

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 32 (1972)

**Artikel:** Über die Stärke und Steifigkeit von Kastenträgern mit Rechteckquerschnitt

**Autor:** Janssen, J.D. / Veldpaus, F.E.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-24954>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über die Stärke und Steifigkeit von Kastenträgern mit Rechteckquerschnitt

*About Strength and Stiffness of Rectangular Box-Girders*

*Résistance et rigidité de poutres en caisson rectangulaire*

J. D. JANSSEN

Prof. Dr. Ing.

Laboratorium für Technischœ Mechanik, Technische Hochschule Eindhoven NL

F. E. VELDPAUS

Ing.

## 1. Einleitung

Das mechanische Verhalten (dünnwandiger) Kastenträger lässt sich in bestimmten Fällen – wovon Fig. 1.1 einige Beispiele gibt – mit Hilfe der elementaren Bernoullischen und Bredtschen Biegungs- und Torsionstheorie nicht genügend exakt beschreiben.

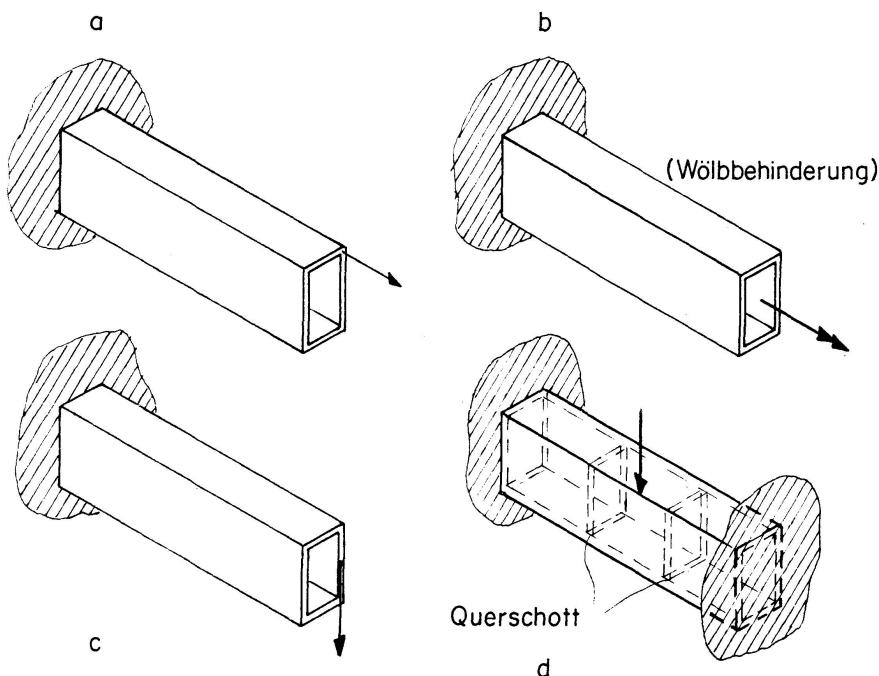


Fig. 1.1. Beispiele für welche die Theorien von Bredt und Bernoulli nicht genügen.

Nach der Bredtschen Theorie treten axiale Verschiebungen des Querschnitts auf, wenn der Träger mit einem Torsionsmoment (Fig. 1.1 b) belastet wird. Behinderung dieser Verwölbung wird u. a. das Auftreten axialer Normalspannungen und zusätzlicher Schubspannungen zur Folge haben.

In bestimmten Belastungssituationen – siehe z. B. Fig. 1.1 c und Fig. 1.1 d – wird ausserdem eine Änderung der Form des Querschnitts stattfinden: das Schiefeziehen der Profillinie.

Es gibt eine ganze Reihe eindimensionaler Theorien für dünnwandige Kastenträger, bei denen man den Einfluss der Querschnittsverwölbung berücksichtigt. Oft lässt man dabei die Wirkung des Schiefeziehens ausser Betracht, siehe z. B. D. WILLIAMS [1], W. FLÜGGE und K. MARGUERRE [2], R. HEILIG [3], C. KOLLMRUNNER und N. HAJDIN [4]. Experimentell kann klargestellt werden, dass dies öfters nicht den Tatsachen entspricht [5]. Selbstverständlich wäre es möglich, die Wirkung des Schiefeziehens hinreichend zu reduzieren, wenn man genügend Querschotte im Träger einbaut. Diese Situation wird aber nicht immer auftreten.

Zwar ist u. a. von JANSSEN [5], DABROWSKI [6], VLASOV [7], LACHER [8], RESINGER [9] und CSONKA [10] eine Theorie angegeben worden, bei der sowohl die Wirkung der Verwölbung als des Schiefeziehens des Querschnitts wohl berücksichtigt wird. Ein Vergleich dieser Theorien ist jedoch nicht Zweck dieser Arbeit.

Mit Hilfe der klassischen Theorie für Plattenbiegung und durch genaue Experimente hat JANSSEN [5] bewiesen, dass die in [5] präsentierte Modifikation der Vlasovschen Theorie [7] die Realität zur Genüge darstellt. Aus dieser modifizierten Vlasov-Theorie ergibt sich u. a., dass eine bessere Beschreibung der Biegespannungen möglich ist als mit [7]. Deshalb beschränkt sich diese Arbeit auf die von Janssen aufgestellte Theorie. Wendet man seine auf dem Prinzip der minimalen potentiellen Energie basierte Arbeitsweise an, so bleiben die Berechnungen übersichtlich und systematisch. Wir werden danach streben, die wichtigsten Ergebnisse in eine für den Praktiker nutzbare Form darzustellen.

Hierbei werden wir uns auf zylindrische Kastenträger mit Rechteckquerschnitt und zwei Symmetrieachsen beschränken. Obwohl diese Beschränkungen nicht wesentlich sind, so sind sie doch mehr oder weniger notwendig, um zu einer Theorie zu gelangen, die auch analytisch handlich ist. Bei einem beliebigen Querschnitt ist es zweckmässiger, einem numerischen Weg zu folgen, etwa mit Hilfe der Methode der finiten Elemente [11].

Der Belastungszustand in einem Endquerschnitt des Trägers ist in den Theorien nach Bernoulli-Navier und Bredt völlig charakterisiert durch die Normalkraft, die Querkräfte, die biegenden Momente und das Torsionsmoment. Berücksichtigt man aber die Verwölbung und das Schiefeziehen des Querschnitts, so werden auch die in Fig. 1.2 gezeichneten Gleichgewichtssysteme von grosser Wichtigkeit sein.

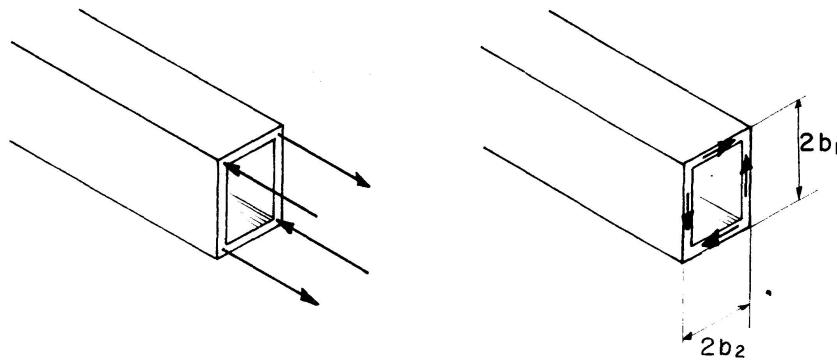


Fig. 1.2. Gleichgewichtssysteme.

In dieser Arbeit werden für einige spezifische Belastungen die Differenzen untersucht, die zwischen der Theorie für Träger mit starrem Querschnitt einerseits und mit verformbarem Querschnitt andererseits auftreten. Dabei möchten wir uns auf Belastungssysteme beschränken, die hinsichtlich der beiden Symmetrieflächen des Trägers antimetrisch sind, wie z. B. ein Torsionsmoment oder die in Fig. 1.2 gezeichneten Kräftesysteme. Eine eventuelle Belastung der zylindrischen Oberfläche des Trägers bleibt ausser Betracht, es sei vielmehr auf die in [5], [7] und [8] präsentierten Arbeitsweisen hingewiesen.

## 2. Bezeichnungen

### 2.1. Koordinaten (siehe Fig. 2.1)

- $x$  Längsachse.
- $y, z$  Querschnittshauptachsen.
- $s$  Konturordinate.

### 2.2. Geometrische Daten (siehe Fig. 2.1)

- $b_1, b_2$  halbe Höhe, bzw. halbe Breite.
- $t_1, t_2, t(s)$  Wandstärke.

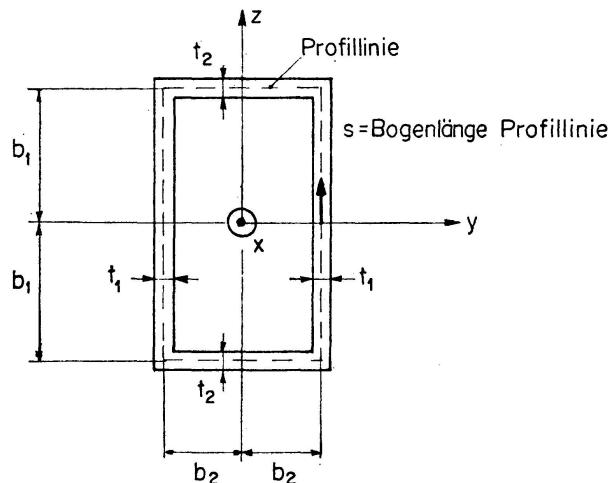


Fig. 2.1. Querschnitt des Trägers; Koordinatensystem.

- $l$  Länge des Trägers.  
 $F$  Querschnittsfläche;  $F = 4(b_1 t_1 + b_2 t_2)$ .

### 2.3. Werkstoffdaten

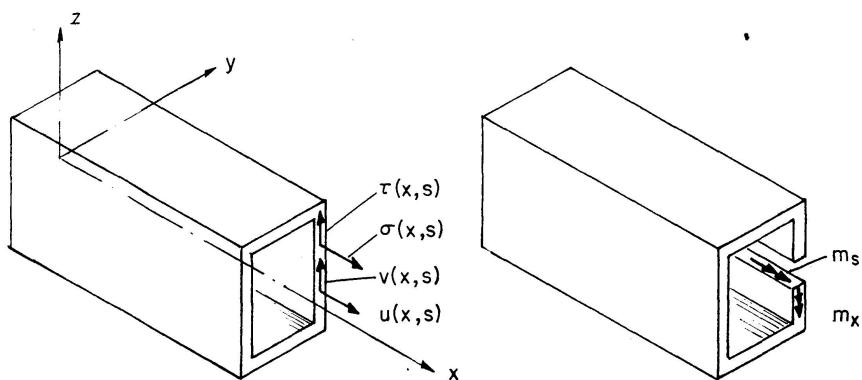
- $E$  Elastizitätsmodul.  
 $G$  Schubmodul.  
 $\nu$  Querdehnungszahl.

### 2.4. Verschiebungsfunktionen (siehe Fig. 2.2)

- $u(x, s)$  Verschiebung in axialer Richtung.  
 $v(x, s)$  Verschiebung in Richtung der Konturordinate.  
 $\beta(x)$  Verwölbungsfunktion.  
 $\theta(x)$  Verdrehung des Querschnitts.  
 $\kappa(x)$  Verformungswinkel der Profillinie.  
 $\phi(s)$  Verschiebung  $u$  wenn  $\beta(x) = 1$ .  
 $h(s)$  Verschiebung  $v$  wenn  $\theta(x) = 1, \kappa(x) = 0$ .  
 $m(s)$  Verschiebung  $v$  wenn  $\theta(x) = 0, \kappa(x) = 1$ .

### 2.5. Spannungen und Kraftgrößen (siehe Fig. 2.2)

- $\sigma(x, s)$  axiale Membrannormalspannung.  
 $\tau(x, s)$  Membranschubspannung.  
 $\tau_1(x, s), \tau_2(x, s)$  Membranschubspannungen in Platte 1, bzw. Platte 2.  
 $\sigma_s(x, s)$  Biegespannung.  
 $\sigma_{id}(x, s)$  Vergleichsspannung.  
 $\bar{\sigma}(s), \bar{\tau}(s)$  vorgeschriebene Spannungen im Endquerschnitt.  
 $M(x)$  Torsionsmoment.  
 $B(x), Q(x)$  axiales, bzw. transversales Bimoment.  
 $\bar{B}, \bar{M}, \bar{Q}$  vorgeschriebene Belastung im Endquerschnitt.  
 $M_{1x}(x, s)$  Biegemoment pro Längeneinheit im Querschnitt.  
 $M_{1s}(x, s)$  Biegemoment pro Längeneinheit im Längsschnitt.



2.2. Spannungen und Verschiebungen.

### 2.6. Steifigkeitsdaten

$a_1, a_2, a_3, a_4$	Steifigkeiten nach (3.13), (3.14), (3.15), (3.21).
$c$	Steifigkeit nach (4.4).
$\alpha_0^4 =$	$\frac{1}{4} \frac{c}{a_1}$ .
$\epsilon^2 =$	$\frac{1}{16} \frac{a_1 c}{a_4^2}$ .
$\lambda^2 =$	$\frac{a_4}{a_1}$ .
$\mu =$	$\frac{a_3}{a_2}$ .
$\alpha^2 =$	$\alpha_0^2 (1 + \epsilon)$ .
$\gamma^2 =$	$\alpha_0^2 (1 - \epsilon)$ .
$\delta^2 =$	$1 - \epsilon^2$ .

### 2.7. Indizien

$s$	für Theorie mit starrer Profillinie.
$f$	für Theorie mit verformbarer Profillinie.
$b$	für Theorie nach Bredt.

### 2.8. Sonstige Symbole

$V$	potentielle Energie.
$l_0$	charakteristische Länge des Trägers nach (6.1) und (6.2).
$\phi_1 =$	$\cosh(\alpha x) \sin(\gamma x)$ .
$\phi_2 =$	$\cosh(\alpha x) \cos(\gamma x)$ .
$\phi_3 =$	$\sinh(\alpha x) \cos(\gamma x)$ .
$\phi_4 =$	$\sinh(\alpha x) \sin(\gamma x)$ .
$( )'$	$\frac{d}{dx} ( )$ .

## 3. Träger mit starrer Profillinie

Analog [5] stützt sich die Theorie auf das Prinzip der minimalen potentiellen Energie, mit der ein übersichtliches, gut fundiertes und konsistentes Näherungsverfahren entsteht, das mit dem u. a. in [3] präsentierten Verfahren übereinstimmt.

Um nicht nur kinematische, sondern auch dynamische Randbedingungen mit einzubeziehen, betrachten wir einen Träger, der bei  $x=0$  starr eingespannt ist und bei  $x=l$  durch die Normalspannungen  $\bar{\sigma}(s)$  und die Schubspannungen  $\bar{\tau}(s)$ , die gleichmäßig über die Wandstärke verteilt sind, belastet ist. Selbstverständlich sollen  $\bar{\sigma}$  und  $\bar{\tau}$  den in der Einleitung erwähnten Antimetriebedingungen genügen, also:

$$\int_F \bar{\sigma} dF = 0, \quad \int_F \bar{\sigma} y dF = \int_F \bar{\sigma} z dF = 0, \quad (3.1)$$

$$\int_F \bar{\tau} \frac{dy}{ds} dF = \int_F \bar{\tau} \frac{dz}{ds} dF = 0. \quad (3.2)$$

Die Theorie wird eindimensional, wenn das Modell der Verschiebungen im Querschnitt als bekannt vorausgesetzt wird. Für die Verschiebung in Richtung der Konturordinate,  $v(x, s)$ , setzen wir Unverformbarkeit der Profillinie voraus, wogegen das Modell für die axialen Verschiebungen sich auf die Bredt-sche Torsionstheorie stützt. Dann gilt (siehe Fig. 2.2):

$$u(x, s) = \beta(x) \phi(s), \quad (3.3)$$

$$v(x, s) = \theta(x) h(s) \quad (3.4)$$

mit (siehe Fig. 3.1):

$$\phi(s) = y(s) z(s) \quad (3.5)$$

$$h(s) = \begin{cases} b_2 & \text{für } y = \pm b_2, \\ b_1 & \text{für } z = \pm b_1. \end{cases} \quad (3.6)$$

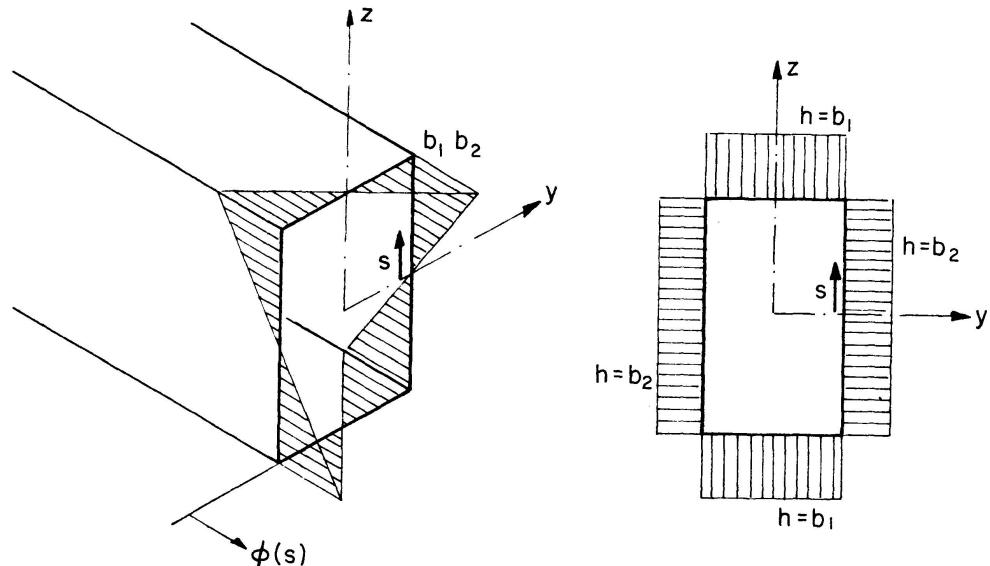


Fig. 3.1. Graphische Darstellung  $\phi(s)$  und  $h(s)$ .

Da nur Membranspannungen auftreten, folgt mit der angegebenen Belastung für die potentielle Energie  $V$  des Trägers:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \int_F \left\{ E \phi^2 (\beta')^2 + G \left( \beta \frac{\partial \phi}{\partial s} + h \theta' \right)^2 \right\} dF dx - \beta(l) \int_F \bar{\sigma} \phi dF - \theta(l) \int_F \bar{\tau} h dF. \quad (3.7)$$

Hieraus ergeben sich das axiale Bimoment  $\bar{B}$  und das Torsionsmoment  $\bar{M}$  als wichtige Spannungsresultanten der Belastung im Querschnitt  $x=l$ :

$$\bar{B} = \int_F \bar{\sigma}(s) \phi(s) dF, \quad (3.8)$$

$$\bar{M} = \int_F \bar{\tau}(s) h(s) dF. \quad (3.9)$$

Analog (3.8) und (3.9) definieren wir das axiale Bimoment  $B(x)$  und das Torsionsmoment  $M(x)$  in einem beliebigen Querschnitt:

$$B(x) = \int_F \sigma(x, s) \phi(s) dF, \quad (3.10)$$

$$M(x) = \int_F \tau(x, s) h(s) dF. \quad (3.11)$$

Mit der Substitution von (3.1) und (3.2) in (3.7) ergibt sich:

$$V = \frac{1}{2} \int_{x=0}^l [a_1(\beta')^2 + a_2\{\beta^2 + (\theta')^2\} + 2a_3\beta\theta'] dx - \bar{B}\beta(l) - \bar{M}\theta(l), \quad (3.12)$$

wobei die Steifigkeitskonstanten  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  definiert werden durch:

$$a_1 = E \int_F \phi^2 dF = \frac{4}{3} E b_1^2 b_2^2 (b_1 t_1 + b_2 t_2), \quad (3.13)$$

$$a_2 = G \int_F \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 dF = G \int_F h^2 dF = 4 G b_1 b_2 (b_1 t_2 + b_2 t_1), \quad (3.14)$$

$$a_3 = G \int_F h \frac{d\phi}{ds} dF = 4 G b_1 b_2 (-b_1 t_2 + b_2 t_1). \quad (3.15)$$

Nach dem Prinzip der minimalen potentiellen Energie ist  $\delta V = 0$  für alle zulässigen Variationen von  $\beta$  und  $\theta$ , und hieraus folgen die Differentialgleichungen für  $\beta(x)$  und  $\theta(x)$ :

$$-a_1\beta'' + a_2\beta + a_3\theta' = 0, \quad (3.16)$$

$$a_3\beta' + a_2\theta'' = 0 \quad (3.17)$$

und zwei dynamische Randbedingungen für  $x=l$ :

$$\bar{B} = a_1\beta'(x=l), \quad (3.18)$$

$$\bar{M} = a_2(\theta' + \mu\beta)_{x=l} = a_4\theta'(x=l) + \mu a_1\beta''(x=l), \quad (3.19)$$

wobei die dimensionslose Konstante  $\mu$  angegeben wird durch:

$$\mu = \frac{a_3}{a_2} \quad (3.20)$$

und  $a_4$  die spezifische Torsionssteifigkeit nach Bredt ist:

$$a_4 = \frac{a_2^2 - a_3^2}{a_2}. \quad (3.21)$$

Die Formeln (3.18) und (3.19) kann man auf jeden beliebigen Querschnitt  $x$  erweitern; sie stellen dann den Zusammenhang dar zwischen den Schnittgrößen  $B(x)$  und  $M(x)$  einerseits und den Verschiebungsgrößen  $\beta(x)$  und  $\theta(x)$  andererseits:

$$B(x) = a_1\beta'(x), \quad (3.22)$$

$$M(x) = a_4\theta'(x) + \mu a_1\beta''(x) = a_4\theta'(x) + \mu B'(x). \quad (3.23)$$

Im Zusammenhang mit den Berechnungen des vierten Kapitels für Träger mit verformbarem Querschnitt ist es angebracht, ausser  $B(x)$  und  $M(x)$ , als dritte Schnittgrösse das transversale Bimoment  $Q(x)$  zu definieren:

$$Q(x) = B'(x) = a_1 \beta'' = a_2 (\beta + \mu \theta'). \quad (3.24)$$

Aus (3.16) und (3.17) lässt sich eine Differentialgleichung in  $\beta(x)$  ableiten:

$$\beta''' - \lambda^2 \beta' = 0, \quad (3.25)$$

wobei

$$\lambda^2 = \frac{a_4}{a_1}. \quad (3.26)$$

Die allgemeinen Lösungen für  $\beta$ ,  $\theta$ ,  $B$  und  $M$  sind lineare Kombinationen der Funktionen  $1$ ,  $x$ ,  $\cosh(\lambda x)$  und  $\sinh(\lambda x)$ . Es gilt:

$$\beta(x) = -\mu c_2 + \lambda \{c_3 \cosh(\lambda x) + c_4 \sinh(\lambda x)\}, \quad (3.27)$$

$$\theta(x) = c_1 + c_2 x - \mu \{c_3 \sinh(\lambda x) + c_4 \cosh(\lambda x)\}, \quad (3.28)$$

$$B(x) = a_4 \{c_3 \sinh(\lambda x) + c_4 \cosh(\lambda x)\}, \quad (3.29)$$

$$M(x) = a_4 c_2. \quad (3.30)$$

In dieser letzten Gleichung kommt selbstverständlich zum Ausdruck, dass das Torsionsmoment  $M$  konstant ist, wenn der Träger nur im Endquerschnitt  $x=l$  belastet ist. Die Integrationskonstanten  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  und  $c_4$  ergeben sich aus den Randbedingungen  $\theta=0$ ,  $\beta=0$  für  $x=0$  und  $B=\bar{B}$ ,  $M=\bar{M}$  für  $x=l$ .

Wenn der Trägerquerschnitt quadratisch ist (also  $b_1=b_2$ ,  $t_1=t_2$  und deshalb  $a_3=0$ ), erhält man die Torsionstheorie nach Bredt. Diese Theorie erfolgt auch, wenn die Verwölbung in den Endquerschnitten  $x=0$  und  $x=l$  nicht behindert wird (also  $B(0)=B(l)=0$ ).

Nach Berechnung von  $B(x)$ ,  $M(x)$  und  $Q(x)$  können die damit zusammenhängenden Spannungen festgestellt werden. Mit dem Hookeschen Gesetz resultiert für die Normalspannung  $\sigma(x,s)$  und die Schubspannung  $\tau(x,s)$  in den Platten (siehe Fig. 2.2):

$$\sigma(x,s) = E \beta'(x) \phi(s) = \frac{E}{a_1} B(x) \phi(s), \quad (3.31)$$

$$\tau_1(x) t_1 = \frac{M + B'(x)}{8 b_1 b_2} = \frac{M + Q(x)}{8 b_1 b_2}, \quad (3.32)$$

$$\tau_2(x) t_2 = \frac{M - B'(x)}{8 b_1 b_2} = \frac{M - Q(x)}{8 b_1 b_2}. \quad (3.33)$$

JANSSEN [5] hat durch seine Forschung bewiesen, dass man eine bessere Verteilung der Schubspannungen erhält, wenn man axiales Gleichgewicht eines Elementes  $t(s) dx ds$  aus den Trägerplatten voraussetzt. Dann ist das Resultat eine quadratische Verteilung der Schubspannungen für jede Platte. Die Spannungen nach (3.32) und (3.33) soll man als Mittelwerte über die diesbezügliche Platte betrachten. Was den Zweck dieser Arbeit betrifft, so sind die Resultate nach (3.32) und (3.33) hinreichend genau.

#### 4. Träger mit deformierbarer Profillinie

Die Theorie im dritten Kapitel beruht auf der Voraussetzung, dass die Profillinie unverformbar ist. Wie aus (3.32) und (3.33) hervorgeht, treten ausser den Bredtschen Schubspannungen  $\frac{M}{8b_1 b_2 t}$  noch zusätzliche Schubspannungen  $\frac{Q}{8b_1 b_2 t}$  auf.

In Fig. 4.1 sind diese zusätzlichen Schubspannungen angegeben in den Querschnitten zur Stelle  $x_1$  und  $x_1 + dx$ .

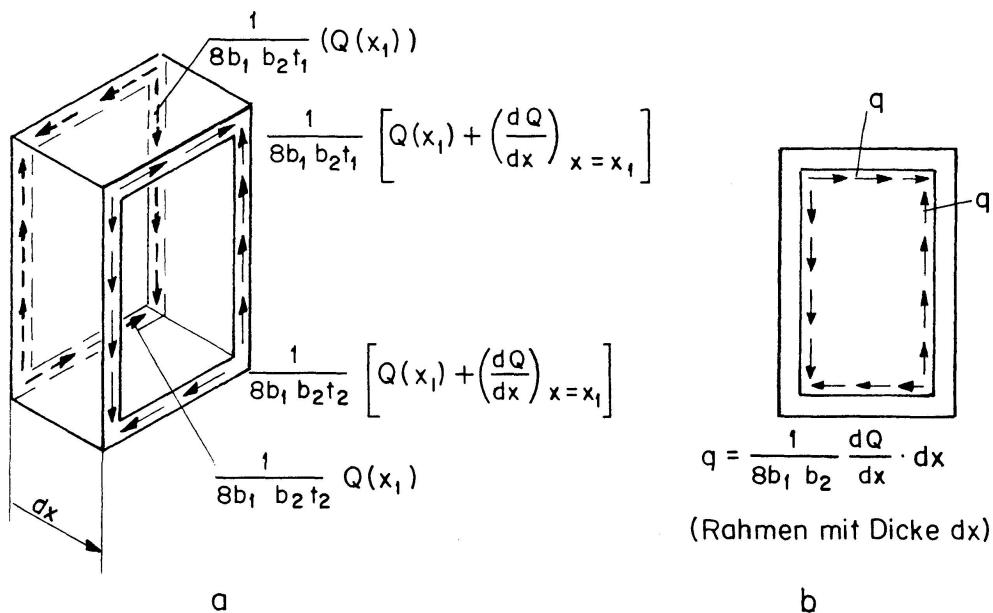


Fig. 4.1. Zusätzliche Schubspannungen.

Betrachtet man das Körperelement  $dx$  des Trägers als einen Rahmen, so wird dieser Rahmen infolge der zusätzlichen Schubspannungen belastet (siehe Fig. 4.1 b). Nur wenn sich im diesbezüglichen Querschnitt ein Querschott befindet, das in seiner Ebene verhältnismässig steif ist, wird keine Verformung der Profillinie auftreten.

Es liegt nahe, das Deformationsmodell der Formänderung der Profillinie unter der skizzierten Belastung (Fig. 4.1 b) zugrunde zu legen. Berücksichtigt man nur die Biegungsenergie, so nimmt die Profillinie die in Fig. 4.2 dargestellte Form an, die vom Winkel  $\kappa$  charakterisiert werden kann.

Für die Verschiebung in  $s$ -Richtung folgt dann:

$$v(x, s) = \theta(x) h(s) + \kappa(x) m(s) \quad (4.1)$$

$$\text{mit: } m(s) = \begin{cases} b_2 & \text{für } y = \pm b_2, \\ -b_1 & \text{für } z = \pm b_1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Überall wo  $\phi(s)$  differenzierbar ist, zeigt sich:

$$m(s) = \frac{d\phi}{ds}. \quad (4.3)$$

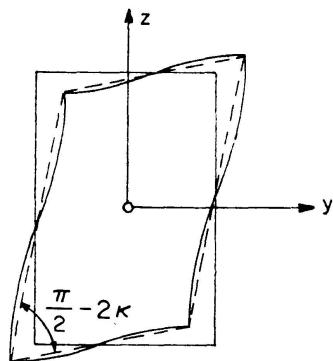


Fig. 4.2. Formänderung des Rahmens (schrifziehen).

Die Profilverformung kann in mehrfacher Weise berücksichtigt werden (siehe z. B. [5, 6, 7, 8]).

Dabrowski teilt die Berechnung auf. Mit der Hypothese, wonach  $\kappa$  gleich null ist, wird zunächst – in einem ganz anderen Verfahren als im dritten Kapitel – das transversale Bimoment  $Q = Q(x)$ , das die Querschnittstreue gewähren soll, bestimmt. Nachher wird die Verformbarkeit des Querschnitts wiederhergestellt und eine Differentialgleichung vierter Ordnung für den Verformungswinkel  $\kappa$  infolge der Belastung  $-Q(x)$  abgeleitet.

Man wendet hier dasselbe Verfahren an wie in [5] und stützt sich deshalb auf das Prinzip der minimalen potentiellen Energie. Die interessanten Differentialgleichungen und die dynamischen Randbedingungen können dann leicht bestimmt werden.

Die axiale Verschiebung  $u(x, s)$  wird in dieser Methode, wie auch im dritten Kapitel, durch (3.3) gegeben, während für die Verschiebung in  $s$ -Richtung (4.1) statt (3.4) benutzt wird. Dem Integral in (3.12), das die Formänderungsenergie im Träger angibt, soll jetzt ein Glied hinzugefügt werden, das von der mit  $\kappa$  charakterisierten Plattenbiegung stammt. Dazu berechnet man die Biegungsenergie in einem Rahmen, der sich in der Art und Weise deformiert, wie in Fig. 4.2 angegeben.

Die Integration dieser Energie der Länge des Trägers entlang zeigt, dass das zusätzliche Glied in (3.12) gleich  $\frac{1}{2} \int_{x=0}^l c \kappa^2 dx$  ist.

Unter Annahme der Behinderung der Querkontraktion im Falle einer Plattenbiegung ergibt sich für  $c$ :

$$c = \frac{4 E}{1 - \nu^2} \frac{t_1^3 t_2^3}{b_1 t_2^3 + b_2 t_1^3}. \quad (4.4)$$

Nach [5] führt diese Annahme zu hinreichend genauen Ergebnissen.

Ausser dem Torsionsmoment  $M(x)$  und dem axialen Bimoment  $B(x)$  tritt in dieser Theorie eine dritte Schnittgrösse auf: das transversale Bimoment  $Q(x)$ , das folgendermassen definiert wird:

$$Q(x) = \int_F \tau(x, s) m(s) dF. \quad (4.5)$$

Nachher wird es klar, dass diese Definition mit (3.24) konsistent ist. Als wichtige Belastungsgrösse im Endquerschnitt  $x=l$  tritt, ausser  $\bar{M}$  und  $\bar{B}$ , auch das transversale Bimoment  $\bar{Q}$  auf:

$$\bar{Q} = \int_F \bar{\tau}(s) m(s) dF. \quad (4.6)$$

Die Formel für die potentielle Energie für einen bei  $x=0$  eingespannten und bei  $x=l$  von  $\bar{M}$ ,  $\bar{B}$  und  $\bar{Q}$  belasteten Träger lautet:

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \int_{x=0}^l [a_1(\beta')^2 + a_2\{(\beta+\kappa')^2 + (\theta')^2\} + 2a_3(\beta+\kappa')\theta' + c\kappa^2] dx \\ & - \beta(l)\bar{B} - \theta(l)\bar{M} - \kappa(l)\bar{Q}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Neben den schon im dritten Kapitel eingeführten Steifigkeitsgrössen  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  spielt in dieser Formel auch die Biegungssteifigkeit  $c$  eine Rolle. Aus  $\delta V=0$  für alle zulässigen Variationen von  $\beta$ ,  $\theta$  und  $\kappa$  folgen drei Differentialgleichungen und drei dynamische Randbedingungen für  $x=l$ :

$$-a_1\beta'' + a_2\beta + a_3\theta' + a_2'\kappa = 0, \quad (4.8)$$

$$a_3\beta' + a_2\theta'' + a_3\kappa'' = 0, \quad (4.9)$$

$$a_2\beta' + a_3\theta'' + a_2\kappa'' - c\kappa = 0, \quad (4.10)$$

$$\bar{B} = a_1\beta'(x=l), \quad (4.11)$$

$$\bar{M} = (a_3\beta + a_2\theta' + a_3\kappa')_{x=l}, \quad (4.12)$$

$$\bar{Q} = (a_2\beta + a_3\theta' + a_2\kappa')_{x=l}. \quad (4.13)$$

Für die Schnittgrössen  $B(x)$ ,  $M(x)$  und  $Q(x)$  können analoge Gleichungen abgeleitet werden, wenn man einen Träger mit Länge  $x$  betrachtet. Es gilt:

$$B(x) = a_1\beta'(x), \quad (4.14)$$

$$M(x) = a_3\beta(x) + a_2\theta'(x) + a_3\kappa'(x), \quad (4.15)$$

$$Q(x) = a_2\beta(x) + a_3\theta'(x) + a_2\kappa'(x). \quad (4.16)$$

Die Differentialgleichungen können mit diesen Schnittgrössen auch folgendermassen geschrieben werden:

$$B'(x) - Q(x) = 0, \quad (4.17)$$

$$M'(x) = 0, \quad (4.18)$$

$$Q'(x) - c\kappa = 0. \quad (4.19)$$

Wenn  $\theta(x)$  und  $\kappa(x)$  aus (4.8), (4.9) und (4.10) eliminiert werden, ergibt sich für  $\beta$  eine Differentialgleichung fünfter Ordnung.

Mit der Lösung  $\beta=\beta(x)$  können  $\theta=\theta(x)$  und  $\kappa=\kappa(x)$  einfach bestimmt werden. Für die allgemeine Lösung folgt:

$$\begin{aligned} \beta(x) = & -\mu c_2 - (\gamma\phi_2 - \alpha\phi_4)c_3 + (\gamma\phi_1 + \alpha\phi_3)c_4 \\ & + (\alpha\phi_2 + \gamma\phi_4)c_5 + (\alpha\phi_1 - \gamma\phi_3)c_6, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\theta(x) = c_1 + c_2x - 2\epsilon\mu(\phi_1c_3 + \phi_2c_4 + \phi_3c_5 + \phi_4c_6), \quad (4.21)$$

$$\kappa(x) = (\epsilon\phi_1 + \delta\phi_3)c_3 + (\epsilon\phi_2 - \delta\phi_4)c_4 - (\delta\phi_1 - \epsilon\phi_3)c_5 + (\delta\phi_2 + \epsilon\phi_4)c_6, \quad (4.22)$$

mit

$$\phi_1 = \cosh(\alpha x) \sin(\gamma x), \quad (4.23)$$

$$\phi_2 = \cosh(\alpha x) \cos(\gamma x), \quad (4.24)$$

$$\phi_3 = \sinh(\alpha x) \cos(\gamma x), \quad (4.25)$$

$$\phi_4 = \sinh(\alpha x) \sin(\gamma x), \quad (4.26)$$

während die Konstanten  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\epsilon$  und  $\delta$  definiert sind mit:

$$\alpha^2 = \alpha_0^2(1 + \epsilon), \quad \alpha > 0, \quad (4.27)$$

$$\gamma^2 = \alpha_0^2(1 - \epsilon), \quad \gamma > 0, \quad (4.28)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \alpha_0^2 \frac{a_1}{a_4} = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_0}{\lambda} \right)^2, \quad (4.29)$$

$$\delta^2 = 1 - \epsilon^2, \quad \delta > 0 \quad (4.30)$$

und

$$\alpha_0^4 = \frac{1}{4} \frac{c}{a_1}, \quad \alpha_0 > 0. \quad (4.31)$$

Mit (4.14), (4.15), (4.16), (4.20), (4.21) und (4.22) ergibt sich für  $B(x)$ ,  $M(x)$  und  $Q(x)$ :

$$B(x) = 2 \alpha_0^2 a_1 (\phi_1 c_3 + \phi_2 c_4 + \phi_3 c_5 + \phi_4 c_6), \quad (4.32)$$

$$M(x) = a_4 c_2 = \text{konstant}, \quad (4.33)$$

$$Q(x) = 2 \epsilon a_4 \{ (\alpha \phi_4 + \gamma \phi_2) c_3 + (\alpha \phi_3 - \gamma \phi_1) c_4 \\ + (\alpha \phi_2 - \gamma \phi_4) c_5 + (\alpha \phi_1 + \gamma \phi_3) c_6 \}. \quad (4.34)$$

Da in (4.20), (4.21) und (4.22) und in (4.32), (4.33) und (4.34) die Funktionen  $\sin(\gamma x)$  und  $\cos(\gamma x)$  auftreten, wird die Lösung einen «schwankenden» Charakter haben. In den graphischen Darstellungen des fünften Kapitels wird dies klar zum Ausdruck kommen.

Die Spannungen  $\sigma$ ,  $\tau_1$  und  $\tau_2$  in einem Querschnitt können nach der in 3. erwähnten Art und Weise bestimmt werden. Dann ergeben sich wieder die Beziehungen (3.31), (3.32) und (3.33). Für die Berechnung der Schubspannungen kann natürlich auch das schon im dritten Kapitel genannte, genauere Verfahren nach [5] angewendet werden.

Ausser diesen Membranspannungen treten Biegespannungen auf, deren Grösse vom Biegemoment pro Längeneinheit im Querschnitt,  $M_{1x}(x, s)$ , und vom Biegemoment pro Längeneinheit in Längsschnitten,  $M_{1s}(x, s)$ , bestimmt ist. Wegen der Behinderung der Querkontraktion bei Biegung gilt:

$$M_{1x} = \nu M_{1s}. \quad (4.35)$$

Die maximale Biegespannung  $\sigma_b$  infolge  $M_{1s}$  tritt in den Eckpunkten des Trägers auf.

$$\text{Es gilt} \quad M_{1smax} = M_{1s}(y = \pm b_2, z = \pm b_1) = \frac{1}{8} c \kappa \quad (4.36)$$

$$\text{und deshalb} \quad \sigma_{bmax} = \frac{6 M_{1s}}{t_{min}^2}, \quad (4.37)$$

wobei  $t_{min}$  die kleinste der Wandstärke  $t_1$  und  $t_2$  ist.

### 5. Vergleich der Theorien mittels eines konkreten Beispiels

Die ausgeführten Theorien werden an Hand eines konkreten Beispiels miteinander verglichen. Dabei ergeben sich interessante Differenzen, die sodann für beliebige Kastenträger mit Rechteckquerschnitt erläutert werden. Größen die berechnet werden mit Hilfe der Bredtschen Theorie, der Theorie nach 3 und der Theorie nach 4, werden bezeichnet mit Oberindex  $b$ , bzw.  $s$  und  $t$ . In Fig. 5.1 ist der Träger gezeichnet, dem wir unsere Aufmerksamkeit widmen wollen. Alle wichtigen Daten sind in der Abbildung angegeben worden.

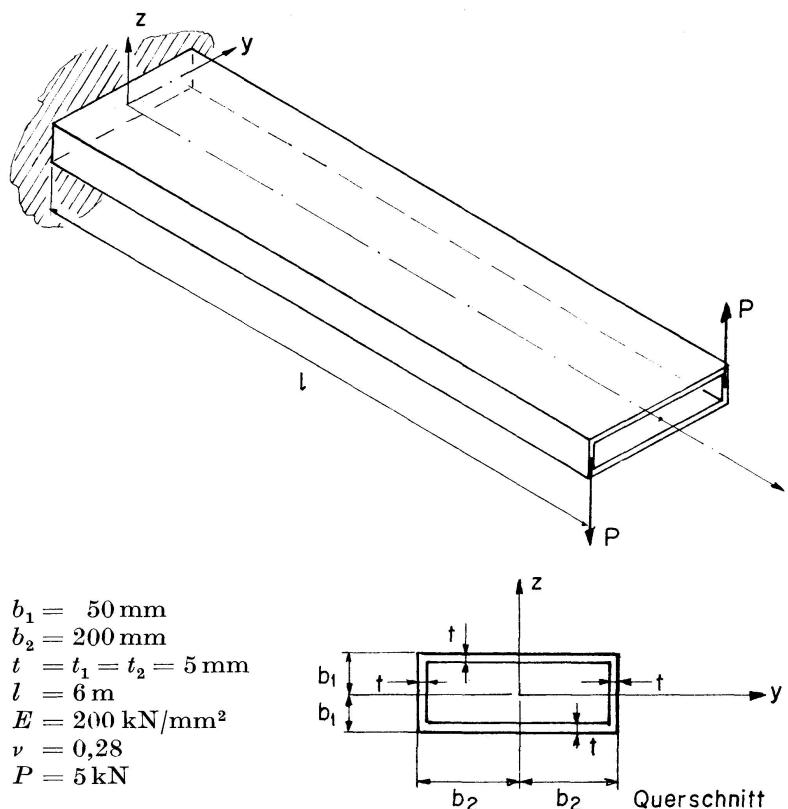
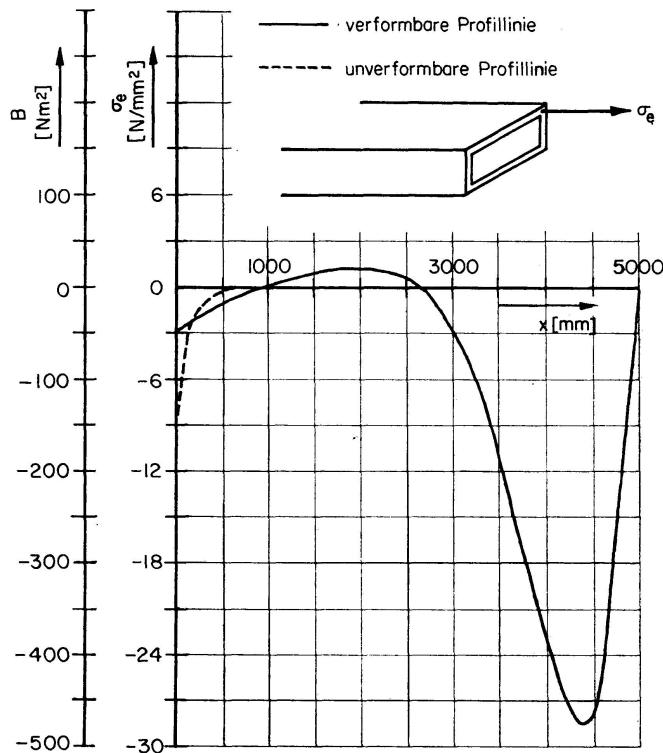
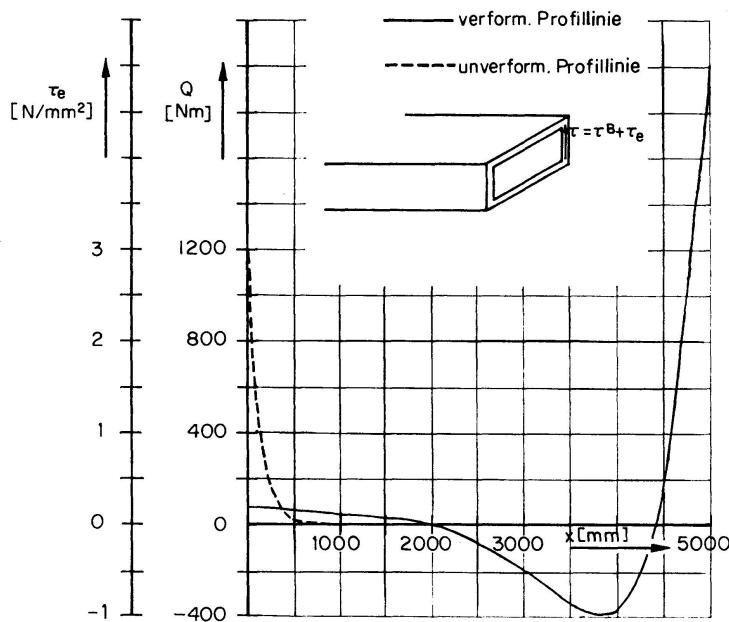


Fig. 5.1. Beispiel.

In Fig. 5.2 bis Fig. 5.5 wurden die interessantesten Spannungs- und Verformungsdaten angegeben. Es zeigt sich sofort, dass die beiden Theorien hinsichtlich der Spannungen und des Verformungswinkels  $\kappa$  quantitativ und qualitativ ganz verschieden sind. Nur die Verdrehung  $\theta$  des Querschnitts stimmt in den beiden Theorien gut überein. Experimente zeigen, dass die Theorie, gestützt auf die Hypothese der verformbaren Profillinie, der Wirklichkeit sehr nahe kommt. In einer nächsten Veröffentlichung wird noch der Fall erörtert, in dem eine bestimmte Zahl gut aufgestellter Querschotten im Träger eine Situation hervorrufen, wobei der Theorie der starren Profillinie gefolgt werden kann.

Infolge der Wölbbehinderung im Querschnitt  $x=0$  entstehen in beiden

Fig. 5.2.  $B$  und  $\sigma_e$  Funktionen von  $x$ .Fig. 5.3.  $Q$  und  $\tau_e$  Funktionen von  $x$ .

Theorien Störspannungen, die man hinsichtlich der Bredtschen Schubspannung ( $\tau^b = 5 \text{ N/mm}^2$ ) als gross bezeichnen kann.

Für die maximale Vergleichsspannung nach Mohr-Guest ( $\sigma_{id\ max}$ ) in der Einspannstelle gilt:

$$\frac{\sigma_{id\ max}^f}{\sigma_{id\ max}^b} = 1,07, \quad (5.1)$$

$$\frac{\sigma_{id\ max}^s}{\sigma_{id\ max}^b} = 1,80. \quad (5.2)$$

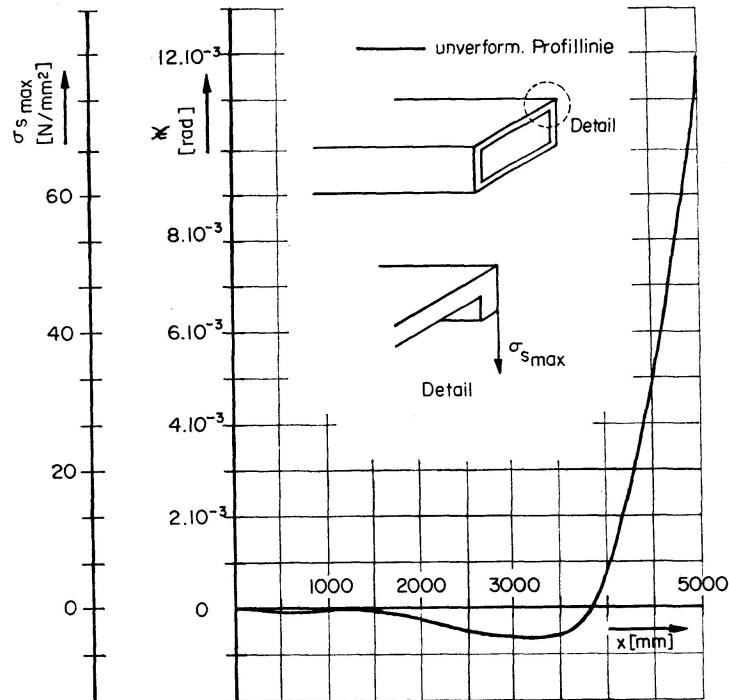


Fig. 5.4.  $\kappa$  und  $\sigma_{s \max}$   
Funktionen von  $x$ .

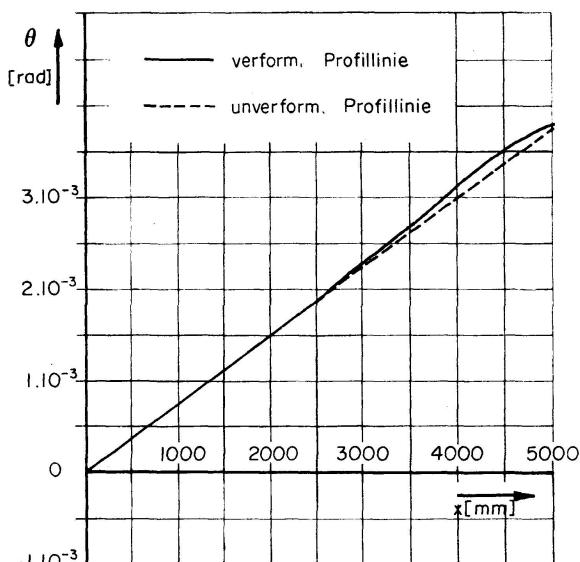


Fig. 5.5.  $\theta$  Funktion von  $x$ .

Ausserdem ist auf die Biegespannungen Rücksicht zu nehmen, die, nach der Theorie der flexiblen Profillinie, bei einem Abstand von ungefähr 500 mm der Einspannstelle maximal sind. Diese Spannungen kann man aber bestimmt nicht vernachlässigen.

Die Störung hinsichtlich der Bredtschen Theorie ist in einer bestimmten Distanz der Einspannstelle verschwunden. In der Theorie mit verformbarer Profillinie ist diese Entfernung viel grösser als in der Theorie mit starrem Querschnitt (2300 mm bzw. 360 mm).

Im Gegensatz zur Theorie für starre Querschnitte gibt die Verformbarkeit der Profillinie auch in der Gegend der Einleitungsstelle des Torsionsmomentes Abweichungen der Bredtschen Theorie. Diese Abweichungen treten auf, weil

die Belastung mit zwei Kräften  $P$  nach Abb. 5.1 nicht nur ein Torsionsmoment  $\bar{M}$ , sondern auch ein transversales Bimoment  $\bar{Q}$  verursacht, das in seinem Absolutwert ebenso gross ist wie  $\bar{M}$ . Die dadurch hervorgerufenen Biegespannungen in den Platten sind, zusammen mit den Schubspannungen, verantwortlich für eine grosse Zunahme der maximalen Vergleichsspannung im Querschnitt  $x=l$  hinsichtlich  $\sigma_{id\ max}^b$ :

$$\frac{\sigma_{id\ max}^f}{\sigma_{id\ max}^b} = 2,00. \quad (5.3)$$

In einer Entfernung von etwa 500 mm des belasteten Querschnitts  $x=l$  treten sehr grosse axiale Membranspannungen auf (siehe Fig. 5.2). In bezug auf die Störung beim Rande  $x=l$  kann man schliessen, dass diese auf 2300 mm des Randes keinen merkbaren Einfluss mehr ausübt.

Im nächsten Kapitel wird näher auf die anhand des gegebenen Beispiels festgestellten Erscheinungen eingegangen. Ausserdem wird eine in der Praxis brauchbare Form der wichtigsten Ergebnisse angestrebt.

## 6. Allgemeiner Vergleich der Theorien

### 6.1. Die Störungslänge

Wie aus den im vorigen Kapitel aufgeführten Abbildungen hervorgeht, haben die Störungen hinsichtlich der Bredtschen Theorie einen «dämpfenden» Charakter. In einer Entfernung  $x$  von der Einleitungsstelle der Störung wird die Grösse der Störung in der Theorie mit starrer Profillinie bestimmt vom Wert  $e^{-\lambda x}$  und in der Theorie mit verformbarer Profillinie vom Wert  $e^{-\alpha x}$ . Da  $e^{-\pi} = 0,04$ , wird die Störungslänge  $l_0$  – ziemlich arbiträr – definiert durch:

$$l_0^s = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\alpha_0} \sqrt{2\epsilon}, \quad (6.1)$$

$$l_0^f = \frac{\pi}{\alpha_0}. \quad (6.2)$$

Man beachte, dass in (6.2)  $\alpha_0$  statt  $\alpha$  benutzt wurde; weil  $\epsilon \ll 1$  (siehe Fig. 6.3) sind  $\alpha$  und  $\alpha_0$  nahezu gleich.

Wenn  $\nu = 0,28$ , so ergibt sich mit den Formeln für  $\alpha_0$  und  $\lambda$ :

$$l_0^s = 1,45 \sqrt{\frac{1}{t_1 t_2} (b_1 t_1 + b_2 t_2) (b_1 t_2 + b_2 t_1)}, \quad (6.3)$$

$$l_0^f = 3,31 \sqrt[4]{\frac{1}{t_1^3 t_2^3} b_1^2 b_2^2 (b_1 t_1 + b_2 t_2) (b_1 t_2^3 + b_2 t_1^3)} = \frac{l_0^s}{\sqrt{2\epsilon}} \quad (6.4)$$

und für den Spezialfall  $t_1 = t_2 = t$  erhält man:

$$l_0^s = 1,45 (b_1 + b_2), \quad (6.5)$$

$$l_0^f = 3,31 \sqrt{\frac{1}{t} b_1 b_2 (b_1 + b_2)}. \quad (6.6)$$

Für das Beispiel im fünften Kapitel gilt somit:  $l_0^s = 362$  mm und  $l_0^f = 2310$  mm. Das Gebiet, in dem die Effekte der Randstörung merkbar sind, ist für Träger mit starrem Querschnitt erheblich kleiner als für Träger mit verformbarem Querschnitt.

Für  $t_1 = t_2 = t$  gilt:

$$\frac{l_0^s}{l_0^f} = \sqrt{2\epsilon} = 0,439 \sqrt{\frac{1}{b_1 b_2} (b_1 + b_2) t}. \quad (6.7)$$

In Fig. 6.1, 6.2 und 6.3 sind  $l_0^s/b_1$ ,  $l_0^f/b_1$  und  $\epsilon$  dargestellt in Abhängigkeit von  $b_2/b_1$  und  $t/b_2$ , unter der Bedingung  $t_1 = t_2 = t$ . Aus Fig. 6.3 geht hervor, dass  $\epsilon \ll 1$  für reelle Massen des Trägers.

Wenn die Länge  $l$  des Trägers grösser ist als  $l_0$ , werden der Spannungs- und Deformationszustand an einem Rand des Trägers nicht oder nur sehr wenig

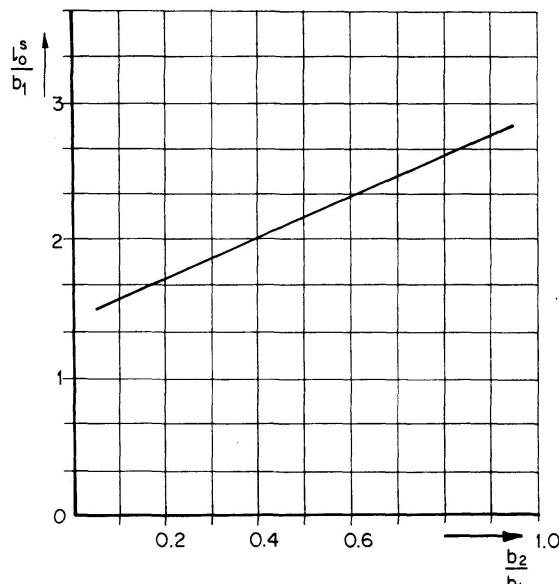


Fig. 6.1.  $l_0^s/b_1$  Funktion von  $b_2/b_1$ .

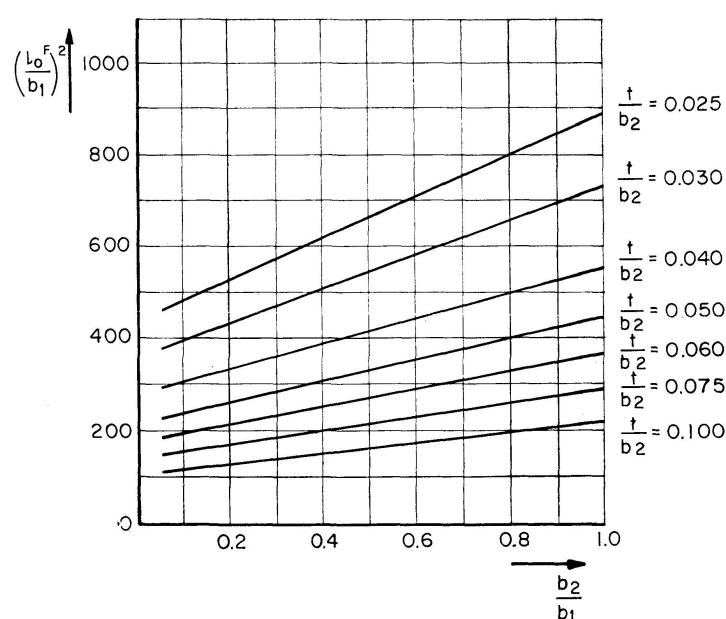
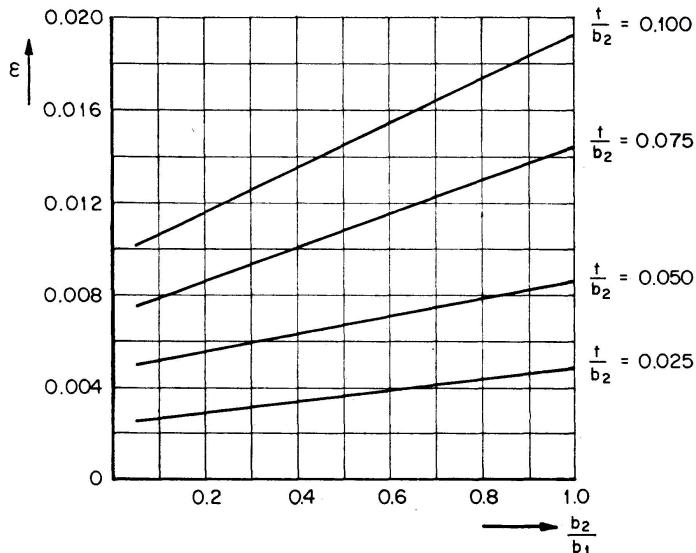


Fig. 6.2.  $(l_0^f/b_1)^2$  Funktion von  $b_2/b_1$ .

Fig. 6.3.  $\epsilon$  Funktion von  $b_2/b_1$ .

von den Bedingungen am anderen Rand beeinflusst. Ein Träger mit  $l > l_0$  wird als «unendlich lang» bezeichnet.

### 6.2. Das axiale Bimoment $B$ bei Wölbbehinderung

Wird ein Träger, der sich als unendlich lang betrachten lässt, im Querschnitt  $x=l$  mit einem Torsionsmoment  $\bar{M}$  belastet, so wird im allgemeinen eine Verwölbung der Querschnitte auftreten. Wird die Verwölbung im Querschnitt  $x=0$  völlig behindert (siehe Fig. 5.1), so wird bei  $x=0$  ein axiales Bimoment  $B(0)$  auftreten. Annäherungsweise gilt:

$$B^s(0) = -\frac{\mu}{\lambda} \bar{M} = -\frac{\mu}{\alpha_0} \sqrt{2\epsilon} \bar{M}, \quad (6.8)$$

$$B^f(0) = -4 \frac{\mu}{\alpha_0} \epsilon \bar{M} \quad (6.9)$$

und deshalb:

$$\frac{B^f(0)}{B^s(0)} = 2 \sqrt{2\epsilon}. \quad (6.10)$$

Aus Fig. 6.3 und Gleichung (6.10) geht klar hervor, dass bei Behinderung der Verwölbung zwischen den axialen Bimomenten  $B^s(0)$  und  $B^f(0)$  grosse Unterschiede auftreten können. Diese Behauptung ist augenfällig, wenn man (6.8), (6.9) und (6.10) spezifiziert für  $t_1=t_2=t$ :

$$B^s(0) = 0,462 (b_1 - b_2) \bar{M}, \quad (6.11)$$

$$B^f(0) = 0,405 (b_1 - b_2) \sqrt{\frac{1}{b_1 b_2} (b_1 + b_2) t \bar{M}}, \quad (6.12)$$

$$\frac{B^f(0)}{B^s(0)} = 0,877 \sqrt{\frac{1}{b_1 b_2} (b_1 + b_2) t}. \quad (6.13)$$

Man kann darlegen, dass  $|B(0)|$  im vorliegenden Fall den Maximalwert von  $|B(x)|$  darstellt.

Die infolge  $B(0)$  auftretende maximale axiale Normalspannung in den Eckpunkten des Trägers,  $\sigma_{ax}(0)$ , kann mit der Schubspannung  $\tau^b$  nach Bredt verglichen werden.

$$\text{Da} \quad \sigma_{ax}(0) = -\frac{3}{4} \frac{B(0)}{b_1 b_2 (b_1 t_1 + b_2 t_2)} \quad (6.14)$$

wird für einen Träger mit konstanter Wandstärke gelten:

$$\frac{\sigma_{ax}^s(0)}{\tau^b} = -2,77 \mu, \quad (6.15)$$

$$\frac{\sigma_{ax}^f(0)}{\tau^b} = -7,84 \mu \sqrt{\epsilon} \quad (6.16)$$

und deshalb:

$$\frac{\sigma_{ax}^f(0)}{\sigma_{ax}^s(0)} = 2,83 \sqrt{\epsilon}. \quad (6.17)$$

### 6.3. Das transversale Bimoment $Q$ bei Wölbbehinderung

Wenn im Querschnitt  $x=0$  die Verwölbung behindert ist, so treten hinsichtlich der Theorie nach Bredt zusätzliche Schubspannungen  $\tau_e$  auf, deren Grösse durch das transversale Bimoment  $Q(0)$  bestimmt ist. Die nähere Untersuchung ergibt:

$$Q^s(0) = \mu \bar{M}, \quad (6.18)$$

$$Q^f(0) = 4 \epsilon \mu \bar{M}, \quad (6.19)$$

$$\frac{Q^f(0)}{Q^s(0)} = 4 \epsilon. \quad (6.20)$$

Die Schubspannungsverteilung im Querschnitt lässt sich mit (3.32) und (3.33) einfach bestimmen.

### 6.4. Die Vergleichsspannung $\sigma_{id}$ bei Wölbbehinderung

Wir erwähnen die Ergebnisse für die Vergleichsspannung  $\sigma_{id}$  nach Mohr-Guest im Querschnitt in dem die Verwölbung behindert ist und beschränken uns dabei auf Träger mit konstanter Wandstärke  $t_1=t_2=t$ . Wenn  $b_1 \geqq b_2$  (und deshalb  $\mu \geqq 0$ ) und  $\nu = 0,28$ , dann ergibt sich:

$$\frac{\sigma_{id}^s}{\tau^b} = 2 \sqrt{1 + 2 \mu + 2,92 \mu^2}, \quad (6.21)$$

$$\frac{\sigma_{id}^f}{\tau^b} = 2 \sqrt{1 + (8 + 15,36 \mu) \mu \epsilon + 16 \mu^2 \epsilon^2}. \quad (6.22)$$

### 6.5. Die Plattenbiegung bei Wölbbehinderung

Aus den graphischen Darstellungen in Kapitel 5 geht hervor, dass bei Wölbbehinderung für Träger mit verformbarer Profillinie in einer Entfernung

von etwa  $x_0 = \frac{1}{4}l_0$  von der Einspannstelle maximale Biegespannungen  $\sigma_b$  in den Platten auftreten. Wenn  $t_1 = t_2 = t$  und  $b_1 > b_2$  gilt:

$$\frac{\sigma_b^f(x_0)}{\tau^b} = -15,5 \mu \epsilon \alpha_0 \frac{b_1 b_2}{t} = -48,7 \mu \epsilon \frac{b_1 b_2}{t l_0^f}. \quad (6.23)$$

Wie aus (6.23) ersichtlich sein wird, sind diese Biegespannungen sicherlich nicht immer vernachlässigbar.

### 6.6 Effekte infolge eines transversalen Bimomentes $\bar{Q}$

Aus dem Beispiel im fünften Kapitel folgt, dass die Beanspruchung durch ein transversales Bimoment  $\bar{Q}$  für Träger mit verformbarer Profillinie zu einer ganz anderen Spannungsverteilung Anlass gibt als von der Bredtschen Theorie vorausgesagt wird. Wenn der Querschnitt starr ist, gibt eine Belastung  $\bar{Q}$  keine zusätzlichen Spannungen.

Für die Belastungslage in Fig. 5.1 ist  $\bar{Q}$  dem Torsionsmoment  $\bar{M}$  gleich. Für Träger mit  $t_1 = t_2 = t$  gilt für die maximale Biegespannung  $\sigma_b$  in Längsflächen bei  $x = l$ :

$$\left| \frac{\sigma_b^f(l)}{\tau^b} \right| = 12 \alpha_0 \frac{b_1 b_2}{t} = 37,7 \frac{b_1 b_2}{t l_0^f}. \quad (6.24)$$

Die im Querschnitt  $x = l$  auftretenden maximalen Schubspannungen sind ihrem Absolutwert nach zweimal so gross wie  $\tau^b$ .

Die axialen Membranspannungen, die für  $x = l$  gleich null sind, erreichen ihren Maximalwert in einer Entfernung von etwa  $x_0 = \frac{1}{4}l_0$  vom belasteten Rand her. Für diese Spannungen gilt:

$$\frac{\sigma_{ax}^f(x=l-x_0)}{\tau^b} = -1,08 \alpha_0 \frac{b_1 b_2}{t} = -3,39 \frac{b_1 b_2}{t l_0^f}. \quad (6.25)$$

### 6.7. Die Torsionssteifigkeit

Auch die Torsionssteifigkeit ist von den Randbedingungen und der angewandten Theorie abhängig. Zur Berechnung der Steifigkeit betrachten wir einen Träger mit Länge  $l$  grösser als  $l_0$ , der belastet ist wie in Fig. 6.4 angegeben ist.

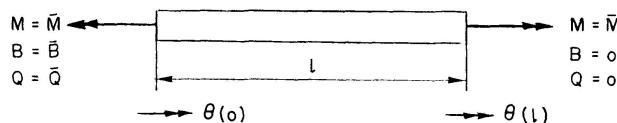


Fig. 6.4. Träger mit Länge  $l > l_0$ .

Für Träger mit starrer Profillinie ergibt sich:

$$\theta(l) - \theta(0) = \frac{\bar{M}}{a_4} l + \mu (1 - e^{-\lambda l}) \bar{B}, \quad (6.26)$$

während für Träger mit verformbarer Profillinie gilt:

$$\theta(l) - \theta(0) = \frac{\bar{M}}{a_4} l + \mu (1 - \psi_1 - \psi_2) \bar{B} - \frac{\mu}{\alpha_0} \psi_1 \bar{Q}, \quad (6.27)$$

mit

$$\psi_1 = e^{-\alpha_0 l} \sin(\alpha_0 l), \quad (6.28)$$

$$\psi_2 = e^{-\alpha_0 l} \cos(\alpha_0 l). \quad (6.29)$$

## 7. Schlussbemerkungen

Der Vergleich von Ergebnissen, unter Zuhilfenahme zweier verschiedener Theorien für dünnwandige Träger, zeigt klar, dass das Deformieren oder nicht Deformieren der Profillinie grundsätzliche Unterschiede mit sich bringt. Manchmal wird fälschlich die Theorie für Träger mit unverformbarem Querschnitt angewandt.

In der Praxis ist Unverformbarkeit der Profillinie nur annähernd herstellbar, wenn genügend viele Querschotte angebracht worden sind. Die obige Darstellung zeigt, dass derartige Querschotte nicht immer unbedingt eine Besserung des Spannungszustandes mit sich bringen. Die in 5. studierte Konstruktion zeigt zum Beispiel, dass die Spannungen in der Nähe der Wölbbehinderungsstelle bei einem Träger mit unverformbarem Querschnitt (also mit vielen Querschotten) um etwa 70% höher sind als bei einem Träger mit verformbarer Profillinie (also ohne Querschotte). Das Beispiel zeigt auch, dass ein Querschott beim Einführen einer Torsionsbelastung einen positiven Effekt hat.

Mit der Theorie für Träger mit verformbarer Profillinie kann die Wirkung von Querschotten auf die Spannungen und Verformungen analysiert werden. In einer folgenden Veröffentlichung soll darauf näher eingegangen werden.

## Literatur

1. WILLIAMS, D.: Torsion of a rectangular tube with axial constraints. R.A.E. Report, Reports and Memoranda no. 1619, March, 1934.
2. FLÜGGE, W. und MARGUERRE, K.: Wölbkräfte in dünnwandigen Profilstäben. Ingenieur-Archiv, XVIII. Band, 1950.
3. HEILIG, R.: Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform. Der Stahlbau, 1961, Heft 11, S. 333.
4. KOLLBRUNNER, C. und HAJDIN, N.: Wölkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit geschlossenem Profil. Mitteilungen der Technischen Kommission der Schweizer. Stahlbau-Vereinigung, Heft 32 (Juni 1966).
5. JANSSEN, J.: Over de torsietheorie van Vlasov voor dunwandige rechthoekige kokers. Dissertation, Technische Hogeschool Eindhoven (1967).
6. DABROWSKI, R.: Der Schubverformungseinfluss auf die Wölkrafttorsion der Kastenträger mit verformbarem biegesteifem Profil. Der Bauingenieur, Band 40, 1965, Heft 11.

7. VLASOV, V.: Thin-walled elastic beams. 2nd. ed., Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (1961).
8. LACHER, G.: Zur Berechnung des Einflusses der Querschnittsverformung auf die Spannungsverteilung bei durch elastische oder starre Querschotte verstieften Tragwerken mit prismatischem, offenem oder geschlossenem biegesteifem Querschnitt unter Querlast. Der Stahlbau, 1962, Heft 10, S. 299, Heft 11, S. 325.
9. RESINGER, F.: Der dünnwandige Kastenträger. Forschungsheft aus dem Gebiet des Stahlbaus, Nr. 13, Stahlbau-Verlag G.m.b.H., Köln.
10. CSONKA, P.: Torsion of a square-shaped tube clamped in at both ends. Hungarian Academy of Sciences, Budapest Acta Technica XXIV (1959), H. 3, S. 379, H. 4, S. 90.
11. JANSSEN, J.: De mogelijkheden van de methode der eindige elementen bij de berekening van de sterkte en stijfheid van dunwandige balken. De Ingenieur, 1970, jaargang 82, nr. 43, S. O 121.

### **Zusammenfassung**

Mit zwei verschiedenen Gruppen von Voraussetzungen über die Verschiebungen ergeben sich zwei Torsionstheorien für dünnwandige Kastenträger mit Rechteckquerschnitt, nämlich eine Theorie, bei der die Profillinie als starr angenommen wird, und eine Theorie, wobei eine gewisse Verformung der Profillinie möglich ist. Die Analysen beruhen auf dem Prinzip der minimalen potentiellen Energie. Anhand eines konkreten Beispiels werden die charakteristischen Unterschiede zwischen diesen Theorien untersucht. Die Ergebnisse werden auf Träger mit willkürlichen Rechteckquerschnitt verallgemeinert.

### **Summary**

From two different groups of conditions about displacements, two torsion theories of thin-walled box-girders of rectangular section are resulting. In one theory the profile-curve is assumed to be fixed, in the other a certain deformation is possible. The analyses are based on the principle of minimum potential energy. The characteristic differences between both theories are demonstrated by an example. The results are generalized for girders with arbitrary rectangular sections.

### **Résumé**

Avec deux groupes différents de conditions de déplacement on obtient deux théories de torsion pour les poutres en caisson à sections rectangulaires: une première dans laquelle la ligne du profil est considérée comme fixe, et une seconde où une certaine déformation est possible. Les analyses se basent sur le principe de l'énergie potentielle minimale. Un exemple concret illustre les différences caractéristiques entre les deux théories. Les résultats sont généralisés pour des poutres à sections rectangulaires arbitraires.