und positive Biegemomente des Balkens nahe am Endauflager der Seitenöffnungen und maximale positive Momente in der Mitte der Hauptöffnung auftreten. Die Biegemomente lassen sich übrigens für die Schrägkabelbrücke mit guter Näherung von Hand schnell rechnen, indem man die Einflusslinien des elastisch gebetteten Trägers, z. B. nach «Die Statik im Stahlbetonbau» von K. BEYER [7] verwendet (Fig. 14). Sie stimmen im Bereich der massgebenden grössten Ordinaten fast genau mit den elektronisch berechneten Einflusslinien der Biegemomente der Brücke für Theorie I. Ordnung überein. Für die Zusatzmomente infolge der Durchbiegungen (Theorie II. Ordnung) kann man in solchen Vorberechnungen Zuschläge nach Erfahrungswerten machen, so kommt man rasch zu guten Bemessungen für die Hauptberechnung.

Die Spannungen aus den Biegemomenten können bei der Schrägkabelbrücke durch kleinen Abstand und hohe Spannungen der Schrägkabel wirkungsvoller klein gehalten werden als durch grosse Biegesteifigkeit des Balkens.

3.2. Vergleich des Stahlbedarfes

Die Kabelkräfte und damit auch die erforderlichen Stahlmengen für die Kabel werden durch die Höhe der Pylonen über der Fahrbahn im Verhältnis zur Spannweite beeinflusst. Wir berechneten die nötigen Stahlmengen für die Kabel als Funktion von h/l (Fig. 15) unter vereinfachenden Annahmen (z. B.

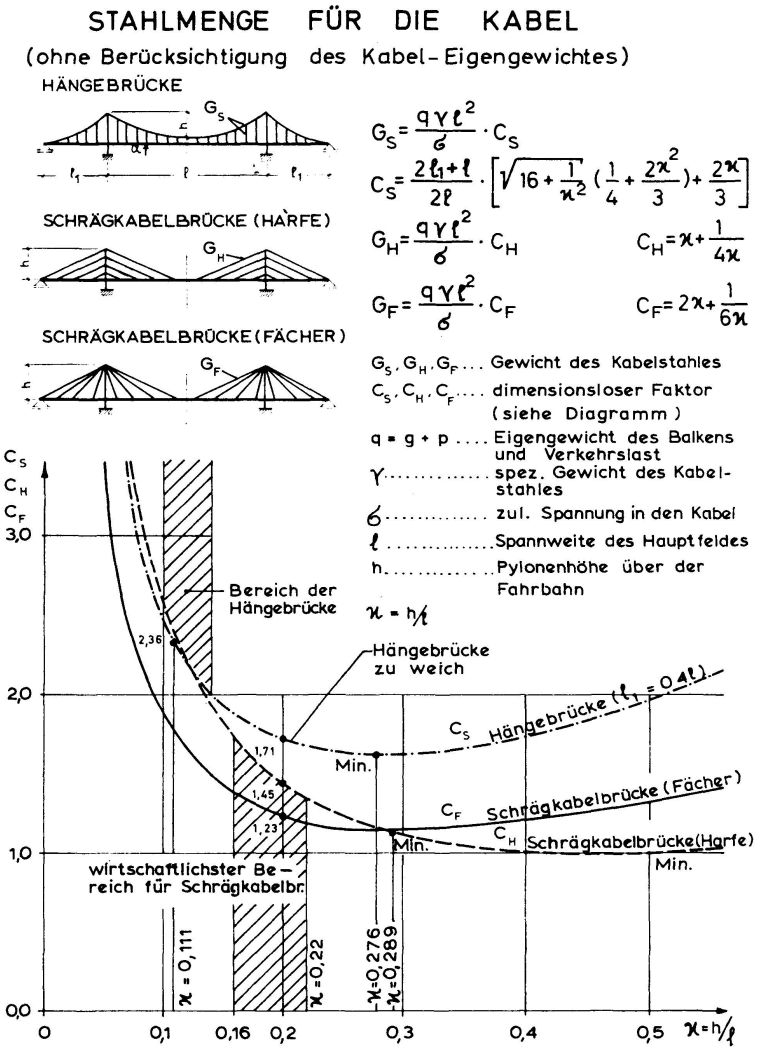


Fig. 15. Stahlmengen für die Kabel als Funktion von h/l.

Einzellasten oder Lastkonzentrationen werden vernachlässigt, Bemessung auf Dauerfestigkeit sei nicht massgebend), zunächst ohne Berücksichtigung der Kabeleigengewichte. Für die Hängebrücke wurde der Stahlbedarf für die Hängeseile eingeschlossen, nicht jedoch die Stahlmenge für die Kabel zwischen Brückenende und Verankerung, die bei hoch über dem Wasser gelegenen Brücken einen erheblichen Anteil ausmachen kann. Bei der Schrägkabelbrücke wurde sowohl die harfenartige wie auch die fächerartige Anordnung der Schrägkabel behandelt. Das Minimum für die erforderliche Stahlmenge der Kabel liegt für die Hängebrücke und die Fächerlösung der Schrägkabelbrücke etwa bei $h:l = 0{,}28$ und für die Harfenlösung der Schrägkabelbrücke bei $h:l = 0{,}50$. Derart hohe Pylonen erfordern jedoch zusätzlichen Stahl und ergeben zu weiche Brücken. Berücksichtigt man auch den Stahlbedarf für die Pylonen und für die Versteifungsträger sowie den Umstand, dass für eine ausreichende Steifigkeit der Brücke die Pylone nicht zu hoch sein dürfen, dann zeigt sich, dass für die Schrägkabelbrücken Pylonenhöhen von etwa $^1/_5$ der Spannweite,

für Hängebrücken etwa $^1/_8$ der Spannweite besonders günstig sind. Dabei liegt der Stahlbedarf für die Kabel bei den Hängebrücken immerhin um rund 60% höher als bei den Schrägkabelbrücken.

Um den Unterschied in der erforderlichen Stahlmenge für die Kabel noch deutlicher zu machen, berechneten wir diese Stahlmengen für eine 38 m breite Strassenbrücke für Spannweiten von 400 bis 1400 m, wobei für die Hängebrücke das übliche Verhältnis des Durchhanges der Kabel von $^1/_9$ bei der Schrägkabelbrücke eine Pylonenhöhe von $^1/_5$ der Spannweite angenommen wurde.

Bei grossen Spannweiten spielt das Kabeleigengewicht eine wesentliche Rolle, das in dieser Darstellung (Fig. 16) berücksichtigt ist. Dadurch erweitern sich die Formeln der Fig. 15 zu folgenden Ausdrücken:

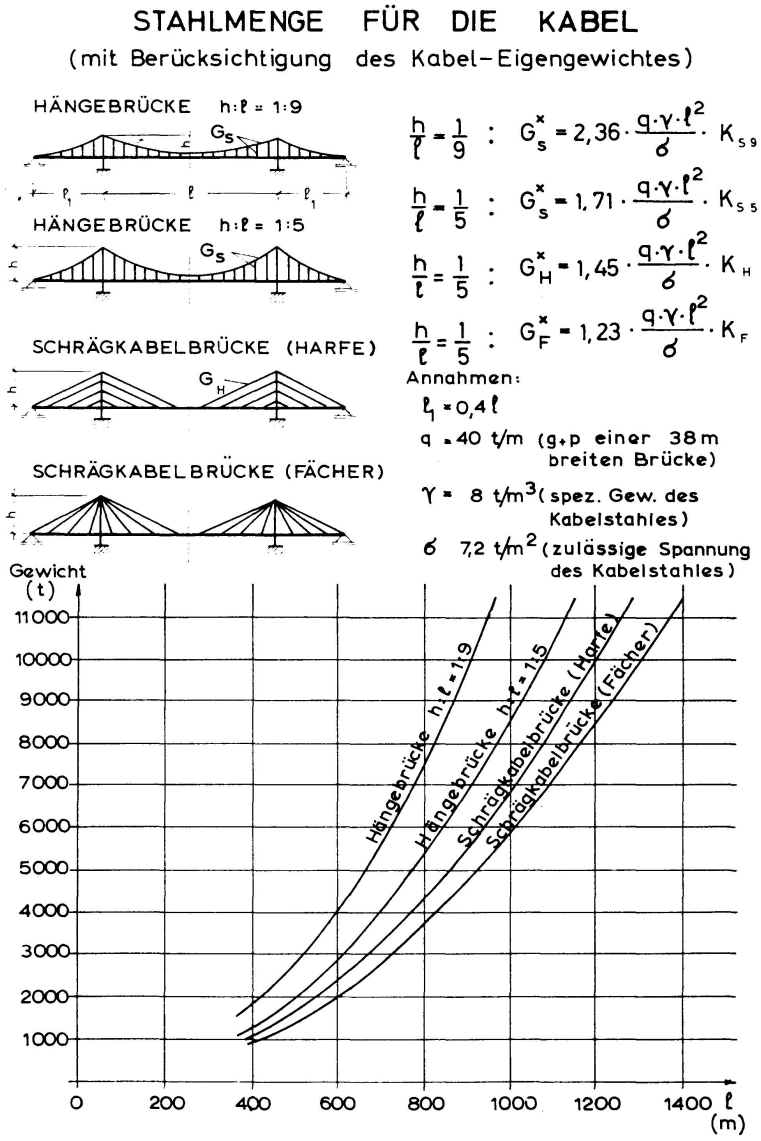


Fig. 16. Stahlmengen für die Kabel einer 38 m breiten Strassenbrücke als Funktion von l.

für die Hängebrücke:

$$G_S^* = \frac{q\gamma l^2}{\sigma} C_S \left[1 + \frac{\gamma l^2}{\sigma(2l_1+l)} C_S + \left(\frac{\gamma l^2}{\sigma(2l_1+l)} C_S\right)^2 + \cdots\right] = \frac{q\gamma l^2}{\sigma} C_S K_S,$$

für die Schrägkabelbrücke, Harfensystem:

$$G_H^* = \frac{q\gamma l^2}{\sigma} C_H \left[1 + \frac{\gamma l}{3\sigma} C_H + \frac{\gamma^2 l^2}{8\sigma^2} C_H^2 + \cdots\right] = \frac{q\gamma l^2}{\sigma} C_H K_H,$$

für die Schrägkabelbrücke, Fächersystem:

$$G_F^* = \frac{q\gamma l^2}{\sigma} C_F \left[1 + \frac{\gamma l^2 \kappa}{\sigma C_F} + \frac{\gamma l}{6\sigma C_F} + \frac{\gamma l}{80\sigma\kappa^2 C_F} + \frac{3\gamma^2 l^2}{160\sigma^2\kappa} + \cdots\right] = \frac{q\gamma l^2}{\sigma} C_F K_F.$$

Wertet man die eckigen Klammerausdrücke (K_i) für die üblichen Grössen $\gamma = 8{,}0\,\mathrm{Mp/m^3}$; $\sigma = 72\,000\,\mathrm{Mp/m^2}$; $l_1 = 0{,}4\,l$ und $\kappa_S = 1/9$ bzw. $\kappa_H = \kappa_F = 1/5$ aus, so ergeben sich folgende Vergrösserungsfaktoren (K_i) aus dem Einfluss des Kabelgewichtes:

$l\,[m]$	Hängebrücke (S)	Harfenlösung (H)	Fächerlösung (F)
1000	1,170	1,057	1,048
3000	1,750	1,190	1,151

Man sieht daraus, dass bei der Hängebrücke der Einfluss des Kabeleigengewichtes schon bei einer Spannweite von 1000 m mit 17,0% beträchtlich ist, während er bei der Fächerlösung mit 4,8% in erträglichen Grenzen bleibt. Bei 3000 m Spannweite ist bei der Hängebrücke fast das halbe Gewicht des Kabels erforderlich um sich selbst zu tragen.

Fig. 16 zeigt deutlich, dass die Schrägkabelbrücke mit fächerartiger Anordnung erheblich weniger Stahl für die Kabel erfordert als die Hängebrücke. Bei 1000 m Spannweite braucht die Schrägkabelbrücke rund 5730 t, die Hängebrücke rund 12 270 t, wobei die gleich hohe zulässige Stahlspannung angenommen wurde, was bei der Schrägkabelbrücke nur möglich ist, wenn man Kabel mit hoher Dauerfestigkeit der Verankerung verwendet.

Die für das Kabelgewicht aufgestellten Gleichungen zeigen, dass für beide Systeme die erforderliche Stahlmenge in erster Näherung mit dem Quadrat der Spannweite zunimmt; die Überlegenheit der Schrägkabelbrücke gegenüber der Hängebrücke beim Stahlbedarf für die Kabel gilt in diesem Punkt also auch für die ganz grossen Spannweiten.

Betrachtet man nun den Stahlbedarf für den Überbau, so ist zunächst einmal die orthotrope Platte mit den Grundquerschnitten für die Fahrbahntafel in beiden Fällen gleich. Die Hängebrücke braucht Versteifungsträger mit grösserer Biegesteifigkeit und grösserer Torsionssteifigkeit als die Schrägkabelbrücke, andererseits braucht letztere zusätzlichen Stahl für die Längsdruck-

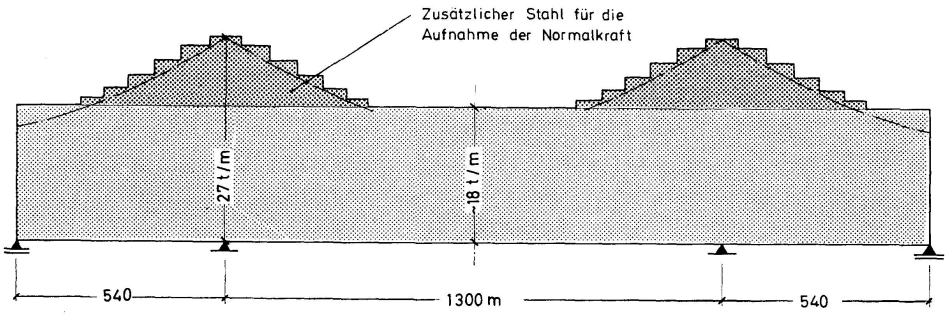


Fig. 17. Stahlgewicht des Überbaues einer 1300 m weit gespannten Eisenbahn- und Strassenbrücke, Verteilung in Längsrichtung.

kraft, die sich aus den im Balken verankerten Kabeln ergeben. Der dadurch bedingte Stahlbedarf ist jedoch selbst bei einer kombinierten Eisenbahn-Strassenbrücke mit 1300 m Spannweite relativ gering (Fig. 17).

Die Schrägkabelbrücke muss weiter für zusätzliche Biegemomente II. Ordnung bemessen werden, die sich aus der Längskraft und den Durchbiegungen ergeben. Die nach G. SCHREIER [8] durchgerechneten Beispiele zeigten jedoch, dass die Spannungen infolge dieser Momente II. Ordnung bei den üblichen Bauhöhen des Brückenbalkens nur etwa 5 bis 14% der Spannungen nach Theorie I. Ordnung ausmachen, wobei die 14% die Brücke mit 1300 m Spannweite für Eisenbahn- und Strassenverkehr betreffen. In der orthotropen Platte sind bekanntlich wegen der verhältnismässig hochliegenden Schwerlinie des gesamten Querschnittes die Spannungen aus der Hauptträgerwirkung nie ganz ausgenützt, so dass dort Reserven für die Aufnahme der Zusatzmomente verbleiben und im wesentlichen nur der Untergurt verstärkt werden muss. Die zusätzlichen Stahlmengen bleiben in der Grössenordnung von 2 bis 4%. Man sieht daraus, dass auch beim Überbau bis zu den grössten derzeit erwogenen Spannweiten die Schrägkabelbrücke weniger Stahl erfordert als die klassische Hängebrücke.

Hinsichtlich der Kosten ist die Schrägkabelbrücke weiter beachtlich im Vorteil dadurch, dass sie keine schweren Kabelverankerungen braucht wie die Hängebrücke, weil die Kabel ja im Überbau verankert sind und dort – wie wir gesehen haben – dank der grossen Querschnittsfläche der orthotropen Platte nur wenig zusätzlichen Stahl erfordern. Dieser Vorteil fällt um so mehr ins Gewicht, je höher die Brückenfahrbahn über dem Wasser liegt, also insbesondere bei Brücken über Hafeneinfahrten, und natürlich auch je tiefer gegründet werden muss. Für die lotrechte Verankerung der Schrägkabel am Brückenende genügt im allgemeinen das Gewicht des dortigen Pfeilers. Die Verankerung kann sogar entfallen, wenn man noch eine weitere Öffnung als kontinuierlichen Balken anschliesst, wodurch gleichzeitig die Biegemomente und Verformungen am Ende der Schrägkabelbrücke günstig beeinflusst werden.

Schliesslich darf als Vorteil der Schrägkabelbrücke noch die einfachere Montage durch Freivorbau mit kleineren Montageverformungen und der Weg-

fall von teueren Kabelschellen und Hängeseilen angeführt werden. Als Vorteil sei auch erwähnt, dass man bei Korrosionsschäden oder anderen Beschädigungen die Kabel auswechseln kann, wenn man sie im Sattel nebeneinander legt und ihre Abstände am Balken genügend klein macht. Bei einer Hängebrücke ist es praktisch unmöglich, die Hauptkabel auszuwechseln.

3.3. Vergleich der aerodynamischen Stabilität

Die vom 1. Verfasser 1953 begonnene Entwicklung aerodynamisch günstiger Querschnitte, über die 1968 in der *Bautechnik* ausführlich berichtet wurde [9], hat inzwischen durch zahlreiche Windkanalversuche (Scruton, Klöppel, Selberg, Sabzevari und Scanlan, Wardlaw) und durch die praktische Erfahrung erwiesen, dass man zur Erzielung aerodynamischer Stabilität weitgespannter Hänge- oder Schrägkabelbrücken die Querschnittsformen so wählen muss, dass

1. möglichst keine Windwirbel entstehen, die bei der Wirbelablösung Schwingungen anregen (Kármán-Effekt);
2. der Wind möglichst wenig Auftrieb und Drehmoment verursacht, um so Flatter- und Torsionsschwingungen zu vermeiden.

Man muss also die Ursachen der Windschwingungen vermeiden und nicht hohen Erregerkräften Steifigkeit des Tragwerks entgegensetzen.

Man darf heute feststellen, dass die nach dem Einsturz der Tacoma-Brücke

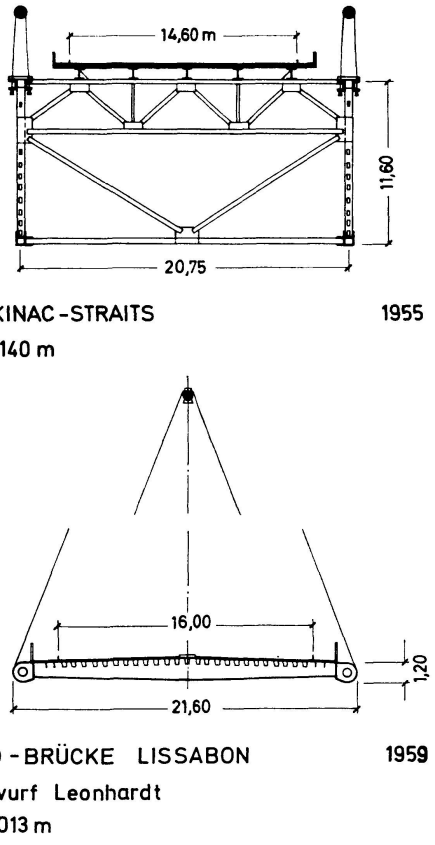


Fig. 18a/b. Brückenquerschnitt amerikanischer Hängebrücken mit torsionssteifer Fachwerkröhre gegenüber Vorschlag Leonhardt für Tejobrücke Lissabon (1959) mit flacher Fahrbahntafel und Seilnetz.

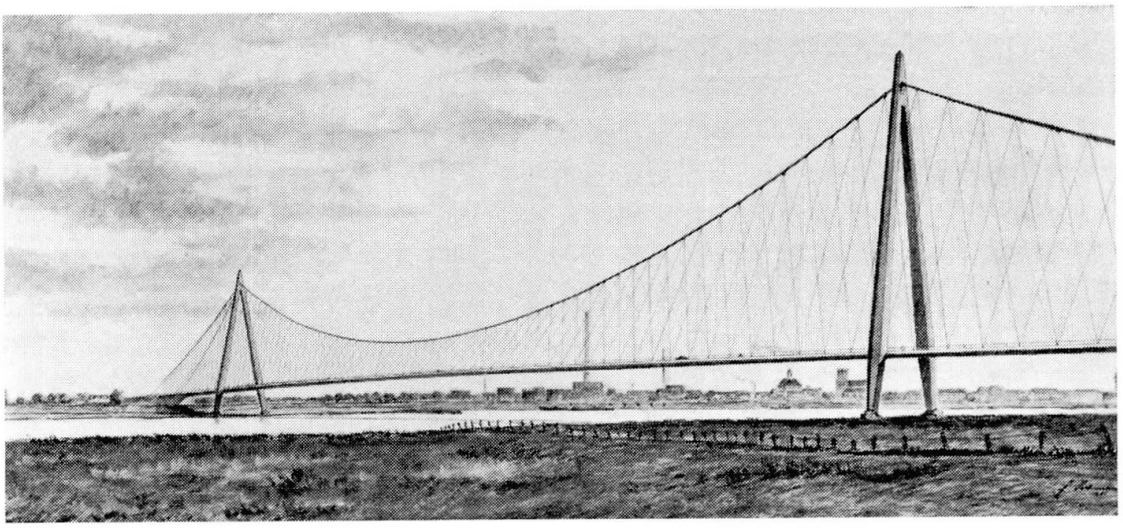


Fig. 19. Entwurf Leonhardt-Lohmer-Krupp für Rheinbrücke Emmerich.

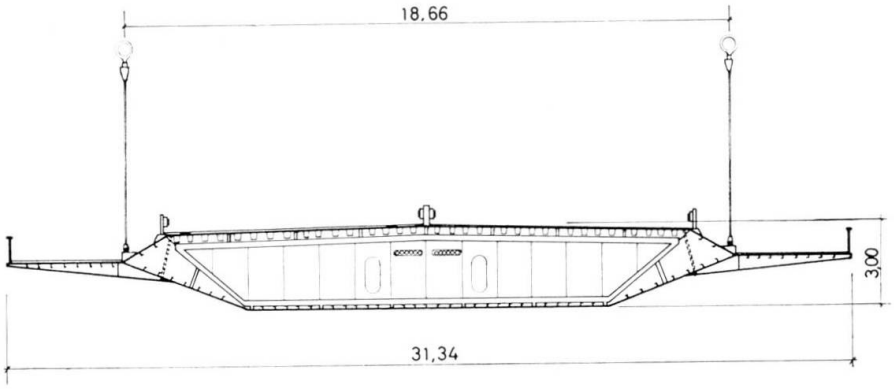


Fig. 20. Querschnitt der Severnbrücke, Entwurf Freeman, Fox und Partner, London.

von den Amerikanern gewählte Lösung zur Erzielung der Windstabilität, nämlich die sehr biege- und torsionssteife Fachwerkröhre (Fig. 18a) als unzweckmässig und überholt zu bezeichnen ist. Die so gebauten Brücken, wie z. B. über die Mackinac Straits mit 1140 m Spannweite oder die Tejo Brücke Lissabon mit 1013 m Spannweite oder die neue Forth Brücke in Schottland mit 1006 m Spannweite zeigen, dass damit auch kein besonders schönes Brückenbild entsteht. Demgegenüber hat der 1. Verfasser seit 1953 ganz flache Fahrbahntafeln ohne eigentlichen Versteifungsträger vorgeschlagen und damit 1959 einen Entwurf für die Tejo Brücke (Fig. 18b) und kurz darauf für die Rheinbrücke Emmerich durchgearbeitet (Fig. 19). Es ist immer noch bedauerlich, dass die deutschen Stahlbaufirmen diese Entwicklung scheitern und so den Engländern den Vortritt liessen, die mit der Severn Brücke die erste grosse Anwendung der neuartigen flachen Querschnitte verwirklichten (Fig. 20).

Auch Chr. Ostenfeld, Kopenhagen, hat die Vorteile erkannt und bei seiner Lillebelt-Brücke (Fig. 21) den ursprünglichen Entwurf mit Fachwerkversteifungsträgern auf eine flache Brückentafel umgestellt. Inzwischen haben die Engländer mehrere grosse Brücken mit dieser neuen Querschnittsform ent-

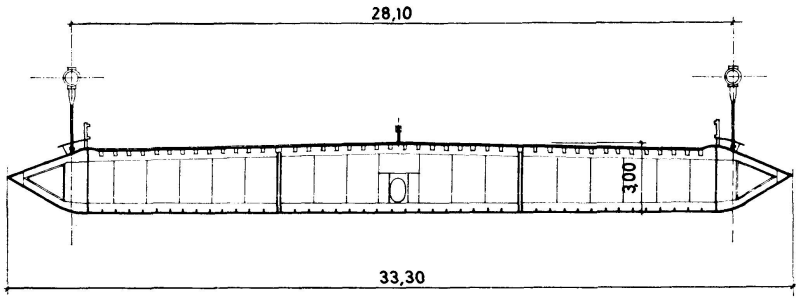


Fig. 21. Querschnitt der Lillebeltbrücke, Entwurf Chr. Ostenfeld, Kopenhagen.

worfen und im Bau, darunter die Bosporusbrücke und die Humberbrücke, letztere mit einer Spannweite von 1396 m.

Es steht heute ausser Zweifel, dass mit diesen aerodynamisch geformten Querschnitten mit spitzer Windnase selbst bei den leicht zu Schwingungen neigenden Hängebrücken aerodynamische Stabilität erzielt werden kann, wenn die Tafel im Vergleich zur Spannweite genügend breit und an den Pylonen kontinuierlich ist. Bei der Schrägkabelbrücke darf aber ein wesentlich günstigeres Verhalten in dieser Hinsicht erwartet werden, das uns im Hinblick auf die erforderliche Grösse der Biege- und Torsionssteifigkeiten Erleichterungen erlaubt.

Die Gründe hierfür sind folgende:

Bei Brücken mit vielen Schrägkabeln ist es schwierig, Resonanzschwingungen mit grossen Amplituden zu erzeugen, weil Störschwingungen der unterschiedlich langen Kabel mit entsprechend unterschiedlichen Eigenfrequenzen jede harmonische Schwingungsform sofort stören bzw. dämpfen und dadurch den Aufbau grosser Amplituden verhindern. Die Schrägkabelbrücken weisen damit eine starke Systemdämpfung auf, die bei der Hängebrücke nicht vorhanden ist. In dieser kann sich bekanntlich die antimetrische Torsionsschwingung meist in Verbindung mit Biegeschwingungen leicht ausbilden und zu grossen Amplituden führen, was bei der Tacoma-Brücke zum Einsturz führte (Fig. 22). Dabei bewegen sich die Kabel und die Pylonenköpfe jeweils gegeneinander; die Kabel und Pylonen behindern die Torsionsbewegungen der Fahrbahntafel praktisch nicht. Deshalb brauchen wir bei der Hängebrücke eine hohe Torsionssteifigkeit durch Versteifungsträger. In der Schrägkabelbrücke geben jedoch schon die Kabel einen starken Widerstand gegen die Torsionsbewegungen. Ein Unterschied in der Durchbiegung der beiden Kabelebenen ist dabei ebenfalls mit unterschiedlichen Ausbiegungen der Pylonenköpfe verbunden.

Benützt man A-förmige Pylonen, bei denen die beiden Kabelebenen im Pylonen-Sattellager zusammengeführt werden, dann ist die unterschiedliche Längsbewegung der Pylonensattel nicht mehr möglich und der Widerstand der Schrägkabel gegen Torsionsschwingungen der Fahrbahntafel wird damit noch grösser. Die A-förmigen Pylonen sind daher für die ganz grossen Spann-

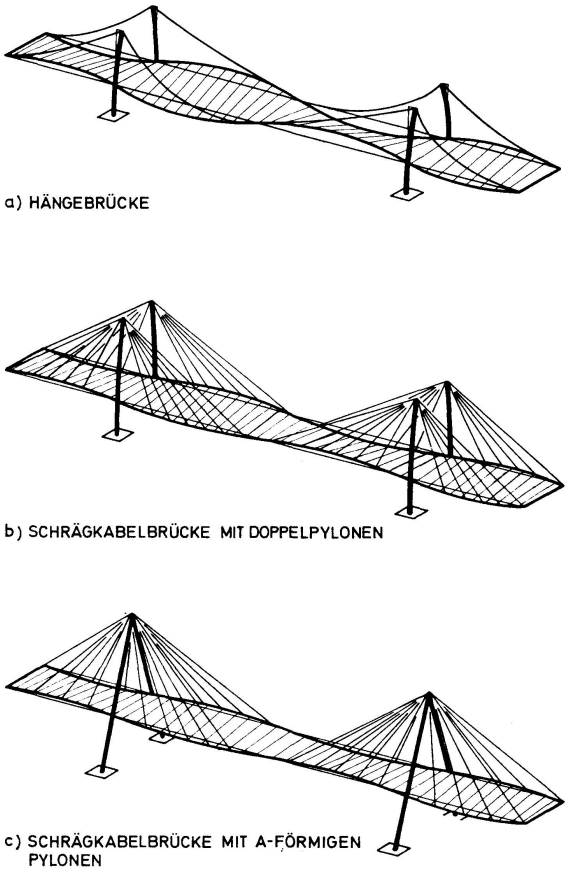


Fig. 22. Schwingungsformen von Hänge- und Schrägkabelbrücken.

weiten besonders geeignet. Die starke Systemdämpfung der Schrägkabelbrücken wurde u. a. bei Schwingungsversuchen am Schillerstrassensteg (90 m Länge) in Stuttgart festgestellt, bei dem es nicht gelungen ist, diese an und für sich sehr leichte und weiche Brücke in Resonanzschwingung zu bringen und nur sehr kleine Amplituden trotz künstlicher Anregung zustande gebracht wurden.

Bei den üblichen Windkanalversuchen, bei denen nur eine kurze Teillänge des Überbaues so im Windstrom eingebaut wird, dass die Frequenzen für Biege- und Torsionsschwingungen im Modell-Massstab mit der Hauptbrücke übereinstimmen, können leider diese günstigen Einflüsse der Schrägkabel-Systeme nicht zur Wirkung kommen, so dass sie ein nur unzulängliches Bild der Wirklichkeit liefern. A. G. Davenport hat zudem bei seinen neuesten Untersuchungen für die im Bau befindliche Narrows Brücke in Halifax [10] erneut darauf hingewiesen, dass diese Teillängen-Modellversuche kein zuverlässiges Bild der Stabilität geben. Versuche mit Modellen der ganzen Brücke sind aber unerhört aufwendig und es ist fast unmöglich, die Ähnlichkeitsgesetze voll zu erfüllen, so dass man für die weitere Erforschung der Windstabilität solcher Brücken in erster Linie auf Beobachtungen an ausgeführten Brücken angewiesen sein wird.

Dass auch ungünstig entworfene Schrägkabelbrücken unangenehm schwin-

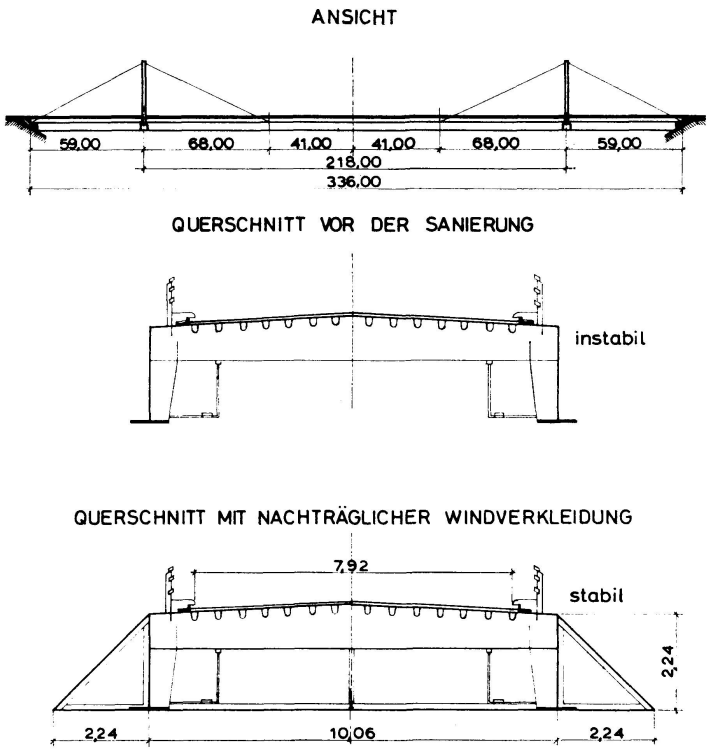


Fig. 23. Ansicht und Querschnitt der Longs-Creek-Brücke in Kanada und angebaute Windnase.

gen können, zeigten die erheblichen Schwingungen an der Longs-Creek-Brücke in New Brunswick, Kanada [11] (Fig. 23), die bei 214 m Mittelöffnung nur mit je einem Schrägkabel unterstützt war und den denkbar ungünstigsten Querschnitt mit aussen liegenden vollwandigen Hauptträgern aufwies. Bei diesem System sind natürlich Resonanzschwingungen noch leicht möglich. Hätte man 3 bis 5 Schrägkabel benützt, dann wäre die Systemdämpfung zu Hilfe gekommen. So musste man an diesem Querschnitt nachträglich eine Windnase anbauen, die sofort Abhilfe ergab. Bei der Kniebrücke Düsseldorf (Fig. 2) hatten Windkanalversuche bei C. Scruton im NPL Teddington mit dem üblichen kurzen Teilstück ergeben, dass sie beim Freivorbau mit einer maximalen Kragweite von über 300 m trotz Einbaus eines unteren Torsionsverbandes nicht windstabil gewesen wäre, weil sie ohne Windnase entworfen war. Aus Vorsorge hatten wir überlegt, welche Massnahmen nötig wären, um Windstabilität zu erreichen. Es zeigte sich, dass schon eine Verkleidung der Aussenfläche in der in Fig. 24 gezeigten Form sogar ohne unteren Torsionsverband genügt hätte. Auch daraus war wieder zu erkennen, dass die Querschnittsform die entscheidende Rolle spielt.

Die seit rund zwei Jahren ohne Windnase fertiggestellte Kniebrücke zeigte im übrigen bei den bisher aufgetretenen Stürmen nicht die geringste Windschwingung, obwohl der Montage-Torsionsverband entfernt wurde und damit der Querschnitt sehr torsionsweich ist. Dies mag allerdings auch darauf zurückzuführen sein, dass bei den deutschen Rheinbrücken die Fahrbahntafeln verhältnis-

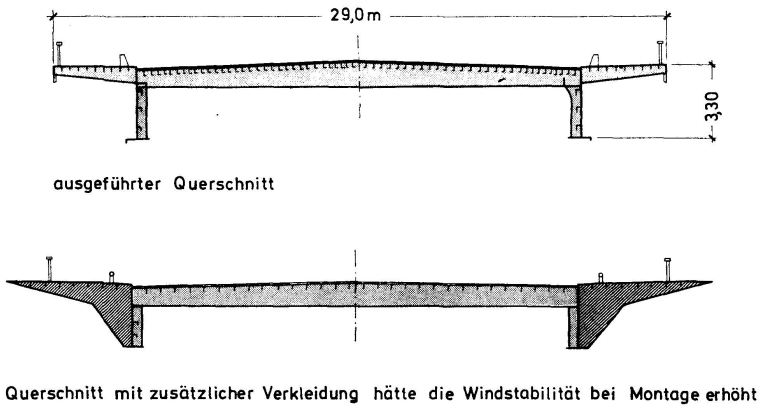


Fig. 24. Querschnitt Kniebrücke: ohne und mit Windnase.

mässig niedrig über dem Gelände liegen und damit die Grundgeschwindigkeit des Windes niedrig bleibt und der turbulente Teil in Form von Böen auch nur abgeschwächt auftritt.

Da die Frage nach der notwendigen Grösse der Torsionssteifigkeit dieser neuartigen flachen Brückenquerschnitte für die Wirtschaftlichkeit besonders der breiten Brücken von Bedeutung ist, veranlassten die Verfasser anlässlich eines Entwurfes für eine 750 m weit gespannte Brücke über die Hafeneinfahrt von Vancouver verschiedene Vergleichsversuche im Windkanal des National Physical Laboratory in Ottawa durchzuführen. Sie zeigten eindeutig, dass selbst ohne den günstigen Einfluss der Systemdämpfung aerodynamische Stabilität auch mit unten offenen Querschnitten erreicht werden kann, wenn man an beiden Rändern einen flachen, fast dreiecksförmigen Hohlkasten anordnet, der am äusseren Rand oben als Windnase abgeschrägt ist (Fig. 25). Die

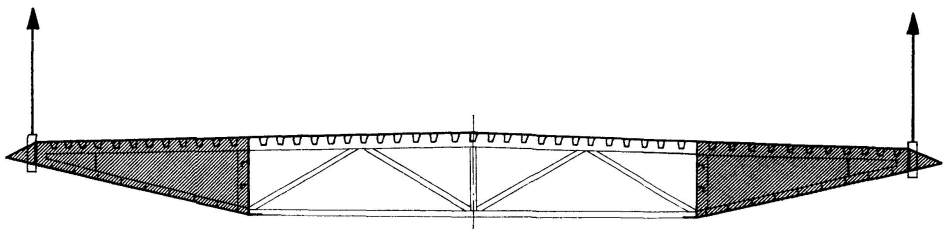


Fig. 25. Windstabiler Querschnitt mit unten offener Fahrbahntafel (schraffierte Teile: Hohlkasten).

für diesen Querschnitt gemessenen aero-statischen Windwiderstandsbeiwerte in stetiger Strömung sind in Fig. 26 gezeigt. Sowohl der Beiwert für den Auftrieb wie für das Drehmoment sind bei kleinen Anblaswinkeln aussergewöhnlich niedrig, so dass die Erregerkräfte für Biege- oder Torsionsschwingungen sehr klein sind. Aber auch der Beiwert für den horizontalen Windwiderstand ist ungewöhnlich niedrig und ist auf die vertikale Projektionsfläche bezogen nur rund 0,5, während er für bisherige Querschnittsformen 1,2 bis 1,6 beträgt. Dies bedeutet, dass man bei solchen Querschnitten nur sehr kleine Windbelastungen erhält, sofern nicht die Windangriffsflächen von Fahrzeugen, ins-

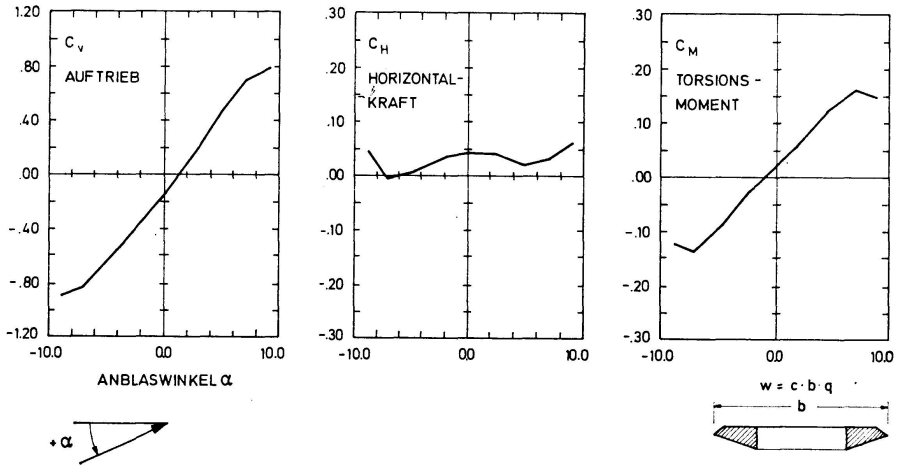


Fig. 26. Aerostatische Windwiderstandsbeiwerte c_W, c_V, c_M für den Querschnitt des Bildes 25.

besondere Eisenbahnen, zu berücksichtigen sind. Die aerodynamische Stabilität weitgespannter Schrägkabelbrücken kann jedenfalls bei solchen Querschnitten als gelöst betrachtet werden. Es sei hier noch erwähnt, dass auch bei Spannweiten über 1000 m die gesamte Bauhöhe solch flacher Brückenquerschnitte bei Strassenbrücken mit 2 bis etwa 3,5 m, bei Eisenbahnbrücken mit 3 bis 5 m genügt, wobei in der Regel die Stabilität des Gesamtsystems gewährleistet ist. Diese hängt von verschiedenen Faktoren, wie der Biegesteifigkeit des Überbaues, des Verhältnisses von Eigengewicht zu Verkehrslast, möglichen Verkehrslastkonzentrationen und dergleichen, ab. Die Stabilität des Gesamtsystemes wird aus dem Konvergenzverhalten bei der Berechnung der Momente aus Theorie II. Ordnung beurteilt. Ein weiteres Kriterium für die Festlegung der Bauhöhe sind Anforderungen an die Krümmungsradien und Tangentenneigungen der Biegelinien. Diese Anforderungen sind je nach der Art des Verkehrs verschieden und können nach unserer Erfahrung mit den oben angegebenen Bauhöhen erfüllt werden. Die flache Querschnittsform lässt sich also bei den üblichen Brückenbreiten leicht verwirklichen.

4. Schwingbreiten der Kabelspannungen, Dauerfestigkeit und Haltbarkeit

Bei den durch die Verkehrslasten hervorgerufenen Spannungswechseln in den Kabeln, die wir zwar ungenau aber kurz mit Schwingbreite der Kabelspannungen bezeichnen wollen, ist die Schrägkabelbrücke gegenüber der Hängebrücke im Nachteil. In Fig. 27 sind die Veränderungen der grössten Kabelkräfte bei dreifeldrigen Brücken mit Seitenöffnungen von 0,4 × Hauptöffnung für eine Verkehrslast von 24% des Eigengewichtes einander gegenübergestellt. Während sich bei der Hängebrücke die Kabelkraft nur um +24% vergrössert, verändert sich die Kraft im Rückhaltekabel bei der Schrägkabelbrücke bei Belastung der Hauptöffnung um +67% und bei

Belastung der Seitenöffnungen um -43%. Bei grösseren Seitenöffnungen wird dieser Spannungswechsel noch grösser, so dass besondere Massnahmen getroffen werden müssen. Die Verkehrslast ist dabei niedrig angesetzt, etwa mit 40% der maximalen Strassenverkehrslast der deutschen Brückenvorschriften. Man sieht daraus, dass die Rückhaltekabel bei sehr hohen Verkehrslasten, z. B. bei Eisenbahnen, fast vollständig entlastet werden können und dass sie andererseits eine wesentlich höhere zusätzliche Last aufzunehmen haben als die Hängebrückenkabel.

Demnach muss man bei den Schrägkabelbrücken wesentlich mehr Wert auf die Dauerfestigkeit der Kabel legen als bei Hängebrücken.

Schon 1938 liess der 1. Verfasser beim Bau der Rheinbrücke Rodenkirchen die ersten Dauerschwingversuche mit Verankerungen von patentverschlossenen Seilen ⌀ 65 mm durchführen [12], die das erschreckende Ergebnis hatten, dass die ohne Drahtbruch erreichbare Schwingbreite bei 2 Millionen Lastwechsel bei einer oberen Spannung $\sigma_0 = 50\,\mathrm{kp/mm^2}$ nur 12 bis $14\,\mathrm{kp/mm^2}$ betrug. Schon damals schlug der 1. Verfasser zur Verbesserung die Verwendung von Paralleldrahtbündeln vor, die in Sechseck-Anordnung gebändselt wie Seile verlegt werden können. Später wurde die Verwendung spezieller, keilartig wirkender Ankerköpfchen nach dem BBRV-Verfahren angeregt [13]. Die damit durchgeführten Versuche ergaben eine höhere Schwingbreite, die

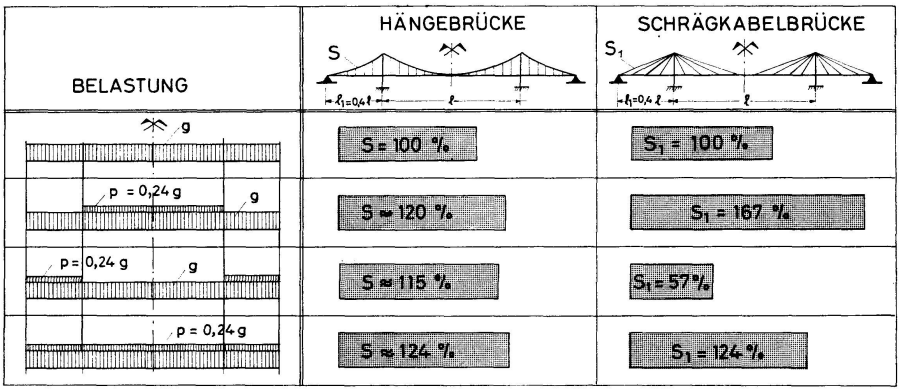


Fig. 27. Schwingbreiten der Kabelspannungen für Hängebrücke und Schrägkabelbrücke.

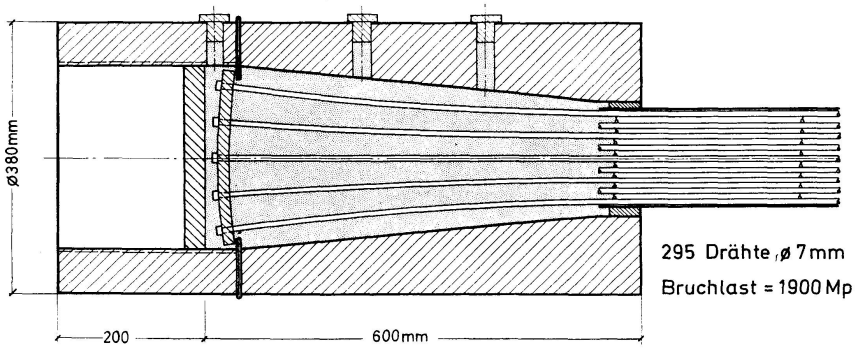


Fig. 28. HiAm-Verankerung, Schnitt durch den Ankerkopf, Stahlkugelverguss.

jedoch noch nicht befriedigend war. W. ANDRÄ hat dann unter Mithilfe des Kunststoffsachverständigen K. KRENKLER eine Kombination von Ankerköpfchen und Verguss im Ankerkonus entwickelt [14] (Fig. 28), die zu dem gewünschten Ziel führte, dass nämlich die Verankerung bei schwingender Belastung nicht mehr schwächer ist als das Kabel selbst. Sie wurde HiAm-Verankerung genannt. Die Schwingbreite konnte damit selbst für sehr grosse Kabel bei $\sigma_0 = 72\,\mathrm{kp/mm^2}$ auf 22 bis $25\,\mathrm{kp/mm^2}$ vergrössert werden. Im Vergleich dazu müsste man Seile mit viel grösserem Durchmesser als 65 mm prüfen, die dann nur noch 10 bis $12\,\mathrm{kp/mm^2}$ Schwingbreite erreichen dürften. Die Schwingbreite von Seilen mit sehr grossem Durchmesser (z. B. 123 mm [16]) wurde unseres Wissens nie durch Versuche nachgewiesen.

Als HiAm-Vergussmasse wurden kleine Stahlkügelchen, Zinkstaub und Epoxidharz verwendet, wobei der Harzanteil nur 8 Gewichtsprozent beträgt. Die Stahlkügelchen bilden im Inneren des Ankerkonus gewölbeartige Abstützungen der Drähte, die die Drahtspannung bis hinten zum Ankerköpfchen stark reduzieren. Die Stahlplatte unmittelbar hinter den Ankerköpfchen drückt auf die Vergussmasse und verhindert das Ausweichen. Der Schlupf ist nur etwa $^1/_5$ des bei Metallverguss beobachteten.

Fig. 29 zeigt die Verteilung der Drahtbrüche, links bei einem Paralleldrahtkabel mit Zamak-Metall-Verguss, rechts bei der neuen schwingfesten HiAm-Verankerung. Bei dem Metallverguss wirkt die Vergusstemperatur von rund 420° C so schädlich, dass alle Drahtbrüche am Beginn des Ankerkopfes aufgetreten sind, während bei dem neuartigen Kaltverguss die Drahtbrüche etwa gleichmässig über die ganze Kabellänge verteilt sind, ohne dass eine bedenkliche Häufung im Verankerungsbereich eingetreten wäre.

Anlässlich des Baues der neuen Rheinbrücke Mannheim-Ludwigshafen

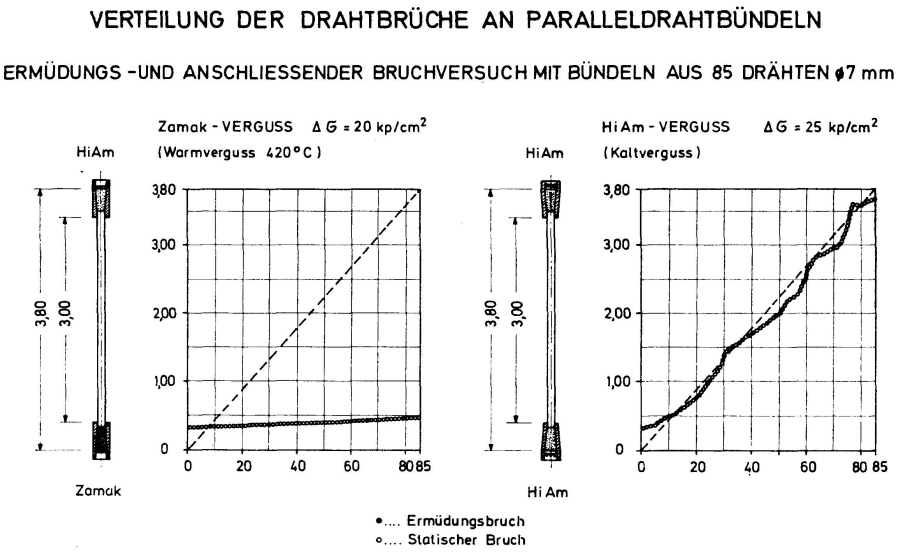


Fig. 29. Verteilung der Drahtbrüche bei Dauerversuchen und anschliessenden statischen Bruchversuchen bei Zamak-Metall-Verguss und HiAm-Verguss.

wurden dank der Förderung durch W. Borelly (Stadt Mannheim) und H. Thul (Bundesverkehrsministerium) zahlreiche Grossversuche mit solchen Paralleldrahtbündeln durchgeführt, wobei in einem Kabel bis zu 295 Drähte ⌀ 7 mm aus St 140/160 vereinigt waren, die eine Bruchlast von rund 1900 Mp ergaben. Bei diesen Versuchen zeigte sich, dass die Schwingbreite um so mehr heruntergeht, je grösser die Drahtzahl und je grösser die Länge des Versuchskabels ist. Wenn Einzeldrähte Schwingbreiten von 35 bis 40 kp/mm² ergaben, traten die ersten Drahtbrüche im grossen Kabel schon bei 22 bis 25 kp/mm² bei gleicher oberer Spannung auf. Dies ist ein erneuter Beweis dafür, dass bei den Materialfestigkeiten nur eine Grosszahl von Prüfungen mit statistischer Auswertung ein realistisches Bild gibt.

Für die in der Brücke tatsächlich auftretenden Schwingbreiten der Kabelspannungen, mit denen man mehr als zweimillionenmal rechnen muss, ist man immer noch auf Schätzungen angewiesen, weil noch nicht genügend Messungen der wirklichen Verkehrslasten auf Brücken vorliegen. Dies gilt besonders auch für Eisenbahnlasten, bei denen es sicher unrealistisch wäre, für sehr grosse Brückenspannweiten die maximalen Zuggewichte der Lastvorschrift der Bemessung auf Dauerfestigkeit zugrunde zu legen. Hier sind weitere Messungen für statistische Grundlagen dringend erwünscht und bei der Deutschen Bundesbahn im Gange.

An Stelle von Drähten können auch Litzen mit angestauchten Köpfchen verwendet werden. Diese Kabelart haben wir für die sehr grossen Kabelkräfte bei den zeltartigen Dächern für die Olympia-Sportstätten in München in grossem Umfang angewandt, weil sie leichter zu hantieren ist als Paralleldrahtbündel. Dabei besteht ein Kabel aus 109 Stück 7-drähtigen Litzen mit 5 mm Drahtdurchmesser bei einer Stahlgüte von $\beta_N = 160$ kp/mm² (Nennfestigkeit), so dass je Kabel eine Bruchlast von ca. 2600 Mp erreicht wird. Auch die mit Litzenkabeln durchgeführten Versuche ergaben Schwingbreiten über 20 kp/mm² bei einer oberen Spannung von 75 kp/mm².

Diese Paralleldraht- oder Parallellitzenkabel mit der neuartigen HiAm-Verankerung waren Voraussetzung für die den Untersuchungen zugrunde gelegten hohen zulässigen Stahlspannungen der Kabel, die nicht nur die Steifigkeit des Systems wesentlich erhöhen, sondern – durch die bei der geforderten Sicherheit möglichen höheren Spannungswerte – auch gegenüber patentverschlossenen Seilen mit Metallverguss zu erheblichen Ersparnissen an Kabelstahl führen.

Die neue Kabelart wird allerdings nur wirtschaftlicher, wenn man für den *Korrosionsschutz* der Kabel eine preisgünstige Lösung wählt, für den heute mehr getan werden sollte als früher, vor allem, wenn Brücken in aggressiver Industrieluft stehen. Bei Kabeln aus parallelen Drähten, Litzen oder Seilen genügen jedenfalls Anstriche nicht, wenn nicht alle Oberflächen nachgestrichen werden können. Bei der neuen Rheinbrücke Mannheim-Ludwigshafen, die besonders aggressiver Luft ausgesetzt ist, wurden deshalb auch schon während

der Bauzeit ein zuverlässiger Korrosionsschutz verlangt. Hierzu wurden die Drahtkabel beim Zusammenbau durch ein Bad mit einem Gemisch aus Polyurethan und Zinkchromat durchgezogen, wobei sich alle Hohlräume mit dieser Masse füllten. Direkt anschliessend wurden die Bündel mit kunststoffgetränkten Bändern umwickelt (Fig. 30). Nach der Erhärtung der Kunststoffe waren die Kabel so steif, dass sie bei der Montage auf der ganzen Länge ausgesteift, mehrfach angehängt und wie ein empfindlicher Stab behandelt werden mussten. Zweifellos wurde ein ausgezeichneter Korrosionsschutz erreicht, das Ganze wurde jedoch so teuer, dass man diese Lösung nicht als Massstab für die Wirtschaftlichkeit von Paralleldrahtkabeln nehmen darf.

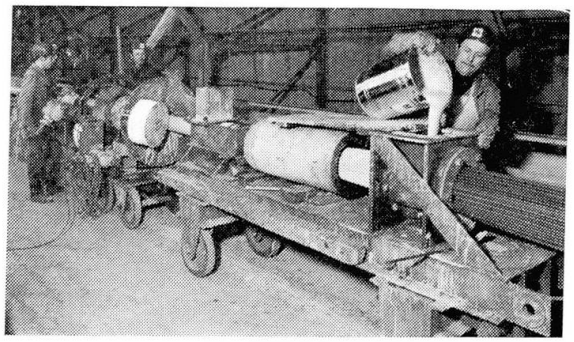


Fig. 30. Herstellung des Korrosionsschutzes für die Paralleldrahtkabel der zweiten Rheinbrücke Mannheim. Ausführung: Hein, Lehmann & Co., Düsseldorf.

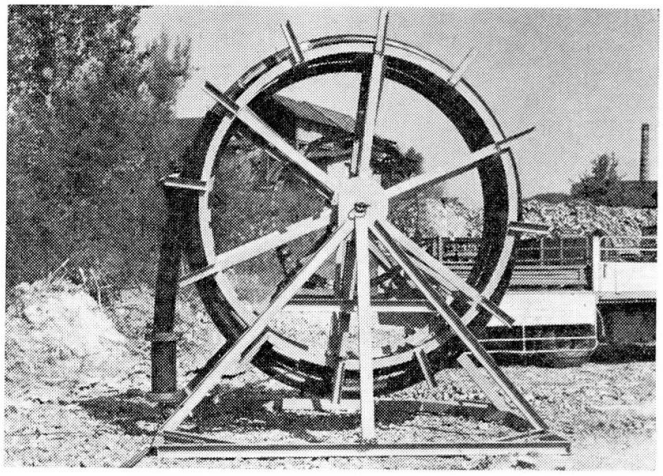


Fig. 31. Auf Haspel aufgewickeltes Paralleldrahtkabel aus 211 Drähten ⌀ 7 mm durch Polyäthylenrohr für Transport und Montagezeit geschützt.

Wir halten die schon beim Schillerstrassensteg in Stuttgart 1961 [15] gewählte Lösung für richtiger, bei der das Paralleldrahtbündel in ein Polyäthylen-Rohr eingeschoben wurde, dessen Härte so eingestellt war, dass sich das Kabel mit Ankerköpfen ringförmig aufwickeln und transportieren liess. Erst vor kurzem wurden von BBR-Zürich Hantierungsversuche mit Grosskabeln dieser Bauart mit 211 Drähten ⌀ 7 mm gemacht (Fig. 31), die zeigten, dass sich selbst so grosse Kabel im Rohr auf Trommeln mit 3,2 m Durchmesser aufhaspeln und transportieren lassen. Das Kunststoffrohr wird an den Ankern abgedichtet, so dass die Drähte im Innern während der Bauzeit gegen Korrosion geschützt sind. Erst nach der Montage, wenn das Kabel unter Eigen-

gewichts-Spannung steht, werden die Hohlräume wie bei Spanngliedern von Spannbeton mit Zement-Injektionsmörtel verpresst, wobei das PE-Rohr den Einpressdruck für rund 50 m Höhenunterschied aushält. Damit wird ein billiger, wirksamer und haltbarer Korrosionsschutz erzielt, und die wirtschaftlichen und technischen Vorteile der Paralleldrahtkabel kommen zum Tragen.

Die Kunststoffrohre am Schillerstrassensteg wurden 10 Jahre nach dem Bau an mehreren Stellen geöffnet (Fig. 32). Der Befund war einwandfrei, die Drähte waren mit dichtem Zementstein umhüllt. Natürlich kann man an Stelle des Zement-Einpressmörtels auch eine Kunststoffmischung mit genügend hohem p_H-Wert verwenden, wenn diese in Zukunft billiger wird oder die derzeit hohen Kosten für den Bauherrn keine Rolle spielen.

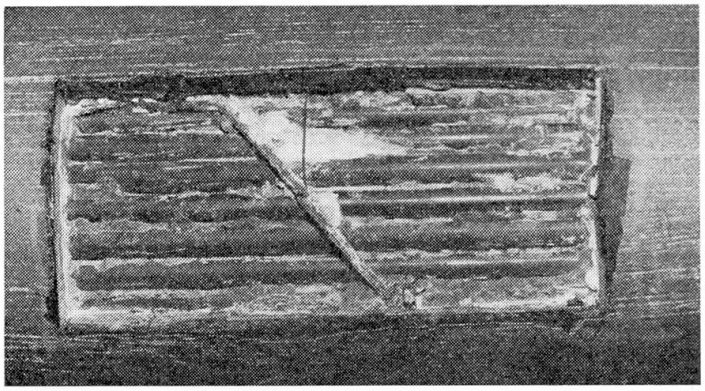


Fig. 32. 10 Jahre altes Paralleldrahtbündel mit Zementinjektion – Prüfstelle – Drähte und Zementstein einwandfrei.

5. Anordnung und Abstand der Schrägkabel

Anfänglich hat man nur wenige Schrägkabel gewählt (Fig. 33). Dabei entstehen nicht nur verhältnismässig grosse Balkenmomente und damit schwere Balken, sondern man brauchte auch ziemlich schwere Konstruktionsteile für die Verankerung und Einleitung der konzentrierten Kabelkräfte. Es war das Verdienst von H. Homberg, bei der Nordbrücke in Bonn [16] (Fig. 34) einmal das andere Extrem des sehr kleinen Schrägseilabstandes von nur rund 4,50 m in Fahrbahnhöhe gewählt zu haben, das zeigte, wie damit vor allem die Aufhängung wesentlich vereinfacht wird. Heute besteht kein Zweifel mehr, dass ein verhältnismässig kleiner Abstand der Schrägkabel günstig ist; er sollte so gewählt werden, dass man beim Freivorbau ohne Schwierigkeiten bis zum nächsten Schrägkabel frei auskragen kann. Im allgemeinen werden Schrägkabelabstände von etwa 10 bis 25 m günstig sein, wobei man die Abstände in Pylonen-Nähe grösser, in der Mitte der Hauptöffnung und nahe der Endverankerungen kleiner machen sollte, damit die Unterschiede der Kabelkräfte nicht zu gross werden. Die Abstände sollten auch so gewählt werden, dass man möglichst mit je einem Schrägkabel auskommt, wobei heute Kabel mit Bruchlasten bis zu 2000 Mp zur Verfügung stehen. Montage und Verankerung

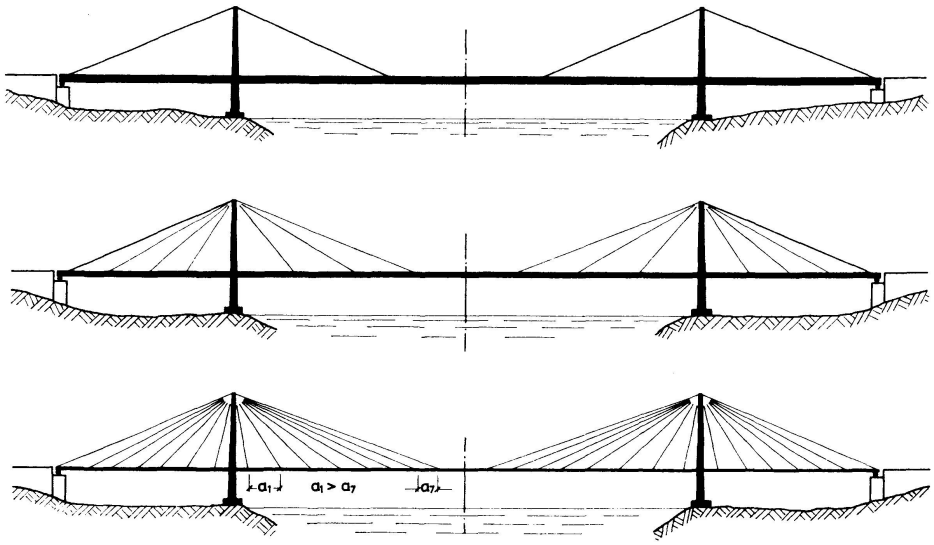


Fig. 33. Die Entwicklung zu vielen dünnen Schrägkabeln mit schlanken Balken.

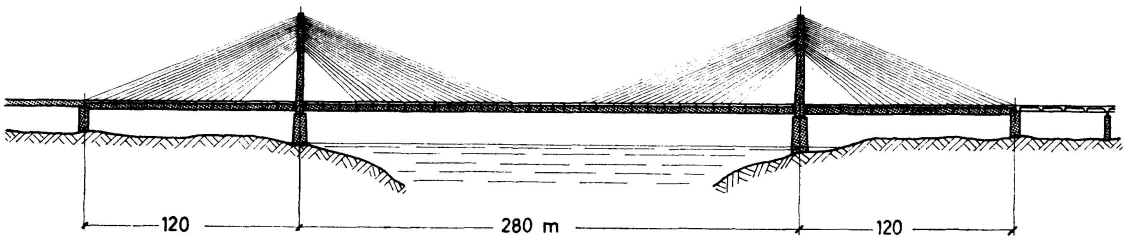


Fig. 34. Ansicht Rheinbrücke Bonn Nord.

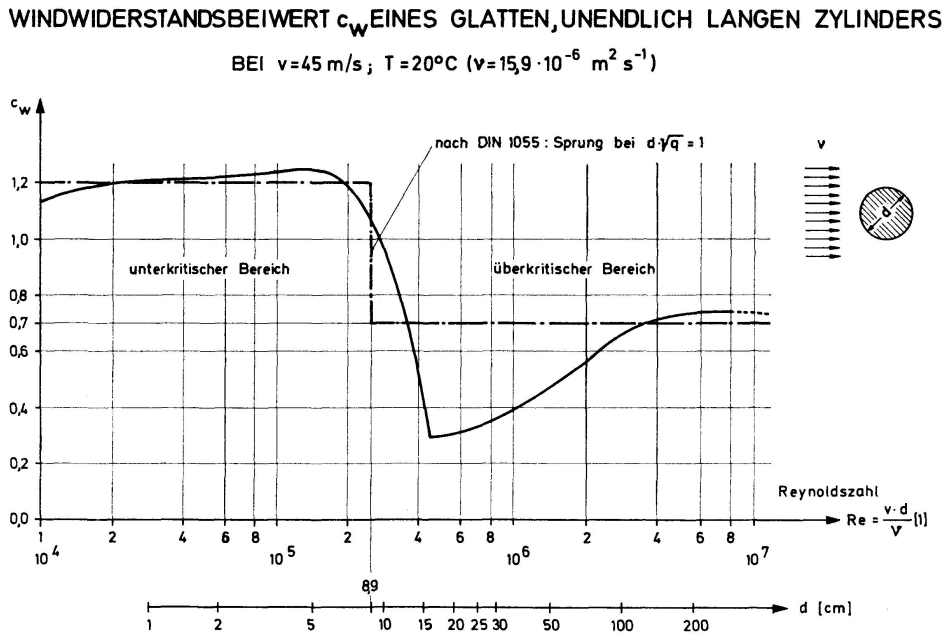


Fig. 35. c_W-Werte von Kabeln in Abhängigkeit von Reynoldszahl und Kabeldurchmesser.

werden dadurch stark vereinfacht, vor allem lassen sich Einzel- oder Doppelkabel mit hydraulischen Pressen leicht auf ihre Sollkraft unter Eigengewicht einstellen und im Schadensfall auch auswechseln.

Bei sehr grossen Schrägkabelbrücken mit vielen Schrägkabeln fallen die Windkräfte auf die Kabel ins Gewicht, so dass es wichtig ist, ihren Durchmesser so zu wählen, dass man eine hohe Reynoldszahl erreicht und damit im überkritischen Bereich mit niedrigem Windwiderstand liegt (Fig. 35). Für Windgeschwindigkeiten von 30 bis 45 m/s genügt dann ein $c_w = 0{,}7$, während im unterkritischen Bereich $c_w = 1{,}2$ angesetzt werden muss. Die günstigen Kabeldurchmesser liegen dabei zwischen 12 und 20 cm.

Ob man die fächerartige oder die harfenartige Anordnung oder ein Zwischending wählt, soll zunächst einmal von der Ästhetik her betrachtet werden. Es ist kein Zweifel, dass bei wenigen Kabeln parallele Schrägkabel (Harfenform) vor allem bei zwei Kabel-Ebenen günstiger aussehen als die Fächeranordnung (Fig. 1 und 2). Andererseits erschwert man sich mit der Harfen-Anordnung die konstruktive Durchbildung der Pylonen, in denen die Kabelauflager in verschiedenen Höhen zum Teil horizontal verschieblich vorgesehen werden müssen. Als besonderer Nachteil fällt bei der Harfenanordnung im Falle von fehlenden Zwischenstützen im Seitenfeld und von nicht horizontal verschieblichen Kabelsätteln die Biegebeanspruchung des Pylonen ins Gewicht, muss doch eine Verkehrslast, die etwa im Viertelspunkt des Hauptfeldes steht, über das nächstgelegene Kabel und über Biegung im Pylonen in das Rückhaltekabel fliessen. Die Harfenanordnung erfordert ausserdem um rund 15 bis 20% mehr Kabelstahl (Fig. 36), so dass zusammen mit dem Mehraufwand an den Verankerungen in der Fahrbahn und in den Pylonen ein nicht unbeachtlicher Kostenunterschied entsteht. Für die grossen Spannweiten sollten wir daher im allgemeinen der Fächeranordnung den Vorzug geben, wobei eine grosse

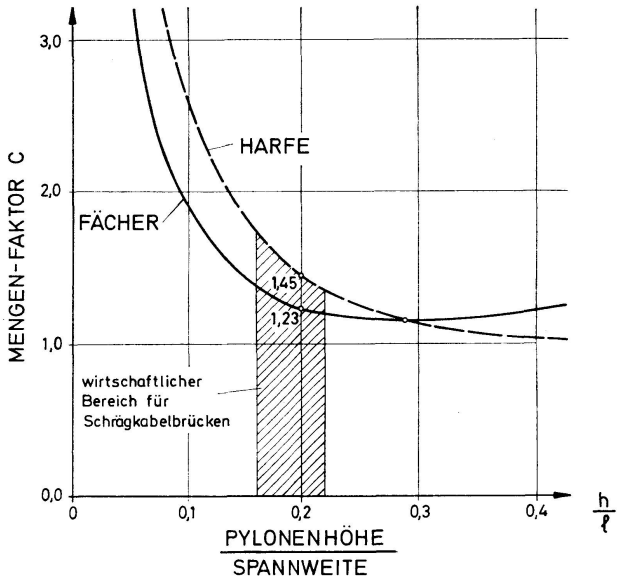


Fig. 36. Kabelstahlmenge für Fächer und Harfe.

Zahl von Kabeln auch in ästhetischer Hinsicht befriedigt, weil sie wie ein leichtes Netz oder wie ein Schleier gegen den Himmel stehen und die Kabel einzeln gar nicht sprechen.

6. Anordnung der Schrägkabel in der Querrichtung

Im letzten Jahrzehnt hat sich bei verschiedenen Brücken die sogenannte Mittelträgerlösung mit nur einer Kabel-Ebene in der Brückenachse durchgesetzt (Fig. 37 und 38), die einen sehr torsionssteifen Hohlkasten bedingt, die aber andererseits – vor allem in ästhetischer Hinsicht – der Lösung mit zwei Kabel-Ebenen entlang der Brückenränder bei den üblichen Spannweiten

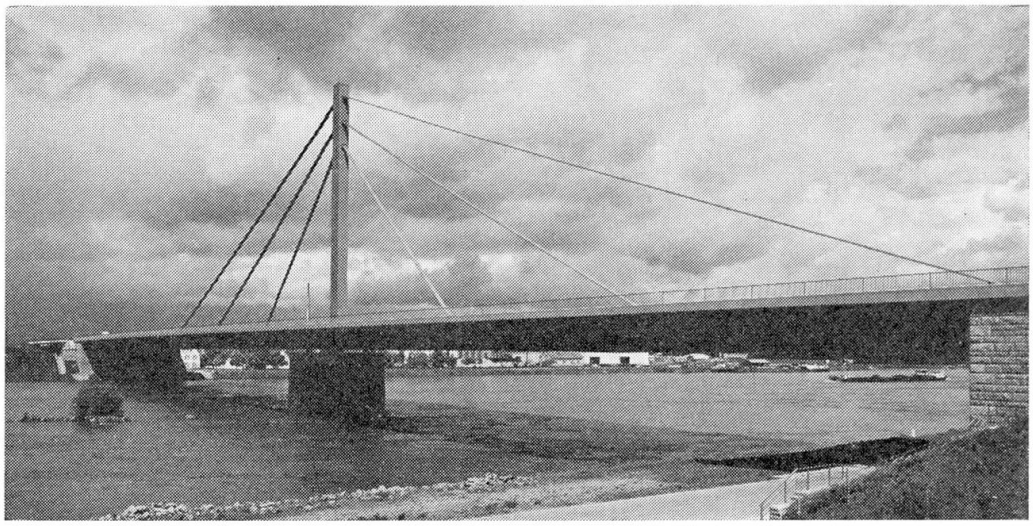


Fig. 37. Rheinbrücke Maxau, Mittelträgerbrücke (Entwurf L. Wintergerst).

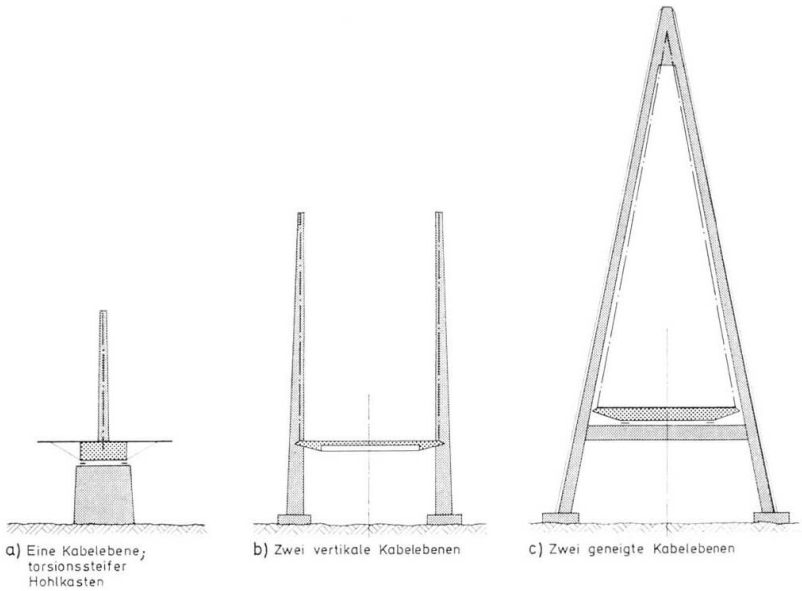


Fig. 38. Anordnung der Kabelebenen im Querschnitt.

von 100 bis 300 m zweifellos vorzuziehen ist. Wir haben einmal untersucht, bis zu welchen Spannweiten diese Mittelträgerlösung im Hinblick auf die Steifigkeit und Wirtschaftlichkeit noch brauchbar ist und fanden, dass die Grenze etwa bei 600 m Spannweite der Hauptöffnung liegt.

Für die Öffnungsweiten über 600 m verdient zweifellos die Aufhängung entlang der Brückenränder mit zwei Kabelebenen den Vorzug, schon weil damit der flache windschnittige Querschnitt besser ermöglicht wird. Bei der Betrachtung der Windschwingungen haben wir ausserdem gesehen, dass die Zusammenführung der Kabel zu einem Pylonensattellager über der Brückenachse auf einem A-förmigen Pylon mithilft, Torsionsschwingungen zu verhüten, so dass sich diese Lösung für grosse Spannweiten als die günstigste anbietet. Ein in gestalterischer Hinsicht befriedigender A-förmiger Pylon lässt sich allerdings nur bei bestimmten Voraussetzungen der Verhältnisse von Brückenbreite zu Pylonenhöhe und zur Brückenhöhe über dem Gelände oder Wasser entwickeln, so dass hier auch ästhetische Gesichtspunkte noch zu berücksichtigen sind.

7. Zur Aufhängung der Brückentafel

Bei den ersten Schrägkabelbrücken, wie z. B. bei der Rheinbrücke Düsseldorf-Nord, hat man die Balkenträger als Hohlkasten in der Kabel-Ebene angeordnet, so dass die Kabel unmittelbar im Hauptträger verankert werden konnten (Fig. 39), was die Einleitung der Kabelkräfte in den Überbau erleich-

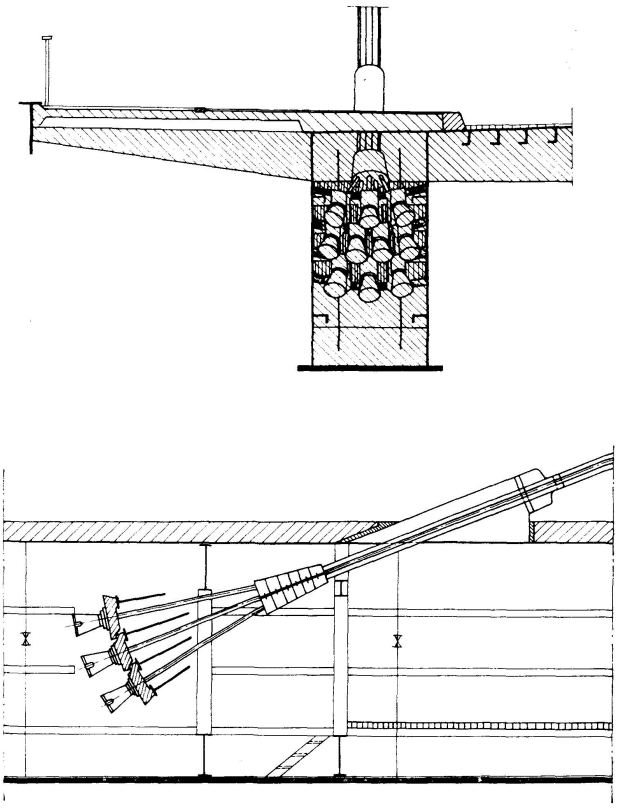


Fig. 39. Schnitt durch Hohlkasten-Hauptträger der Rheinbrücke Düsseldorf Nord mit Kabelverankerung.



Fig. 40. Konsolen zur Aufhängung der Kniebrücke Düsseldorf.

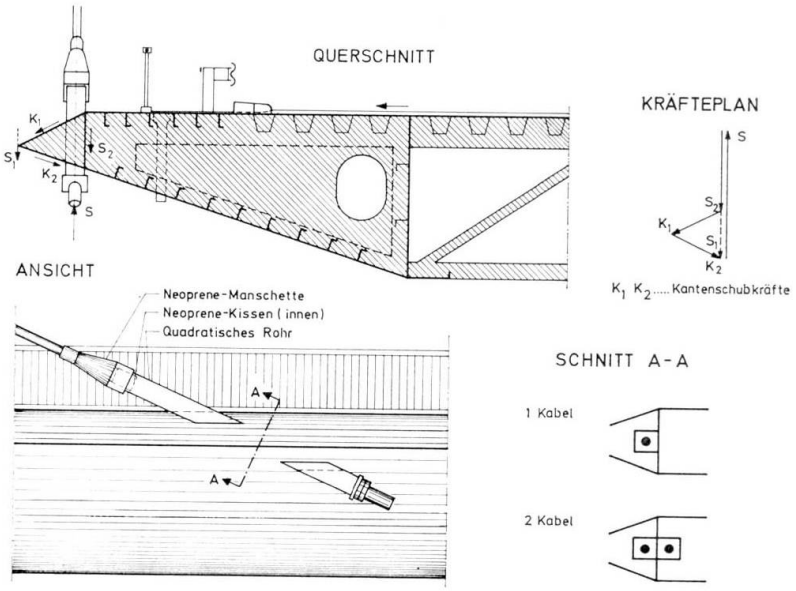


Fig. 41. Einfachste Aufhängung mit Einzelkabeln am Rand der dreieckigen Hohlkasten bei Querschnitten wie Bild 25.

tert. Der weit aussen liegende Hauptträger ist aber in aerodynamischer und ästhetischer Hinsicht ungünstig. Rückt man den Hauptträger weiter nach innen, so braucht man für die Aufhängung Querträger oder Konsolen, wie sie z. B. bei der Kniebrücke Düsseldorf gewählt wurden (Fig. 40). Solche Querträger sind in konstruktiver Hinsicht aufwendig und sollten in Zukunft vermieden werden.

Eine besonders günstige Lösung erhalten wir durch den schon gezeigten, neuentwickelten windschnittigen Querschnitt mit dreiecksförmigen Hohlkasten entlang der Brückenränder (Fig. 41). Am Rand dieser Hohlkasten

lassen sich die Kabelanker bequem so unterbringen, dass sich die Kabelanker bei der Montage leicht einfädeln und ausrichten lassen. Die Blechtafeln des Hohlkastens sind geeignet, sowohl die vertikalen wie auch die horizontalen Komponenten der Kabelkräfte in den Überbau einzuleiten. Dabei ist es zweckmässig, das schräg liegende Ankerrohr unmittelbar ausserhalb des vertikalen Steges am Beginn der Windnase anzuordnen und die Bleche der Windnase konstruktiv mit heranzuziehen. Die Abstände der Aufhängepunkte sind von der Querträgerteilung fast unabhängig und können leicht variiert werden. Diese Verankerungsart führt zu einem Mindestaufwand an verstärkten Blechen und Schweissnähten, so dass die normalen Abmessungen des Überbaues nur in einem kleinen Bereich verändert werden. Diese Eigenschaften sind natürlich sowohl für die Fertigung des Überbaues in der Werkstatt als auch für die Montage vorteilhaft.

8. Lagerung der Kabel auf den Pylonen

Wenn man die gebauten Schrägkabelbrücken durchsieht, dann findet man sehr verschiedenartige Lösungen für die Lagerung der Kabel auf oder in den Pylonen. In den letzten Jahren wurden die Seile oder Kabel an den Pylonen

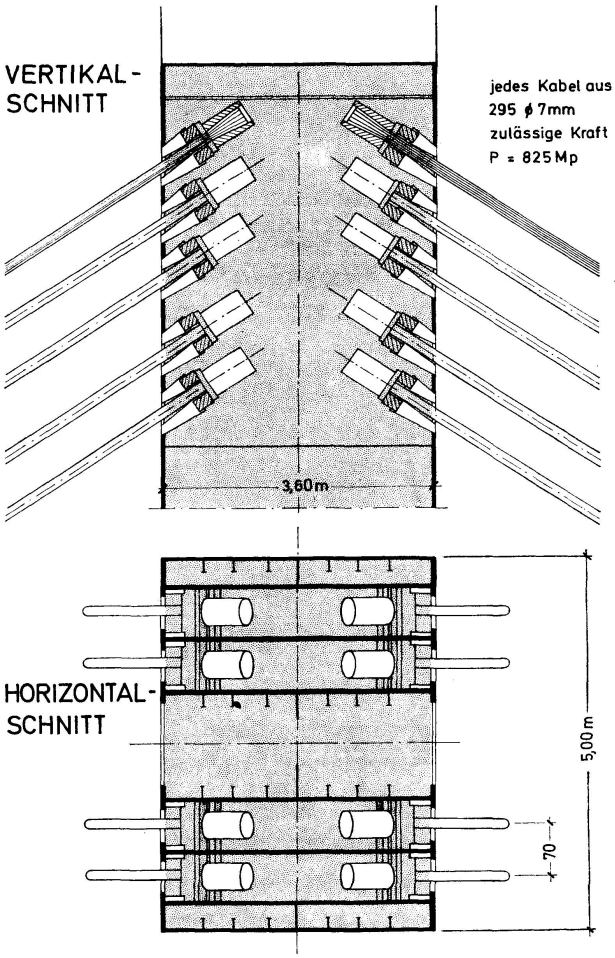


Fig. 42. Pylonenkopf Rheinbrücke Mannheim – Kabel getrennt und verankert.

meist unterbrochen, mit Ankerköpfen versehen und in angeschweissten Stahlbacken gelagert, wobei die Kabelzugkräfte zwischen den Ankern von dicken Stahlblechen übertragen werden müssen. Als Beispiel sei die Lösung bei der zweiten Rheinbrücke Mannheim gezeigt (Fig. 42). Wenn man sich jedoch in der Werkstatt den riesigen Aufwand beim Schweissen solch schwerer Stahlkonstruktionen ansieht und bedenkt, was Kabelanker kosten, dann ist es klar, dass man bei der weiteren Entwicklung wieder zu den über einen Sattel durchlaufenden Kabeln zurückkehren sollte (Fig. 43). Wir haben diese Lösung für Brücken mit 750 und 1300 m Spannweite vollständig durchgearbeitet und fanden, dass es nicht allzu schwierig ist, am Pylonenkopf entsprechende Sattel-

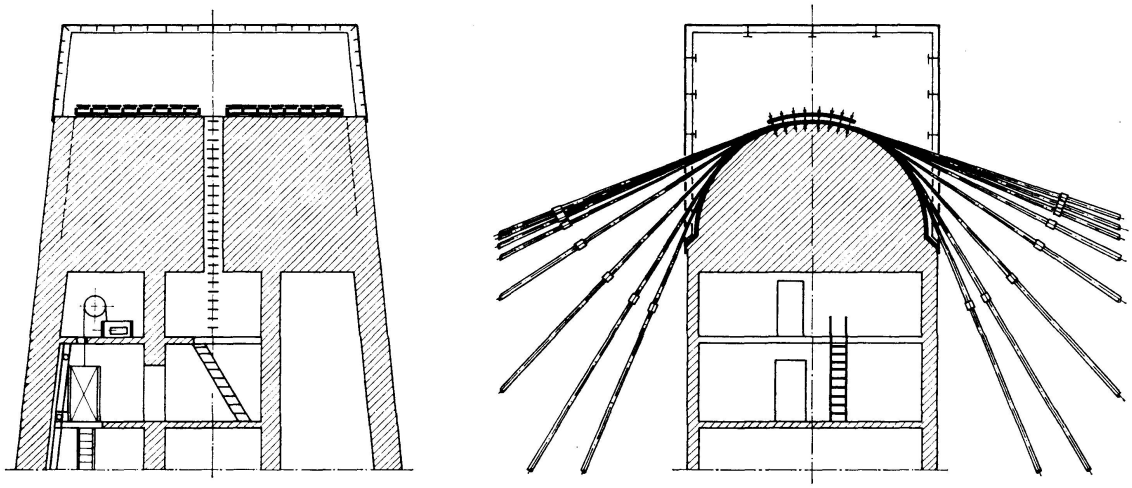


Fig. 43. Pylonenkopf mit durchlaufenden Kabeln (Entwurf Messinabrücke).

lager auszubilden. Man kann dort die Kabel weitgehend nebeneinanderlegen. Soweit Differenzkräfte von Schrägkabeln auf die Rückhaltekabel zu übertragen sind, kann dies durch zusätzliche Klemmkräfte geschehen, ohne dass dadurch die Querpressung für die Drähte zu gross wird. Man wird allerdings einen verhältnismässig grossen Radius des Kabelsattels wählen müssen, der sich jedoch bei den Grossbrücken von selbst ergibt.

Bei Paralleldrahtkabeln kann man die Bündel in einem gewissen Abstand vor dem Sattel mit einer Schelle versehen und die Drähte im Sattelbereich in zwei bis vier Lagen flach nebeneinanderlegen. Man kann aber auch die Krümmung durch eine berechenbare Verdrehung des Bündels so einstellen, dass die Ordnung des Bündels auch im Krümmungsbereich des Sattels ohne bedenkliche Zusatzspannungen erhalten bleibt.

Nebenbei sei bemerkt, dass wir bei den sehr grossen Brückenspannweiten wiederholt Stahlpylonen mit Betonpylonen verglichen haben und fanden, dass Betonpylonen um so günstiger abschneiden, je grösser die Spannweite ist. Es ergaben sich Kostenersparnisse bis zu 40%.

9. Beispiele

Unter den in den letzten Jahren von den Verfassern beratenen oder in ihrem Büro durchgearbeiteten Brücken mit mehr als 600 m Spannweite sei zunächst die Brücke über die Hafeneinfahrt von Vancouver, Kanada, genannt[2]), bei der eine Hauptöffnung von 750 m mit 61 m Durchfahrtshöhe vorgeschrieben war, wobei 8 Spuren für Strassenverkehr und 2 Gleise für eine Schnellbahn vorzusehen waren (Fig. 44). Für dieses Projekt wurden sowohl

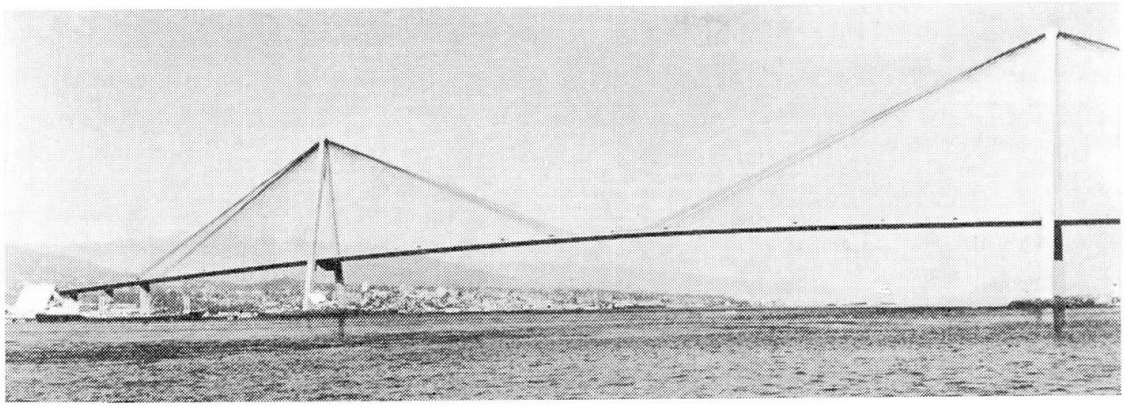


Fig. 44. Entwurf einer Brücke über die Hafeneinfahrt von Vancouver B.C. mit $l = 750$ m.

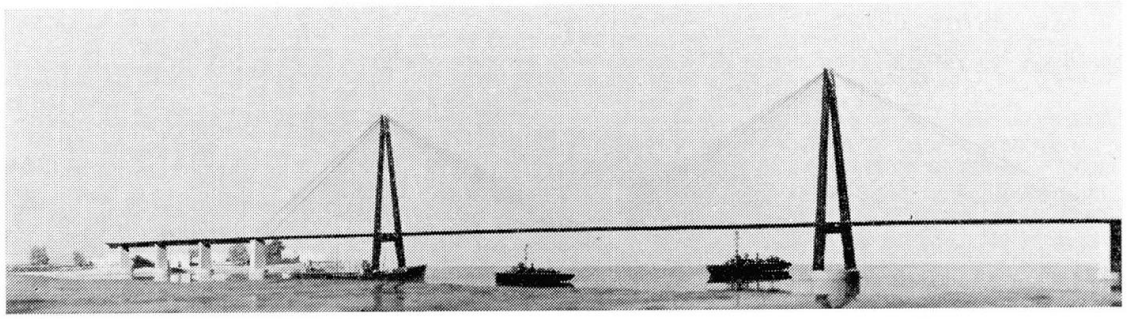


Fig. 45. Entwurf der «Gruppo Lambertini» für die Messinabrücke mit max. $l = 1300$ m.

eine moderne Hängebrücke als auch eine Schrägkabelbrücke vollständig durchgearbeitet. Der Vergleich fiel eindeutig zugunsten der Schrägkabelbrücke aus, so dass nur diese dem Bauherrn zur Entscheidung vorgelegt wurde. Die Bemessung machte an keiner Stelle Schwierigkeiten. Der Brückenentwurf steht zur Zeit noch im Wettbewerb mit einem Tunnelentwurf.

Das interessanteste Projekt der letzten zwei Jahre war zweifellos die geplante Brücke über die Strasse von Messina von Kalabrien nach Sizilien, für die ein internationaler Wettbewerb ausgeschrieben war, bei dem 144 Entwürfe eingegangen waren. Die Verfasser arbeiteten dabei in der «Gruppo Lambertini» mit, der als Stahlbauer auch Professor F. de Miranda, Mailand, angehört (Fig. 45). Der Entwurf erhielt einen ersten Preis. Auch hier ergab sich ein-

[2]) Consulting Engineers: Swan Wooster and CBA, Vancouver, B.C.

deutig, insbesondere im Hinblick auf den zweigleisigen schweren Eisenbahnverkehr, dass die Schrägkabelbrücke mit den hier beschriebenen Merkmalen eine zuverlässige und wirtschaftliche Lösung ergibt. Bei der Bemessung sind keine Schwierigkeiten aufgetreten und nach unserem bisherigen Wissensstand kann der Bau und die Montage ohne bedenkliches Risiko durchgeführt werden. Da die Strasse von Messina ein ausgesprochenes Erdbebengebiet ist, mussten natürlich für die Sicherheit gegen Erdbeben besondere Lösungen entwickelt werden. Es sei hier nur festgestellt, dass es möglich ist, die Schrägkabelbrücke in dieser Hinsicht mit einer sehr grossen Sicherheit zu versehen.

Bei dem Wettbewerb wurden 6 erste Preise verteilt; ein anderer erster Preis wurde dem Projekt einer 3000 m weit gespannten Hängebrücke mit 600 m hohen Stahlpylonen der von Professor Musmeci geführten Gruppe zuerkannt (Fig. 46 und 47). Dieses phantastische Projekt hat sowohl in der Tages- wie in der Fachpresse viel Aufsehen erregt, ohne dass es kritisch betrachtet worden wäre. Die Verfasser bezweifeln, dass diese Brücke aerodynamisch stabil wäre und sehen auch in der Ausführung grosse Schwierigkeiten, schon bei der Herstellung der Hilfsstege für den Zusammenbau der Kabel und insbesondere bei der Teilung der Kabel in 270 m Höhe. Unseres

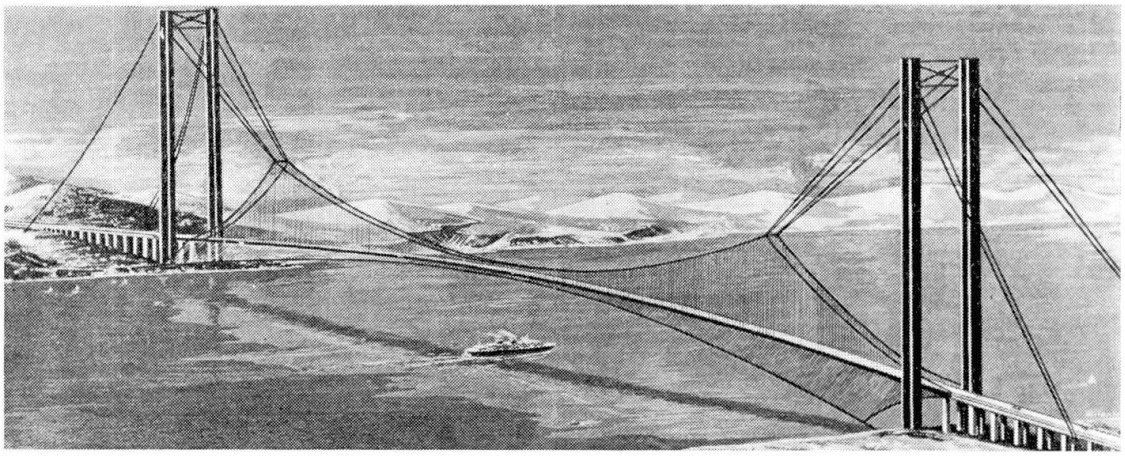


Fig. 46. Entwurf der Gruppe Musmeci für die Messinabrücke, max. $l = 3000$ m.

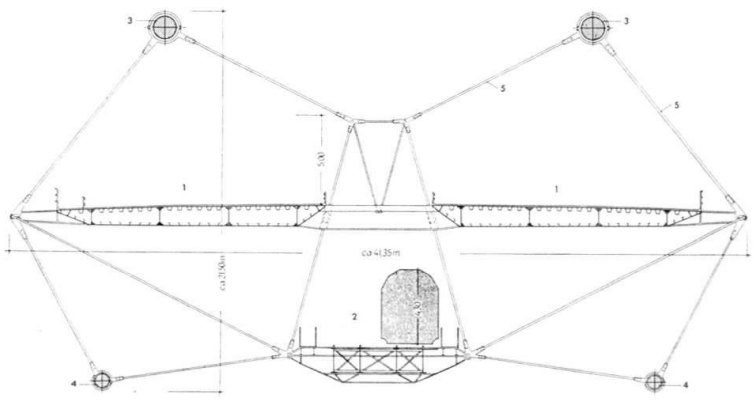


Fig. 47. Entwurf Musmeci – Querschnitt.

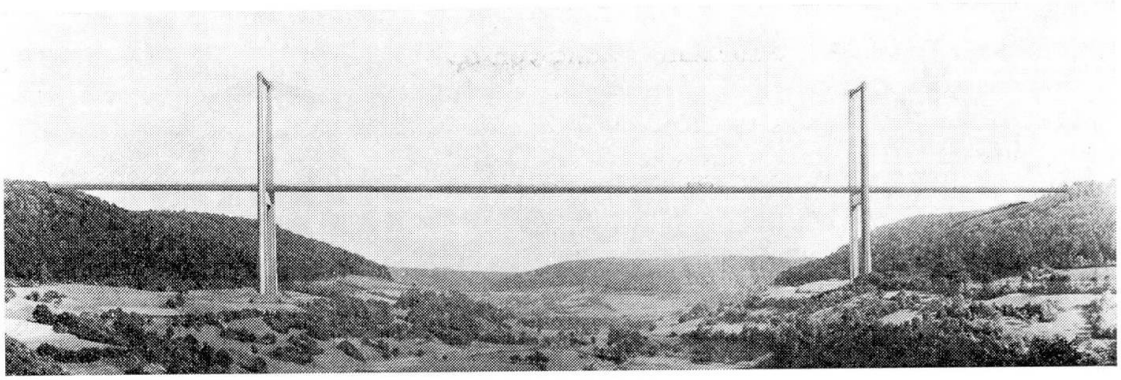


Fig. 48. Entwurf für eine hohe Talbrücke mit $l = 620$ m.

Erachtens scheitert das Projekt jedoch in erster Linie an den ungeheuer hohen Kosten, die mit 300 Milliarden Lire angegeben wurden, während das Projekt Lambertini mit rund 100 Milliarden Lire errichtet werden kann. Für das Musmeci-Projekt ergibt sich ein sehr hoher Stahlbedarf von rund 285 000 Tonnen, in der Hauptsache Kabelstahl, während man beim Projekt Lambertini mit 120 000 Tonnen, vorwiegend St 52, auskommt. Es bleibt abzuwarten, wie sich die italienische Regierung entscheidet.

Als drittes Projekt sei eine geplante hohe Talbrücke für eine Autobahn in Deutschland erwähnt, bei der das Tal in rund 200 m Höhe über dem Fluss und in einer Länge von rund 1160 m überquert werden muss. Hierfür arbeitet das Büro Leonhardt und Andrä sowohl Balken- als auch Bogen- und Rahmenbrücken-, aber auch zwei Schrägkabelbrückenentwürfe durch. Die Ergebnisse zeigten, dass die Schrägkabelbrücke mit rund 620 m Spannweite (Fig. 48) voraussichtlich die wirtschaftlichste Lösung ergibt, zudem bei ihr keine Montage-Hilfspfeiler nötig sind, was bei einer Höhe der Fahrbahn über dem Tal von 170 bis 200 m natürlich ein grosser Vorteil ist.

Diese Beispiele zeigen, dass die geschilderten Vergleiche für die Überlegenheit der Schrägkabelbrücke für Spannweiten über 600 m durch mehrere Projekte mit sorgfältig bearbeiteten Vergleichsentwürfen bestätigt wurden.

Literaturnachweis

[1] Dischinger, F.: Hängebrücken für schwerste Verkehrslasten. Der Bauingenieur 24 (1949), S. 65 und S. 107.

[2] Nordbrücke Düsseldorf. Buch, herausgegeben von der Landeshauptstadt Düsseldorf 1958.

[3] Schächterle, K. und Leonhardt, F.: Stahlbrücken mit Leichtfahrbahnen. Die Bautechnik 1936, S. 626.

[4] Leonhardt, F.: Leichtbau – eine Forderung unserer Zeit. Anregungen für den Hoch- und Brückenbau. Die Bautechnik 1940, Hefte 36 und 37.

[5] Cichocki, F.: Bremskraftableitung bei Brücken. Der Bauingenieur 36 (1961), S. 304.

[6] Ernst, H. J.: Der E-Modul von Seilen unter Berücksichtigung des Durchhanges. Der Bauingenieur 40 (1965), S. 52.

[7] BEYER, K.: Die Statik im Stahlbetonbau, 2. Auflage, Springer-Verlag 1956, S. 140.
[8] SCHREIER, G.: Beiträge zur Anwendung von baustatischen Methoden auf Probleme der Verformungstheorie, Dissertation TH Karlsruhe 1961.
[9] LEONHARDT, F.: Zur Entwicklung aerodynamisch stabiler Hängebrücken. Die Bautechnik 45 (1968), Heft 10 und 11.
[10] DAVENPORT, A. G. u. a.: A study of wind action on a suspension bridge during erection and on completion. Research Report of University of Western Ontario, Canada, BLWT, 3, 69.
[11] WARDLAW, R. L. und PONDER, C. A.: Wind Tunnel Investigation of the Aerodynamic Stability of Bridges. Proceedings of the Canadian Structural Engineering Conference 1970, Toronto.
[12] GRAF, O. und BRENNER, E.: Versuche mit Drahtseilen für eine Hängebrücke. Die Bautechnik 19 (1941), Heft 38.
[13] LEONHARDT, F.: Kabel mit hoher Ermüdungsfestigkeit für Hängebrücken. IVBH Kongress 1964, Rio de Janeiro, Vorbericht, S. 519 bis 524.
[14] ANDRÄ, W. und ZELLNER, W.: Zugglieder aus Paralleldrahtbündeln und ihre Verankerung bei hoher Dauerschwellbelastung. Die Bautechnik 46 (1969), Heft 8 u. 9.
[15] LEONHARDT, F. und ANDRÄ, W.: Fussgängersteg über die Schillerstrasse in Stuttgart. Die Bautechnik 1962, Heft 4.
[16] THUL, H.: Die Friedrich-Ebert-Brücke über den Rhein in Bonn. Der Bauingenieur 1971, Heft 9, S. 327.

Zusammenfassung

Die vergleichenden Untersuchungen ergaben, dass die Schrägkabelbrücke mit fächerartiger Anordnung der Spannkabel im Abstand von 10 bis 25 m (entlang der Fahrbahn gemessen) auch bei Spannweiten über 600 m der Hängebrücke in technischer und wirtschaftlicher Hinsicht überlegen ist. Die Überlegenheit gilt besonders auch im Hinblick auf die aerodynamische Stabilität. Günstige Steifigkeitsverhältnisse lassen sich durch hohe Kabelspannungen erreichen. Im Querschnitt muss die Brückentafel flach und windschnittig geformt sein und eine spitzwinklige Windnase aufweisen. Bei den grossen Spannweiten verdient der A-förmige Pylon mit entsprechend schräg geneigten Kabelebenen den Vorzug vor senkrechten Doppelpylonen.

Summary

Comparative investigations have shown that also for spans in excess of 600 m the fan-shaped cable-stayed bridge with cables spaced at 10 to 25 m (measured along the roadway) is economically and technically superior to the suspension bridge. This superiority holds in particular with regard to aerodynamic stability. In order to obtain favourable ratios of stiffness, high cable stresses are necessary. The bridge beam must have a flat and aerodynamically shaped cross section with a sharp-edged wind nose. For large spans the A-

shaped pylon with corresponding inclination of the planes of the cables is to be preferred in comparison with vertical twin pylons.

Résumé

Il ressort des études comparatives que les ponts à haubans, dont les câbles disposés en éventail ont (au niveau du tablier) un espacement de 10 à 25 m, sont techniquement et économiquement supérieurs aux ponts suspendus, même lorsque les portées excèdent 600 m. Cette supériorité est particulièrement nette au point de vue de la stabilité aérodynamique. On obtient des rapports favorables des rigidités au moyen des taux élevés des contraintes dans les haubans. La section du tablier doit être plate et aérodynamique, elle doit disposer d'un «bord d'attaque aigu». Pour les grandes portées on devrait préférer aux doubles pylônes verticaux le pylône en forme de A, les plans des câbles étant inclinés en conséquence.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Berechnung orthotroper Stahlplatten im Traglastbereich*)

Calculation of Orthotropic Steel Plates in the Range of Ultimate Load

Calcul de plaques orthotropes en acier dans la portée de charge efficace

BERND MÖLLER
Dr.-Ing., Sektion Bauingenieurwesen, Technische Universität Dresden, DDR

1. Einleitung

Orthotrope Stahlplatten besitzen im Traglastbereich – besonders unter konzentrierten Einzellasten – erhebliche Reserven, die bekannterweise durch die gebräuchlichen linearen Berechnungsverfahren nicht erfasst werden. Die zunehmende Anwendung dieses Konstruktionselementes im Stahlleichtbau – neben dem Stahlbrückenbau insbesondere auch im Stahlhochbau, z. B. in Form von Stahlzellendecken — lässt es wünschenswert erscheinen, diesen Tragbereich theoretisch zu beherrschen. Einer gesonderten Klärung bedürfen die dabei auftretenden konstruktiven und baupraktischen Probleme, die die volle Nutzung dieser Tragreserven z. Z. noch einschränken.

In verschiedenen Veröffentlichungen, z. B. [7], [8], [9], [10], [11], [12], werden bereits Untersuchungen an orthotropen Platten im geometrisch und/oder physikalisch nichtlinearen Bereich geführt. Gegenüber diesen Arbeiten, die auf der Kontinuumsmechanik basieren, wird hier ein diskretes Berechnungsverfahren dargelegt, das auf den Einsatz eines Digitalrechners orientiert ist.

Das Kontinuum der orthotropen Platte wird in Elemente endlicher Grösse, sog. finite Elemente, mit mechanisch approximiertem Deformationszustand unterteilt. Dem Algorithmus liegt inkrementales Vorgehen zugrunde. Das inkrementale Vorgehen ist durch die Unterteilung der Gesamtlast in Teillasten gekennzeichnet. Die Belastung wird stufenweise aufgebracht, und nach jedem Lastzuwachs werden die unbekannten Deformationsgrössen (Knotenverschiebungen) berechnet. Der Deformations- und Spannungszustand aller bereits durchlaufenen Inkremente ist bekannt.

---

*) Auszug aus der Dissertation des Verfassers. Referenten: Prof. Dr.-Ing. habil. G. Bürgermeister, Prof.-Ing. habil. H. Müller, Dr.-Ing. C. Schleicher.

In jedem Inkrement wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Systems aus einer linearen Steifigkeitsmatrix und einer geometrischen Steifigkeitsmatrix gebildet. Nichtlineares Werkstoffverhalten wird mit den Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen von Swainger berücksichtigt. Durch Beachtung der spezifischen Besonderheiten bei Stahlplatten gelingt die vollständige Linearisierung innerhalb jedes Inkrementes.

2. Orthotrope Platte — diskretes mechanisches Modell

Die orthotrope Platte wird durch ein diskretes mechanisches Modell substituiert, dessen Elemente finite ebene Dreiecke sind. Beispiele zeigen Fig. 1 und Fig. 2.

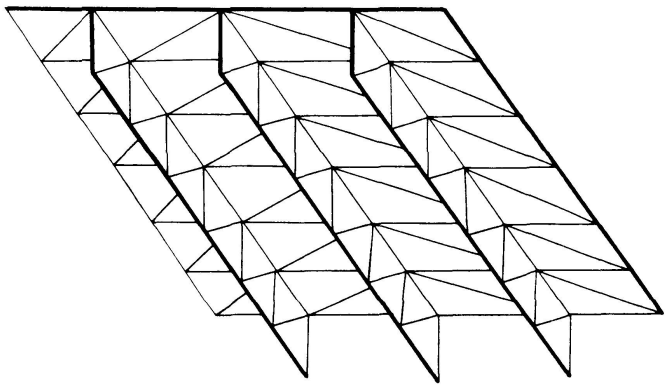


Fig. 1. Modell einer orthotropen Platte mit torsionsweichen Rippen.

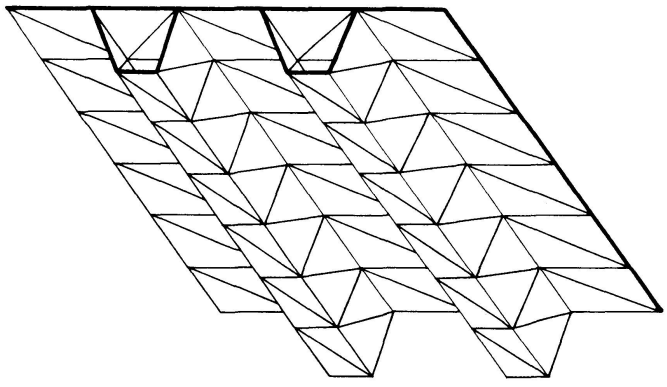


Fig. 2. Modell einer orthotropen Platte mit torsionssteifen Rippen.

Die Anordnung der Knotenpunkte unterliegt folgenden Einschränkungen:

1. Knotenpunkte des Deckbleches liegen auf den Schnittlinien zwischen Deckblech und Längsrippen.
2. Knotenpunkte nach 1 sind gleichzeitig Knotenpunkte der Längsrippen.
3. Weitere Knotenpunkte der Längsrippen sind nur auf deren Unterkante zulässig.

Wird weiter vorausgesetzt, dass die Lasteintragung ausschliesslich in den Knotenpunkten erfolgt und dass Kontinuität lediglich bezüglich der Verschiebungen und nicht bezüglich der Verdrehungen gefordert wird, unterliegt jedes Element nur einem Scheibenspannungszustand.

Auftretende Geometrieänderungen des Deckbleches und der Versteifungsrippen bei Laststeigerung werden durch dieses Modell widerspruchsfrei beschrieben. So wird beispielsweise aus dem ursprünglich ebenen Deckblech des unbelasteten Zustandes unter Belastung eine beliebig schwach gekrümmte Schale, die stückweise durch ebene dreieckige Elemente approximiert ist.

Der Übergang vom gekoppelten Scheiben- und Plattenspannungszustand bei kleinen Deformationen zum Membranspannungszustand bei grossen Deformationen wird erfasst.

3. Voraussetzungen, Definitionen

Es wird vorausgesetzt:

1. Inkrementale Lasteintragung.
2. Dehnungen und Gleitungen sind klein gegenüber 1.
3. Drehwinkel der verformten Elemente sind klein gegenüber 1, jedoch gross gegenüber den Dehnungen und Gleitungen.
4. Verzerrungen innerhalb jedes Elementes sind konstant.
5. Isotroper Werkstoff.
6. Isotrope Verfestigung.
7. Plastisch inkompressibler Werkstoff.
8. Proportionale Belastung.

Zur Beschreibung des Deformations- und Spannungszustandes eines finiten dreieckigen Elementes im globalen und lokalen Koordinatensystem (Fig. 3) werden folgende Matrizen definiert:

Ein beliebiger Punkt mit den Koordinaten

$$\mathbf{x} = \{x_1 \;\; x_2 \;\; x_3\} \tag{1}$$

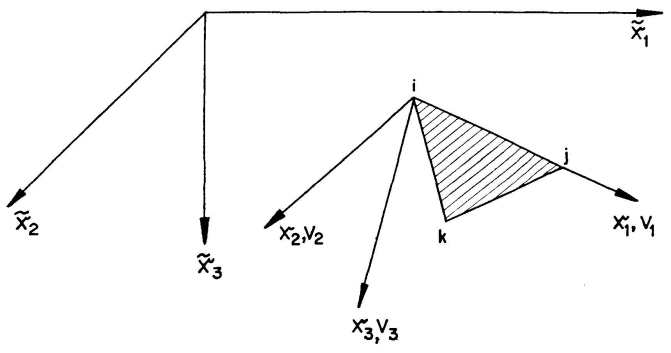


Fig. 3. Element im globalen und lokalen Koordinatensystem.

erfährt in einem Belastungsinkrement die Verschiebungen

$$\mathbf{v} = \{v_1 \;\; v_2 \;\; v_3\}. \tag{2}$$

Als Knotenpunkt-Koordinaten im lokalen Koordinatensystem z. B. für Punkt i gelten

$$\mathbf{x}(i) = \{x_1(i) \;\; x_2(i) \;\; x_3(i)\}. \tag{3}$$

Die Knotenpunkt-Verschiebungen eines Elementes in lokalen Koordinaten werden in folgenden Matrizen zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \{v_1(i) \;\; v_1(j) \;\; v_1(k)\}, \\ \mathbf{v}_2 &= \{v_2(i) \;\; v_2(j) \;\; v_2(k)\}, \\ \mathbf{v}_3 &= \{v_3(i) \;\; v_3(j) \;\; v_3(k)\}. \end{aligned} \tag{4}$$

$$\overline{\mathbf{v}}^K = \{\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \;\; \mathbf{v}_3\}. \tag{5}$$

Zur Beschreibung des ebenen Spannungszustandes werden u. a. die Matrizen

$$\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_{11} \;\; \mathbf{s}_{22} \;\; \mathbf{s}_{12}\}, \tag{6}$$

$$\mathbf{s}' = \{\mathbf{s}'_{11} \;\; \mathbf{s}'_{22} \;\; \mathbf{s}'_{33} \;\; \mathbf{s}_{12}\} \tag{7}$$

benötigt. Striche kennzeichnen Deviatorspannungen. Beim zugehörigen Verzerrungszustand werden ein elastischer und ein plastischer Anteil definiert:

elastischer Verzerrungsanteil

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \{\epsilon_{11,e} \;\; \epsilon_{22,e} \;\; \epsilon_{12,e}\}, \tag{8}$$

plastischer Verzerrungsanteil

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \{\epsilon_{11,p} \;\; \epsilon_{22,p} \;\; \epsilon_{12,p}\}. \tag{9}$$

4. Elementsteifigkeitsmatrix — geometrische Steifigkeitsmatrix

Nach $(r-1)$ Belastungsinkrementen wird die Lage eines Punktes mit den Anfangskoordinaten $\mathring{\mathbf{x}}$ des unverformten Zustandes durch

$$\mathbf{x} = \mathring{\mathbf{x}} + \sum \mathbf{v} \tag{10}$$

beschrieben. Der Summenoperator $\sum$ fasst in Gl. (10) alle Verschiebungsvektoren $\mathbf{v}$ der $(r-1)$ durchlaufenen Inkremente zusammen.

Für den unbekannten Verschiebungsvektor $\mathbf{v}$ des r-ten Inkrementes wird entsprechend Voraussetzung 4 der Verschiebungsansatz

$$\mathbf{v} = \mathbf{M}\,\alpha \tag{11}$$

getroffen, wobei

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & 1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$\alpha = \{\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \alpha_3 \;\; \alpha_4 \;\; \alpha_5 \;\; \alpha_6 \;\; \alpha_7 \;\; \alpha_8 \;\; \alpha_9\} \tag{13}$$

sind.

Gl. (11) ist die einfachste Form eines konformen Verschiebungsansatzes, wie er bei Scheibenproblemen verwendet wird. Bei dem eingeführten Modell ist dieser Verschiebungsansatz jedoch nichtkonform, da die Verträglichkeitsbedingungen lediglich bezüglich der Verschiebungen erfüllt werden.

Zur üblichen Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix aus der Formänderungsenergie ist die Kenntnis der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen erforderlich. Je nach Art der dabei berücksichtigten nichtlinearen Glieder erhält man zusätzlich zur linearen Elementsteifigkeitsmatrix verschieden aufgebaute geometrische Steifigkeitsmatrizen (s. z. B. [4], [5]).

Gegenüber dem echten Scheibenproblem sind hier die Einzelelemente beliebig zur Belastungsrichtung orientiert, so dass nicht nur der Einfluss von v_3, sondern auch der des Drehwinkels ω_3 (s. [6], S. 13) berücksichtigt wird. Die sich damit ergebenden Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= e_{11} + \frac{1}{2} e_{12}\,\omega_3 + \frac{1}{2}(\omega_3)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)^2, \\ \epsilon_{22} &= e_{22} - \frac{1}{2} e_{12}\,\omega_3 + \frac{1}{2}(\omega_3)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)^2, \\ \epsilon_{12} &= e_{12} + (e_{22} - e_{11})\,\omega_3 + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\frac{\partial v_3}{\partial x_2} \end{aligned} \tag{14}$$

mit

$$e_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \qquad e_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \qquad e_{12} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1},$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)$$

wurden erstmals in [4] verwendet, um die folgende geometrische Steifigkeitsmatrix $\bar{\mathbf{S}}_g$ herzuleiten:

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}}_g = \mathring{s}_{11}\frac{t}{16 F_\Delta}\mathbf{W}_1 + \mathring{s}_{22}\frac{t}{16 F_\Delta}\mathbf{W}_2 + \mathring{s}_{12}\frac{t}{8 F_\Delta}\mathbf{W}_3, \tag{15}$$

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 3\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1^T & \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T \\ \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_1^T & -\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_2^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & 4\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_2^T \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1^T & \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T \\ \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_1^T & 3\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_2^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & 4\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1^T \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2^T + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_1^T & \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1^T + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_2^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T \\ \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1^T + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_2^T & \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2^T + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_1^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}\mathbf{0}^T & -2(\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2^T + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_1^T) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}_1 = \{x_1(j,k)\ \ x_1(k,i)\ \ x_1(i,j)\},$$
$$\boldsymbol{X}_2 = \{x_2(j,k)\ \ x_2(k,i)\ \ x_2(i,j)\},$$
$$\mathbf{0}\ \ = \{0\ \ 0\ \ 0\}, \qquad x_1(j,k) = x_1(j) - x_1(k) \text{ usw.}$$

$\mathring{\mathbf{s}}_{11}$, $\mathring{\mathbf{s}}_{22}$, $\mathring{\mathbf{s}}_{12}$ Spannungen nach $(r-1)$ durchlaufenen Inkrementen, F_Δ Fläche des Elementes, t Dicke des Elementes.

5. Fliessgesetz

Von den verschiedenen Fliessbedingungen wird hier auf die Fliessbedingung nach v. Mises zurückgegriffen. Wegen der vorausgesetzten plastischen Inkompressibilität und bei Vernachlässigung des Bauschinger-Effektes besteht zwischen der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators $I'_{2,s}$ und der Vergleichsspannung $\mathbf{s}_v$ des einachsigen Zustandes folgender Zusammenhang in inkrementaler Darstellung

$$\sum I'_{2,s} = \frac{1}{3}\sum \mathbf{s}_v^2, \tag{16}$$

$$\sum \mathbf{s}_v = \left(\frac{3}{2}\sum (\mathbf{s}')^T\, \boldsymbol{b2} \sum \mathbf{s}'\right)^{1/2}, \tag{17}$$

$$\sum \mathbf{s}_v = \left(\frac{1}{2}\sum (\mathbf{s})^T\, \boldsymbol{b3} \sum \mathbf{s}\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Der Summenoperator $\sum$ fasst die Spannungen der einzelnen Inkremente zusammen. Die Matrizen $\boldsymbol{b2}$ und $\boldsymbol{b3}$ haben folgenden Aufbau

$$\boldsymbol{b2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

6. Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen

6.1. Elastischer Bereich

Im elastischen Bereich gibt das Hookesche Gesetz den Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen an:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{E}_e^{-1}\,\mathbf{s}, \tag{20}$$

$$\mathbf{E}_e = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{E}_e^{-1} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix}. \tag{21}$$

6.2. Plastischer Bereich

Dem plastischen Bereich werden die finiten Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen nach SWAINGER [2] zugrunde gelegt. Das s_v-ϵ_v-Diagramm wird oberhalb der elastischen Grenzspannung s_g stückweise linearisiert (s. Fig. 4). Durch $r-1$ und r seien der Anfang bzw. das Ende des r-ten Inkrementes gekennzeichnet.

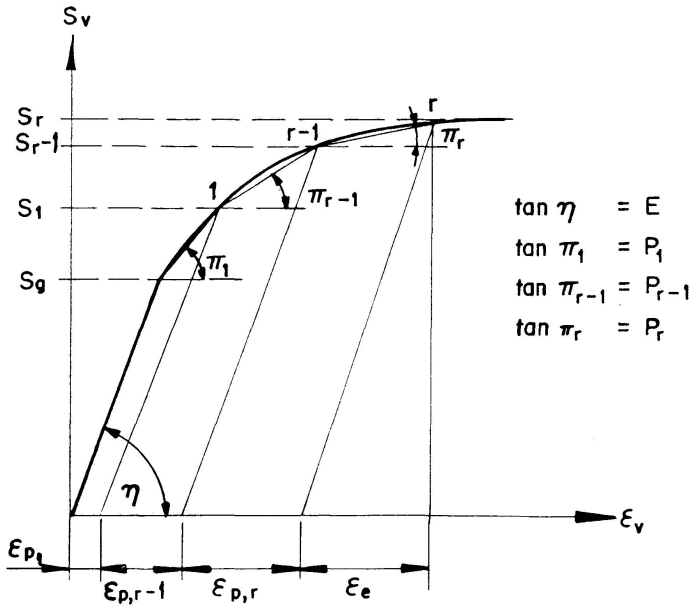


Fig. 4. Einachsiger Vergleichszustand.

Aus den vorhergehenden Schritten sind $\epsilon_{p,1}, \ldots, \epsilon_{p,r-1}$ bekannt. Die totale Dehnung ist dann

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_{p,1} + \cdots + \epsilon_{p,r-1} + \epsilon_{p,r}. \tag{22}$$

Aus den Swaingerschen Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen erhält man für den plastischen Anteil der Verzerrungen eines Inkrementes

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{p,r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_r} - \frac{1}{E}\right) \boldsymbol{b3}\,(\mathbf{s}^{(r)} - \mathbf{s}^{(r-1)}). \tag{23}$$

$\mathbf{s}^{(r)}$ und $\mathbf{s}^{(r-1)}$ sind die zu den Laststufen r und $r-1$ gehörenden Spaltenmatrizen der Spannungen des ebenen Spannungszustandes.

Die gesamten Verzerrungen ergeben sich aus der Zusammenfassung von Gl. (20) und Gl. (23):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{E}_e^{-1} + \mathbf{E}_{p,r}^{-1})\,\mathbf{s}. \tag{24}$$

Dabei sind

$$\mathbf{E}_{p,r}^{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_r} - \frac{1}{E}\right) \boldsymbol{b3}, \tag{25}$$

$$\mathbf{s} \quad = \mathbf{s}^{(r)} - \mathbf{s}^{(r-1)}. \tag{26}$$

Gl. (24) stellt noch keine vollständig linearisierte Beziehung zwischen den Verzerrungen und den Spannungen dar, da $\mathbf{E}_{p,r}^{-1}$ eine Funktion des Spannungszustandes ist. Zu Beginn jedes Inkrementes muss P_r bekannt sein. Eine einfache Möglichkeit besteht darin, für P_r anhand der vorhergehenden Schritte einen geschätzten Wert einzuführen. Es ist weiter möglich, diesen Ausgangswert iterativ zu verbessern (s. z. B. [3]).

Da hier insbesondere orthotrope Platten aus Stahl betrachtet werden, wird die vollständige Linearisierung von Gl. (24) durch Einführen eines bilinearen Spannungs-Dehnungs-Diagrammes für den einachsigen Vergleichszustand erreicht. Der diskrete Tangentenmodul P ist nunmehr unabhängig vom Spannungszustand.

7. Besonderheiten bei Platten mit torsionsweichen Längsrippen

Torsionsweiche Längsrippen besitzen im eingeführten Modell senkrecht zu ihrer Ebene keine bzw. im verformten Zustand fast keine Steifigkeit. Damit stehen für Knotenpunkte an den Rippenunterkanten nur zwei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Anderenfalls würde die Gesamtsteifigkeitsmatrix singulär bzw. fast singulär.

Der vollständige Verschiebungszustand dieser Knotenpunkte wird darum in jedem Inkrement in zwei Stufen berechnet (Fig. 5).

1. Stufe: Aufstellen der Gesamtsteifigkeitsmatrix unter Vernachlässigung der Steifigkeiten rechtwinklig zur Rippenebene. Nach Auswertung der Bestimmungsgleichungen erhält man für den Knoten s die Verschiebungen $\tilde{v}_1^{(1)}(s)$ und $\tilde{v}_2^{(1)}(s)$. Verschiebungen in $\tilde{x}_3$-Richtung treten nicht auf ($\tilde{v}_3^{(1)}(s) = 0$).

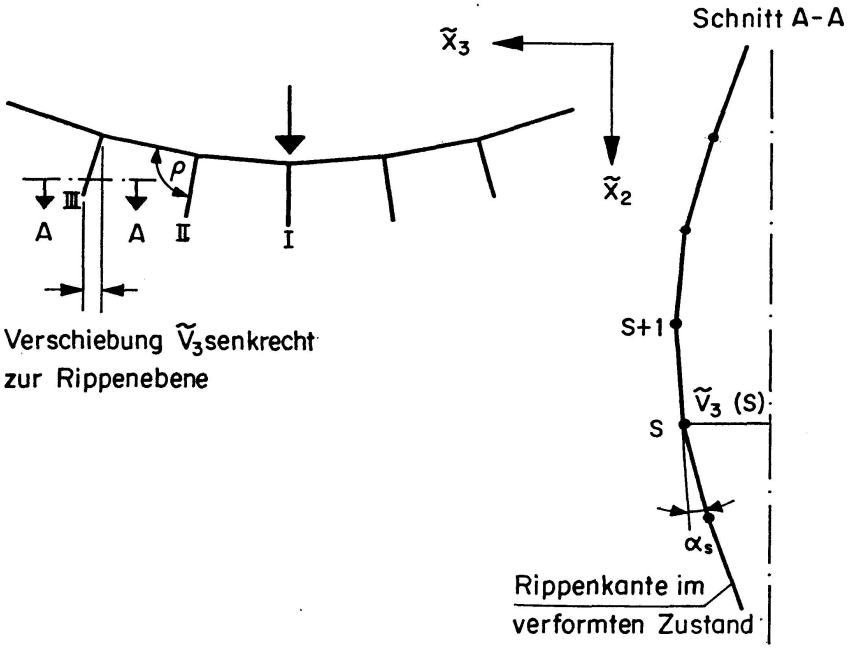


Fig. 5. Verformung torsionsweicher Längsrippen.

2. Stufe: Korrektur des Verformungszustandes der Rippe. Korrekturbedingung: Längsrippe und Deckblech stehen aufeinander senkrecht ($\rho = \pi/2$).

Mit der Korrekturbedingung $\rho = \pi/2$ wird die Formänderungsenergie zu klein angesetzt. Die Traglast wird durch diese Festlegung also etwas zu niedrig errechnet.

8. Beispiel

Es wird das Ergebnis für eine rechteckige orthotrope Platte unter mittiger Einzellast mitgeteilt. Geometrie, Lasteintragung und Randbedingungen sind aus Fig. 6 ersichtlich.

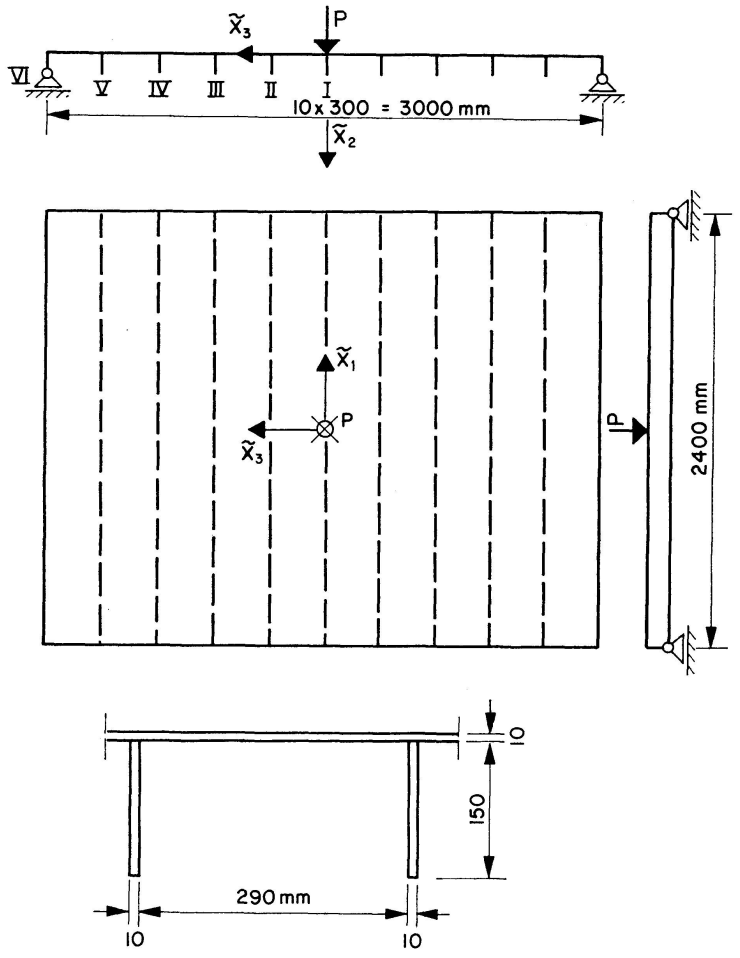


Fig. 6. Geometrie und Belastung einer Platte mit torsionsweichen Rippen.

Die Platte wurde für 20 Belastungsinkremente (maximale Gesamtbelastung $P = 43{,}6$ Mp) untersucht. Bis $P = 5$ Mp verhielt sich die Platte voll elastisch (s. Fig. 7). Ab $P = 5$ Mp traten plastische Verformungen auf, und zwar zuerst in Längsrippe I unter der Einzellast. Bei $P = 23$ Mp begann die benachbarte Längsrippe II von der Mitte aus zu plastizieren. Bei $P = 33{,}6$ Mp setzte Plasti-

zierung im Deckblech ein. Die Lastdurchsenkungskurve, Fig. 7, für den Lastangriffspunkt zeigt den charakteristischen Verlauf. Zum Vergleich sind die Ergebnisse von Müller und Risse und eine Versuchskurve nach Pelikan angegeben.

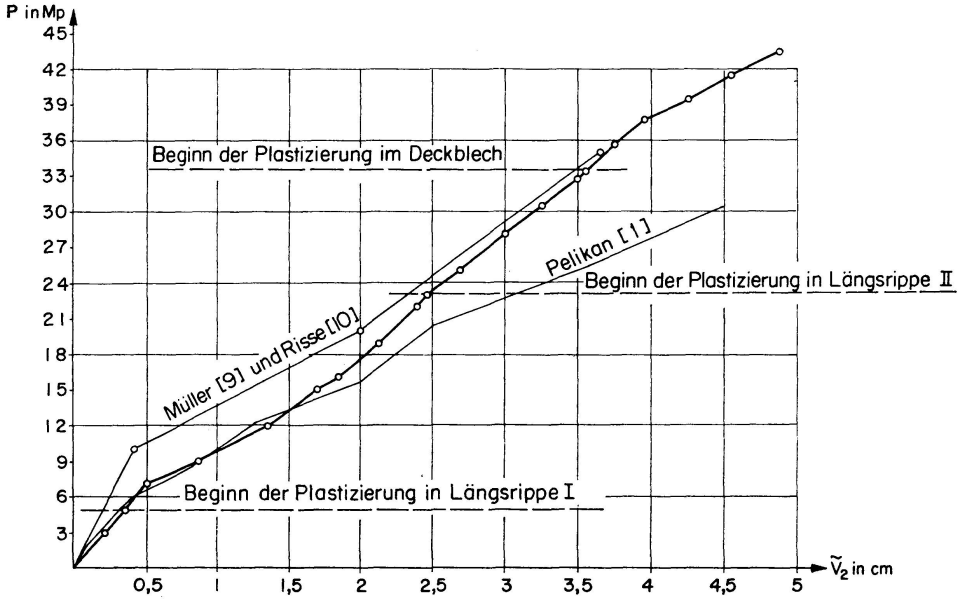


Fig. 7. Lastdurchsenkungskurve des Lastangriffspunktes.

Literatur

1. Pelikan, E., und Esslinger, M.: Die Stahlfahrbahn – Berechnung und Konstruktion. MAN-Forschungsheft Nr. 7, 1957.
2. Swainger, K. H.: Compatibility of stress and strain in yielded metals. Philosophical Magazine, Ser. 7, vol. 36, 1945, Juli, S. 443–473.
3. Argyris, J. H., Scharpf, D. W., und Spooner, J. B.: Die elastoplastische Berechnung von allgemeinen Tragwerken und Kontinua. Ing.-Arch., *38* (1969), S. 326–352.
4. Turner, M. H., Dill, E. H., Martin, H. C., and Melosh, R. J.: Large deflections of structures subjected to heating and external loads. J. Aero. Sci., *27* (1960), Febr., S. 97–106.
5. Martin, H. C.: On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems. Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Ohio, Okt. 1965.
6. Novozhilov, V. V.: Foundations of the nonlinear theory of elasticity. Graylock Press, Rochester, N. Y., 1953.
7. Markowitz, J., and Hu, L. W.: Plastic analysis of orthotropic circular plates. Proc. Amer. Soc. Civil. Eng. 90, EM 5 (J. Eng. Mech. Div.), Teil 1, Okt. 1964, S. 251.
8. Müller, H.: Untersuchung orthotroper Rechteckplatten im geometrisch und beschränkt physikalisch nichtlinearen Bereich mit der gewöhnlichen Differenzenmethode. Wiss. Techn. Univ. Dresden, 1964, S. 917.
9. Müller, H.: Differentialgleichungen orthotroper Platten im geometrisch und beschränkt physikalisch nichtlinearen Bereich. ZAMM 1964, S. 539.
10. Risse, J.: Beitrag zur Berechnung orthotroper Rechteckplatten im geometrisch und physikalisch nichtlinearen Bereich. Dissertation, Techn. Univ. Dresden, 1968.

11. SOPER, W. G.: Large deflection of stiffned plates. J. Appl. Mechanics, 1958, S. 444.
12. TADJBAKHSH, J., und SAIBEL, E.: On the large elastic deflections of plates. ZAMM 1960, S. 259.

Zusammenfassung

Das Verhalten orthotroper Stahlplatten im Traglastbereich wird mit Hilfe eines diskreten mechanischen Modells aus finiten dreieckigen Elementen untersucht. Alle mechanischen Beziehungen werden für inkrementales Vorgehen aufgestellt. Die Grundrissgeometrie unterliegt keinerlei Einschränkung. Eine grosse Anzahl gebräuchlicher Plattenquerschnitte lässt sich mit diesem Modell berechnen.

Summary

The behaviour of orthotropic steel plates in the range of ultimate load is examined by means of a discrete mechanical model consisting of finite triangular elements. All mechanical relations are stated for an incremental proceeding. The geometry of the outline is not subjected to any restriction. A big number of usual plate sections may be calculated by the help of this model.

Résumé

Le comportement de plaques orthotropes en acier dans la portée de charge efficace est étudié à l'aide d'un modèle mécanique discret constitué par des éléments triangulaires finis. Toutes les relations mécaniques sont établies pour une méthode incrémentale. La géométrie de plan n'est soumise à aucune restriction. Un grand nombre de sections de plaque usuelles peut être calculé moyennant ce modèle.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Entwurf und Berechnung von zylindrischen Spannbeton-Druckbehältern mit axialen Rippen

Design and Calculation of Cylindrical Prestressed Concrete Vessels with Axial Joists

Etude et calcul de réservoirs cylindriques en béton précontraint à nervures axiales

F. SEBÖK
Technische Universität Budapest, Lehrstuhl für Stahlbetonkonstruktionen

1. Einleitung

Die Idee, Druckbehälter aus Spannbeton zu bauen, hat sich in den sechziger Jahren durchgesetzt. Es wurde damit eine neue Art der Ingenieurkonstruktionen geschaffen, deren Verwirklichungsformen sich einstweilen im Gärzustand befinden.

Die heute üblichen Gestaltungstypen sind durch die Anwendung einer dicken Wand gekennzeichnet. Dieses Konstruktionsprinzip wird damit begründet, dass auf diese Weise auch die Festigkeit des Abschirmbetons ausgenützt werden kann. Diese Auffassung, so logisch sie auch klingen mag, ist aber nur zum Teil richtig. Der Umstand, dass die Betriebslasten (insbesondere solche aus Temperaturgefälle) auf Konstruktionsteile beachtlicher Steife einwirken, hat die Vergrösserung der Beanspruchungen zur Folge. Es sind somit Schnittkräfte aufzunehmen, die überhaupt nicht auftreten würden, hätte man dem Beton nicht eine statische Rolle beimessen wollen.

Die hohen Temperaturlasten können selbstredend durch Heranziehung künstlicher Mittel (z. B. Wärmeisolierung, dauernde Innenkühlung) herabgesetzt werden. Wir vertreten jedoch die Ansicht, dass die Kernfrage der Weiterentwicklung von Druckgefässen darin besteht, Durchbildungsmöglichkeiten zu finden, welche die erforderliche Biegesteifigkeit sichern können, ohne dabei den Behälter zum Tragen grosser Temperaturlasten zu zwingen. Die

Zielsetzung kann unserer Meinung nach durch «aufgelöste» Konstruktionen erreicht werden.

Eine Behälterform dieser Art entsteht dadurch, dass man die dicke Wand in mehrere Schichten aufteilt. Die Innenräume zwischen den tragenden Bauelementen sind mit einem Schüttstoff gewünschter wärme- bzw. strahlenschutztechnischer Eigenschaften (z. B. Glasperlen, Sand oder Wasser) auszufüllen. Damit entfällt auch das Problem der auftretenden Risse [1]. Die Lösung wurde in einer früheren Arbeit [2] beschrieben, und seitdem in manchen Zügen als Modell von der Firma Krupp verwirklicht [3]. Hier wird durch den Einbau einer kostspieligen Vorrichtung über die Verteilung des Innendruckes unter den einzelnen Schichten gesorgt. Sinnvoll wäre es auch, eine andere Wirkungsweise anzustreben, wo die Konstruktionselemente nicht voneinander getrennt, sondern in Form einer Sandwichschale zusammenarbeiten.

Eine grundsätzlich andere Alternative zur Herabsetzung der Temperaturspannungen bildet das berippte Tragwerk (was selbstverständlich gleichfalls mehrschichtig ausgeführt werden kann). Hier kommt die Verdrängung des massiven Betons durch einen losen und billigen Abschirmstoff der Wirtschaftlichkeit und der Sicherheit ebenfalls zugute. Ein ganz besonderes Augenmerk sei aber auf den Umstand gerichtet, dass bei dieser Konstruktionsform alle Durchführungen, Instrumente und selbst die Vorspannkabel leicht zugänglich sind, ihre Überprüfung, das Nachspannen und gegebenenfalls sogar der Austausch sehr einfach erfolgen können.

Das Zerlegen dicker Betonbehälter in dünnwandige Kreiszylinderschalen bzw. stabartige Rippen ist auch wegen der Zuverlässigkeit der statischen Berechnung zu befürworten. Es ist allgemein bekannt, dass die moderne Rechentechnik eine Reihe numerischer Methoden mit sich gebracht hat, welche die Erfassung des Kräftespiels im dreidimensionalen Raum gestatten. Man verliert dagegen des öfteren aus dem Auge, dass einige physikalische Grundkenntnisse, auf denen die entwickelten Rechenverfahren fussen, nicht einmal in zwei Dimensionen immer standzuhalten vermögen. Als solche ist zum Beispiel die augenblickliche Feuchtigkeit des porösen Materials zu nennen, die sich nicht nur auf die Temperaturverteilung und somit auf die thermischen Lasten auswirkt, sondern unter anderen den wirklichen Wert des Elastizitätsmoduls, des Schwindens und Kriechens bestimmt.

Die hier besprochene Konstruktionsform findet in zunehmendem Masse Anwendung in vielen Fachrichtungen der Ingenieurwissenschaften. Die Bautechnik ist dabei etwas in den Hintergrund geraten. Dieser Umstand kann wahrscheinlich darauf zurückgeführt werden, dass zur Berücksichtigung der Orthotropie nur entweder in die Praxis schwer umsetzbare mathematische Theorien oder ziemlich unzuverlässige Näherungsmethoden zur Verfügung stehen. Aus diesem Grunde mussten parallel zur Ausarbeitung der neuzeitlichen Behälterkonstruktion Untersuchungen unternommen werden, um ein geeignetes Rechenverfahren zu entwickeln.

2. Statisches Modell

Die vorgelegte Konstruktion setzt sich aus flachen Abschlussdeckeln und der Seitenwand zusammen, die miteinander gelenkig verbunden sind (s. Fig. 1).

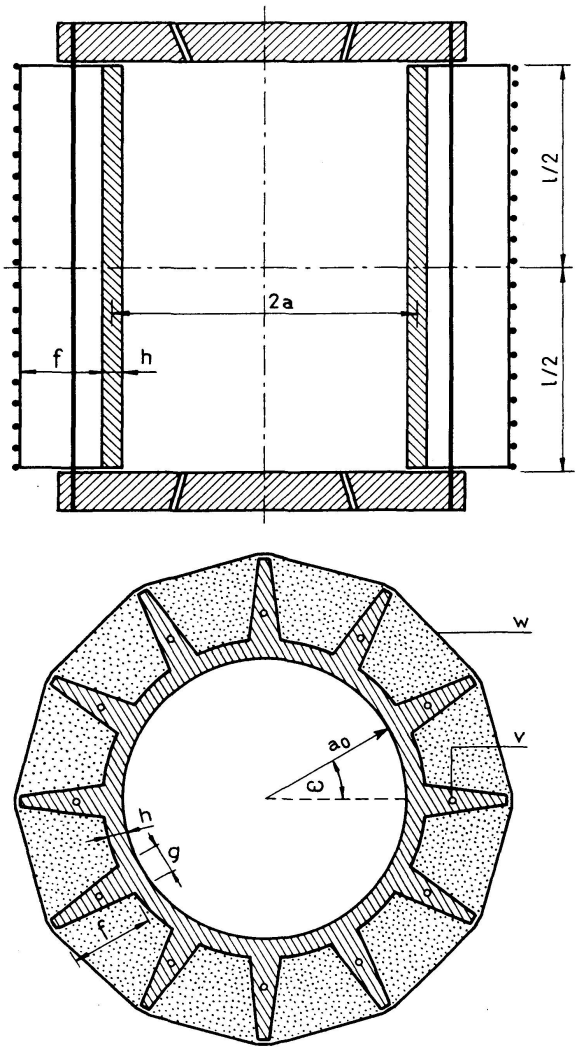


Fig. 1.

Der erstgenannte ist in statischem Sinne als eine Kreisringplatte anzusehen. Die Untersuchung darf damit auf die Wand beschränkt werden. Falls im folgenden über den Behälter bzw. das Gefäss gesprochen wird, so ist unter dieser Bezeichnung die Seitenkonstruktion zu verstehen.

Der «Behälter» besteht somit aus zwei Elementen, und zwar aus einer kreisrunden Zylinderschale sowie aus axialen Rippen, die in gleichmässigen Abständen an der äusseren Schalenoberfläche durchgebildet sind. Alle Rippen besitzen im Querschnitt die gleiche gleichschenklige Dreiecksform. Es sei einfachheitshalber angenommen, dass alle Abmessungen entlang der Behälterhöhe unverändert bleiben.

In diesem Zusammenhang möchten wir auf eine mögliche Verbesserung

ergänzend hinweisen. Mit Rücksicht auf die Festigkeitseigenschaften des Betons wäre es sicherlich vorteilhaft, wenn die Schale zwischen den Rippen über eine negative, d.h. nach innen gerichtete Wölbung verfügen würde. Diese Form stimmt mit einer Hypozykloide überein.

Die Vorspannung kann am zweckmässigsten durch zwei getrennte Systeme erfolgen. Die lotrechten Litzen werden in Röhrchen (ohne nachträglichen Verbund) mit eingeplanter Ausmittigkeit in den Rippen geführt und an den Randringen der Deckelplatten verankert. Die waagerechte Wickelung liegt an den Rippenkanten auf. Diese Anordnung gewährt dem Spannstahl den grösstmöglichen Schutz vor Einwirkung der Temperatur sowie der Neutronenstrahlung.

Das statische Modell wird an der Skizze veranschaulicht, der auch die wichtigsten Bezeichnungen für die geometrischen Daten abzulesen sind. Mit Rücksicht auf die zugehörige Konstruktionsstärke weist der Fusszeiger h auf den Zylinder, der Fusszeiger f dagegen auf die Rippe hin.

3. Lastannahmen

Die auf die Konstruktion einwirkenden Nutzlasten bzw. die einzelnen Belastungszustände wurden in der Tabelle I übersichtlich zusammengestellt.

Tabelle I. Übersicht der Lastfälle

Zeitpunkt	Belastungsfall	Nutzlasten $(p+T)$	Vorspannung	Betonzustand	
				Feucht.	Schw.+Kr.
0	Bauzustand	0	max.	normal	0
	Probebelastung	wie vorgeschr.	normal	normal	0
	Betriebszustand	Betriebslast	normal	normal	0
∞	Betriebszustand	Betriebslast	min.	ausgetrocknet	max.
	Betriebspause	0	min.	ausgetrocknet	max.
Katastrophenfall*)		Katastrophenlast	min.	ausgetrocknet	max.

*) Im Katastrophenfall darf die Berechnung nach der Plastizitätstheorie durchgeführt werden.

Auf Grund der Lasttemperatur, die sich aus Erwärmung des Innenraumes sowie aus der durch Strahlenabsorption entwickelten Wärme in der Wand zusammensetzt, ist zunächst die entsprechende Temperaturverteilung in den Bauelementen zu ermitteln. Rechnerisch ruft ihr gleichmässiger Teil ($T\,0$) eine Normalkraft, der ungleichmässige ($T\,\Delta$) Biegemomente hervor.

4. Bemerkungen zur Ermittlung der Steifigkeitszahlen sowie der thermischen Beanspruchung

In der Regel bleiben die sekundären Vorgänge bei den statischen Berechnungen unberücksichtigt. Die Vernachlässigung kann im Falle von Temperaturlasten zu beachtlichen Ungenauigkeiten führen, da wegen der Erwärmung einige Materialkennzahlen wesentliche Änderungen erleiden. Eine besondere Aufmerksamkeit beansprucht die Abnahme des Elastizitätsmoduls für sich. Das Gesetz wurde vor 60 Jahren erkannt und in seiner Tendenz durch die neuesten Untersuchungen bestätigt.

Mit guter Näherung darf angenommen werden, dass der E-Modul von der Temperatur linear abhängt, d. h.

$$E = E_0 - E_T T \tag{1}$$

ist. Wird zur Beschreibung des Temperaturfeldes wegen der Allgemeinheit das Polinom

$$T(r) = \sum_{n=0,1,2,\ldots} \Theta_n r^n \tag{2}$$

verwendet, so kann E in der Form

$$E = \sum_{n=0,1,2,\ldots} E_{Tn} r^n \tag{3}$$

angegeben werden, wobei

$$E_{T0} = E_T - E_T \Theta_0,$$
$$E_{Tn} = -E_T \Theta_n, \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

sind.

Unter Anwendung obiger Ausdrücke sind die Steifigkeitszahlen aus den Formeln

$$D(T) = \frac{\bar{E}(0)}{(1-\mu^2) r_s} \tag{4}$$

bzw.

$$K(T) = \frac{1}{(1-\mu^2) r_s} [\bar{E}(2) - r_s^2 \bar{E}(0)]$$

zu ermitteln. $\bar{E}(i)$ bezeichnet die Hilfsfunktion

$$\bar{E}(i) = \int_{a_0}^{a_0+h} E(T) r^{i+1} dr \tag{5}$$

und r_s die Schwerlinienkoordinate der zylindrischen Wand

$$r_s = \frac{\bar{E}(1)}{\bar{E}(0)}. \tag{6}$$

Der wahre Dämpfungsbeiwert ergibt sich entsprechend zu

$$\lambda^*(T) = \sqrt[4]{\frac{(1-\mu^2)\,D(T)}{4\,a^2\,K(T)}}. \tag{7}$$

Die Verringerung der Wandsteifigkeit wird durch die Abnahme der thermischen Beanspruchungen wettgemacht und im Normalfall sogar übertroffen. Ähnlich zum Vorhergegangenen können wir die temperaturbedingten Schnittkräfte aus den Formeln

$$N_T = -\frac{\alpha\,\bar{E}^*(0)}{(1-\mu)\,r_s} \tag{8}$$

bzw.

$$M_T = \frac{\alpha}{(1-\mu)\,r_s}\left[\bar{E}^*(1) - r_s\,\bar{E}^*(0)\right] \tag{9}$$

ermitteln. Das Symbol $\bar{E}^*(i)$ steht für das Integral

$$\bar{E}^*(i) = \int_{a_0}^{a_0+h} \sum_n E^*_{Tn}\, r^{n+i+1}\, dr, \tag{10}$$

in dem die Beiwerte E^*_{Tn} durch Summierung

$$E^*_{Tn} = \sum_{j=0,1,2,\ldots}^{n} E_{Tj}\,\Theta_{(n-j)}$$

zu bestimmen sind.

5. Grundzüge des Rechenganges

Unsere Berechnungsmethode beruht auf dem Kraftgrössenverfahren. Zum Hauptsystem wurden unbestimmte Träger gewählt, und zwar ein (niedriger) Kreiszylinder und ein, auf der Ringwickelung elastisch aufliegender, in Längsrichtung vorgespannter Balken. Behandelt man die einzelnen Elemente rechnerisch voneinander getrennt, so erleiden sie unter den einwirkenden Betriebslasten unterschiedliche Verformungen. Ihre Gleichheit, der Verträglichkeitsbedingung entsprechend, wird durch ein zu bestimmendes, verteiltes Kontakt-Kräftesystem hergestellt. Dieses kann in die radiale Komponente q und die axiale Komponente t zerlegt werden.

Kennzeichnend für die Methode ist die Darstellung aller Belastungen, statischer und Verformungsgrössen in trigonometrischen Reihen. Die Entwicklung erfolgt als die Funktion von ηx, wobei

$$\eta_i = i\,\pi\,\frac{a}{l}$$

und $i = 1, 3, 5, \ldots$ sind.

6. Einfluss von Betriebslasten

6.1. Kreiszylinder-Hauptsystem

6.1.1. Verschiebungen in radialer Richtung

Die bekannte Gleichung der Kreiszylinderschale wird in der Form

$$\frac{d^4 w_{(h)}}{dx^4} + 4\lambda^{*4} w_{(h)} = p^* \tag{11}$$

aufgeschrieben, wo die Störfunktion p^* eine gleichmässig verteilte Last darstellt. Mit w wird die radiale Verschiebung bezeichnet.

Die Differentialgleichung kann durch die trigonometrische Reihe

$$w_{(h)} = \sum_i \Gamma_i \sin \eta_i \frac{x}{a} \tag{12}$$

befriedigt werden, wo die Beiwerte sich durch die Formel

$$\Gamma_i = \frac{4}{\pi i} \frac{p^*}{\left(\frac{\eta_i}{a}\right)^4 + 4\lambda^{*4}} \tag{13}$$

ermittelt werden lassen. Die Randbedingungen an den Stellen $x=0$ und $x=l$ lauten (dem gelenkigen Verbund entsprechend)

$$w_{(h)} = 0$$

und

$$M_{x(h)} = -K_h \frac{d^2 w_{(h)}}{dx^2} = 0$$

und werden durch die Sinus-Funktion erfüllt.

Im Falle eines Druckbehälters kann die Last p^* von verschiedenen Gründen herrühren, und zwar

— von Innendruck (p)

$$p_p^* = \frac{a - \frac{h}{2}}{a K_h} p, \tag{14}$$

— von der gleichmässigen Erwärmung (N_T)

$$p_{T0}^* = \frac{1-\mu}{a K_h} N_{T(h)}, \tag{15}$$

— von Temperaturgefälle (M_T)

$$p_{T\Delta_i}^* = \frac{\left(\frac{a}{\eta_i}\right)^2 \left[\left(\frac{\eta_i}{a}\right)^4 + 4\lambda^{*4}\right]}{K_h} M_{T(h)}, \tag{16}$$

wo wegen der einheitlichen Behandlung auch das thermische Moment in Form einer Störfunktion ausgedrückt wird.

6.1.2. Verschiebungen in axialer Richtung

Die axialen Verschiebungen werden am Hauptsystem unter Einwirkung von Betriebslasten nur durch Längskräfte hervorgerufen. Entwickelt man sie gleichfalls in eine Sinus-Reihe, so kann die Verschiebung mit der Formel

$$u_{(h)} = \frac{1}{D_h} \int N_x dx = \frac{4l}{\pi^2 D_h} N_x \sum_i \frac{1}{i^2} \cos \eta_i \frac{x}{a} \tag{17}$$

ermittelt werden. u wird hier von Halbhöhe des Behälters gemessen.

Für die einzelnen Lasttypen können die Längskräfte auf Grund folgender Überlegungen aufgenommen werden:

— der Innendruck übt auf den Abschlussdeckel eine Kraft aus, welche die Wand auf Zug beansprucht. Im Verhältnis der Schalen- bzw. Rippensteifigkeiten fällt davon

$$N_{p(h)} = \frac{D_h}{2a\pi D_h + k D_f} \frac{\left(a - \frac{h}{2}\right)^2}{2a} p \tag{18}$$

der Umfangseinheit zu;

— die durch ungleichmässige Erwärmung hervorgerufene thermische Normalkraft ist vorgegeben;

— die ungleichmässige Erwärmung verursacht keine Längskraft und somit auch keine axiale Verschiebung.

6.1.3. Schnittkräfte

In Kenntnis der Verformungen können die Schnittkräfte ermittelt werden. Die entsprechenden Ausdrücke lauten für das axiale Moment

$$M_{x(h)} = \frac{K_h}{a^2} \sum_i \Gamma_i \eta_i^2 \sin \eta_i \frac{x}{a}, \tag{19}$$

für das Moment in Ringrichtung

$$M_{\varphi(h)} = \mu M_{x(h)}, \tag{20}$$

für die Schubkraft (die zur Bestimmung der Randkraft dient)

$$Q_{(h)} = \frac{K_h}{a^3} \sum_i \Gamma_i \eta_i^3 \cos \eta_i \frac{x}{a}. \tag{21}$$

Die Normalkräfte sind in axialer Richtung nach Punkt 6.1.2, in Ringrichtung durch die Formel

$$N_{\varphi(h)} = \frac{D_h}{a} w_h = \frac{D_h}{a} \sum_i \Gamma_i \sin \eta_i \frac{x}{a} \tag{22}$$

zu berechnen.

6.2. Balken-Hauptsystem

6.2.1. Verschiebungen in radialer Richtung

Bei Verformungsermittlung der stabartigen Rippe senkrecht zu ihrer Achse sind die folgenden Einflüsse zu berücksichtigen:

— die ungleichmässige Temperaturverteilung entlang der Rippenhöhe hat das thermische Biegemoment M_T zur Folge, woraus die radiale Verschiebung durch trigonometrische Reihenentwicklung zu

$$w_{T\Delta(f)} = \frac{4\,l^2}{\pi^3}\,\frac{M_{T(f)}}{K_f}\sum\frac{1}{i^3}\sin\eta_i\frac{x}{a} \tag{23}$$

ergibt;

— die vertikale Vorspannkraft V wirkt mit der Ausmittigkeit r_Δ zur Rippenachse, was einem Vorspannmoment der Grösse

$$M_{v(f)} = -V\,r_\Delta \tag{24}$$

entspricht. Die zugehörige Verschiebung kann nach (23) berechnet werden;

— die waagerechte Umwickelung W übt den gleichmässig verteilten Druck

$$s = 2\,W\sin\frac{\omega}{a} \tag{25}$$

auf die Rippenkante aus, womit die Verschiebung sich durch vierfache Integration

$$w_{w(f)} = \frac{4\,l^4}{\pi^5}\,\frac{s}{K_f}\sum_i\frac{1}{i^5}\sin\eta_i\frac{x}{2} \tag{26}$$

bestimmen lässt.

6.2.2. Verschiebungen in axialer Richtung

Die axialen Verschiebungen können wie unter Punkt 6.1.2 bestimmt werden. Es ist dabei den folgenden Lasten Rechnung zu tragen:

— dem Innendruck, der die Rippe durch den «Deckelzug» in Anspruch nimmt (vgl. Formel 18)

$$N_{p(f)} = \frac{D_f}{2\,a\,\pi\,D_h + k\,D_f}\,\frac{\left(a-\frac{h}{2}\right)^2}{2\,a}\,p; \tag{27}$$

— der Normalkraft N_T aus gleichmässiger Erwärmung;

— der vertikalen Vorspannkraft V, die mit Rücksicht auf Punkt 6.2.1 als zentrisch angenommen werden kann.

6.2.3. Schnittkräfte

Bei Ermittlung der Verformungen sind die statischen Grössen schon bekannt. Berechnet werden muss noch zusätzlich die jeweilige Schubkraft, die

durch Differenzieren

$$Q_{(f)} = \frac{4}{l} M_{(f)} \sum_i \cos \eta_i \frac{x}{a} \tag{28}$$

ergibt.

Schnittkräfte in Umfangsrichtung treten in der Rippe selbstverständlich nicht auf.

7. Einfluss der Kontaktkräfte

7.1. Kreiszylinder-Hauptsystem

7.1.1. Auflösung der Grundgleichung

Es sei zunächst der Einfluss einer einzigen Rippe untersucht, was mit dem Kontakt-Kräftesystem (q,t) entlang des Erzeugers $\varphi = 0$ simuliert wird. In diesem Falle verschwindet die Kreissymmetrie, und bei der mathematischen Behandlung ist von der allgemeinen Donnel-Kármán-Jenkinsschen Differentialgleichung

$$\left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)^4 w_{(h)} + 4\lambda^4 a^4 \frac{\partial^4 w_{(h)}}{\partial x^4} = 0 \tag{29}$$

auszugehen. Ihre Auflösung wird in der Form

$$w_{(h)} = \sum_i A\, e^{m\varphi} \sin \eta_i \frac{x}{a} \tag{30}$$

gesucht, die sowohl die Gleichung als auch die Randbedingungen erfüllt. Zunächst sei nur ein einziges Glied der Fourierschen Reihe behandelt.

Für die charakteristische Gleichung kann

$$(m^2 - \eta^2)^4 + 4\lambda^4 \eta^4 = 0 \tag{31}$$

geschrieben werden, wo die komplexen Wurzeln

$$\begin{aligned} m_1 &= \alpha_1 + \beta_1, & m_5 &= -m_1, \\ m_2 &= \alpha_1 - i\beta_1, & m_6 &= -m_2, \\ m_3 &= \alpha_2 + i\beta_2, & m_7 &= -m_3, \\ m_4 &= \alpha_2 - i\beta_2, & m_8 &= -m_4 \end{aligned}$$

sind.

Die Beiwerte α und β stellen reelle, positive Grössen dar und sind aus den Zusammenhängen

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\eta\lambda}{2}\left[\sqrt{\left(1+\frac{\eta}{\lambda}\right)^2 + 1} + \left(1+\frac{\eta}{\lambda}\right)\right]}, \qquad \beta_1 = \frac{1}{\alpha_1}\frac{\eta\lambda}{2}, \tag{32}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\eta\lambda}{2}\left[\sqrt{\left(1-\frac{\eta}{\lambda}\right)^2 + 1} - \left(1-\frac{\eta}{\lambda}\right)\right]}, \qquad \beta_2 = \frac{1}{\alpha_2}\frac{\eta\lambda}{2} \tag{33}$$

zu ermitteln. Es folgt aus der Ableitung der DKJ-Differentialgleichung, dass für den Dämpfungsbeiwert

$$\lambda = \sqrt{\frac{a}{h}}\sqrt[4]{3\,(1-\mu^2)} = a\,\lambda^* \tag{34}$$

anzusetzen ist.

Nach Weglassen der Glieder mit Potenzen positiven Vorzeichens, mit mathematischen Umformungen erhält man schliesslich für die radialen Verschiebungen

$$\begin{aligned} w_{(h)} = [&A_1 e^{-\alpha_1 \varphi}\cos\beta_1\varphi + A_2 e^{-\alpha_1\varphi}\sin\beta_1\varphi \\ &+ A_3 e^{-\alpha_2\varphi}\cos\beta_2\varphi + A_4 e^{-\alpha_2\varphi}\sin\beta_2\varphi]\sin\eta\frac{x}{a}. \end{aligned} \tag{35}$$

7.1.2. Verformungsgrössen

Die Bestimmungsgleichung für die axiale Verschiebung lautet

$$\frac{\partial^3 u_{(h)}}{\partial x^3} = -\frac{1}{4\lambda^4 a^3}\left(a^4\frac{\partial^6 w_{(h)}}{\partial^4 x\,\partial^2\varphi} + 2a^2\frac{\partial^6 w_{(h)}}{\partial^2 x\,\partial^4\varphi} + \frac{\partial^6 w_{(h)}}{\partial\varphi^6}\right) \tag{36}$$

und führt zur Formel

$$\begin{aligned} u_{(h)} = \frac{1}{2\lambda}\Bigg\{&A_1 e^{-\alpha_1\varphi}\left[\cos\beta_1\varphi - \left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\sin\beta_1\varphi\right] \\ &+ A_2 e^{-\alpha_1\varphi}\left[\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\cos\beta_1\varphi + \sin\beta_1\varphi\right] \\ &- A_3 e^{-\alpha_2\varphi}\left[\cos\beta_2\varphi - \left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\sin\beta_2\varphi\right] \\ &- A_4 e^{-\alpha_2\varphi}\left[\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\cos\beta_2\varphi + \sin\beta_2\varphi\right]\Bigg\}\cos\eta\frac{x}{a}. \end{aligned} \tag{37}$$

Die Verschiebung in Umfangsrichtung kann mit Hilfe des Zusammenhanges

$$\frac{\partial^4 v_{(h)}}{\partial x^4} = \frac{1}{4\lambda^4 a^4}\left(\frac{\partial^7 w_{(h)}}{\partial\varphi^7} + 4a^2\frac{\partial^7 w_{(h)}}{\partial x^2\,\partial\varphi^5} + 5a^4\frac{\partial^7 w_{(h)}}{\partial x^4\,\partial\varphi^3} + 2a^6\frac{\partial^7 w_{(h)}}{\partial x^6\,\partial\varphi}\right) \tag{38}$$

ermittelt werden und ergibt

$$\begin{aligned} v_{(h)} = \frac{1}{2\eta\lambda}\Bigg[&A_1 e^{-\alpha_1\varphi}\left\{\left[\alpha_1 - \beta_1\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\right]\cos\beta_1\varphi + \left[\alpha_1\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)+\beta_1\right]\sin\beta_1\varphi\right\} \\ &+ A_2 e^{-\alpha_1\varphi}\left\{\left[-\alpha_1\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)-\beta_1\right]\cos\beta_1\varphi + \left[\alpha_1 - \beta_1\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\right]\sin\beta_1\varphi\right\} \\ &- A_3 e^{-\alpha_2\varphi}\left\{\left[\alpha_2 - \beta_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\right]\cos\beta_2\varphi + \left[\alpha_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)+\beta_2\right]\sin\beta_2\varphi\right\} \\ &- A_4 e^{-\alpha_2\varphi}\left\{\left[-\alpha_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)-\beta_2\right]\cos\beta_2\varphi + \left[\alpha_2 - \beta_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\right]\sin\beta_2\varphi\right\}\Bigg]\sin\eta\frac{x}{a}. \end{aligned} \tag{39}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten wird schliesslich auch der Ausdruck für die Verdrehung in Umfangsrichtung benötigt, der nach Differenzieren

$$\begin{aligned}\chi = \frac{\partial w_{(h)}}{\partial \varphi} = [&- A_1 e^{-\alpha_1 \varphi} (\alpha_1 \cos \beta_1 \varphi + \beta_1 \sin \beta_1 \varphi) \\ &+ A_2 e^{-\alpha_1 \varphi} (\beta_1 \cos \beta_1 \varphi - \alpha_1 \sin \beta_1 \varphi) \\ &- A_3 e^{-\alpha_2 \varphi} (\alpha_2 \cos \beta_2 \varphi + \beta_2 \sin \beta_2 \varphi) \\ &+ A_4 e^{-\alpha_2 \varphi} (\beta_2 \cos \beta_2 \varphi - \alpha_2 \sin \beta_2 \varphi)] \sin \eta \frac{x}{a}\end{aligned} \tag{40}$$

ergibt.

7.1.3. Schnittkräfte

Die allgemeinen Formeln für die Schnittkräfte unter Einwirkung von einem Glied der in trigonometrische Reihe entwickelten Kontaktlast entlang eines Erzeugers lauten für das axiale Moment

$$\begin{aligned}M_{x(h)} = -K_h \frac{\partial^2 w_{(h)}}{\partial x^2} = i^2 \pi^2 \frac{K_h}{l^2} (&A_1 e^{-\alpha_1 \varphi} \cos \beta_1 \varphi + A_2 e^{-\alpha_1 \varphi} \sin \beta_1 \varphi \\ &+ A_3 e^{-\alpha_2 \varphi} \cos \beta_2 \varphi + A_4 e^{-\alpha_2 \varphi} \sin \beta_2 \varphi) \sin \eta \frac{x}{a},\end{aligned} \tag{41}$$

für das Moment in Ringrichtung

$$\begin{aligned}M_{\varphi(h)} = -\frac{K_h}{a^2} \eta \lambda \Big\{ &A_1 e^{-\alpha_1 \varphi} \left[\left(\frac{\eta}{\lambda} + 1 \right) \cos \beta_1 \varphi + \sin \beta_1 \varphi \right] \\ &+ A_2 e^{-\alpha_1 \varphi} \left[-\cos \beta_1 \varphi + \left(\frac{\eta}{\lambda} + 1 \right) \sin \beta_1 \varphi \right] \\ &+ A_3 e^{-\alpha_2 \varphi} \left[\left(\frac{\eta}{\lambda} - 1 \right) \cos \beta_2 \varphi + \sin \beta_2 \varphi \right] \\ &+ A_4 e^{-\alpha_2 \varphi} \left[-\cos \beta_2 \varphi + \left(\frac{\eta}{\lambda} - 1 \right) \sin \beta_2 \varphi \right] \Big\} \sin \eta \frac{x}{a},\end{aligned} \tag{42}$$

für die axiale Normalkraft

$$\begin{aligned}N_{x(h)} = \frac{D_h}{2a} \frac{\eta}{\lambda} \Big\{ &- A_1 e^{-\alpha_1 \varphi} \left[\cos \beta_1 \varphi - \left(\frac{\eta}{\lambda} + 1 \right) \sin \beta_1 \varphi \right] \\ &- A_2 e^{-\alpha_1 \varphi} \left[\left(\frac{\eta}{\lambda} + 1 \right) \cos \beta_1 \varphi + \sin \beta_1 \varphi \right] \\ &+ A_3 e^{-\alpha_2 \varphi} \left[\cos \beta_2 \varphi - \left(\frac{\eta}{\lambda} - 1 \right) \sin \beta_2 \varphi \right] \\ &+ A_4 e^{-\alpha_2 \varphi} \left[\left(\frac{\eta}{\lambda} - 1 \right) \cos \beta_2 \varphi + \sin \beta_2 \varphi \right] \Big\} \sin \eta \frac{x}{a}\end{aligned} \tag{43}$$

sowie für die Normalkraft in Ringrichtung

$$N_{\varphi(h)} = \frac{D_h}{2a}\left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^2 [-A_1 e^{-\alpha_1 \varphi} \sin \beta_1 \varphi + A_2 e^{-\alpha_1 \varphi} \cos \beta_1 \varphi + A_3 e^{-\alpha_2 \varphi} \sin \beta_2 \varphi - A_4 e^{-\alpha_2 \varphi} \cos \beta_2 \varphi] \sin \eta \frac{x}{a}. \tag{44}$$

7.1.4. Ermittlung der Integrationskonstanten

Die Integrationskonstanten A_1, A_2, A_3 und A_4 gestatten die Erfüllung von vier Randbedingungen entlang des Erzeugers. Am einfachsten sind die folgenden wirklichkeitsnahen Anforderungen zu stellen:

— Die Kontaktlasten und die Schnittkräfte bilden ein Gleichgewichtssystem. Die Aussage kann in radialer Richtung als

$$-q \sin \eta \frac{x}{a} = 2 Q_{\varphi(h)}, \tag{45}$$

in axialer Richtung als

$$-t \sin \eta \frac{x}{a} = 2 N_{x(h)} \tag{46}$$

formuliert werden. Die Verdoppelung der Schnittkräfte wird dadurch bedingt, dass sich die angreifende Kontaktlast an zwei Schalenhälften verteilt.

— Die Kontinuität der Schalenfläche muss in Umfangsrichtung erhalten bleiben, womit

$$v_{(h)} = 0 \tag{47}$$

ist.

— Die Zylinderschale verformt sich symmetrisch zur Angriffslinie der Kontaktlast. Es dürfen damit hier keine Verzerrungen erfolgen

$$\frac{\partial u_{(h)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_{(h)}}{\partial x} = 0, \tag{48}$$

da aber $v_{(h)} = 0$ ist, verkürzt sich die Randbedingung zu

$$\frac{\partial u_{(h)}}{\partial \varphi} = 0. \tag{49}$$

— Es folgt gleichfalls aus den Symmetrieverhältnissen, dass die Eindrückung der Zylinderschale entlang des untersuchten Erzeugers mit keiner Ringverdrehung verbunden ist

$$\chi = 0. \tag{50}$$

Die aufgeführten Randbedingungen können in einem linearen Gleichungssystem zusammengefasst werden, dessen Auflösung die Integrationskonstanten für den Fall q bzw. t ergibt.

$$1a \qquad A_1\left[\alpha_1\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)+\beta_1\right]+A_2\left[\alpha_1-\beta_1\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\right]$$
$$+A_3\left[\alpha_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)+\beta_2\right]+A_4\left[\alpha_2-\beta_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\right]=-\frac{a^3}{2K_h\eta\lambda},$$

$$1b \qquad -A_1-A_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)+A_3+A_4\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)=-\frac{a}{D_h}\frac{\lambda}{\eta},$$

$$2 \qquad A_1\left[\alpha_1-\beta_1\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\right]+A_2\left[-\alpha_1\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)-\beta_1\right]$$
$$+A_3\left[-\alpha_2+\beta_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\right]+A_4\left[\alpha_2\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)+\beta_2\right]=0,$$

$$3 \qquad -A_1\left[\alpha_1+\beta_1\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)\right]-A_2\left[\alpha_1\left(\frac{\eta}{\lambda}+1\right)-\beta_1\right]$$
$$+A_3\left[\alpha_2+\beta_2\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)\right]+A_4\left[\alpha_2\left(\frac{\eta}{\lambda}-1\right)-\beta_2\right]=0,$$

$$4 \qquad -A_1\alpha_1+A_2\beta_1-A_3\alpha_2+A_4\beta_2=0.$$

Die Gleichung 1a bezieht sich auf die radiale Kontaktlast q, 1b dagegen auf die axiale Kontaktlastkomponente t.

Die Gleichungen 2, 3 und 4 sind in beiden Fällen identisch.

Es sei nachdrücklich betont, dass die ermittelten Werte Funktionen von η bzw. i sind, und somit für jedes Glied der Fourierreihe neu bestimmt werden müssen.

7.1.5. Berücksichtigung aller Rippen

Übersichtshalber wurde bislang nur die vom Erzeuger $\varphi=0$ ausgehende Störung betrachtet. Die somit gewonnenen Ergebnisse bedürfen aber Korrekturen in zweifachem Sinne.

Erstens darf nicht vergessen bleiben, dass von der Angriffslinie der Kontaktlast zwei Störungen ausgehen: die eine in positiver, die andere in negativer Umfangsrichtung. Die beiden Einflüsse überlagern sich.

Zweitens ist dem Umstand Rechnung zu tragen, dass, aus der Symmetrie der Durchbildung folgend, alle Rippen in gleichem Masse belastet sind und auf die untersuchte Stelle einwirken. Die Summierung kann sinngemäss durch Anwendung des Maxwellschen Satzes erfolgen.

7.2. Balken-Hauptsystem

7.2.1. Ermittlung der Bettungsziffer

Unter Einwirkung einer, nach aussen gerichteten Kontaktlast drückt sich die Rippe gegen die nachgiebige Ringwickelung. Sind die Abstände zwischen den einzelnen Rippen gering, so kann die Verformung nach der Membran-

theorie (Kesselformel) berechnet werden. Bei einer spezifischen Spannstahlfläche F_w beträgt die Formänderung

$$\epsilon_w = \frac{a - \frac{h}{2}}{E_w F_w} p, \tag{51}$$

was einer Schwerpunktverschiebung

$$w_{(f)} = \epsilon_w \left(a + \frac{h}{2} + \frac{f}{3}\right) \tag{52}$$

entspricht. Die Bettungsziffer kann somit definitionsgemäss als

$$c = \frac{E_w F_w}{\left(a - \frac{h}{2}\right)\left(a + \frac{h}{2} + \frac{f}{3}\right)} \tag{53}$$

angegeben werden.

7.2.2. Differentialgleichung des gekrümmten Balkens

Der zum Hauptsystem gewählte Balken biegt sich unter Einwirkung der Betriebslasten (insbesondere infolge der Temperaturgefälle sowie der Ausmittigkeit der axialen Vorspannung) durch. Wird die Untersuchung nun mit Rücksicht auf die Kontaktlasten durchgeführt, so ist dem Umstand Rechnung zu tragen, dass der Träger schon über die Anfangskrümmung ρ verfügt.

Ohne uns hier mit der mathematischen Ableitung auseinanderzusetzen, geben wir die entsprechende Gleichung als

$$\frac{d^4 w_{(f)}}{dx^4} + \frac{2}{\rho^2} \frac{d^2 w_{(f)}}{dx^2} + c^* w_{(f)} = \frac{q}{K_f} \sin \eta \frac{x}{a} \tag{54}$$

an, wo die «erweiterte» Bettungsziffer

$$c^* = \frac{c}{K_f} + \frac{1}{\rho^4} \tag{55}$$

ist. Im folgenden verfährt man ähnlich zum Punkt 6.1.1. und sucht die Auflösung mit dem Ansatz

$$w_f = \sum_i q_i \Omega_i \sin \eta_i \frac{x}{a}. \tag{56}$$

Der Faktor Ω_i wird durch Einsetzen ermittelt und ist

$$\Omega_i = \frac{1}{K_f \left[\left(\frac{\eta_i}{a}\right)^4 - \frac{2}{\rho^2}\left(\frac{\eta_i}{a}\right)^2 + c^*\right]}. \tag{57}$$

Die Sinus-Funktion erfüllt die dem gelenkigen Verbund entsprechenden Randbedingungen.

7.2.3. Schnittgrössen aus der radialen Verschiebung

Wegen der einfachen Schreibweise empfiehlt es sich die Hilfsfunktion

$$\Omega_i^* = K_f \left[\left(\frac{\eta_i}{a} \right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \right] \Omega_i \tag{58}$$

einzuführen. Damit können die Schnittkräfte in der folgenden Form geschrieben werden

$$M_{(f)} = -K_f \left(\frac{d^2 w_{(f)}}{dx^2} + \frac{w_{(f)}}{\rho^2} \right) = \sum_i q_i \Omega_i^* \sin \eta_i \frac{x}{a} \tag{59}$$

und

$$Q_f = \frac{\pi}{l} \sum_i i \, q_i \Omega_i^* \cos \eta_i \frac{x}{a}. \tag{60}$$

7.2.4. Einfluss der axialen Kontaktlast

Unter Einwirkung einer Längskraft kommt die besondere Art der Lagerung nicht zur Geltung. Die Untersuchung kann dem Punkt 6.2.2 gleich durchgeführt werden.

Die axiale Verschiebung $u_{(f)}$ wird durch Integration der in eine Sinus-Reihe entwickelten Kontaktlast berechnet.

8. Ermittlung der wirklichen Kontaktlastgrössen

Die Verschiebungen der zwei Hauptsysteme wurden in der Tabelle II übersichtlich zusammengestellt. Die hier aufgeführten Werte sind durch die einwirkenden Betriebslasten bzw. Kontaktlastkomponenten q und t der Grösse 1 hervorgerufen.

Die tatsächlichen Werte der Kontaktlast können auf Grund der Verträglichkeitsbedingung bestimmt werden. Die Kontinuität des Tragwerkes erfordert nämlich, dass die Verformungen der zwei Bauteile sowohl in axialer als auch in radialer Richtung übereinstimmen. Die Überlegung führt zu einem linearen Bestimmungsgleichungssystem

$$\begin{aligned} w_{p(h)_i} + w_{T0(h)_i} + w_{T\Delta(h)_i} + q_i \sum\sum w_{q(h)_i} + t_i \sum\sum w_{t(h)_i} = \\ w_{T\Delta(f)_i} + q_i w_{q(f)_i} + w_{v(f)_i} + w_{w(f)_i}, \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned} u_{p(h)_i} + u_{T0(h)_i} + q_i \sum\sum u_{q(h)_i} + t_i \sum\sum u_{t(h)_i} = \\ u_{p(f)_i} + u_{T0(f)_i} + t_i u_{t(f)_i} + u_{v(f)_i}, \end{aligned} \tag{62}$$

was durch Einführung der Hilfswerte

$$R_i = \Phi_f [w_{T\Delta(f)_i} + w_{v(f)_i} + w_{w(f)_i}] - \Phi_h [w_{p(h)_i} + w_{T0(h)_i} + w_{T\Delta(h)_i}], \tag{63}$$

$$R_{q_i} = \sum\sum w_{q(h)_i} - w_{q(f)_i}, \tag{64}$$

$$R_{t_i} = \sum\sum w_{t(h)_i}, \tag{65}$$

Tabelle II. Übersicht der Trägerverformungen

Einfluss		Hauptsystem			
		Zylinderschale		Balken	
		radial	axial	radial	axial
Betriebslasten	Innendruck (p)	$w_{p(h)}$	$u_{p(h)}$	0	$u_{p(f)}$
	gleichmässige Erwärmung ($T\ 0$)	$w_{T\,0(h)}$	$u_{T\,0(h)}$	0	$u_{T\,0(f)}$
	ungleichmässige Erwärmung ($T\ \Delta$)	$w_{T\,\Delta(h)}$	0	$w_{T\,\Delta(f)}$	0
Kontaktlasten	radiale Komponente ($q=1$)	$\sum\sum w_{q(h)}$	$\sum\sum u_{q(h)}$	$w_{q(h)}$	0
	axiale Komponente ($t=1$)	$\sum\sum w_{t(h)}$	$\sum\sum u_{t(h)}$	0	$u_{t(j)}$
Vorspannkräfte	axiale Vorspannung (V)	0	0	$w_{v(f)}$	$u_{v(f)}$
	tangentiale Umwickelung (W)	0	0	$w_{w(f)}$	0

Alle Angaben beziehen sich auf das Glied i der trigonometrischen Reihenentwicklung.

bzw.
$$X_i = \Phi_f [u_{p(f)_i} + u_{T\,0(f)_i} + u_{v(f)_i}] - \Phi_h [u_{p(h)_i} + u_{T\,0(h)_i}], \tag{66}$$
$$X_{q_i} = \sum\sum u_{q(h)_i}, \tag{67}$$
$$X_{t_i} = \sum\sum u_{t(h)_i} - u_{t(f)_i}, \tag{68}$$

für die Kontaktlastkomponenten

$$q_i = \frac{R_i X_{ti} - X_i R_{ti}}{R_{qi} X_{t_i} - X_{q_i} R_{t_i}} \tag{69}$$

und
$$t_i = \frac{X_i R_{qi} - R_i X_{qi}}{X_{t_i} R_{q_i} - R_{t_i} X_{q_i}} \tag{70}$$

ergibt. Mit dem Faktor Φ_h bzw. Φ_f wird nach der Theorie von Dischinger der Endwert von Schwinden und Kriechen bezeichnet. Ihr Einfluss ist in die Berechnung unbedingt einzubeziehen, da wegen der unterschiedlichen Temperaturzustände der Bauteile auch daraus Zwangskräfte entstehen.

In Kenntnis von q und t können die wirklichen Schnittkräfte auf Grund des Superpositionsprinzips berechnet werden. Da alle statischen und Verformungsgrössen in trigonometrischen Reihen angegeben sind, muss der Rechengang selbstverständlich für jede Periode, d.h. für jedes Glied wiederholt werden. Dieser Umstand hat eine beachtliche Vergrösserung des Rechenaufwandes zur Folge, obwohl dank der guten Konvergenz der Beitrag schon des vierten Gliedes ($i=7$) erfahrungsgemäss unwesentlich ist.

9. Ermittlung der wirksamen Vorspannkraft

Abschliessend müssen wir uns nochmals mit den Werten der Vorspannkräfte V und W befassen, die bislang als Ausgangsdaten galten. Diese Annahme trifft nur in der ersten Näherung zu. In der Wirklichkeit erleiden nämlich die eingetragenen Vorspannkräfte einen Spannungsnachlass infolge der Wärmeausdehnung der Litzen. Die daraus entstehende Abnahme kann mit Rücksicht auf die örtlichen Temperaturänderungen eindeutig berechnet werden.

Viel schwieriger ist dem Umstand Rechnung zu tragen, dass sich der Behälter unter Betriebsumständen vergrössert. Die Erscheinung ruft ein zusätzliches Nachspannen der Stähle hervor, was, wie in einer Arbeit [4] eingehend behandelt worden ist, eine grundsätzliche Umlagerung der Kräfte zur Folge hat. Um den sekundären Vorgang rechnerisch zu erfassen, sind daher die Vorspannkräfte nach den Formeln

$$V = -\left[V^* + E_v F_v \Phi_f \left(2\frac{u_{(f)x=0}}{l} - \alpha T_v\right)\right], \tag{71}$$

bzw.

$$W = -\left[W^* + E_w F_w \Phi_f \left(\frac{w_{(f)x=l/2}}{a+\frac{k}{2}+f} - \alpha T_w\right)\right] \tag{72}$$

zu ermitteln. Die Grössen w und u sind am Anfang des Rechenganges unbekannt. Das Endergebnis kann somit nur durch sukzessive Approximation erzielt werden.

Danksagung

Die Untersuchungen wurden am Lehrstuhl für Stahlbetonkonstruktionen der TU Budapest durchgeführt. Der Verfasser ist für die vielfachen Anregungen und ständige Unterstützung den Herren Prof. Dr.-Ing. E. Bölcskei sowie Dr.-Ing. habil. J. Szalai zum aufrichtigen Dank verpflichtet.

Schrifttum

1. Sebök, F.: Beitrag zur Abschirmwirkung gerissener Betonschilde. Kerntechnik, 1970. 11.
2. Sebök, F.: Beitrag zur Berechnung kreiszylindrischer Behälter unter Einwirkung von Gamma- und Neutronenstrahlung. Bautechnik, 1965. 5.
3. Bremer, F.: Multi-layer pressure vessel. Krupp, Technische Mitteilungen, 1967. 12.
4. Sebök, F., Tassi, G.: Auswirkungen der Vorspannung auf die Rissbeschränkung bei thermisch beanspruchten dickwandigen Gefässen. 6. FIP Kongress, Prag 1970.

Zusammenfassung

Die für den zylinderförmigen, mit axialen Rippen ausgesteiften Spannbeton-Druckbehälter hier besprochene Berechnungsmethode fusst auf dem Kraftgrössenverfahren. Als Hauptsysteme wurden die niedrige Kreiszylinderschale sowie der auf der Ringwicklung elastisch aufliegende Balken gewählt. Alle statischen und Verformungsgrössen wurden in trigonometrische Reihen entwickelt. Die Methode gestattet, die sekundären Einflüsse in die Berechnung auch einzubeziehen.

Summary

The discussed method for the calculation of the cylindrical pre-stressed concrete vessels with axial joists is basing on the force-method. The cylindrical shell as well as the beam founded elastically on the nerve ring, have been chosen as basic systems. All the static values and the deformations have been developed in trigonometrical series. This method allows to include the secondary influences into the calculation.

Résumé

La méthode de calcul exposée ici pour le réservoir en béton précontraint cylindrique renforcé par des nervures axiales base sur la méthode des forces. On a choisi comme système fondamental le manteau cylindrique ainsi que les nervures encastrées élastiquement dans la ceinture de base. Les grandeurs statiques et les déformations ont été développées en des séries trigonométriques. Cette méthode permet de considérer les influences secondaires dans le calcul.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Beitrag zum plastischen Kippen von Trägern mit nichtformtreuem I-Querschnitt

Contribution to the Plastic Tipping of Beams with Non-conformed I-Section

Contribution au déversement plastique de poutres à section en I non-conforme

WERNER WARKENTHIN
Dr.-Ing., DDR

1. Problemstellung

Alle bisher bekanntgewordenen Arbeiten auf dem Gebiet des plastischen Kippens (siehe Literaturzusammenstellung in [1]) gingen stets von den Ansätzen der klassischen Kipptheorie aus und setzten einen in seiner Ebene unverformbaren, d. h. formtreuen Trägerquerschnitt voraus, ohne zu prüfen, inwieweit eine solche Annahme in dem jeweils behandelten Berechnungsfall gerechtfertigt ist. Die Frage nach der Berechtigung der Annahme formtreuer Trägerquerschnitte bedarf jedoch für das plastische Kippen gerade deshalb dringend einer Antwort, weil entsprechende Untersuchungen über das Torsions- und Kippverhalten dünnwandiger Stäbe im elastischen Bereich (siehe [2]–[8]) gezeigt haben, dass bei aus mehreren Reckteckelementen zusammengesetzten dünnwandigen Querschnitten die Annahme der Querschnittsformtreue nur bei Vorhandensein bestimmter geometrischer Relationen und einer bestimmten Mindestzahl von Querschnittsaussteifungen gerechtfertigt ist; anderenfalls ist die effektiv wirksame St.-Venantsche Drillsteifigkeit geringer als der nach der herkömmlichen Stabtheorie berechnete Wert GJ_D. In solchen Fällen mit nicht ausreichend gewährleisteter Querschnittsformtreue errechnet man deshalb mit den Ansätzen der klassischen Kipptheorie zu hohe Kipplasten. Letzteres trifft insbesondere für gedrungene quersteifenlose I-Träger zu, und es ist zu vermuten, dass der Einfluss des Verlustes der Querschnittsformtreue bei diesem Trägertyp im plastischen Verformungsbereich sogar noch stärkere Auswirkungen auf die Kipplast hat als im elastischen Bereich.

Als Beitrag zur Klärung dieses Problems wird daher im folgenden das

Kippverhalten von geraden Trägern mit gleichbleibendem, dünnwandigem, doppelsymmetrischem I-Querschnitt unter reiner Biegung im elastisch-plastischen Verformungsbereich in Abhängigkeit vom Grad der Querschnittsaussteifung untersucht, wobei für die Trägerenden eine ideale Gabellagerung angenommen wird.

2. Theoretische Grundlagen

2.1. Kipp-Differentialgleichungssystem

Fig. 1 zeigt den Querschnitt eines der betrachteten I-Träger vor und nach Beginn des Kippens.

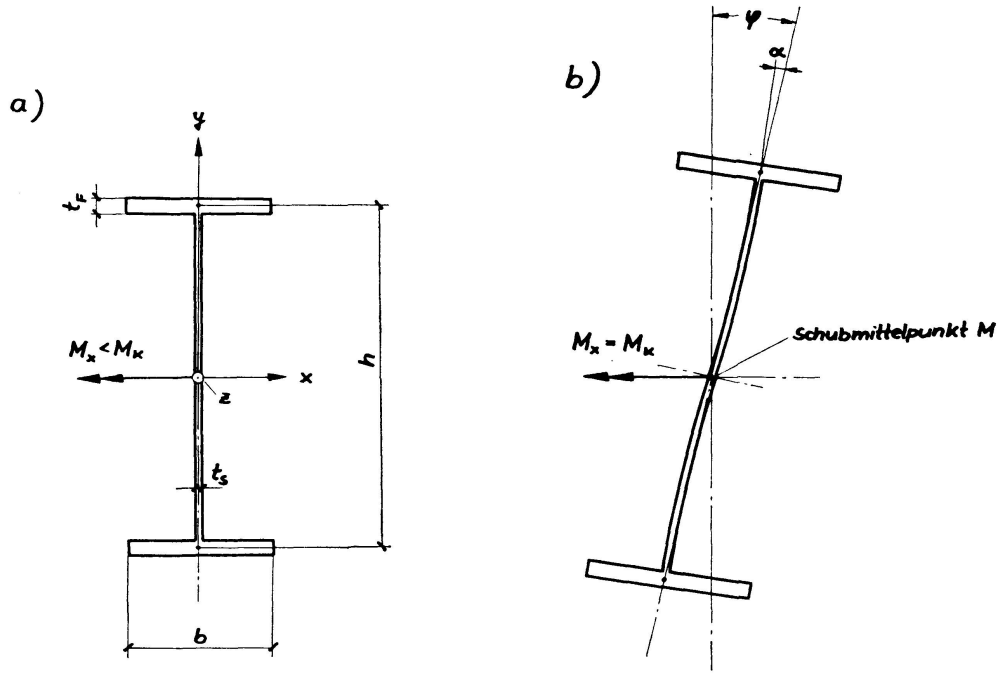


Fig. 1.

Das wesentliche Merkmal der während des Kippvorganges eintretenden Querschnittsverformung ist die s-förmige Verbiegung des Steges, welche von der klassischen Kipptheorie vernachlässigt wird. Im Zusammenhang mit dieser s-förmigen Stegverbiegung verdrehen sich die Flansche geringer als der Steg.

Setzt man voraus, dass alle gedrückten Querschnittsteile hinreichend beulsicher sind und dass auf Grund der gewählten Flanschabmessungen ein Drillknicken des Druckflansches von vornherein ausgeschlossen ist, so kann man nach Loos [8] die im instabilen Gleichgewichtszustand aus der Faserschrägstellung entstehenden Drillmomentenanteile der Biegenormalspannungen in den Flanschen vernachlässigen und bei Gabellagerung der Trägerenden den Kippzustand der betrachteten I-Träger mit hinreichender Genauigkeit durch folgendes Differentialgleichungssystem beschreiben:

$$D_{Fl}[\varphi(\zeta)-\alpha(\zeta)]''+\frac{E\,t_s^3}{12\,(1-\nu^2)}\frac{l^2}{h}c\,\alpha(\zeta)=0, \tag{1}$$

$$-W\varphi''''(\zeta)+l^2 D\varphi''(\zeta)-2\,l^2 D_{Fl}\alpha''(\zeta)+\frac{l^4 M_K^2}{B_y}\varphi(\zeta)=0. \tag{2}$$

Die Herleitung und der Nachweis hinreichender Genauigkeit dieser Differentialgleichungen für das Kippen wurden von Loos nur für ideal elastische Verhältnisse gegeben. Beide Differentialgleichungen gelten jedoch prinzipiell ebenso auch für Träger aus elastisch-plastischem Werkstoff. Deshalb wurden hier alle in [8] verwendeten elastischen Steifigkeitswerte durch die entsprechenden Grössen bei elastisch-plastischer Verformung ersetzt. Es bedeutet:

M_K kritischer Wert des Biegemomentes M_x (= Kippmoment).

l Trägerlänge.

h Trägerhöhe (= Schwerpunktabstand der Flansche).

b Flanschbreite.

t_s Stegdicke.

t_F Flanschdicke.

ζ dimensionslose Koordinate in Trägerlängsrichtung z

$$\zeta=\frac{z}{l}.$$

$\varphi(\zeta)$ Kippdrehwinkel, der hier als «Stabdrehwinkel» (d.h. mittlere Neigung) des Steges an der Stelle ζ aufgefasst wird.

$\alpha(\zeta)$ Winkel, um den der Flanschdrillwinkel kleiner als der Kippdrehwinkel $\varphi(\zeta)$ ist.

$(\ldots)'$ Ableitung nach ζ.

E Elastizitätsmodul.

G Gleitmodul.

ν Poissonzahl.

B_y Biegesteifigkeit über die minimale Querschnittshauptachse. Im elastischen Bereich ist B_y gleich $E\,J_y$, wobei J_y das minimale Hauptträgheitsmoment darstellt.

D St.-Venantsche Drillsteifigkeit des Gesamtquerschnittes. Unter ideal elastischen Verhältnissen ist D gleich $G\,J_D$, wobei für die betrachteten I-Träger

$$J_D=J_{D\,Steg}+2\,J_{D\,Fl}\approx\tfrac{1}{3}h\,t_s^3+\tfrac{2}{3}b\,t_F^3. \tag{3}$$

D_{Fl} St.-Venantsche Drillsteifigkeit eines Flansches. Im Elastischen ist D_{Fl} gleich $G\,J_{DFl}$.

$$J_{D\,Fl}\approx\tfrac{1}{3}b\,t_F^3. \tag{4}$$

W Wölbsteifigkeit. Im elastischen Bereich ist W gleich $E\,C_M$, wobei der auf den Schubmittelpunkt M bezogene Wölbwiderstand C_M bei den zu untersuchenden dünnwandigen I-Querschnitten näherungsweise aus

folgender Beziehung errechnet werden kann:

$$C_M \approx J_y \frac{h^2}{4}. \tag{5}$$

c Steifigkeitskoeffizient des Steges. Unter ideal elastischen Verhältnissen ist $c = 6$.

2.2. Biegemoment bei elastisch-plastischer Biegung

Unter der Voraussetzung, dass das Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Trägerwerkstoffs punktsymmetrisch sei und demzufolge der Bedingung

$$\sigma(\epsilon) = -\sigma(-\epsilon) \tag{6}$$

genügt, ergibt sich auf der Grundlage der technischen Biegelehre für das Biegemoment M_x der betrachteten I-Träger folgender Ansatz:

$$M_x = b\, t_F\, h\, \sigma_R + \frac{t_s}{2}\left(\frac{h}{\epsilon_R}\right)^2 \int_0^{\epsilon_R} \sigma(\epsilon)\, \epsilon\, d\epsilon. \tag{7}$$

Darin bedeutet:

ϵ Dehnung in Richtung der Trägerlängsachse z

$$\epsilon \equiv \epsilon_z.$$

ϵ_R Randdehnung. Da der I-Querschnitt als dünnwandig vorausgesetzt wird, sei hier ϵ_R gleich der mittleren Dehnung in den Flanschen (= Dehnung im Flanschschwerpunkt).

σ die nach dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm $\sigma(\epsilon)$ der Dehnung ϵ zugeordnete Spannung in Richtung z

$$\sigma \equiv \sigma_z.$$

σ_R Randspannung, die bei den hier betrachteten dünnwandigen I-Querschnitten gleich der Spannung im Schwerpunkt der Flansche gesetzt wird.

$$\sigma_R = \sigma(\epsilon = \epsilon_R). \tag{8}$$

Die in der Praxis auftretenden Werte des Biegemomentes M_x sind nach oben hin begrenzt durch das nur im theoretischen Idealfall zu erreichende vollplastische Grenzmoment M_{xgr}. Unter dessen Wirkung sollen gedachtermassen die Spannungen σ überall im Querschnitt die Fliessspannung σ_F annehmen. In Wirklichkeit ist M_x immer kleiner als M_{xgr}, weil vor Erreichen von M_{xgr} Risse in den bis zur Bruchdehnung ϵ_B gereckten Randzonen auftreten.

Bei den betrachteten I-Trägern berechnet sich das vollplastische Grenzmoment zu

$$M_{xgr} = \sigma_F\, h\, (b\, t_F + \tfrac{1}{4}\, h\, t_s). \tag{9}$$

Das Verhältnis M_x/M_{xgr} ist dann ein Mass für die Plastifizierung des Trägers und soll als Plastizierungsgrad bezeichnet werden.

2.3. Spannungs-Dehnungs-Gesetz

Eine hinreichend genaue mathematische Formulierung des natürlichen Spannungs-Dehnungs-Diagramms $\sigma(\epsilon)$, des Tangentenmoduls

$$T(\epsilon) = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \tag{10}$$

und des Sekantenmoduls

$$S(\epsilon) = \frac{\sigma(\epsilon)}{\epsilon} \tag{11}$$

wird als gegeben vorausgesetzt. Geeignete Lösungsansätze, mit denen die bei Berechnung der Biegemomente M_x nach Gleichung (7) oftmals entstehenden Integrationsschwierigkeiten leicht umgangen werden können, sind in [9] zu finden.

2.4. Massgebende Plastizitätstheorie

Auf Grund der bisher auf dem Gebiet des plastischen Beulens und des plastischen Kippens durchgeführten Forschung kann verallgemeinernd festgestellt werden (siehe [1]), dass überall dort, wo im plastischen Bereich mit mehrachsigen Spannungszuständen verbundene Stabilitätsprobleme zu untersuchen sind, weder die Plastizitätstheorie von Hencky noch das Prandtl-Reuss-Gesetz, sondern differentielle Verzerrungs-Spannungs-Gesetze zugrunde zu legen sind, die auch die von Haus aus vorhandenen, z.B. als Folge des Walzens entstandenen Werkstoffanisotropien mit berücksichtigen. Im elastischen Bereich kann dagegen der Werkstoff weiterhin im Sinne der klassischen Theorie als quasiisotrop angesehen werden, weil sorgfältige Messungen (siehe z.B. [10)] bestätigt haben, dass das ausgeprägte anisotrope Verformungsverhalten erst bei Beanspruchungen oberhalb der Proportionalitätsgrenze beginnt.

Da dünnwandige I-Querschnitte vorausgesetzt wurden, kann man im weiteren stets mit ebenen Spannungszuständen rechnen. Im Allgemeinfalle können dabei folgende Spannungskomponenten auftreten:

σ_z Normalspannungen in Trägerlängsrichtung z.
σ_s Normalspannungen in der Flansch- bzw. Stegebene rechtwinklig zur Längsrichtung z.
τ_{zs} Schubspannungen in der Flansch- bzw. Stegebene.

Wird der Werkstoff, wie zuvor gefordert, als elastisch-isotrop, plastisch-anisotrop angesehen, so kann unter der Voraussetzung, dass der Werkstoff

zum ersten Male plastisch deformiert wird, sein Spannungs-Verformungs-Verhalten wie folgt beschrieben werden:

Vergleichsspannung:

$$\sigma_v^2 = f_z \sigma_z^2 - f_{zs} \sigma_z \sigma_s + f_s \sigma_s^2 + 3 f_\tau \tau_{zs}^2, \tag{12}$$

wobei f_z, f_s, f_{zs} und f_τ von der jeweiligen Plastizierung abhängige Anisotropieparameter darstellen, die im Falle der Isotropie, also im elastischen Verformungsbereich, alle gleich 1 sind.

Verzerrungs-Spannungs-Gesetze:

bei Entlastung oder neutraler Spannungsänderung ($\delta \sigma_v \leqq 0$):

$$\delta \epsilon_z = \frac{1}{E} (\delta \sigma_z - \nu \delta \sigma_s), \tag{13a}$$

$$\delta \epsilon_s = \frac{1}{E} (\delta \sigma_s - \nu \delta \sigma_z), \tag{13b}$$

$$\delta \gamma_{zs} = \frac{1}{G} \delta \tau_{zs}, \tag{13c}$$

bei Belastung ($\delta \sigma_v > 0$):

$$\delta \epsilon_z = \frac{1}{E} (\delta \sigma_z - \nu \delta \sigma_s) + (\tfrac{2}{3} f_z \sigma_z - \tfrac{1}{3} f_{zs} \sigma_s)\, d\lambda, \tag{14a}$$

$$\delta \epsilon_s = \frac{1}{E} (\delta \sigma_s - \nu \delta \sigma_z) + (\tfrac{2}{3} f_s \sigma_s - \tfrac{1}{3} f_{zs} \sigma_z)\, d\lambda, \tag{14b}$$

$$\delta \gamma_{zs} = \frac{1}{G} \delta \tau_{zs} + 2 f_\tau \tau_{zs}\, d\lambda. \tag{14c}$$

Hierbei bedeuten:

$\delta \sigma_v, \delta \sigma_z, \delta \sigma_s, \delta \tau_{zs}$	differentielle Änderungen der Spannungen.
$\delta \epsilon_z, \delta \epsilon_s, \delta \gamma_{zs}$	differentielle Änderungen der Verzerrungen.
E	Elastizitätsmodul.
G	Gleitmodul.
ν	Poissonzahl.
$d\lambda$	skalarer Faktor differentieller Grösse, der aus der Beziehung

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{\delta \epsilon_r^p}{\sigma_v} \tag{15}$$

zu berechnen ist, wobei $\delta \epsilon_v^p$ die differentielle Änderung des plastischen Anteiles der Vergleichsdehnung ϵ_v darstellt.

$$\delta \epsilon_v^p = \left\{ \frac{1}{f_s f_z - \frac{1}{4} f_{zs}^2} \left(f_s \left[\delta \epsilon_z - \frac{1}{E} (\delta \sigma_z - \nu \, \delta \sigma_s) \right]^2 \right. \right.$$
$$+ f_z \left[\delta \epsilon_s - \frac{1}{E} (\delta \sigma_s - \nu \, \delta \sigma_z) \right]^2 \qquad (16)$$
$$\left. + f_{zs} \left[\delta \epsilon_z - \frac{1}{E} (\delta \sigma_z - \nu \, \delta \sigma_s) \right] \left[\delta \epsilon_s - \frac{1}{E} (\delta \sigma_s - \nu \, \delta \sigma_z) \right] \right)$$
$$\left. + \frac{1}{3 f_\tau} \left[\delta \gamma_{zs} - \frac{1}{G} \delta \tau_{zs} \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

2.5. Steifigkeitsberechnung des infolge Biegung teilweise plastizierten Trägers

Es wird angenommen, dass die zu untersuchenden Träger im unbelasteten Zustand weder verdreht noch verbogen seien und dass der Biegevorgang im stabilen Gleichgewichtszustand exakt über die maximale Querschnittsachse x—x erfolgt. Es gelten die Annahmen der technischen Biegelehre (inkompressibler Werkstoff und lineare Dehnungsverteilung über der Trägerhöhe nach der Hypothese von Bernoulli-Navier).

Unter diesen Voraussetzungen sind in den zu untersuchenden I-Trägern im betrachteten Fall der reinen Biegung vor Erreichen der Stabilitätsgrenze nur Längsspannungen $\sigma \equiv \sigma_z$ vorhanden, so dass

$$\sigma_s = \tau_{zs} = 0. \qquad (17)$$

Die Verknüpfung zwischen diesen Längsspannungen σ_z und dem Biegemoment M_x ist durch die Gleichung (7) gegeben; der Verlauf von σ_z über der Trägerhöhe folgt dem Spannungs-Dehnungs-Gesetz $\sigma(\epsilon)$ entsprechend der linearen Dehnungsverteilung

$$\epsilon \equiv \epsilon_z = y \frac{2 \epsilon_R}{h}. \qquad (18)$$

Bei Beginn des Kippens treten dann durch die im Verzweigungspunkt beginnende seitliche Ausbiegung, gekoppelt mit einer entsprechenden Querschnittsverdrehung, sowie durch die in der gleichen Zeit mögliche Vergrösserung des Biegemomentes M_x zu dem kritischen Grundspannungszustand $\sigma_z \to \sigma_{z\,krit}$ noch Spannungsänderungen $\delta \sigma_z$, $\delta \sigma_s$ und $\delta \tau_{zs}$ hinzu, denen allgemein nach den Gleichungen (13a, b, c) und (14a, b, c) Verzerrungsänderungen $\delta \epsilon_z$, $\delta \epsilon_s$ und $\delta \gamma_{zs}$ zugeordnet sind. Während die infolge Querschnittsverformung entstehende Spannungsänderung $\delta \sigma_s$ nur im Steg der betrachteten I-Träger auftritt, treten die Spannungsänderungen $\delta \sigma_z$ in allen Querschnittsteilen auf und setzen sich aus folgenden drei Anteilen zusammen:

— Biegespannungen $\delta \sigma_z (\delta M_y)$ infolge des beim seitlichen Ausweichen entstehenden Biegemomentes δM_y;
— Wölbnormalspannungen $\delta \sigma_z (\delta M_z)$ infolge des mit dem Kippvorgang wirksam werdenden Torsionsmomentes δM_z;

— Biegespannungen $\delta\sigma_z(\delta M_x)$ infolge einer auch unmittelbar bei Beginn des Kippvorganges noch fortwährenden Laststeigerung δM_x. Letztere ist abhängig von der Grösse der Belastungsgeschwindigkeit.

Um den ungünstigsten Fall mit dem kleinsten Kippmoment zu erfassen, wird nach der Theorie von Engesser-Shanley angenommen, dass die Belastungsgeschwindigkeit so gross ist, dass während des Kippvorganges überall im Träger $\delta\sigma_v > 0$ ist und demzufolge für die Verknüpfung der Verzerrungs- und Spannungsänderungen nur die Gleichungen (14a, b, c) massgebend sind.

Auf Grund von (17) erhält man dann aus (12):

$$\sigma_v = \sqrt{f_z}\,\sigma_z, \tag{19}$$

aus (14a, b, c):

$$\delta\epsilon_z = \frac{1}{E}(\delta\sigma_z - \nu\,\delta\sigma_s) + \delta\epsilon_z^p, \tag{20a}$$

$$\delta\epsilon_s = \frac{1}{E}(\delta\sigma_s - \nu\,\delta\sigma_z) - \frac{1}{2}\frac{f_{zs}}{f_z}\delta\epsilon_z^p, \tag{20b}$$

$$\delta\gamma_{zs} = \frac{1}{G}\delta\tau_{zs}, \tag{20c}$$

wobei

$$\delta\epsilon_z^p = \tfrac{2}{3} f_z\,\sigma_z\,d\lambda \tag{21}$$

den plastischen Anteil der Verzerrungsänderung $\delta\epsilon_z$ darstellt. Mit Einführung des bei einachsiger Zug-Druck-Beanspruchung in Trägerlängsrichtung gemessenen Tangentenmoduls

$$T(\epsilon_z) = \frac{d\sigma_z}{d\epsilon_z} \tag{22}$$

kann man mit der aus Fig. 2 abzulesenden Beziehung

$$\delta\epsilon_z^p = \frac{\delta\sigma_z}{T(\epsilon_z)} - \frac{\delta\sigma_z}{E} \tag{23}$$

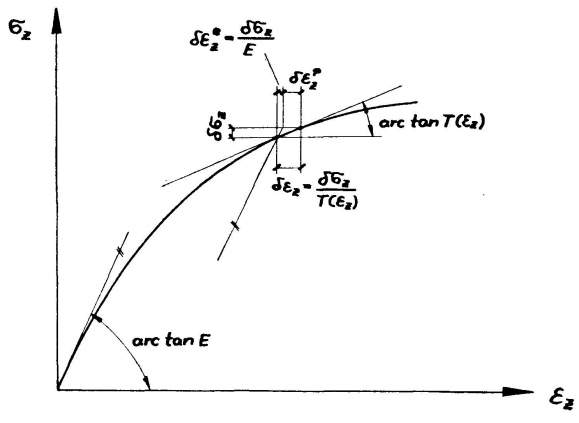


Fig. 2.

an Stelle der Gleichungen (20a) und (20b) auch folgendes schreiben:

$$\delta\epsilon_z = \frac{\delta\sigma_z}{E} - \nu\frac{\delta\sigma_s}{E} + \frac{\delta\sigma_z}{T(\epsilon_z)} - \frac{\delta\sigma_z}{E} = \frac{\delta\sigma_z}{T(\epsilon_z)} - \nu\frac{\delta\sigma_s}{E}, \tag{24a}$$

$$\delta\epsilon_s = \frac{\delta\sigma_s}{E} - \nu\frac{\delta\sigma_z}{E} - \frac{1}{2}\frac{f_{zs}}{f_z}\left(\frac{\delta\sigma_z}{T(\epsilon_z)} - \frac{\delta\sigma_z}{E}\right) = \frac{\delta\sigma_s}{E} - \delta\sigma_z\left[\frac{\nu}{E} + \frac{1}{2}\frac{f_{zs}}{f_z}\left(\frac{1}{T(\epsilon_z)} - \frac{1}{E}\right)\right]. \tag{24b}$$

Die Gleichungen (20c), (24a) und (24b) bilden die theoretische Grundlage für die Berechnung der Steifigkeitswerte der hier betrachteten rein auf Biegung beanspruchten dünnwandigen I-Träger. Sie zeigen, dass lediglich die Spannungsänderungen $\delta\sigma_z$ plastische Verzerrungsanteile liefern.

Daraus ergeben sich folgende Schlussfolgerungen:

— Der spezifische Gleitwiderstand und demzufolge auch die St.-Venantsche Drillsteifigkeit der einzelnen Querschnittselemente sind unabhängig vom Plastizierungsgrad des Trägers (siehe Formel 20a). Das heisst, dass

$$D = GJ_D, \tag{25}$$

$$D_{Fl} = GJ_{DFl}. \tag{26}$$

— Ebenso ist auf Grund von Formel (24b) der Widerstand des Stegbleches gegenüber seiner mit Beginn des Kippvorganges einsetzenden s-förmigen Verbiegung rechtwinklig zur Ebene $y-z$, wobei Biegespannungen $\delta\sigma_s$ und entsprechende Dehnungsanteile $\delta\sigma_s/E$ auftreten, unabhängig von den durch die Längsspannungen σ_z und $\delta\sigma_z$ hervorgerufenen plastischen Verformungen. Der in Gleichung (1) enthaltene Steifigkeitskoeffizient des Steges ist deshalb bei reiner Biegung stets

$$c = 6. \tag{27}$$

— Allein bei der Berechnung der Biegesteifigkeit B_y und der Wölbsteifigkeit W des durch die Biegespannungen σ_z teilweise plastizierten dünnwandigen I-Trägers ist entsprechend Formel (24a) im Ansatz der Steifigkeitsanteile der einzelnen differentiellen Querschnittselemente, in Abhängigkeit von der nach Gleichung (18) linear ansteigenden Dehnung ϵ_z, an Stelle von E der entsprechende Tangentenmodul $T(\epsilon_z)$ zu setzen. Man erhält:

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{1}{12}\int_{-y_R}^{+y_R} T(\epsilon_z)\, b^3(y)\, dy \qquad \text{(Gleichung (18) einsetzen!)} \\ &= 2\,T(\epsilon_R)\frac{b^3 t_F}{12} + \frac{h\,t_s^3}{12}\frac{1}{\epsilon_R}\underbrace{\int_0^{\epsilon_R} T(\epsilon_z)\, d\epsilon_z}_{=\sigma(\epsilon_R)} \\ &= 2\,T(\epsilon_R)\,J_{yFl} + S(\epsilon_R)\,J_{ySt}, \end{aligned} \tag{28}$$

wobei J_{yFl} und J_{ySt} die Trägheitsmomente eines Flansches sowie des Steges bezogen auf die y-Achse sind.

$$W = \int_F T(\epsilon_z, s)\, \omega^2(s)\, t(s)\, ds, \tag{29}$$

wobei $\omega(s)$ die auf den Schubmittelpunkt bezogene Einheitsverwölbung in Abhängigkeit von der entlang der Querschnittsmittellinie verlaufenden Koordinate s darstellt. $t(s)$ ist die Wanddicke an der jeweiligen Schnittstelle s.

Da beim I-Querschnitt der Steg als quasi-wölbfrei angesehen wird, gilt für die hier interessierenden, mit $M_x = \text{konst}$ plastisch gebogenen, dünnwandigen I-Träger

$$W = T(\epsilon_R)\, C_M. \tag{30}$$

Damit sind für den Fall der reinen Biegung alle in den Differentialgleichungen (1) und (2) enthaltenen Steifigkeitswerte bestimmt.

In Auswertung der Fachliteratur ist es jedoch notwendig, an dieser Stelle noch zu einigen Ergebnissen der Plastizitätstheorie von Hencky Stellung zu nehmen, da diese Theorie in vielen früher zum Problem des plastischen Kippens veröffentlichten Beiträgen eine besondere Rolle spielt.

Nach der Plastizitätstheorie von Hencky erhält man für plastisch gebogene Träger bei anschliessender Torsionsbeanspruchung generell kleinere St.-Venantsche Drillsteifigkeiten als nach den Formeln (25) und (26) und speziell für die s-förmigen Stegverformungen eines I-Querschnittes Steifigkeitskoeffizienten $c < 6$. Für den Fall, dass der Stegrand die Fliessgrenze σ_F erreicht, müsste sich dann bei einem rein auf Biegung beanspruchten I-Träger, als Sonderfall der s-förmigen Stegverformungen, längs der Flansch-Steg-Verbindung sogar ein scharnierartiges plastisches Gelenk bilden. Letzteres konnte jedoch bei plastischen Biege- und Kippversuchen nicht beobachtet werden. Ebenso konnte in sorgfältig durchgeführten Versuchen von Neal [11] nachgewiesen werden, dass bei Trägern mit Vollquerschnitt eine Abminderung der St.-Venantschen Drillsteifigkeit auf Grund vorangegangener plastischer Biegung nicht erforderlich ist. Wenn also bei unausgesteiften, kurzen, plastisch gebogenen und anschliessend geringfügig tordierten I-Trägern geringere effektive St.-Venantsche Drillsteifigkeiten als GJ_D festzustellen sind, so ist das, wie im folgenden gezeigt wird, in der Hauptsache auf den Verlust der Querschnittsformtreue zurückzuführen. (Etwaige Einflüsse von Imperfektionen sollen hier ausser acht bleiben!)

3. Berechnung der Engesser-Shanleyschen Kippmomente querausgesteifter I-Träger in Abhängigkeit von der Steifenzahl

Da Gabellagerung der Trägerenden sowie konstanter Biegemomenten- und Querschnittsverlauf vorausgesetzt sind, werden unter der Annahme, dass die Stegquersteifen gleichmässig über die Trägerlänge verteilt, extrem drillweich und hinsichtlich Biegung rechtwinklig zur Stegebene quasistarr sind, für die

Variablen φ und α folgende Näherungslösungen gewählt:

$$\varphi = a_1 \sin \pi \zeta, \tag{31}$$

$$\alpha = \begin{cases} b_1 \sin \pi \zeta, & \text{für } 0 \leqq \zeta \leqq \dfrac{1}{2m} \text{ und } 1 - \dfrac{1}{2m} \leqq \zeta \leqq 1, \\ \dfrac{b_1}{2} \sin \pi \zeta \,(1 - \cos 2m \pi \zeta), & \text{für } \dfrac{1}{2m} \leqq \zeta \leqq 1 - \dfrac{1}{2m}. \end{cases} \tag{32}$$

Dabei bedeutet:

m Anzahl der von den Stegquersteifen abgegrenzten Stegfelder (siehe Fig. 3). Die Zahl der Stegquersteifen ist dann $m+1$.

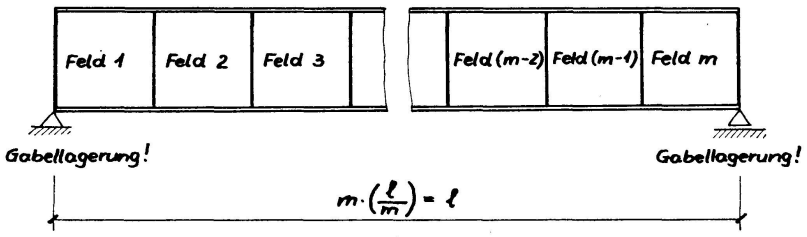


Fig. 3.

Mit $c=6$ entsprechend (27) erhält man damit aus (1) und (2) folgende Galerkinsche Gleichungen:

aus (1):

$$a_1 \pi^2 \int_0^1 \frac{\varphi'' \alpha}{a_1 b_1 \pi^2} d\zeta - b_1 \pi^2 \int_0^1 \frac{\alpha'' \alpha}{b_1^2 \pi^2} d\zeta + b_1 \frac{1}{2(1-\nu^2)} \frac{l^2}{h} \frac{E t_s^3}{D_{Fl}} \int_0^1 \frac{\alpha^2}{b_1^2} d\zeta = 0, \tag{33}$$

aus (2):

$$\begin{aligned} -a_1 \pi^4 W \int_0^1 \frac{\varphi'''' \varphi}{a_1^2 \pi^4} d\zeta + a_1 \pi^2 l^2 D \int_0^1 \frac{\varphi'' \varphi}{a_1^2 \pi^2} d\zeta \\ + a_1 \frac{M_K^2 l^4}{B_y} \int_0^1 \frac{\varphi^2}{a_1^2} d\zeta - b_1 2 D_{Fl} l^2 \pi^2 \int_0^1 \frac{\alpha'' \varphi}{a_1 b_1 \pi^2} d\zeta = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Nach Einsetzen von (31) und (32) und Auflösen der Integrale wurde daraus folgendes Gleichungssystem gewonnen:

aus (33):

$$-a_1 + b_1 \left[k_2(m) + \frac{k_3(m)}{2(1-\nu^2)\pi^2} \frac{l^2}{h} \frac{E t_s^3}{D_{Fl}} \right] = 0, \tag{35}$$

aus (34):

$$a_1 \left(-W \frac{\pi^2}{l^2} - D + \frac{M_K^2 l^2}{B_y \pi^2} \right) + b_1 2 D_{Fl} k_1(m) = 0 \tag{36}$$

mit

$$k_1(m) = \frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{m}-\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{m}-\frac{(-1)^m}{2\pi}\left[\frac{(2m-1)^2}{m-1}\sin\left(m+\frac{1}{m}-2\right)\pi + \frac{(2m+1)^2}{m+1}\sin\left(m-\frac{1}{m}\right)\pi\right]\right\}, \tag{37}$$

$$k_2(m) = \frac{1}{N}\left\{\frac{1}{2}+\frac{3}{2m}-\frac{3}{2\pi}\sin\frac{\pi}{m}+(4m^2+1)\left[\frac{m-1}{4m}+\frac{\sin\left(1-\frac{1}{m}\right)\pi}{4\pi}\right] - \frac{(-1)^m}{2\pi}\left[\frac{2m^2-2m+1}{m-1}\sin\left(m+\frac{1}{m}-2\right)\pi + \frac{2m^2+2m+1}{m+1}\sin\left(m-\frac{1}{m}\right)\pi\right] + \frac{1}{8\pi}\left[(2m-1)\sin\left(2m+\frac{1}{m}-3\right)\pi+(2m+1)\sin\left(2m-\frac{1}{m}-1\right)\pi\right]\right\}, \tag{38}$$

$$k_3(m) = \frac{1}{N}\left\{\frac{1}{2}+\frac{3}{2m}-\frac{3}{2\pi}\sin\frac{\pi}{m}-\frac{(-1)^m}{2\pi}\left[\frac{\sin\left(m+\frac{1}{m}-2\right)\pi}{m-1}+\frac{\sin\left(m-\frac{1}{m}\right)\pi}{m+1}\right] + \frac{m-1}{4m}+\frac{\sin\left(1-\frac{1}{m}\right)\pi}{4\pi}+\frac{\sin\left(2m+\frac{1}{m}-3\right)\pi}{8\pi(2m-1)}+\frac{\sin\left(2m-\frac{1}{m}-1\right)\pi}{8\pi(2m+1)}\right\}, \tag{39}$$

$$N = 1+\frac{1}{m}-\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{m}-\frac{(-1)^m}{2\pi}\left[\frac{\sin\left(m+\frac{1}{m}-2\right)\pi}{m-1}+\frac{\sin\left(m-\frac{1}{m}\right)\pi}{m+1}\right]. \tag{40}$$

m	k_1	k_2	k_3
1	1,000	1,000	1,000
2	0,53780	3,9270	0,80486
3	0,51160	9,1257	0,76784
4	0,50496	16,262	0,75773
5	0,50255	25,353	0,75402
6	0,50148	36,416	0,75233
8	0,50062	64,498	0,75099
10	0,50030	100,548	0,75052
15	0,50005	225,619	0,75015
∞	0,5	∞	0,75

Mit wachsendem m nähern sich k_1, k_2 und k_3 asymptotisch den Funktionen

$$k_1 \approx \tfrac{1}{2}, \tag{37a}$$

$$k_2 \approx m^2+\tfrac{3}{4}, \tag{38a}$$

$$k_3 \approx \tfrac{3}{4}. \tag{39a}$$

Durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante der Gleichungen (35) und (36) erhält man unter Beachtung von (25) und (26) für das Engesser-Shanleysche Kippmoment schliesslich folgende Beziehung:

$$M_K \approx \frac{\pi}{l}\left\{B_y\left[G J_D - \frac{2\,G J_{DFl}\,k_1(m)}{k_2(m) + \frac{k_3(m)}{2(1-\nu^2)\,\pi^2}\,\frac{l^2}{h}\,\frac{E t_s^3}{G J_{DFl}}} + W\frac{\pi^2}{l^2}\right]\right\}^{1/2}. \tag{41}$$

Dieses Moment unterscheidet sich von dem unter Voraussetzung idealer Querschnittsformtreue nach der klassischen Kipptheorie ermittelten Engesser-Shanleyschen Kippmoment allein durch das in (41) enthaltene mittlere Glied der eckigen Klammer. Dieses Glied ist die bei mangelnder Stegquersteifigkeit infolge des Verlustes der Querschnittsformtreue entstehende Verringerung der effektiven St.-Venantschen Drillsteifigkeit.

Man kann also den Einfluss des Verlustes der Querschnittsformtreue in den Ansätzen der klassischen Kipptheorie allgemein dadurch erfassen, dass man als St.-Venantsche Drillsteifigkeit nicht $G J_D$, sondern $\vartheta\, G J_D$ einführt, wobei bei Ausserachtlassen von Drillkoppeleffekten stets

$$\vartheta \leqq 1 \tag{42}$$

ist. Bei den hier untersuchten I-Trägern mit extrem drillweichen, jedoch biegestarren Stegquersteifen ist

$$\vartheta \approx 1 - \frac{2\frac{J_{DFl}}{J_D}k_1(m)}{k_2(m) + \frac{k_3(m)}{2(1-\nu^2)\,\pi^2}\,\frac{l^2}{h}\,\frac{E t_s^3}{G J_{DFl}}}. \tag{43}$$

Es ist zu vermerken, dass von den in ϑ enthaltenen Grössen allein die Trägerlänge l, die hier als kritische Trägerlänge $l_K(M_K)$ aufzufassen ist, vom Plastizierungsgrad des Trägers abhängt. Nur dadurch, dass bei zunehmender Plastizierung die Steifigkeiten B_y und W und damit auch die kritische Trägerlänge l_K stark abfallen, verringert sich der Wert ϑ im plastischen Bereich stärker als bei ideal elastischer Kippung.

Die Formel (43) gilt strenggenommen nur für I-Träger mit reiner Biegung; denn wie aus den allgemeinen Verzerrungs-Spannungs-Gesetzen (14a–c) zu erkennen ist, sind bei Vorhandensein von Querspannungen σ_s und Schubspannungen τ_{zs} unter der Voraussetzung hinreichend grosser Belastungsgeschwindigkeit nicht nur die Spannungsänderung $\delta\sigma_z$, sondern auch die Spannungsänderungen $\delta\sigma_s$ und $\delta\tau_{zs}$ von Anfang an mit plastischen Formänderungsanteilen behaftet. Dies hat insbesondere für Stegblechbereiche unter örtlich konzentrierten Querlasten grosse Bedeutung; dort fällt bei plastischer Biegung der Widerstand des Steges gegen Verformungen in der Querschnittsebene besonders stark ab. Darum sollten an diesen Stellen stets kräftige Stegquersteifen angeordnet werden, damit der nachteilige Einfluss des Verlustes der Querschnittsformtreue nicht extrem hohe Werte annimmt. Da aber bei einer am Trägerrand angreifenden Einzellast die Querspannungen σ_s rechts und links von der Lasteintragungsstelle verhältnismässig schnell abklingen, kann man bei genügend steifen, die gesamte Trägerhöhe erfassenden Stegquersteifen die Querschnittsformtreue im Einflussbereich der Querlast als aus-

reichend gesichert ansehen. Deshalb darf die oben angegebene Formel (43) näherungsweise auch auf Träger mit konzentrierten Querlasten angewandt werden, wenn bei diesen an jeder Lasteintragungsstelle eine hinreichend bemessene Stegquersteife vorhanden ist.

In diesem Zusammenhang ergibt sich dann die Frage, wieviel Stegquersteifen notwendig sind, um einen I-Träger als hinreichend querschnittsformtreu ansehen zu können.

Die Lösung dieses Problems lässt sich sehr schnell finden, wenn man den Steg des Trägers gänzlich vernachlässigt und annimmt, dass die Formtreue allein durch die in gleichmässigen Abständen angeordneten und quer zur Stegebene biegesteif mit den Flanschen verbundenen Steifen erreicht werden soll. Man erhält dann eine untere Schranke für ϑ. Diese nähert sich um so mehr dem Wert 1, dem Grenzfall idealer Querschnittsformtreue, je stärker das Verhältnis $k_1(m)/k_2(m)$ mit zunehmender Stegfeldzahl m gegen Null geht.

m	k_1/k_2
1	1,0000
2	0,1369
3	0,0561
4	0,0310
5	0,0198
6	0,0138
8	0,0078

Ab $m=4$ ist die Verringerung des Verhältnisses $k_1(m)/k_2(m)$ praktisch ohne Bedeutung, so dass demzufolge bei einem I-Träger die von der klassischen Kipptheorie vorausgesetzte Querschnittsformtreue hinreichend gewährleistet ist, wenn bei diesem kräftige Stegquersteifen über den Stützen, in Trägermitte, in den Viertelspunkten des Trägers und überall dort angeordnet werden, wo örtlich konzentriert Querlasten angreifen.

Diese Feststellung gilt jedoch nur unter der im Zusammenhang mit der Formulierung der Kipp-Differentialgleichungen (1) und (2) getroffenen Annahme, dass alle gedrückten Querschnittsteile beulsicher sind. Bei plastisch gebogenen I-Trägern aus gewöhnlichem Baustahl ist das der Fall, wenn folfende Bedingungen erfüllt sind (siehe [12]):

$$\frac{b}{t_F} \leqq \frac{3{,}6}{\sqrt{\epsilon_F \left(3+\frac{\sigma_B}{\sigma_F}\right)\left(1+0{,}192\frac{E}{E_v}\right)}}, \tag{44}$$

$$\frac{h}{t_s} \leqq 70\sqrt{\frac{2{,}3\,\mathrm{Mp/cm^2}}{\sigma_F}}. \tag{45}$$

Dabei bedeutet:

b Flanschbreite
t_F Flanschdicke
h Steghöhe

t_s Stegdicke
ϵ_F Dehnung bei Beginn des reinen Fliessens
σ_F Fliessspannung
σ_B Bruchspannung
E Elastizitätsmodul
E_v Tangentenmodul bei Beginn der Wiederverfestigung nach Durchlaufen des Fliessbereiches

4. Beispiel und praktische Schlussfolgerungen

Um die Aussage über den Einfluss der Querschnittsaussteifungen auf das plastische Kippen von I-Trägern zu vervollständigen, werden abschliessend einige Ergebnisse eines praktischen Berechnungsbeispiels mitgeteilt.

Querschnittsabmessungen:

$h = 660$ mm, $b = 300$ mm,
$t_s = 12$ mm, $t_F = 30$ mm.

Werkstoff: St 38 mit $E = 2100$ Mp/cm², $\sigma_F = 2{,}4$ Mp/cm².

Spannungs-Dehnungs-Diagramm $\sigma(\epsilon)$ siehe Fig. 4.

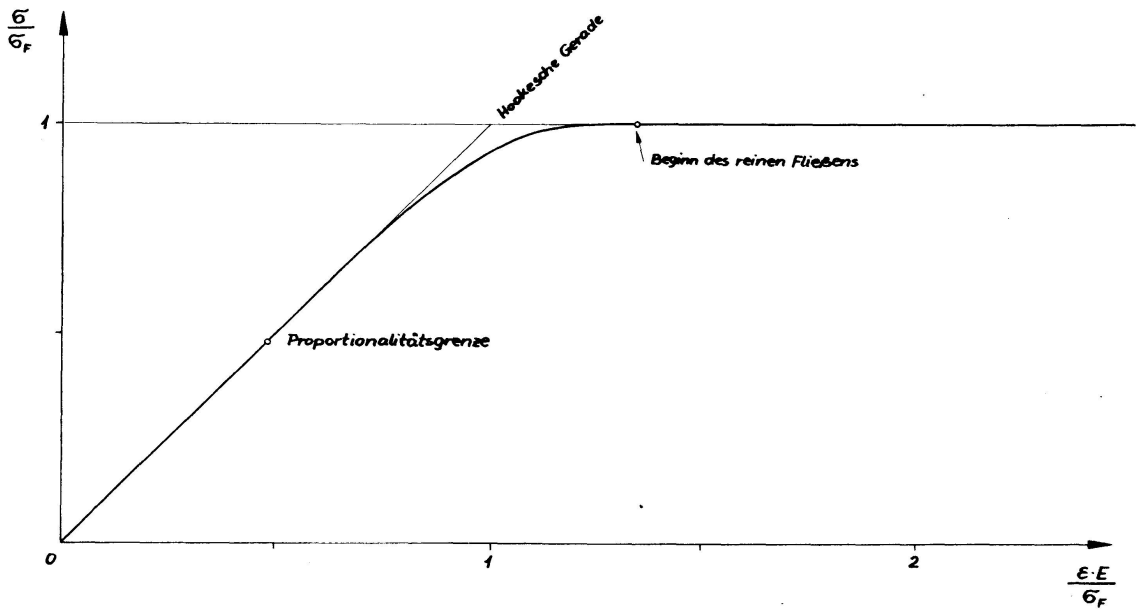


Fig. 4.

Die Bedingungen (44) und (45) sind in diesem Falle erfüllt, so dass der Träger auch bei plastischer Biegung im Druckbereich nicht beult.

Die Fig. 5, 6 und 7 zeigen dann in dimensionsloser Form die Quersteifigkeit B_y, die Wölbsteifigkeit W und die effektive St.-Venantsche Drillsteifigkeit

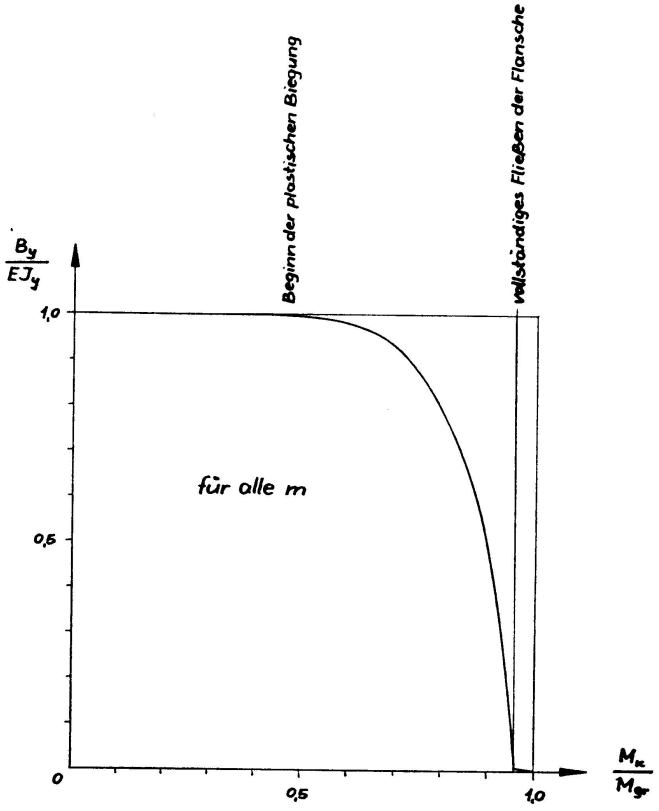

Beginn der plastischen Biegung
vollständiges Fließen der Flansche
$\frac{B_y}{EJ_y}$
1,0
0,5
0
für alle m
0,5
1,0
$\frac{M_k}{M_{gr}}$

Fig. 5.

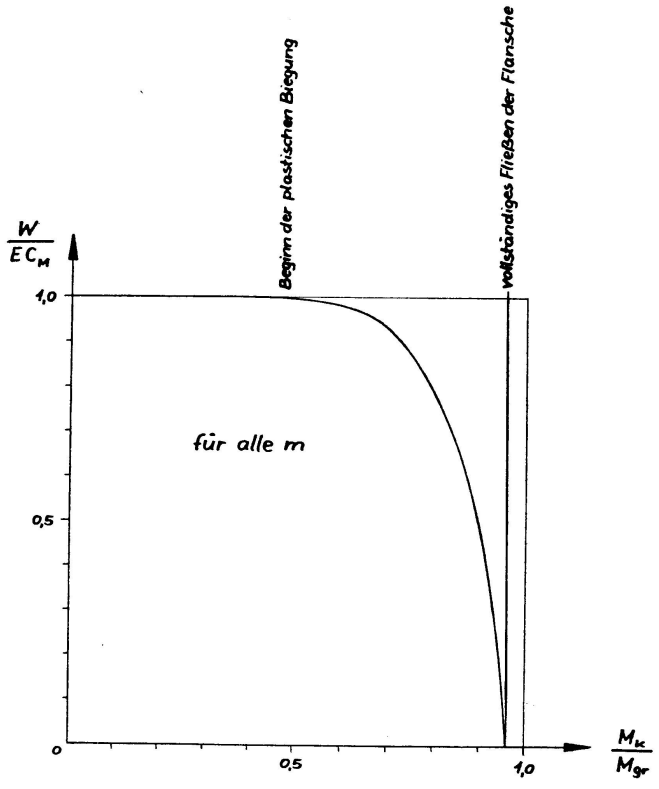

Beginn der plastischen Biegung
vollständiges Fließen der Flansche
$\frac{W}{EC_M}$
1,0
0,5
0
für alle m
0,5
1,0
$\frac{M_k}{M_{gr}}$

Fig. 6.

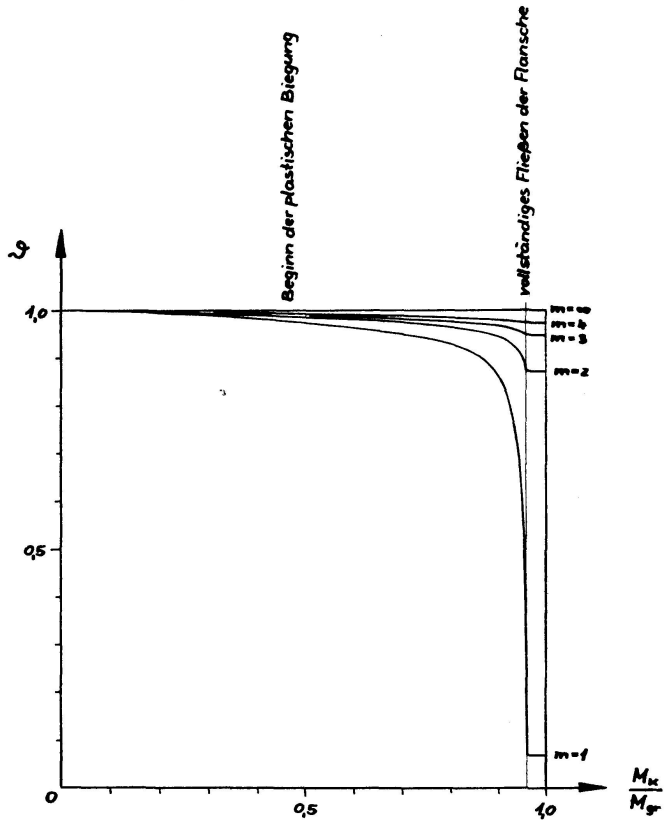


Fig. 7.

$\vartheta\, G J_D$ in Abhängigkeit vom Plastizierungsgrad M_K/M_{gr} sowie der Stegfeldzahl m.

Man erkennt, dass wegen des Verlustes der Querschnittsformtreue die effektive St.-Venantsche Drillsteifigkeit $\vartheta\, G J_D$ beim unausgesteiften I-Träger ($m = 1$) mit zunehmender Plastizierung sehr stark abfällt; erreicht die Stegoberkante die Fliessspannung σ_F, so ist in diesem Falle praktisch nur noch die St.-Venantsche Drillsteifigkeit des Steges wirksam. Ein Vernachlässigen des Verlustes der Querschnittsformtreue ist deshalb bei unausgesteiften I-Trägern im plastischen Bereich nicht zulässig. Es genügen aber bereits wenige Stegquersteifen, um den Verlust der Querschnittsformtreue beim Kippen weitgehend auszuschalten und die Flansche an der St.-Venantschen Drillung mit zu beteiligen.

Im Bereich der elastischen Kippung ist dagegen der Einfluss des Verlustes der Querschnittsformtreue meistens relativ klein; lediglich bei I-Trägern, deren Flansche als Hohlquerschnitt ausgebildet sind, hat der Verlust der Querschnittsformtreue auch für das Kippen im elastischen Bereich grössere Bedeutung.

An Hand des oben genannten Beispiels wurde ferner gefunden, dass die in der dimensionslosen Form $M_K/M_{gr}\,(M_{gr}/M_{Ki})$ aufgetragenen Kippmomente M_K für alle Werte m nahezu zu einer einzigen Kurve zusammenfallen, wenn man den Verlust der Querschnittsformtreue bereits im Ansatz für das ideale Kippmoment M_{Ki} mit berücksichtigt.

$$M_{Ki} = \frac{\pi}{l}\sqrt{E J_y\left(\vartheta G J_D + \frac{\pi^2}{l^2} E C_m\right)}. \tag{46}$$

Diese Feststellung hat sich bei der Untersuchung weiterer Beispiele bestätigt.

Daraus ergibt sich die Möglichkeit, für die Kippmomente von Trägern mit nichtformtreuem I-Querschnitt eine einfache Näherungslösung anzugeben. Denn wie in [13] gezeigt werden konnte, fallen die Kippkurven $M_K/M_{gr}(M_{gr}/M_{Ki})$ von I-Trägern mit formtreuem Querschnitt mit sehr guter Genauigkeit zusammen, wenn man als Bezugsgrösse nicht das vollplastische Grenzmoment M_{gr}, sondern dasjenige Biegemoment M_{gr}^* verwendet, bei dem die Flansche vollständig plastiziert werden, der Steg jedoch gerade erst an seinen Rändern zu fliessen beginnt. Für I-Träger aus gewöhnlichem Baustahl gilt:

$$M_{gr}^* \approx \sigma_F h\left(b t_F + \frac{1}{5} h t_s\right). \tag{47}$$

Vergleiche mit Formel (9)!

Lässt man den Kippbereich oberhalb M_{gr}^* ausser acht, so braucht man also nur noch eine einzige Kippkurve zur Beschreibung des Kippverhaltens von I-Trägern, nämlich die Kippkurve des Trägers mit Sandwich-Querschnitt ($h t_s \to 0$). Dafür gilt:

$$\frac{M_K}{M_{gr}^*} = \frac{\sigma(\epsilon_R)}{\sigma_F} \equiv \frac{\sigma_K(\lambda_v)}{\sigma_F}, \tag{48}$$

$$\frac{M_{gr}^*}{M_{Ki}} = \frac{\frac{T(\epsilon_R)}{E}}{\frac{\sigma(\epsilon_R)}{\sigma_F}} \equiv \frac{\sigma_F}{\sigma_{Ki}(\lambda_v)}. \tag{49}$$

Diese Kippkurve enthält nur noch Werte des natürlichen Spannungs-Dehnungs-Diagramms und ist identisch mit der Engesser-Shanleyschen Knickspannungslinie $\sigma_K/\sigma_F(\sigma_F/\sigma_{Ki})$ des jeweiligen Trägerwerkstoffs. Gewöhnlich liegt σ_K als Funktion der Schlankheit λ vor. Ist das der Fall, so kann man dann das Engesser-Shanleysche Kippmoment des Trägers mit nicht formtreuem I-Querschnitt näherungsweise wie folgt berechnen:

$$M_K \approx h\left(b t_F + \frac{1}{5} h t_s\right)\sigma_K(\lambda_v), \tag{50}$$

wobei

$$\lambda_v = \pi\sqrt{\frac{E h\left(b t_F + \frac{1}{5} h t_s\right)}{M_{Ki}}}. \tag{51}$$

und M_{Ki} das nach Formel (46) unter Berücksichtigung der Querschnittsaussteifung berechnete ideale Kippmoment des Trägers ist.

Die Engesser-Shanleysche Knickspannung $\sigma_K(\lambda) = \sigma_K(\lambda_v)$ ist den jeweils massgebenden Stabilitätsvorschriften zu entnehmen. Verwendet man an Stelle

von σ_K die Traglastspannungen σ_{Kr}, so erhält man aus Formel (50) eine brauchbare Näherung für das Kippmoment von I-Trägern mit Imperfektionen.

Schrifttum

1. Warkenthin, W.: Zum derzeitigen Stand der Forschung auf dem Gebiet des plastischen Kippens; Vortrag auf der «Tagung Festkörpermechanik» der TU Dresden, Sektion Grundlagen des Maschinenwesens, Oktober 1970 (erscheint demnächst in der Wissenschaftlichen Zeitschrift der TU Dresden).
2. Nylander, H.: Drehungsvorgänge und gebundene Kippung bei geraden, doppelsymmetrischen I-Trägern; Ingeniörs Vetenskaps Akademien, Handlingar Nr. 174, Stockholm, 1943.
3. Scheer, J.: Zum Problem der Gesamtstabilität von einfach-symmetrischen I-Trägern; Stahlbau 28 (1959), H. 5, S. 113 u. H. 6, S. 165.
4. Protte, W.: Ein Beitrag zum Problem der Gesamtstabilität querausgesteifter Träger im Kippbereich; Stahlbau 30 (1961), H. 4, S. 103–113.
5. Witte, H.: Ein Beitrag zum Kipp-Problem bei doppelt-symmetrischen Profilen mit besonderer Berücksichtigung des Stegblechbeulens; Berichte aus Forschung und Entwicklung unserer Werke (Firma Hoesch AG) 2/1966.
6. Fischer, M.: Das Kipp-Problem querbelasteter exzentrisch durch Normalkraft beanspruchter I-Träger bei Verzicht auf die Voraussetzung der Querschnittsformtreue; Dissertation, Universität Stuttgart 1966. Auszugsweise veröffentlicht in: Stahlbau 36 (1967), H. 3, S. 77.
7. Schmied, R.: Die Gesamtstabilität von zweiachsig aussermittig gedrückten dünnwandigen I-Stäben unter Berücksichtigung der Querschnittsverformung nach der nichtlinearen Plattentheorie; Dissertation, TH Darmstadt 1966. Auszugsweise veröffentlicht in: Stahlbau 36 (1967), H. 1, S. 1 u. H. 2, S. 50.
8. Loos, W.: Beitrag zur Gesamtstabilität quersteifenloser I-Träger im Kippbereich; Dissertation, Hochschule für Bauwesen Leipzig 1965.
9. Warkenthin, W.: Kippuntersuchungen im plastischen Bereich; Bauplanung – Bautechnik 23 (1969), H. 5, S. 227–229.
10. Reckling, K.-A.: Experimente zur Feststellung der Werkstoffanisotropie und zur Überprüfung der Hillschen Verfestigungshypothese; Stahlbau 38 (1969), H. 2, S. 43.
11. Neal, B. G.: The Lateral Instability of Yielded Mild Steel Beams of Rectangular Cross-Sections; Philosophical Transactions, Royal Soc. of London, Series A, Vol. 242 (1950).
12. Vogel, U.: Über die Anwendung des Traglastverfahrens im Stahlbau; Stahlbau 38 (1969), S. 329.
13. Warkenthin, W.: Kippsicherheitsnachweis von I-Trägern; Bauplanung – Bautechnik 24 (1970), H. 11, S. 550–552.

Zusammenfassung

Es werden die Engesser-Shanley'schen Kippmomente von dünnwandigen doppelsymmetrischen I-Trägern aus elastisch-plastischem Werkstoff unter Berücksichtigung des Einflusses der beim Kippen auftretenden Querschnittsverformungen in Abhängigkeit vom Grad der Querschnittsaussteifungen untersucht. Es zeigte sich, dass der Verlust der Querschnittsformtreue beim plastischen Kippen gravierender als beim elastischen Kippen ist, dass jedoch bereits wenige Querschnittsaussteifungen (z. B. Stegquersteifen über den Stützen, in den Viertelspunkten, in Trägermitte und an Stellen örtlich konzentrierter Lasteintragung) genügen, um im Sinne der klassischen Kipptheorie mit einem quasi-formtreuen Querschnitt rechnen zu können. Abschliessend wird ein einfaches Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der plastischen Kippmomente von Trägern mit nichtformtreuem I-Querschnitt mitgeteilt.

Summary

The Engesser-Shanley tipping moments of double symmetrical thin wall I-beams of elastic-plastic material are examined in consideration of the influence of the deformations of sections appearing during the tipping as a function of the degree of the shear reinforcement. It showed that the deformation of section was greater during the plastic tipping than during the elastic tipping, but that already a few reinforcements (e. g. reinforcements of the centroid above the supports, in the quarter points, in the centre of the beam and in points of concentrated loads) are enough to allow to consider an almost conformed section in the sense of the classical tipping theory.

Finally, a simple method is presented for the approximative calculation of the plastic tipping moments of beams with non-conformed I-section.

Résumé

Les moments de déversement selon Engesser-Shanley de profil à I avec un matériel élastique-plastique sont examinés en considérant l'influence des déformations de la section se manifestant pendant le déversement en fonction du degré des renforcements de section. On a constaté que la déformation de la section était plus importante lors du déversement plastique que lors du déversement élastique. Pourtant, un renforcement faible (p. e. des raidisseurs transversales sur les appuis, dans les points de quart, au milieu de la poutre et aux endroits de charges concentrées) suffit pour envisager le calcul du déversement selon la théorie classique (contours de la section conservée).

Finalement une méthode simple est communiquée pour un calcul approximatif des moments de déversement de profil non-conforme.

Dynamic Response of Beams to a Traveling Mass

Réaction dynamique de poutres sur une masse mouvante

Dynamische Reaktion von Trägern auf eine sich bewegende Masse

E. A. ZAGUSTIN
Associate Professor, Civil Engineering Department, California State College at Long Beach, Long Beach, California

D. H. YOUNG
Professor, Engineering Mechanics Department, Stanford University, Stanford, California

Introduction

Various studies have been made in the past in order to determine the dynamic behavior of bridge structures under the influence of moving loads. Let us mention some of the most important papers written on this subject. In 1847 R. WILLIS established the differential equation for the deflection of a single span beam, neglecting the inertia of the beam and considering the moving load as a concentrated mass [1]. An exact solution of this differential equation was given by G. STOKES in 1849 [2].

In 1905, A. N. KRYLOV [3] gave a solution assuming that the mass of the load was negligible in comparison with that of the beam. In 1923 S. P. TIMOSHENKO [4] solved the problem of a pulsating force traversing a single span beam with constant velocity. C. E. INGLIS in 1924 [5, 6], made experimental studies of the transverse vibrations of a single span bridge. A. N. LOWAN in 1935 [7], investigated the case in which the velocity of the traversing force is not constant. In 1937 SCHALLENKAMP [8] studied the case of a mass moving with constant velocity along a simply supported beam. R. S. AYRE, G. FORD, and L. S. JACOBSEN, in 1950 [9], studied the vibrations of a two-span beam under the action of a moving force of constant magnitude. In 1951, R. S. AYRE, L. S. JACOBSEN and C. S. HSU [10] published "Transverse vibration of one and two span beams under the action of a moving mass load". This investigation was experimental, with a theoretical analysis for some of the simpler cases. In 1958 RYAZANOVA [11] studied the case of a moving mass on a simply supported beam. Her approach is more sophisticated than

SCHALLENKAMP's, since it is more general, can be applied to any beam, and requires less laborious computations.

The work presented here is intended to study the problem of a mass moving with constant velocity along a beam having other than simply supported ends. As an example of such a case, a cantilever beam will be used. Thanks to the availability of the modern digital computer, it has been possible to obtain solutions with reasonable accuracy.

All computations involved were carried out at the Stanford Computation Center on an IBM 7090 computer.

Derivation of Integral-Differential Equations of Lateral Vibration of a Beam Under a Moving Mass

Let us consider a beam along which a mass particle is moving as shown in Fig. 1.

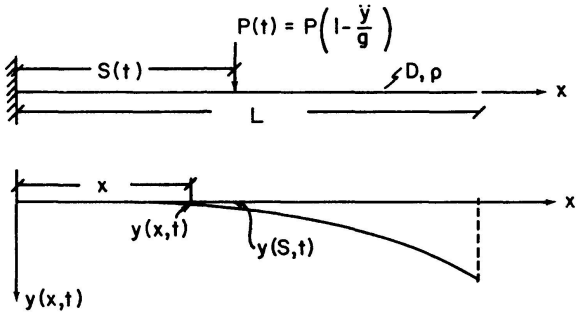


Fig. 1. Moving mass, of weight P, on a cantilever beam. The position of the moving mass is described by $S(t)$.

The basic idea [11] to be used in the derivation of equations of motion for the beam is D'Alembert's principle. To derive these equations, let us consider for the time being that a mass is moving on a massless beam. Then $j(x, S)$ represents the deflection of the beam at x under a unit load, the deflection of the beam due to the force $P(1-\ddot{y}/g)$ will be

$$y(x,t) = P\left(1-\frac{\ddot{y}}{g}\right) j(x, S), \tag{1}$$

where S is a prescribed function of time. The deflection of the beam under the point of application of the mass is obtained by substituting $x = S$ in the above equation, i.e.,

$$y(t) = P\left(1-\frac{\ddot{y}(t)}{g}\right) j(S, S). \tag{2}$$

To obtain the solution, we must solve the two differential equations (1) and (2) with two unknowns $y(t)$ and $y(x,t)$. To accomplish this we must first solve

(2) for $y(t)$ with the initial conditions prescribed only under the mass, viz: at $t=0$, $y(t)$ and $\dot{y}(t)$ are given. When the solution for $y(t)$ has been found it can be substituted into (1) and we have the general expression for the deflection of a massless beam.

Let us now study the problem of free vibrations of a beam with mass. We consider a beam with any symmetrical cross section and any arbitrary distribution of mass and stiffness, and we also allow for the existence of concentrated loads fixed to the beam. The length of the beam is divided into small elements $\Delta\eta$ and the force acting on each element is the inertia force given by $\Delta P = -\rho\ddot{y}\Delta\eta$, as illustrated in Fig. 2. The deflection of the beam under the force ΔP will be

$$\Delta y(x,t) = -j(x,\eta)\rho\ddot{y}\Delta\eta.$$

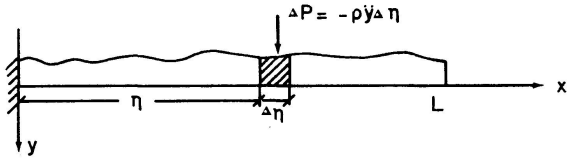


Fig. 2. Force acting on each element of the beam in the free vibration problem.

Then, by superposition the deflection due to the distributed mass in the region $0 \leqq \eta \leqq x$ is

$$y(x,t) = -\int_0^x \rho\ddot{y}(t,\eta) j(x,\eta)\, d\eta.$$

Similarly the deflection due to the mass elements in the region $x \leqq \eta \leqq L$ is

$$y(x,t) = -\int_x^L \rho\ddot{y}(t,\eta) j(x,\eta)\, d\eta.$$

Hence, the total deflection of the beam due to its mass is given by the sum of the above expressions, i.e.,

$$y(x,t) = -\int_0^x \rho\ddot{y}(t,\eta) j(x,\eta)\, d\eta - \int_x^L \rho\ddot{y}(t,\eta) j(x,\eta)\, d\eta.$$

This can be written in the form

$$y(x,t) = -\int_0^L \rho \frac{\partial^2 y(t,y)}{\partial t^2} j(x,\eta)\, d\eta,$$

or, if ρ is a constant,

$$y(x,t) = -\rho\int_0^L \frac{\partial^2 y(t,\eta)}{\partial t^2} j(x,\eta)\, d\eta. \tag{3}$$

Therefore, the deflection of the beam under a moving mass is given by the sum of (1) and (3), i.e.,

$$y(x,t) = P\left[1 - \frac{1}{g}\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] j(x,S) - \rho\int_0^L \frac{\partial^2 y(t,\eta)}{\partial t^2} j(x,\eta)\, d\eta. \tag{4}$$

For the path of the moving mass, we let $x = S$ in the above expression and obtain

$$y(t) = P\left[1 - \frac{1}{g}\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] j(S,S) - \rho\int_0^L \frac{\partial^2 y(t,\eta)}{\partial t^2} j(S,\eta)\, d\eta. \tag{5}$$

The solution of the problem will be obtained by solving the system of Eqs. (4) and (5) with two unknown functions $y(t)$ and $y(x,t)$. To find the solution of these equations, let us expand the function $j(x,S)$ in a Fourier series of eigenfunctions:

$$j(x,S) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(S)\, X_n(x). \tag{6}$$

To find the coefficients $a_n(S)$, we first write an expression for the potential energy of the beam due to a unit at the point $x = S$,

$$\Pi = \frac{D}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial^2 j}{\partial x^2}\right)^2 dx. \tag{7}$$

With the notation $b_n = L m_n$, the above equation becomes

$$a_n(S) = \frac{L^4}{D}\,\frac{X_n(S)}{b_n^4 \int_0^L X_n^2(x)\, dx}. \tag{13}$$

Substituting this coefficient into (6), it follows that

$$j(x,S) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^4}{D}\,\frac{X_n(S)\, X_n(x)}{b_n^4 \int_0^L X_n^2(x)\, dx}. \tag{14}$$

Let us now expand $y(x,t)$ with respect to the eigenfunctions of the free vibration problem:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)\, X_n(x). \tag{15}$$

Then the coefficients $y_n(t)$ will be found by substitution of expressions (15) and (14) into (4), which yields

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)\, X_n(x) = {} & P\left\{1 - \frac{1}{g}\frac{d^2y}{dt^2}\right\}\frac{L^4}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)\, X_n(S)}{b_n^4\int_0^L X_n^2(x)\, dx} \\ & - \rho\int_0^L \left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)\, X_n(\eta)\right]\frac{L^4}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)\, X_n(\eta)}{b_n^4\int_0^L X_n^2\, dx}\right\} d\eta.\end{aligned} \tag{16}$$

From the orthogonality relation of the eigenfunctions, it follows that

$$\int_0^L \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} X_n(\eta)\right\} X_n(\eta)\, d\eta = \int_0^L \frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} X_n^2(\eta)\, d\eta, \tag{17}$$

which when substituted into (16) yields

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \frac{PL^4}{D}\left\{1-\frac{1}{g}\frac{d^2 y}{dt^2}\right\} \frac{X_n(S)}{b_n^4 \int_0^L X_n^2\, dx} \\ -\rho \frac{L^4}{D} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \int_0^L \frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} \frac{X_n^2(\eta)\, d\eta}{b_n^4 \int_0^L X_n^2\, dx}.\end{aligned} \tag{18}$$

From this expression the following differential equation for $y_n(t)$ is obtained:

$$\frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} + \frac{b_n^4 a^2}{L^4} y_n(t) = \frac{P}{\rho \int_0^L X_n^2(x)\, dx}\left(1-\frac{1}{g}\frac{d^2 y}{dt^2}\right) X_n(S), \tag{19}$$

where $a^2 = D/\rho$. Solving this differential equation with zero initial conditions, i.e., when $t=0$, $y_n(0) = 0$, $\dot{y}_n(0) = 0$, we obtain

$$y_n(t) = \frac{PL^2}{a\rho b_n^2 \int_0^L X_n^2(x)\, dx} \int_0^t \left\{1-\frac{1}{g}\frac{d^2 y}{dt^2}\right\} X_n[S(\tau)] \sin \frac{a b_n (t-\tau)}{L^2} d\tau, \tag{20}$$

where τ is a dummy variable of integration.

The deflection of the beam under the point of application of the mass is given by

$$y(t) = y(S,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) X_n(S). \tag{21}$$

Then, after substituting into this the expression for $y_n(t)$ given by (20), we obtain

$$y(t) = \frac{PL^2}{a\rho} \int_0^t \left\{1-\frac{1}{g}\frac{d^2 y}{dt^2}\right\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n[S(\tau)]\, X_n[S(t)]}{b_n^2 \int_0^L X_n^2(x)\, dx} \sin \frac{a b_n^2 (t-\tau)}{L^2} d\tau. \tag{22}$$

This is an integral-differential equation, which must be solved in order to obtain $y(t)$. When $y(t)$ is known, we substitute it into (20) and obtain the coefficients $y_n(t)$. Finally, substituting these coefficients into (15), we obtain the general expression for the deflection of the beam.

The integral-differential Eq. (22) cannot be differentiated twice with respect to t and thus reduced to an integral equation because the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n[S(\tau)]\, X_n[S(t)]}{b_n^2 \int_0^L X_n^2(x)\, dx} \sin \frac{a b_n^2 (t-\tau)}{L^2},$$

will be divergent after two differentiations. Hence we introduce a new variable $\varphi(t)$ such that

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varphi(t), \qquad \frac{dy}{dt} = \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau, \qquad y(t) = \int_0^t (t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{23}$$

Substitution of (23) into (22) gives

$$\int_0^t (t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = \frac{PL^2}{\rho a}\int_0^t \left[1-\frac{1}{g}\varphi(\tau)\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n[S(t)]\,X_n[S(\tau)]}{b_n^2\int_0^L X_n^2(x)\,dx}\sin\frac{a\,b_n^2\,(t-\tau)}{L^2}\,d\tau,$$

which can be rewritten as

$$\begin{aligned}\frac{PL^2}{\rho a}\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n[S(t)]\,X_n[S(\tau)]}{b_n^2\int_0^L X_n^2(x)\,dx}\sin\frac{a\,b_n^2\,(t-\tau)}{L^2}\,d\tau = \\ \frac{PL^2}{\rho g a}\int_0^t\varphi(\tau)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n[S(t)]\,X_n[S(\tau)]}{b_n^2\int_0^L X_n^2(x)\,dx}\sin\frac{a\,b_n^2\,(t-\tau)}{L^2}\,d\tau + \int_0^t (t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau.\end{aligned} \tag{24}$$

Introducing the notation $F(t)$ for the left-hand side of this equation and $L(t,\tau)$ for the right-hand side, we have

$$L(t,\tau) = t-\tau+\frac{PL^2}{\rho g a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n[S(t)]\,X_n[S(\tau)]}{b_n^2\int_0^L X_n^2(x)\,dx}\sin\frac{a\,b_n^2\,(t-\tau)}{L^2} \tag{25}$$

and

$$F(t) = \frac{PL^2}{\rho a}\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n[S(t)]\,X_n[S(\tau)]}{b_n^2\int_0^L X_n^2(x)\,dx}\sin\frac{a\,b_n^2\,(t-\tau)}{L^2}\,d\tau. \tag{26}$$

If we let $\ddot{y}=0$, it can be seen from (22) that $F(t)$ represents the deflection of the beam under the point of application of the moving force. In this way, Eq. (24) can be written as

$$F(t) = \int_0^t L(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{27}$$

which is a Volterra integral equation of the first kind [13] that cannot be reduced to an integral equation of the second kind. Using the expression for $F(t)$ together with (23) in (24), we obtain

$$y(t) = F(t)-\frac{PL^2}{g\rho a}\int_0^t\varphi(\tau)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n[S(t)]\,X_n[S(\tau)]}{b_n^2\int_0^L X_n^2(x)\,dx}\sin\frac{a\,b_n^2\,(t-\tau)}{L^2}\,d\tau. \tag{28}$$

The problem now consists in solving the system of equations given by (23) and (27), i.e.,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t (t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \\ F(t) &= \int_0^t L(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \end{aligned} \tag{29}$$

where the unknowns $y(t)$ and $\varphi(t)$ have to be determined by numerical procedure. To solve these equations by a numerical method, we will replace them approximately by a system of algebraic equations. Let us divide the interval of integration (0, t) into n equally spaced points $\tau_0, \ldots, \tau_{k-1}, \tau_k, \ldots, \tau_n$ in such a way that in the middle of the interval (τ_{k-1}, τ_k) the function $L(t,\tau)$ does not change sign. Assuming that the unknown function $\varphi(\tau)$ has a constant value in each interval, we obtain

$$\begin{aligned} F(\tau_1) &= \varphi_1 \int_0^{\tau_1} L(\tau_1, t)\,dt, \\ F(\tau_2) &= \varphi_1 \int_0^{\tau_1} L(\tau_2, t)\,dt + \varphi_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(\tau_2, t)\,dt, \\ F(\tau_3) &= \varphi_1 \int_0^{\tau_1} L(\tau_3, t)\,dt + \varphi_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(\tau_3, t)\,dt + \varphi_3 \int_{\tau_2}^{\tau_3} L(\tau_3, t)\,dt, \\ F(\tau_k) &= \varphi_1 \int_0^{\tau_1} L(\tau_k, t)\,dt + \varphi_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(\tau_k, t)\,dt + \cdots + \varphi_k \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} L(\tau_k, t)\,dt. \end{aligned} \tag{30}$$

From this system of equations we can find the values of $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ and then the values of y are obtained from

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1 \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - t)\,dt, \\ y_2 &= \varphi_1 \int_0^{\tau_1} (\tau_2 - t)\,dt + \varphi_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - t)\,dt, \\ y_3 &= \varphi_1 \int_0^{\tau_1} (\tau_3 - t)\,dt + \varphi_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_3 - t)\,dt + \varphi_3 \int_{\tau_2}^{\tau_3} (\tau_3 - t)\,dt, \\ y_k &= \varphi_1 \int_0^{\tau_1} (\tau_k - t)\,dt + \varphi_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_k - t)\,dt + \cdots + \varphi_k \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (\tau_k - t)\,dt. \end{aligned} \tag{31}$$

When the values of $\varphi(\tau)$ and $y(\tau)$ are known, the deflection at any point of the beam is obtained from Eqs. (20) and (15).

Mass Particle Moving with Constant Velocity on a Simply Supported Beam

The eigenfunction for a simply supported beam is

$$X_n(S) = \sin n\pi \frac{x}{L}.$$

For a mass moving with constant velocity $S = Vt$, and the above expression becomes

$$X_n(S) = \sin n\pi \frac{Vt}{L}.$$

Substituting these expressions into those for $F(t)$ and $L(t,\tau)$, given by (25) and (26), we obtain [11]:

$$F(t) = 2\left(\frac{P}{\gamma L}\right)\frac{gL^2}{a\pi^2}\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi Vt}{L}\sin\frac{n\pi V\tau}{L}\sin\frac{n^2\pi^2(t-\tau)}{L^2}\,d\tau, \tag{32a}$$

$$L(t,\tau) = (t-\tau) + 2\left(\frac{P}{\gamma L}\right)\frac{L^2}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi Vt}{L}\sin\frac{n\pi V\tau}{L}\sin\frac{n^2\pi^2(t-\tau)}{L^2}, \tag{32b}$$

where $\rho g = \gamma$ is the specific weight per unit length of the beam, and γL is the total weight of the beam. Integration of (32a) yields

$$F(t) = 2\left(\frac{P}{\gamma L}\right)\frac{gL^2}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi Vt}{L}}{n^2}\left\{\frac{\sin\left(\frac{n\pi Vt}{L}\right)+\sin\left(\frac{n^2\pi^2 at}{L^2}\right)}{2\left(\frac{n\pi V}{L}+\frac{n^2\pi^2 a}{L^2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{n\pi Vt}{L}\right)-\sin\left(\frac{n^2\pi^2 at}{L^2}\right)}{2\left(\frac{n\pi V}{L}-\frac{n^2\pi^2 a}{L^2}\right)}\right\}. \tag{33}$$

while integration of (32b) between the lower limit τ_l and the upper limit τ_u yields

$$\begin{aligned}\int_{\tau_l}^{\tau_u} L(t,\tau)\,dt &= (\tau_u-\tau_l)\left\{\tau-\frac{1}{2}(\tau_u+\tau_l)\right\} + 2\left(\frac{P}{\gamma l}\right)\frac{L^2}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi V\tau}{L}}{n^2}\\ &\left\{\frac{\sin\left[\left(\frac{n\pi V}{L}+\frac{n^2\pi^2 a}{L^2}\right)\tau_u-\frac{n^2\pi^2 a\tau}{L^2}\right]-\sin\left[\left(\frac{n\pi V}{L}+\frac{n^2\pi^2 a}{L^2}\right)\tau_l-\frac{n^2\pi^2 a\tau}{L}\right]}{2\left(\frac{n\pi V}{L}+\frac{n^2\pi^2 a}{L^2}\right)}\right.\\ &\left.-\frac{\sin\left[\left(\frac{n\pi V}{L}-\frac{n^2\pi^2 a}{L^2}\right)\tau_u+\frac{n^2\pi^2 a\tau}{L^2}\right]-\sin\left[\left(\frac{n\pi V}{L}-\frac{n^2\pi^2 a}{L^2}\right)\tau_l+\frac{n^2\pi^2 a\tau}{L}\right]}{2\left(\frac{n\pi V}{L}-\frac{n^2\pi^2 a}{L^2}\right)}\right\},\end{aligned} \tag{34}$$

where $P/\gamma L$ is the ratio between the weight of the traveling mass and the weight of the beam. Using expressions (33) and (34) in (30), and solving this system of equations on the computer, we obtain values of $\varphi_k(\tau)$. When these are substituted into (31), we obtain the values of the deflection of the beam under the point of application of the mass.

Mass Particle Moving with Constant Velocity on a Cantilever Beam

Let us consider here the problem of a mass moving along a beam which has the eigenfunction[1])

$$X_n(\xi) = \operatorname{Ch} m_n \xi - \cos m_n \xi - \delta_n (\operatorname{Sh} m_n \xi - \sin m_n \xi),$$

where $\xi = x/L$, m_n, and δ_n are obtained from the tables [14]. To solve this problem, we must first find the corresponding expressions for $F(\tau)$ and for $\int_{\tau_l}^{\tau_u} L(t,\tau)\,dt$ and use them in (30), from which we determine the values of $\varphi_k(\tau)$. Substituting the eigenfunction $X_n(x)$ into (26) and computing the integral $\int_{\tau_l}^{\tau_u} L(t,\tau)\,dt$, we obtain after several simplifications the following expression:

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_l}^{\tau_u} L(t,\tau)\,dt &= (\tau_u - \tau_l)\left[\tau - \frac{1}{2}(\tau_u - \tau_l)\right] + \frac{P}{\gamma L}\frac{L^2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n\left(m_n\frac{V\tau}{L}\right)}{m_n^2} \\
&\left[\frac{L^2}{a\left[m_n^2+\left(\frac{VL}{a}\right)^2\right]}\left[\left\{X_n\left(m_n\frac{V\tau_u}{L}\right)+\cos\left(m_n\frac{V\tau_u}{L}\right)-\delta_n\sin\left(m_n\frac{V\tau_u}{L}\right)\right\}\cos\frac{a\,m_n^2(\tau-\tau_u)}{L^2}\right.\right. \\
&\qquad\left.-\left\{X_n\left(m_n\frac{V\tau_l}{L}\right)+\cos\left(m_n\frac{V\tau_l}{L}\right)-\delta_n\sin\left(m_n\frac{V\tau_l}{L}\right)\right\}\cos\frac{a\,m_n^2(\tau-\tau_l)}{L^2}\right] \\
&+\frac{V\,L^3}{2\,a^2\,m_n\left[m_n^2+\left(\frac{VL}{a}\right)^2\right]}\left[\left\{(1-\delta_n)\exp\left(m_n\frac{V\tau_u}{L}\right)\right.\right. \\
&\qquad\left.-(1+\delta_n)\exp\left(-m_n\frac{V\tau_u}{L}\right)\right\}\sin\frac{a\,m_n^2(\tau-\tau_u)}{L^2} \qquad (35) \\
&\qquad-\left\{(1-\delta_n)\exp\left(m_n\frac{V\tau_l}{L}\right)-(1+\delta_n)\exp\left(-m_n\frac{V\tau_l}{L}\right)\right\}\sin\frac{a\,m_n^2(\tau-\tau_l)}{L^2}\Big] \\
&+\frac{L^2}{2\,a\,m_n\left[-m_n+\frac{VL}{a}\right]}\left[\cos\left(m_n\frac{V\tau_u}{L}+\frac{a\,m_n^2(\tau-\tau_u)}{L^2}\right)-\cos\left(m_n\frac{V\tau_l}{L}+\frac{a\,m_n^2(\tau-\tau_l)}{L^2}\right)\right. \\
&\qquad\left.-\delta_n\left\{\sin\left(m_n\frac{V\tau_u}{L}+\frac{a\,m_n^2(\tau-\tau_u)}{L^2}\right)-\sin\left(m_n\frac{V\tau_l}{L}+\frac{a\,m_n^2(\tau-\tau_l)}{L^2}\right)\right\}\right] \\
&-\frac{L^2}{2\,a\,m_n\left[m_n+\frac{VL}{a}\right]}\left[\cos\left(-m_n\frac{V\tau_u}{L}+\frac{a\,m_n^2(\tau-\tau_u)}{L^2}\right)\right. \\
&\qquad-\cos\left(-m_n\frac{V\tau_l}{L}+\frac{a\,m_n^2(\tau-\tau_l)}{L^2}\right) \\
&\qquad\left.\left.-\delta_n\left\{\sin\left(m_n\frac{V\tau_u}{L}-\frac{a\,m_n^2(\tau-\tau_u)}{L^2}\right)-\sin\left(m_n\frac{V\tau_l}{L}-\frac{a\,m_n^2(\tau-\tau_l)}{L^2}\right)\right\}\right]\right].
\end{aligned}$$

---

[1]) The solution described here is also true for other beams with different values of δ_n.

Integrating Eq. (25) from 0 to τ and comparing it with (26) we obtain

$$\int_0^\tau L(t,\tau)\,dt = \int_0^\tau L(t-\tau)\,dt + \frac{1}{g}F(\tau).$$

From this equation we conclude that we can get the expression for $F(t)$ by letting $\tau_l = 0$ in the terms contained under the summation sign in (35) which, after some transformations, gives

$$\begin{aligned} F(\tau) = \left(\frac{P}{\gamma L}\right)\frac{g L^4}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(\tau)}{m_n^2}\Bigg\{&\frac{X_n(\tau)}{m_n^2+\left(\frac{VL}{a}\right)^2} \\ &-\frac{2\left(\frac{VL}{a}\right)^2}{m_n^4-\left(\frac{VL}{a}\right)^4}\left[\cos(m_n\tau)-\cos\left(\frac{m_n^2 a\tau}{VL}\right)\right] \\ &+\frac{2\delta_n\left(\frac{VL}{a}\right)^2}{m_n^4-\left(\frac{VL}{a}\right)^4}\left[\sin(m_n\tau)-\frac{VL}{a m_n}\sin\left(\frac{m_n^2 a\tau}{VL}\right)\right]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{36}$$

As we recall from page 224, $F(t)$ represents the deflection of the beam under the point of application of the force, and when the characterictic value m_n approaches VL/a we obtain the case of a resonance. In this case we must use L'Hôpital's rule to evaluate the following expressions:

$$\lim_{m_n\to(VL/a)}\frac{\cos(m_n\tau)-\cos\left(\frac{a m_n^2\tau}{VL}\right)}{m_n^4-\left(\frac{VL}{a}\right)^4} = \frac{2\tau\sin\left(\frac{VL}{a}\tau\right)}{4\left(\frac{VL}{a}\right)^3},$$

$$\lim_{m_n\to(VL/a)}\frac{\sin(m_n\tau)-\frac{VL}{a m_n}\sin\left(\frac{a m_n^2\tau}{VL}\right)}{m_n^4-\left(\frac{VL}{a}\right)^4} = \frac{-\tau\frac{VL}{a}\cos\left(\frac{VL}{a}\tau\right)+\sin\left(\frac{VL}{a}\tau\right)}{4\left(\frac{VL}{a}\right)^4},$$

which, when substituted into (36), give for $F(\tau)$, in the case of resonance

$$\begin{aligned} F(\tau) = \frac{P}{\gamma L}\frac{g}{2}\left(\frac{a}{V^2}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\tau)\Bigg\{&X_n(\tau)+\left[\delta_n-2\tau\frac{VL}{a}\right]\sin\left(\frac{VL}{a}\tau\right) \\ &-\delta_n\tau\frac{VL}{a}\cos\left(\frac{VL}{a}\tau\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{37}$$

By evaluating (35) and (36) on the computer for different times and substituting these expressions into (30), we obtain a system of equations for $\varphi_k(\tau)$. When $\varphi_k(\tau)$ has been determined, we obtain the deflection of the beam under the point of application of the mass from (31).

As an illustrative example, let us consider the case of a force and a mass moving with constant velocity along a cantilever beam as shown in Fig. 3a. Let us take $V = 120$ ft/sec,

$$L = 60 \text{ ft.}, \qquad a = \sqrt{\frac{D}{\rho}} = 20636 \frac{\text{ft.}^2}{\text{sec.}}, \qquad \frac{P}{\gamma L} = \frac{1}{2},$$

and assume that the mass particle starts moving from the built-in end. The beam is divided in ten equal parts and ten terms of the series (35) and (36) are taken into consideration. The path of the point of application of the mass as well as the path of the point of application of the force P given by (36) are illustrated in Fig. 3a, and the numerical values of the path are given in Table I. The acceleration of the mass is shown in Fig. 3b and the numerical values of the acceleration are shown in Table II.

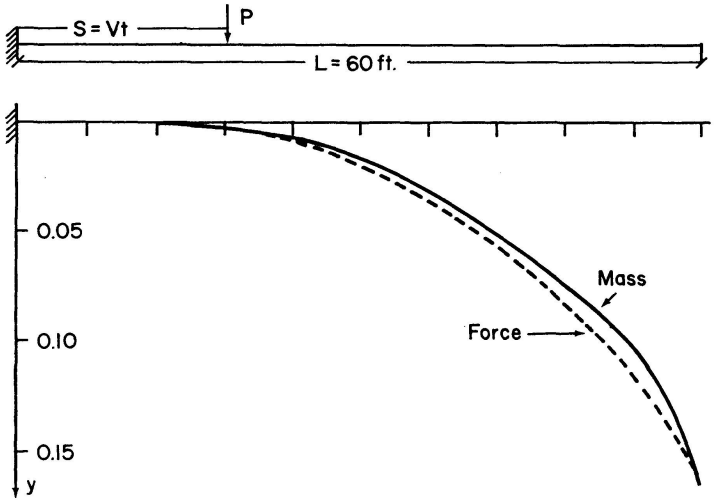


Fig. 3a. Path of the point of application of the force (in dotted line) and of the mass (in solid line) moving with constant velocity $V = 120$ ft/sec on a cantilever beam. The beam has the following properties: $L = 60$ ft., $a = \sqrt{D/\rho} = 20636$ ft²/sec., $P/\gamma L = 1/2$.

Table I. Numerical values of the defiection due to the mass and the force for different positions τ of the load on the beam described in Fig. 3a

τ	y_{force} ft.	y_{mass} ft.	τ	y_{force} ft.	y_{mass} ft.
0.1	1.223×10^{-4}	1.196×10^{-4}	0.6	3.730×10^{-2}	3.341×10^{-2}
0.2	8.634×10^{-4}	8.349×10^{-4}	0.7	5.767×10^{-2}	5.243×10^{-2}
0.3	3.227×10^{-3}	3.073×10^{-3}	0.8	8.211×10^{-2}	7.591×10^{-2}
0.4	9.241×10^{-3}	8.550×10^{-3}	0.9	1.144×10^{-1}	1.049×10^{-1}
0.5	2.067×10^{-2}	1.865×10^{-2}	1.0	1.596×10^{-1}	1.632×10^{-1}

Let us take as a second example a cantilever beam with the following characteristics: $L = 5\,m$; $a = 12.8 \times 10^{-4}$ cm²/sec; $P/\gamma L = 1$. The mass particle moves on the beam with $V = 10$ m/sec. For this case, the path of the point of application of the traveling force and the traveling mass are shown in Fig. 4a and the numerical values are given in Table III. Fig. 4b represents the acceleration of the mass at chosen instants of time with the numerical values shown in Table IV.

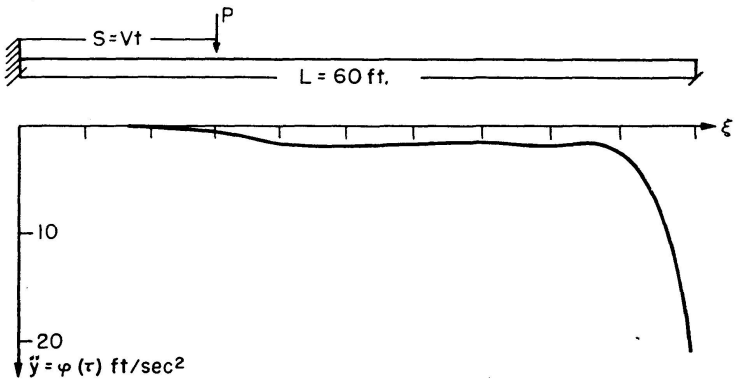


Fig. 3b. The acceleration of the mass particle for its different positions on the beam.

Table II. Numerical values of the acceleration of the mass particle for its different positions on the beam. The characteristics of the beam are described in Fig. 3a

τ	$\ddot{y}$ (ft/sec²)	τ	$\ddot{y}$ (ft/sec²)
0.1	0.096	0.6	1.793
0.2	0.381	0.7	1.606
0.3	0.837	0.8	1.967
0.4	1.755	0.9	2.461
0.5	1.941	1.0	20.940

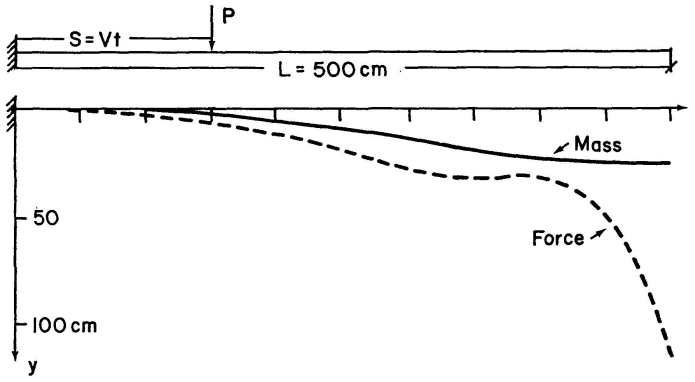


Fig. 4a. Path of the point of application of the force (in dotted line) and of the mass (in solid line) moving with constant velocity $V=10$ m/sec on a cantilever beam with the following properties: $L=5$ m, $a=\sqrt{D/\rho}=12.8\times10^4$ cm²/sec., $P/\gamma L=1$.

The period of free vibration corresponding to the first mode of the beam in $T_1=3.5$ sec., and, to the second mode, $T_2=0.56$ sec. Since the mass crosses the beam in 0.50 sec., which is close to T_2, the effect of the second mode of free vibrations is considerable.

Table III. Numerical values of the defiection in the case of a force and mass which move on the beam whose characteristics are described in Fig. 4a

τ	y_F (cm)	y_m (cm)	τ	y_F (cm)	y_m (cm)
0.1	0.455	0.135	0.6	27.700	13.436
0.2	2.481	0.830	0.7	30.245	18.535
0.3	6.243	2.480	0.8	31.699	22.163
0.4	11.093	5.041	0.9	49.818	26.701
0.5	18.8601	8.552	1.0	112.332	26.121

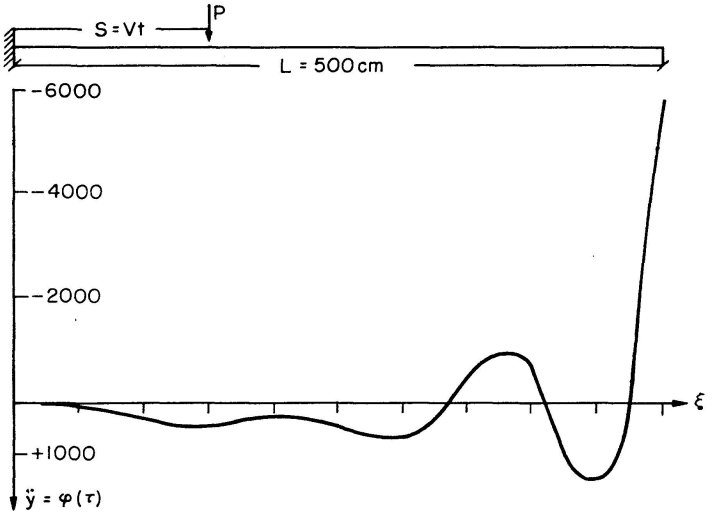


Fig. 4b. The acceleration of the mass particle for different positions on the beam. As we can see from this figure the acceleration of the mass particle at the free end of the beam is approximately $5g$, which requires some device to keep the mass attached to the beam.

Table IV. Numerical values of the acceleration of the mass particle which moves on a beam described in Fig. 4a

τ	$\ddot{y}$ (cm/sec²)	τ	$\ddot{y}$ (cm/sec²)
0.1	107.7	0.6	641.6
0.2	340.9	0.7	-468.6
0.3	422.9	0.8	-708.5
0.4	305.5	0.9	1436.0
0.5	455.5	1.0	-5530.1

In this example, the period of free vibrations corresponding to the first mode of the beam is $T_1 = 3.5$ sec. and that corresponding to the second mode is $T_2 = 0.56$ sec. Since the mass crosses the beam in 0.50 sec., which is close to T_2, the effect of the second mode of free vibrations is considerable. This explains the upward concavity of the path of the mass in the middle part of the beam. From Fig. 4a we see that there is a noticeable difference between the effect of a traveling force and that of a traveling mass, which is due mainly to the characteristic $a = \sqrt{D/\rho}$ of the beam and to the large velocity V of the mass.

As a third example let us consider a beam built-in at one end and simply supported at the other end, as illustrated in Fig. 5a, with the following characteristics: $L = 60$ ft., $a = 20636$ ft.²/sec., $P/\gamma L = 1/2$. The mass particle moves on this beam with $V = 120$ ft./sec. The paths of the point of application of the traveling mass and of the traveling force, computed by the method described in this section, are shown in Fig. 5b. From the numerical values of both paths given in Table V we see that there is a small difference between them.

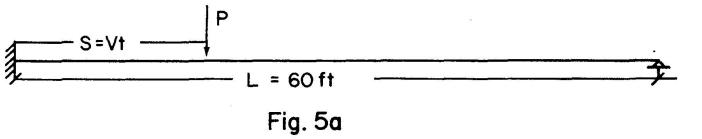


Fig. 5a

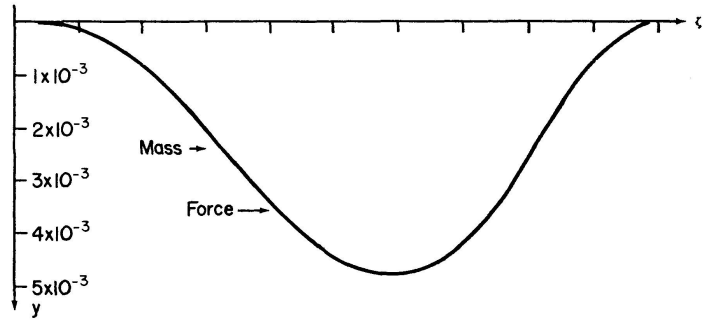


Fig. 5b.

Fig. 5. Path of the point of application of the force and of the mass moving with constant velocity $V=120$ ft/sec on a beam built-in at one end and simply supported at another end. The beam has the following characteristics:
$L=60$ ft., $a=\sqrt{D/\rho}=20636$ ft²/sec., and $P/\gamma L=1/2$.

Table V. Numerical values for the deflections of the beam described in Fig. 5a.

From here we can conclude that there is very small difference between the effects of a moving force and a moving mass.

τ	$10^3\times y_m$ ft.	$10^3\times y_F$	τ	$10^3\times y_m$ ft.	$10^3\times y_F$
0.1	0.109	0.109	0.6	4.833	4.825
0.2	0.764	0.771	0.7	4.237	4.222
0.3	2.015	2.014	0.8	2.661	2.662
0.4	3.416	3.414	0.9	0.909	0.909
0.5	4.454	4.440	1.0	0	0

Conclusions

The solution of the problem of a moving mass along a beam with arbitrary boundary conditions is obtained in this paper by an integral equation approach. This method has the advantage because by using it one can treat the problem of a mass moving with arbitrary acceleration on a beam which has arbitrary boundary conditions.

In the example illustrated in Fig. 4a one can see that there is a considerable difference between the path of the force and the path of the mass, this difference will be even more pronounced for bigger velocities. In Fig. 5b an illustration is given of a moving mass on a beam which is clamped at one end and simply supported at the other end.

This method could be applied to problems such as a moving mass on a plate resting on an elastic foundation, which has practical applications in the design of the airports. The same approach can be applied to the problem of a moving mass with arbitrary acceleration on a beam lying on an elastic foundation, which has important applications for the design of an efficient high-speed railroad transportation.

Notation

$y(x,t)$	Displacement of the beam at any point x.
$S(t)$	Abscissa of the moving load.
t	Time coordinate.
ρ	Mass per unit length of the beam.
P	Gravity force (weight of the moving mass particle).
D	Bending stiffness of the beam.
L	Length of the beam.
$y(t)=y(S,t)$	Displacement of the beam under the point of application S of the mass.
$P(t)$	Contact force acting on the beam.
$j(x,S)$	Static deflection of the beam under a unit load in place of $P(t)$.
$X_n(x)$	The n-th eigenfunction.
p_n	Angular frequency of the beam.
Π	Potential energy of the beam.
g	Acceleration of gravity.
V	Velocity of the moving mass.
γ	Specific weight per unit length of the beam.
a	$= \sqrt{D/\rho}$.
m_n^4	$= p_n^2/a^2$.
b_n	$= L m_n$.
$\varphi(t)$	$= \frac{d^2 y}{d t^2}$.

References

1. Willis, R.: Appendix to the Report of the Commissioners ... to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures. London, England, 1849.
2. Stokes, G. G.: Discussion of a Differential Equation Relating to the Breaking of Railway Bridges. Mathematics Physics Papers, Vol. 2, 1849, p. 179.
3. Kryloff, A. N.: Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben. Mathematische Annalen, Vol. 61, 1905, p. 211.
4. Timoshenko, S. P.: On the Forced Vibration of Bridges. Philosophical Magazine, Vol. 43, 1922, p. 1018.
5. Inglis, C. E.: Theory of Transverse Oscillations in Girders and its Relation to Live Load and Impact Allowances. Proceedings of the Institute of Civil Engineers, London, England, Vol. 218, 1924, p. 225.
6. Inglis, C. E.: A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges. Cambridge University Press, 1934.
7. Lowan, A. N.: On Transverse Oscillations of Beams Under the Action of Moving Variable Loads. Philosophical Magazine, Vol. 19, Series 7, 1935, p. 708.
8. Schallenkamp, A.: Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten. Ingenieur-Archiv, Vol. 8, 1937, pp. 182–198.
9. Ayre, R. S., Ford, G., and Jacobsen, L. S.: Transverse Vibration of a Two-Span Beam Under Action of a Moving Constant Force. Journal of Applied Mechanics, Vol. 17 (Mar. 1950), pp. 1–12.

10. AYRE, R.S., JACOBSEN, L. S., and HSU, C. S.: Transverse Vibration of One and Two-Span Beams under the Action of a Moving Mass Load. Proceedings of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics (June 1951), pp. 81–90.
11. RYAZANOVA, M. YA.: Vibration of a Beam Under the Action of a Moving Mass Along it. Akademiya Nauk Ukrains'koi Radyans'koi Socialistichinoi Respublike Dopovidi, No. 2, 1958, pp. 157–161.
12. TIMOSHENKO, S. P., and YOUNG, D. H.: Vibration Problems in Engineering. 3rd ed., Van Nostrand Co. Inc., New York, 1955.
13. TRICOMI, F. G.: Integral Equations. Interscience Publishers, Inc., New York, 1957, p. 15.
14. YOUNG, DANA, and FELGAR, R. P., JR.: Tables of Characteristic Functions Representing Normal Modes of Vibration of a Beam. Published by the University of Texas, No. 4913, July 1, 1949.
15. TIMOSHENKO, S. P., and YOUNG, D. H.: Advanced Dynamics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1948.
16. HILDEBRAND, F. B.: Introduction to Numerical Analysis. McGraw-Hill Book Co., New York, 1956, pp. 92–93.
17. ZAGUSTIN, A. I.: Numerical Calculus. Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela, 1959, p. 45.
18. TSENG, C.: Moving mass on an infinite beam. 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics 1962, pp. 411–418.
19. LICARI, J. S., WILSON, E. N.: Dynamic response of a beam subjected to a moving forcing system. 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics 1962, pp. 419–425.
20. BOLOTIN, V. V.: Zadacha o kolebanii mostov pod deistviem podvizhnoi nagruzki. (Problem of vibration of bridges under the influence of moving load.) Izv. AN USSR, OTN. Mekhanika i Mashinostroenie, N 4, 1961.
21. PESTEL, E.: Tragwerkauslenkung unter bewegter Last. Ing.-Arch., 1952, p. 378.

Summary

The problem of a mass moving along a beam having other than simply supported ends has not been given much attention. As an example of such a case a cantilever beam will be used. An integral equation approach is used for the response of a cantilever beam to a mass particle moving with constant velocity on a beam. The obtained solution is true for the case of a concentrated mass moving with arbitrary accelerated motion on any beam whose eigenfunction has the same form as that of a cantilever beam. This method has the advantage that it can be applied to a moving mass on a plate and also to moving masses on plates or beams which rest on an elastic foundation.

Résumé

On n'a pas prêté beaucoup d'attention au problème d'une masse se mouvant le long d'une poutre ayant d'autres bouts que ceux qui sont simplement supportés. Comme exemple on utilise un porte-à-faux. Une équation inté-

grale approximative est utilisée pour la réaction d'un porte-à-faux sur une masse partielle se mouvant le long d'une poutre avec une vitesse constante. La solution obtenue est valable pour le cas d'une masse concentrée se mouvant d'une vitesse accélérée arbitraire sur chaque poutre dont la valeur propre a la même forme comme celle d'un porte-à-faux. Cette méthode présente l'avantage de pouvoir être appliquée à une masse se mouvant sur une dalle et de même à des masses se mouvant sur des dalles ou sur des poutres qui reposent sur une fondation élastique.

Zusammenfassung

Dem Problem einer Masse, die sich längs eines Trägers mit anderen als einfach gestützten Enden bewegt, wurde noch nicht viel Aufmerksamkeit geschenkt. Als Beispiel eines solchen Falles wird ein Kragarm gewählt. Eine näherungsweise Lösung in Form einer Integralgleichung wird für die Reaktion eines Kragarms auf ein Massenelement verwendet, welches sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Träger vorwärts bewegt. Die erhaltene Lösung stimmt genau im Falle einer beliebigen beschleunigten Bewegung für jeden Träger, dessen Eigenwert mit jenem des Kragarms übereinstimmt. Die Methode bietet zudem den Vorteil, dass sie sich auch auf Massenbewegungen auf einfach oder elastisch gestützten Platten anwenden lässt.

Leere Seite
Blank page
Page vide