

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 32 (1972)

**Artikel:** Die Methode der finiten Elemente für die Lösung von Torsionsproblemen

**Autor:** Brekelmans, W.A.M. / Janssen, J.D.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-24950>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Die Methode der finiten Elemente für die Lösung von Torsionsproblemen**

*The Finite Element Method in Torsion Analysis*

*La méthode des éléments finis pour la solution de problèmes de torsion*

W. A. M. BREKELMANS

Ing.

Laboratorium für Technische Mechanik, Technische Hochschule Eindhoven NL

J. D. JANSSEN

Prof. Dr. Ing.

## **1. Einleitung**

Die Methode der finiten Elemente [2] hat sich für die numerische Analyse von Festigkeits- und Steifigkeitsproblemen als sehr verwendungsfähiges Hilfsmittel erwiesen. Ausserdem ist das nach dieser Methode angewandte Verfahren geeignet, bestimmte Arten partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung einer numerischen Lösung zuzuführen. Es ist somit eine mathematische Arbeitsweise, die unter bestimmten Umständen mit der Differenzmethode identisch ist, aber – zumindest einstweilen – grössere Anwendungsmöglichkeiten bietet [1, 2].

Nachstehend wird das Verfahren anhand der St.-Venantschen Torsionstheorie für prismatische Stäbe erläutert.

Dabei werden drei verschiedene Formulierungen dieser Theorie, die sich zum Entwurf von Näherungsmethoden eignen, betrachtet und die spezifischen Einzelheiten jeder einzelnen Methodik angegeben. Diese Näherungsmethoden bieten die Möglichkeit, die Torsionssteifigkeit zwischen zwei Grenzwerten einzuschliessen. Sie werden durch einige Beispiele erläutert und mit anderen Methoden verglichen.

## **2. Die Differentialgleichungen und die Randbedingungen**

Wir betrachten einen prismatischen Stab, dessen Querschnitt in Fig. 2.1 gezeichnet ist. Das Koordinatensystem wurde so gewählt, dass die  $z$ -Achse parallel zur Stabachse verläuft.

Der Stab wird in den Endquerschnitten mit einem Torsionsmoment  $M$

belastet, derart, dass die Torsionstheorie nach de St.-Venant anzuwenden ist. Dies bedeutet, dass alle Spannungen, mit Ausnahme von  $\tau_{zx}$  und  $\tau_{zy}$  (Fig. 2.1), gleich Null sind.

Das Torsionsproblem kann in mehrfacher Weise formuliert werden [4, 7]. Setzt man voraus, dass das Material homogen und isotrop ist mit Schubmodul  $G$

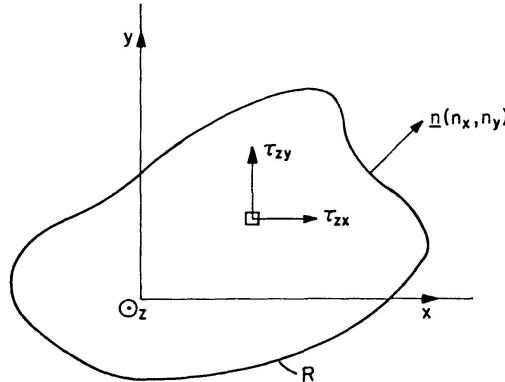


Fig. 2.1. Querschnitt eines Stabes.

und die Drillung  $\beta$  konstant ist und beschränkt man sich vorläufig auf Querschnitte ohne Löcher, so sind die mit  $a$ ,  $b$  und  $c$  angegebenen Formulierungen möglich:

$$a) \Delta \varphi_0 = 0, \quad (2.1)$$

$$\text{Randbedingung: } \frac{d\varphi_0}{dn} = (\text{grad } \varphi_0) = y n_x - x n_y. \quad (2.2)$$

$$b) \Delta \psi = 0, \quad (2.3)$$

$$\text{Randbedingung: } \psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \quad (2.4)$$

$$c) \Delta \varphi = -2, \quad (2.5)$$

$$\text{Randbedingung: } \varphi = 0. \quad (2.6)$$

Für die Schubspannungen  $\tau_{zx}$  und  $\tau_{zy}$  und das Torsionsmoment  $M$  gilt in den einzelnen Fällen:

$$a) \tau_{zx} = G \beta \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - y \right), \quad (2.7)$$

$$\tau_{zy} = G \beta \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + x \right), \quad (2.8)$$

$$M = \left\{ I_p - \iint_F \left[ \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\}. \quad (2.9)$$

$$b) \tau_{zx} = G \beta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right), \quad (2.10)$$

$$\tau_{zy} = -G \beta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right), \quad (2.11)$$

$$M = G \beta [2 \iint_F \psi dx dy - I_p]. \quad (2.12)$$

$$c) \tau_{zx} = G \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (2.13)$$

$$\tau_{zy} = -G \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (2.14)$$

$$M = 2 G \beta \iint_F \varphi \, dx \, dy. \quad (2.15)$$

Darin bedeutet  $F$  die Querschnittsfläche und  $I_p$  das polare Flächenträgheitsmoment:

$$I_p = \iint_F (x^2 + y^2) \, dx \, dy. \quad (2.16)$$

Statt der gegebenen partiellen Differentialgleichungen mit Randbedingungen kann man für die Beschreibung des Problems auch von der Behauptung ausgehen, dass die Integralformeln (2.17), (2.18) und (2.19) stationär sind für bestimmte Variationen der gesuchten Funktionen  $\varphi_0$ ,  $\psi$  und  $\varphi$ .

$$a) I_1(\varphi_0) = \iint_F \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dx \, dy + \oint_R (x n_y - y n_x) \varphi_0 \, ds. \quad (2.17)$$

$$b) I_2(\psi) = \iint_F \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx \, dy. \quad (2.18)$$

$$c) I_3(\varphi) = \iint_F \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2 \varphi \right\} dx \, dy. \quad (2.19)$$

Auf Grund bekannter Sätze der Variationsrechnung folgt alsdann eine alternative Formulierung für die Gleichungen (2.1) . . . (2.6):

$$a) \delta I_1 = 0 \quad \text{für alle } \delta \varphi_0. \quad (2.20)$$

$$b) \delta I_2 = 0 \quad \text{für alle } \delta \psi \text{ mit der Beschränkung}$$

$$\psi = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \text{ auf dem Rand des Gebietes } F. \quad (2.21)$$

$$c) \delta I_3 = 0 \quad \text{für alle } \delta \varphi \text{ mit } \varphi = 0 \text{ auf dem Rand.} \quad (2.22)$$

Interessant ist, dass die Bedingungen (2.20) und (2.22) unmittelbar abgeleitet werden können, wenn man von der potentiellen Energie  $V$  bzw. der komplementären Energie  $V^*$  für einen durch Torsion beanspruchten Stab mit Länge 1 ausgeht und Minimalprinzipien für diese Formeln verwendet [3, 4].

Für  $V$  und  $V^*$  gilt:

$$V = \frac{1}{2} G \beta^2 \iint_F \left\{ \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dx \, dy - \beta M, \quad (2.23)$$

$$V^* = \frac{1}{2} G \beta^2 \iint_F \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx \, dy - 2 G \beta^2 \iint_F \varphi \, dx \, dy. \quad (2.24)$$

Hieraus kann einfach abgeleitet werden:

$$V = G\beta^2 I_1 + \frac{1}{2} G\beta^2 I_p - \beta M, \quad (2.25)$$

$$V^* = G\beta^2 I_3. \quad (2.26)$$

Mit dem Prinzip der minimalen potentiellen Energie ergibt sich:

$$\delta I_1 = 0 \quad (2.27)$$

unter der dynamischen Randbedingung:

$$G\beta(2I_1 + I_p) = M. \quad (2.28)$$

Es ist nachweisbar, dass diese Formel für  $M$  mit (2.9) übereinstimmt. Aus dem Variationsprinzip der komplementären Energie folgt:

$$\delta I_3 = 0. \quad (2.29)$$

Das Vorangehende impliziert, dass für ein gegebenes Torsionsmoment der mit einer Näherung für  $\varphi_0$  aus (2.20) berechnete Wert von  $\beta$  nicht grösser sein kann als der exakte Wert. Der Wert von  $\beta$ , der mit (2.22) berechnet werden kann, wenn für  $\varphi$  eine Näherungsfunktion genommen wird, ist immer grösser als oder ebenso gross wie der exakte Wert. Auf diese Weise lässt sich der wirkliche Torsionswiderstand zwischen einer oberen und einer unteren Schranke eingrenzen, die entsprechend den Näherungsansätzen beliebig nahe aneinanderrücken können.

### 3. Näherungslösungen

#### 3.1. Einleitung

Nur für verhältnismässig wenige Querschnittsformen lässt sich die exakte Lösung des Torsionsproblems bestimmen [4, 7]. Manchmal ist es für die Lösung notwendig, unendliche Reihen zu verwenden, wobei die Erzielung numerischer Resultate umfassende Rechenarbeit erfordert.

Für dünnwandige Stäbe sind Näherungsmethoden bekannt, die sich, wenn es sich um Stäbe mit offenem Profil handelt, auf die Lösung für schmale Rechteckquerschnitte stützen, und die für Stäbe mit geschlossenem Profil von der Hypothese ausgehen, dass die Schubspannungen über die Wandstärke hinweg konstant sind. Bisher ist es nicht gelungen, das Anwendungsgebiet dieser Näherungslösungen genau zu begrenzen.

Manchmal können mit Lösungen der Differentialgleichung und einer Umkehrmethode Näherungslösungen konstruiert werden. Für jede lineare Kombination derartiger Lösungen ist die Randkurve bestimmbar, wobei die Randbedingungen erfüllt sind. Gerade diese Kombination ist anzustreben, wobei die wirkliche Randkurve bestens genähert wird.

Wir werden diese Methodik anhand eines Stabes erläutern, dessen Querschnitt von einem regelmässigen Polygon begrenzt wird. Für das angegebene

Verfahren eignet sich am besten die dritte Formulierung des Torsionsproblems (Formel (2.5) und (2.6)).

Ausserdem können mit den Variationsprinzipien Näherungslösungen konstruiert werden. Dieses Verfahren, im allgemeinen als Methode Ritz bekannt, werden wir, ebenfalls in der Formulierung (2.5) und (2.6), für das gleiche Beispiel anwenden.

Die Differenzmethode ermöglicht eine numerische Lösung der Differentialgleichung.

Das nächste Kapitel behandelt die Methode der finiten Elemente, eine Methode, die als Spezialfall der Methode Ritz betrachtet werden kann.

### 3.2. Umkehrmethode mit Beispiel

Wird der Querschnitt eines durch Torsion beanspruchten prismatischen Stabes von einem regelmässigen Polygon mit  $n$ -Eckpunkten (Fig. 3.1) begrenzt, so ergibt sich für die Lösung  $\varphi$  der Differentialgleichung (2.5) mit der Randbedingung (2.6):

$$\varphi = -\frac{1}{2}r^2 + C_0 + \sum_{p=1}^{\infty} C_p r^{np} \cos(n p \vartheta). \quad (3.1)$$

Dabei sind  $r$  und  $\vartheta$  die in Fig. 3.1 angegebenen Polarkoordinaten.

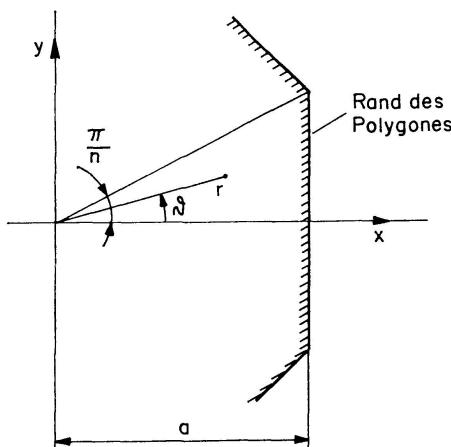


Fig. 3.1. Regelmässiges Polygon mit  $n$ -Eckpunkten.

Das Torsionsproblem ist gelöst, wenn die Konstanten  $C_0, C_1, \dots$  derartig bestimmt werden können, dass für  $0 \leq \vartheta \leq \pi/n$  die Randbedingung  $\varphi = 0$  erfüllt ist.

Ein Verfahren, das auch in der Praxis anwendbar ist, erhält man, wenn man nur die ersten  $j$ -Glieder der Reihe in (3.1) betrachtet und für die Berechnung der Konstanten ( $C_0, C_1, \dots, C_j$ ),  $j+1$  Bedingungen formuliert.

Für den Fall  $j=2$  wird das Problem weiter ausgearbeitet. Zur Ableitung der Gleichungen für  $C_0, C_1$  und  $C_2$  können viele Kriterien angewandt werden. Nachstehend folgen zwei Beispiele, nämlich:

a)  $\varphi = 0 \text{ für } \left\{ \begin{array}{l} r = a, \quad \vartheta = 0, \\ r = \frac{a}{\cos \frac{\pi}{2n}}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2n}, \\ r = \frac{a}{\cos \frac{\pi}{n}}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{n}. \end{array} \right. \quad (3.2)$

b)  $\varphi = 0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varphi}{dy} = 0 \\ \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0 \end{array} \right\} \text{ für } x = a, y = 0 \quad (\text{siehe Abb. 3.1}). \quad (3.3)$

In jedem Kriterium sind selbstverständlich drei Forderungen zur Bestimmung von  $C_0$ ,  $C_1$  und  $C_2$  gestellt worden.

Wenn daraus  $\varphi$  bestimmt worden ist, kann nachträglich die Randkurve angegeben werden, für welche diese Lösung exakt ist. Im allgemeinen wird diese Kurve dargestellt durch (siehe Fig. 3.1):

$$r(\vartheta) = \frac{a}{\cos \vartheta} [1 + \delta(\vartheta)] \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi/n). \quad (3.4)$$

Dabei ist  $\frac{a}{\cos \vartheta} \delta(\vartheta)$  die Abweichung der erwünschten Kurve. Vergleicht man  $|\delta|$  mit 1, so lässt sich ein qualitativer Eindruck vom Wert der Näherungslösung gewinnen.

Für die maximale Schubspannung und die Torsionssteifigkeit kann man dann schreiben:

$$\tau_{max} = \frac{M}{k_1 a^3}, \quad (3.5)$$

$$\frac{M}{G \beta} = k_2 a^4. \quad (3.6)$$

Die dimensionslosen Größen  $k_1$  und  $k_2$  werden als Vergleichsmassstab angewendet.

Wird das genannte Verfahren auf einen Stab mit einem Querschnitt von der Form eines gleichseitigen Dreiecks angewandt und werden dabei die Kriterien (3.2) oder (3.3) gebraucht, so erhält man für  $\varphi$  das exakte Resultat:

$$\varphi = -\frac{1}{2} r^2 + \frac{2}{3} a^2 - \frac{r^3}{6a} \cos(3\vartheta). \quad (3.7)$$

Für einen Stab von regelmässigem viereckigem Querschnitt kann anhand von (3.2) berechnet werden:

$$\varphi = -\frac{1}{2} r^2 + 0,5903 a^2 - 0,0928 \frac{z^4}{a^2} \cos 4\vartheta + 0,0024 \frac{r^8}{a^6} \cos 8\vartheta. \quad (3.8)$$

Dieses Resultat ist nicht exakt, jedoch lässt sich beweisen, dass  $|\delta| < 0,008$ , während  $\tau_{max}$  um etwa 1% zu niedrig und  $\frac{M}{G\beta}$  um etwa 1% zu hoch berechnet werden.

Für einen Stab mit einem Querschnitt in Form eines regelmässigen sechseckigen Polygons sind die mit (3.2) und (3.3) berechneten Resultate in der Tabelle 3.1 gegeben.

Die Resultate, die man mit den Kriterien (3.2) erhält, entsprechen den Resultaten in [6].

*Tabelle 3.1. Sechseckiges Polygon*

|                 | $C_0$  | $C_1$   | $C_2$  | $ \delta _{max}$ | $k_1$ | $k_2$ |
|-----------------|--------|---------|--------|------------------|-------|-------|
| Kriterien (3.2) | 0,5412 | -0,0447 | 0,0035 | 0,01             | 1,511 | 1,853 |
| Kriterien (3.3) | 0,5373 | -0,0385 | 0,0012 | 0,05             | 1,497 | 1,821 |

### 3.3. Methode Ritz mit Beispiel

Die Energie  $I_3$  nach (2.19), die in direktem Zusammenhang mit der komplementären Energie  $V^*$  nach (2.24) steht, eignet sich für das Entwerfen von Näherungsmethoden. Die in (2.19) einzusetzende Funktion  $\varphi$  wird aus einer Sammlung von Funktionen gewählt, die alle einige unbestimmte Konstanten enthalten. Die Auswahl der Konstanten ist am günstigsten, wenn die Energie  $I_3$  für alle zulässigen Variationen dieser Konstanten stationär ist.

Da im Prinzip der minimalen komplementären Energie im Variationsprozess die Gleichgewichtsforderungen erfüllt sein müssen, muss  $\varphi$  wenigstens zweimal differenzierbar sein. Ferner muss infolge der Bedingung (2.6) an der Randkurve des Querschnitts  $\varphi = 0$  gelten. In [4] wird diese Methode u. a. auf einen vierkantigen Stab angewandt. Nimmt man an, dass

$$\varphi = b_0(x^2 - a^2)(y^2 - a^2) \quad (3.9)$$

so resultiert (2.22) in einer linearen Gleichung für  $b_0$ . Hierbei stellt sich heraus, dass die Torsionssteifigkeit um 1,3% zu niedrig ist. Nimmt man zwei Konstanten und berücksichtigt dabei die Symmetrie des Querschnitts, so kann man sich dadurch der richtigen Torsionssteifigkeit bis auf 0,15% nähern. Die berechnete maximale Schubspannung weicht dann aber noch um etwa 4% vom korrekten Wert ab.

Für einen Querschnitt mit einem regelmässigen Sechseck als Randkurve kann man nach einem analogen Verfahren vorgehen. Setzt man z. B.

$$\varphi = (x^2 - a^2)(x^2 + 3y^2 - 2xy\sqrt{3} - 4a^2)(x^2 + 3y^2 + 2xy\sqrt{3} - 4a^2)f(x, y) \quad (3.10)$$

so entspricht  $\varphi$  der Randbedingung. Die Funktion  $f(x, y)$  in dieser Formel soll zweimal differenzierbar sein, ist aber im übrigen willkürlich. Da es empfehlens-

wert ist, die Symmetrie des Querschnitts zu berücksichtigen, wählt man

$$f(x, y) = b_0 + b_1(x^2 + y^2). \quad (3.11)$$

Mit der Substitution von (3.10) und (3.11) in (2.19) folgt  $I_3 = I_3(b_0, b_1)$ , worauf die unbekannten Konstanten  $b_0$  und  $b_1$  bestimmt werden können mit Hilfe der Gleichungen:

$$\frac{\partial I_3(b_0, b_1)}{\partial b_i} = 0 \quad (i = 0, 1). \quad (3.12)$$

Für  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $k_1$  und  $k_2$  wurde in [5] abgeleitet:

$$\begin{aligned} b_0 &= -0,03264 \text{ } G\beta/a^4, \\ b_1 &= -0,02621 \text{ } G\beta/a^6, \\ k_1 &= 1,678 \quad (\text{siehe (3.5)}), \\ k_2 &= 1,777 \quad (\text{siehe (3.6)}). \end{aligned}$$

Zu bemerken ist, dass die in dieser Weise für  $k_1$  und  $k_2$  berechneten Werte in bezug auf die exakten Werte um etwa 11% zu hoch, bzw. um etwa 4% zu niedrig sind. Die Tatsache, dass die Torsionssteifigkeit unterschätzt wird, ist, wie schon früher bemerkt, ein allgemein bekanntes Kennzeichen von Näherungslösungen, die sich auf das Prinzip der komplementären Energie stützen.

Es ist klar, dass die genannte Methode sehr arbeitsintensiv und für elektronische Rechenmaschinen nicht einfach und zweckmäßig programmierbar ist. Im nächsten Kapitel wird ein Verfahren beschrieben, das sich für elektronische Verarbeitung eignet.

#### 4. Die Methode der finiten Elemente für Torsionsprobleme mit einfach zusammenhängendem Gebiet

Ebenso wie bei den im letzten Kapitel angegebenen Methoden, beruht die Methode der finiten Elemente [1] auf Integralformeln, aus denen mittels Variationsprinzipien die beschreibenden Differentialgleichungen folgen würden, wenn die zu variierenden Funktionen nicht weiter eingeschränkt werden.

In 3.3 wurde für den ganzen Querschnitt eine Funktion  $\varphi$  mit zwei Parametern genommen. In der Methode der finiten Elemente (kurz: Elementenmethode) wird der Querschnitt eingeteilt in eine Anzahl von Teilen (Elemente genannt) mit meist sehr einfacher Begrenzung, wie z. B. Dreiecke, Rechtecke und Trapeze. Beschränkt man sich zunächst auf die Beschreibung des Problems mit Hilfe der Funktion  $\varphi$ , so wird für jedes Element der Verlauf von  $\varphi$  im Inneren des Elementes als gegeben angenommen. Für das Element in Fig. 4.1 kann für  $\varphi$  z. B. die Bedingung gestellt werden:

$$\varphi = c_1 + c_2 x + c_3 y, \quad (4.1)$$

wobei  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  noch unbekannte Konstanten sind.

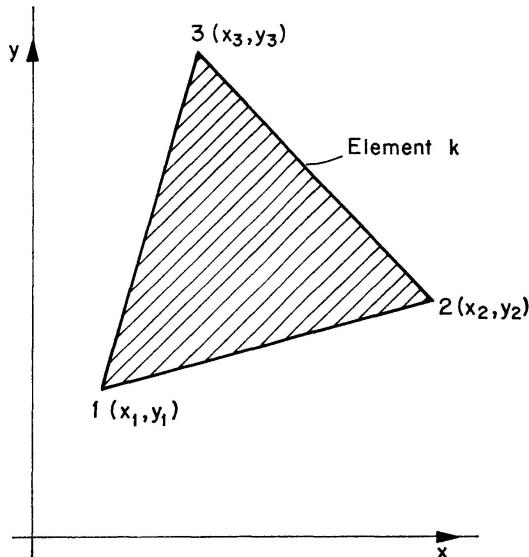


Fig. 4.1. Beispiel eines Elementes.

Werden auf diese Weise Voraussetzungen für jedes Element im beobachteten Querschnitt getroffen, so lässt sich  $I_3$  einfach in einer Anzahl von Konstanten ausdrücken. Der Satz:  $\delta I_3 = 0$  ist nicht ohne weiteres anwendbar, da  $\varphi$  beim Variieren dieser Konstanten jedenfalls kontinuierlich sein soll. Durch Ansatz (4.1) ist  $\varphi$  kontinuierlich im Innern des Elementes, während die Kontinuität von  $\varphi$  auf den Grenzen zwischen den Elementen garantiert ist, wenn man, statt  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  für jedes Element, den Wert von  $\varphi$  in jedem Knotenpunkt des Querschnitts als zu variierende Größe betrachtet. Deshalb sollen für jedes Element die Unbekannten  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  im Wert von  $\varphi$  in den Knotenpunkten des Elementes ausgedrückt werden.

Den Wert von  $\varphi$  in den Knotenpunkten 1, 2 und 3 des  $k$ -ten Elementes (siehe Fig. 4.1) geben wir mit bzw.  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$  an und definieren den Spaltenvektor  $\varphi^k$  mit:

$$\varphi^k = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}.$$

Statt (4.1) ergibt sich für  $\varphi$  im Inneren des Elementes  $k$ :

$$\varphi(x, y) = \varphi_1 P_1(x, y) + \varphi_2 P_2(x, y) + \varphi_3 P_3(x, y). \quad (4.3)$$

$P_1$  ist gegeben durch:

$$P_1 = \frac{1}{2\Delta} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3) x + (x_3 - x_2) y]. \quad (4.4)$$

Dabei ist  $\Delta$  die Oberfläche des betrachteten Elementes.  $P_2$  und  $P_3$  folgen aus (4.4), indem man die Indizes zyklisch vertauscht.

Ist die Anzahl von Elementen gleich  $K$ , so kann man für  $I_3$  nach (2.19) schreiben:

$$I_3 = \sum_{k=1}^K I_3^k, \quad (4.5)$$

wobei für  $I_3^k$  gilt:

$$I_3^k = \iint_A \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2 \varphi \right\} dx dy. \quad (4.6)$$

Mit  $\varphi$  nach (4.3) kann mittels (4.4) und (4.6) für  $I_3^k$  abgeleitet werden:

$$I_3^k = \frac{1}{2} \varphi'^k H^k \varphi^k - \varphi'^k f^k.$$

(Bemerkung: Transponierung einer Matrix oder eines Spaltenvektors  $A$  wird mit  $A'$  angegeben.)

Für  $H^k$  gilt:

$$H^k = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 & & \\ (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_2 - x_3)(x_3 - x_1) & (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) + (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) & \\ (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_3)(x_1 - x_2) & (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 & (y_1 - y_2)(y_3 - y_1) + (x_1 - x_2)(x_3 - x_1) \\ (y_3 - y_1)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_1)(x_2 - x_3) & (y_1 - y_2)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_2)(x_1 - x_2) & (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

während  $f^k$  definiert ist durch:

$$f'^k = \frac{2}{3} \Delta [1 \ 1 \ 1]. \quad (4.9)$$

Mit  $I_3^k$  nach (4.7) kann  $I_3$  aus (4.5) für den ganzen Querschnitt bestimmt werden. Wegen der Randbedingungen des Variationsproblems soll am Rande gelten:  $\varphi(x, y) = 0$ . Das bedeutet, dass für Knotenpunkte am Rande des Gebietes  $\varphi$  gleich Null sein muss.

Betrachtet man die Werte von  $\varphi$  für alle Knotenpunkte im beobachteten Gebiet als Komponenten eines Spaltenvektors  $\Phi$ , so kann man für  $I_3$  schreiben:

$$I_3 = \frac{1}{2} \Phi' H_3 \Phi - \Phi' f, \quad (4.10)$$

wobei die Matrix  $H_3$  symmetrisch ist, also  $H'_3 = H_3$ . Auf ganz einfache Weise können  $H_3$  und  $f$  aus den Matrizen  $H^k$  bzw. den Vektoren  $f^k$  für alle Elemente zusammengestellt werden.

Aus  $\delta I_3 = 0$  folgt für alle Variationen der Komponenten des Vektors  $\Phi$  ein System linearer Gleichungen für diese Komponenten:

$$H_3 \Phi = f, \quad (4.11)$$

woraus sich ableiten lässt:

$$\Phi = H_3^{-1} f. \quad (4.12)$$

Der Ansatz (4.3) für  $\varphi$  im Inneren des Elementes ist linear in  $x$  und  $y$ . Die Schubspannungen  $\tau_{zx}$  und  $\tau_{zy}$  in jedem Element sind deshalb konstant vorausgesetzt worden.

Aus (2.13) und (2.14) ergibt sich:

$$\tau^k = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} = \frac{G\beta}{2\Delta} \begin{bmatrix} (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \\ (y_3 - y_2) & (y_1 - y_3) & (y_2 - y_1) \end{bmatrix} \varphi^k. \quad (4.13)$$

Ausser den Schubspannungen ist meist auch die Torsionssteifigkeit interessant. Mit (2.15) ergibt sich:

$$J_d = \frac{M}{G\beta} = 2 \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{2}{3} \Delta [1 \ 1 \ 1] \varphi^k \right\}. \quad (4.14)$$

Die mit (4.14) berechnete Torsionssteifigkeit ist immer kleiner als oder ebenso gross wie die exakte Torsionssteifigkeit des Querschnitts, da die angewandte Näherungslösung auf dem Prinzip der minimalen komplementären Energie beruht. Man kann die gleiche Folgerung in bezug auf  $J_d$  ziehen, wenn man das Prinzip der minimalen potentiellen Energie für die Bestimmung von Näherungslösungen der Seifenhautanalogie anwendet.

Häufig wird der Querschnitt ein- oder mehrfach symmetrisch sein. In Punkten der Symmetriearchse wird die Komponente der Schubspannung dieser Achse entlang gleich Null sein. Das heisst, auf dieser Achse gilt  $\frac{d\varphi}{dn} = 0$ , wobei  $\frac{d}{dn}$  die Differenzierung senkrecht zur Achse bedeutet. Im Kapitel 2 ist dargelegt worden (siehe (2.17)), dass Bedingungen vom Typ  $\frac{d\varphi}{dn} = f(x, y)$  am Rande  $R$  berücksichtigt werden können, wenn an (2.19) das Linienintegral  $-\oint_R f(x, y) \varphi ds$  hinzugefügt wird. Da auf einer Symmetriearchse  $f(x, y) = 0$  ist, braucht man kein besonderes Glied an  $I_3$  hinzuzufügen, wenn man einen geeigneten Teil des Querschnitts betrachtet. Für Randpunkte, die auf einer Symmetriearchse liegen, soll  $\varphi$  selbstverständlich – im Gegensatz zur Situation bei einer materiellen Randkurve – frei gelassen werden.

Im vorhergehenden wurde die Arbeitsweise der Elementenmethode mit der Formel (2.19) für  $I_3(\varphi)$  als Ausgangspunkt erklärt. In völlig analoger Weise kann man ausgehen von (2.17) für  $I_1(\varphi_0)$  oder (2.18) für  $I_2(\psi)$ . Definiert man, analog (4.2), die Spaltenvektoren  $\varphi_0^k$  und  $\psi^k$  und setzt man für  $\varphi_0$  bzw.  $\psi$  einen linearen Verlauf in jedem Element voraus, so ergibt sich für die mit (4.7) übereinstimmenden Formeln:

$$I_1^k = \frac{1}{2} \varphi_0'^k H^k \varphi_0^k - \varphi_0'^k f_0^k, \quad (4.15)$$

$$I_2^k = \frac{1}{2} \psi'^k H^k \psi^k. \quad (4.16)$$

Die in (4.15) und (4.16) auftretende Matrix  $H^k$  ist identisch mit (4.8).

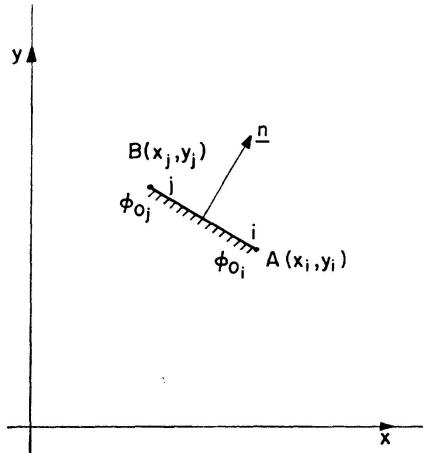
Wenn die Werte von  $\varphi_0$  in allen Knotenpunkten des Querschnitts, einschliesslich der Randpunkte, im Spaltenvektor  $\Phi_0$  geordnet werden, so gilt:

$$I_1 = \frac{1}{2} \Phi_0' H_1 \Phi_0 - \Phi_0' f_0. \quad (4.17)$$

Das Glied  $\Phi_0' f_0$  stammt von  $\oint_R (x n_y - y n_x) \varphi_0 ds$  (siehe (2.17)). Der Beitrag vom Teil  $A B$  des Randes (siehe Fig. 4.2) zu  $\Phi_0' f_0$  ist gleich:

$$[\varphi_{0i} \varphi_{0j}] \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} x_i^2 + \frac{1}{6} x_j^2 + \frac{1}{6} x_i x_j - \frac{1}{3} y_i^2 + \frac{1}{6} y_j^2 + \frac{1}{6} y_i y_j \\ -\frac{1}{6} x_i^2 + \frac{1}{3} x_j^2 - \frac{1}{6} x_i x_j - \frac{1}{6} y_i^2 + \frac{1}{3} y_j^2 + \frac{1}{6} y_i y_j \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Mit (4.18) kann  $f_0$  berechnet werden.

Fig. 4.2. Teil  $A B$  des Randes.

Bilden die Werte von  $\psi$  in allen Knotenpunkten im Inneren des Gebietes den Spaltenvektor  $\Psi$ , und werden die Werte von  $\psi$  in den Knotenpunkten am Rande des Gebietes in den Spaltenvektor  $\Psi_0$  geordnet, so kann man für  $I_2$  schreiben:

$$I_2 = \frac{1}{2} [\Psi' \Psi'_0] \begin{bmatrix} H_2 & H_{20} \\ H'_{20} & H_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_0 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Der Spaltenvektor  $\Psi$  in (4.19) kann variieren. Dadurch ergibt sich:

$$H_2 \Psi + H_{20} \Psi_0 = 0. \quad (4.20)$$

Die Komponenten von  $\Psi_0$  werden von den Randbedingungen (2.4) bestimmt und die Lösung des Gleichungssystems (4.20) folgt aus:

$$\Psi = -H_2^{-1} H_{20} \Psi_0. \quad (4.21)$$

Auch wenn das Problem mit  $\varphi_0$  oder  $\psi$  formuliert wird, lassen sich die Schubspannungen und die Torsionssteifigkeit in einfacher Weise bestimmen und kann eine eventuelle Symmetrie des Querschnitts vorteilhaft berücksichtigt werden.

## 5. Einige Beispiele

### 5.1. Rechteckquerschnitt

Für St.-Venantsche Torsion von Stäben mit Rechteckquerschnitt sind in [4] einige charakteristische Größen gegeben worden als Funktion des Verhältnisses  $b/a$  (siehe Fig. 5.1).

Durch das im vierten Kapitel dargestellte Verfahren für die Berechnung von  $\varphi$  werden hier dieselbe Charakteristiken bestimmt. Infolge der Symmetrie des Querschnitts braucht man nur den in Fig. 5.1 schraffierten Teil in Elemente einzuteilen. Das Muster der Einteilung in Elemente ist in Fig. 5.2 gezeichnet.

Die Randbedingungen sind:

$$\varphi = 0 \text{ für } \begin{cases} x = a, & 0 \leq y \leq b, \\ y = b, & 0 \leq x \leq a. \end{cases} \quad (5.1)$$

Als wohl am meisten interessante Charakteristiken wählen wir die zwei Faktoren  $k$  und  $k_1$ , die entsprechend [4] definiert sind durch:

$$M = k G \beta a^4, \quad (5.2)$$

$$\tau_{max} = k_1 G \beta a. \quad (5.3)$$

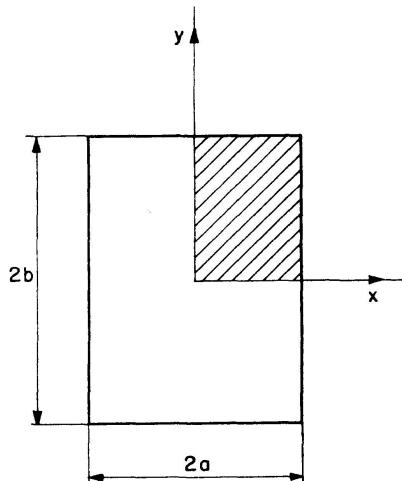


Fig. 5.1. Rechteckquerschnitt.

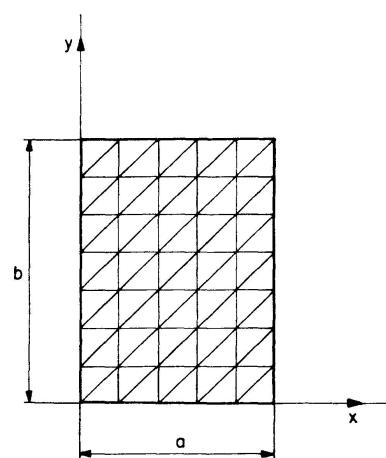


Fig. 5.2. Muster der Einteilung in Elemente.

In der Tabelle 5.1 sind für einige Verhältnisse  $b/a$  die Werte von  $k$  und  $k_1$  nach [4] und die mit einer Einteilung in 450 Elemente berechneten Werte gegeben worden. Dabei ist zu bemerken, dass  $k_1$  mittels Extrapolation aus den berechneten Resultaten bestimmt werden soll.

Tabelle 5.1. Rechteckquerschnitt

| $b/a$            | 1,0   | 1,2   | 1,5   | 2,0   | 2,5   | 3,0    | 4,0    | 5,0    | 10,0   |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| $k$ (El.meth.)   | 2,238 | 3,173 | 4,674 | 7,278 | 9,917 | 12,560 | 17,850 | 23,130 | 49,410 |
| $k$ (nach [4])   | 2,248 | 3,187 | 4,704 | 7,328 | 9,960 | 12,624 | 17,984 | 23,280 | 49,920 |
| $k_1$ (El.meth.) | 1,345 | 1,512 | 1,690 | 1,856 | 1,933 | 1,967  | 1,991  | 1,996  | 1,993  |
| $k_1$ (nach [4]) | 1,350 | 1,518 | 1,696 | 1,860 | 1,936 | 1,970  | 1,994  | 1,998  | 2,000  |

Wie schon im dritten Kapitel vorhergesagt, ergibt sich aus dieser Tabelle, dass die Werte von  $k$  nach der Elementenmethode kleiner sind als die exakten Werte. Die Unterschätzung der Torsionssteifigkeit variiert von 0,4% für  $b/a = 1$  bis 1% für  $b/a = 10$ . Die Abweichung in der maximalen Schubspannung ist weniger als 0,5%. Durch Verfeinerung der Elementeneinteilung nähert man sich besser der Realität. Wird z. B. für  $b/a = 5$  der in Fig. 5.1 schraffierte Teil in 900 Elemente eingeteilt, so ergibt sich:  $k = 23,230$  und  $k_1 = 1,996$ .

Mit  $b/a = 10$  und ebenfalls 900 Elementen folgt:  $k = 49,770$  und  $k_1 = 1,997$ , während mit 1800 Elementen  $k = 49,870$  und  $k_1 = 1,999$  berechnet wird.

### 5.2. Kreissektor als Querschnitt

Für einen Querschnitt wie in Fig. 5.3 gezeichnet, ist – für den schraffierten Teil – die Elementenmethode für die Berechnung von  $\varphi$  angewandt.

Das Muster der Einteilung in Elemente ist in Fig. 5.4 gezeichnet.

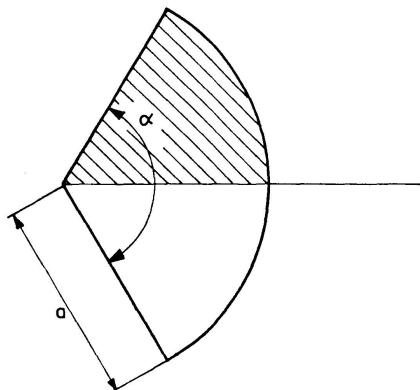


Fig. 5.3. Kreissektor als Querschnitt.

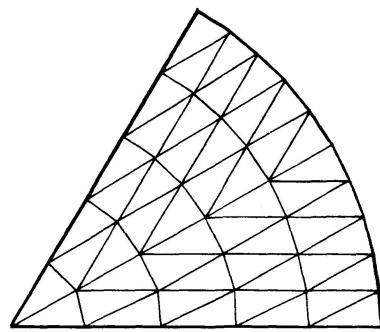


Fig. 5.4. Muster der Einteilung in Elemente.

Entsprechend [4] definieren wir:

$$M = k G \beta a^4, \quad (5.4)$$

$$\tau_{max} = \begin{cases} k_1 G \beta a & \text{auf dem Kreisbogen,} \\ k_2 G \beta a & \text{auf dem geraden Rand.} \end{cases} \quad (5.5)$$

Besonders für grosse Werte von  $\alpha$  (z. B.  $\alpha > \pi$ ) lässt sich die maximale Schubspannung am geraden Rand mit dem gewählten Elementenmuster nicht ganz genau berechnen, weil diese Spannungen mittels Extrapolation bestimmt werden sollen.

In der Tabelle 5.2 sind die Resultate, berechnet mit einer Einteilung in 450 Elemente, mit den Resultaten nach [4] verglichen. Daraus ergibt sich eine zufriedenstellende Übereinstimmung.

Tabelle 5.2. Kreissektor als Querschnitt

| $\alpha$         | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $2\pi/3$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $5\pi/3$ | $2\pi$ |
|------------------|---------|---------|---------|----------|-------|----------|----------|--------|
| $k$ (El.meth.)   | 0,0179  | 0,0345  | 0,0816  | 0,143    | 0,295 | 0,565    | 0,660    | 0,852  |
| $k$ (nach [4])   | 0,0181  | 0,0349  | 0,0825  | 0,148    | 0,296 | 0,572    | 0,672    | 0,878  |
| $k_1$ (El.meth.) | 0,38    | 0,45    | 0,56    | 0,63     | 0,73  | 0,80     | 0,82     | 0,84   |
| $k_1$ (nach [4]) | —       | 0,452   | —       | 0,622    | 0,719 | —        | —        | —      |
| $k_2$ (El.meth.) | 0,41    | 0,49    | 0,60    | 0,68     | 0,86  | —        | —        | —      |
| $k_2$ (nach [4]) | —       | 0,490   | —       | 0,652    | 0,849 | —        | —        | —      |

### 5.3. Regelmässiges Vieleck als Querschnitt

Im dritten Kapitel wurde untersucht, wie mehrere Näherungsmethoden angewandt werden können, falls der Querschnitt ein regelmässiges Vieleck ist (siehe Fig. 3.1). Auch die Elementenmethode kann dabei sehr nützlich sein. Wird die Symmetrie optimal benutzt, so kann das Elementenmuster die in Fig. 5.5 gezeichnete Form haben.

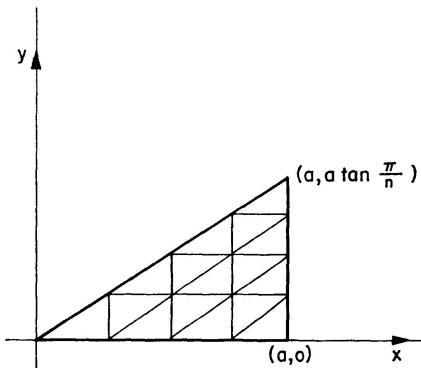


Fig. 5.5. Muster der Ein teilung in Elemente.

Am Ende des zweiten Kapitels wurde bewiesen, dass die exakte Torsionssteifigkeit begrenzt werden kann, wenn sowohl eine Berechnung zur Bestimmung von  $\varphi_0$  wie von  $\varphi$  ausgeführt wird.

a) Die untere Grenze wird bestimmt mittels der Methode zur Berechnung von  $\varphi$ . Die Randbedingung lautet:

$$\varphi = 0 \quad \text{für } x = a, \quad 0 \leq y \leq a \tan \frac{\pi}{n}, \quad (5.6)$$

wobei  $n$  die Anzahl der Eckpunkte ist.

b) Die obere Grenze wird bestimmt mittels der Methode zur Berechnung von  $\varphi_0$ . Nur wenn der Ursprung des Koordinatensystems mit dem Schnittpunkt der Symmetriearchsen zusammenfällt, gilt als Randbedingung  $\varphi_0 = 0$  für die Symmetriearchsen. Mit der Wahl des Koordinatensystems nach Fig. 5.5 soll gefordert werden:

$$\varphi_0 = 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq a \quad \begin{cases} y = 0, \\ y = x \tan \frac{\pi}{n} \end{cases} \quad (5.7)$$

Das Vorhergehende soll anhand des regelmässigen Sechseckes demonstriert werden. Dabei werden die Unter- und Obergrenze für  $k_2$  (siehe (3.6)) angegeben mit  $k_{2a}$  und  $k_{2b}$ .

Wird der Teil in Fig. 5.5 in 324 Elemente aufgeteilt, so findet man:

$$k_{2a} = 1,838,$$

$$k_{2b} = 1,842.$$

Für die exakte Torsionssteifigkeit  $k_2$  gilt somit:

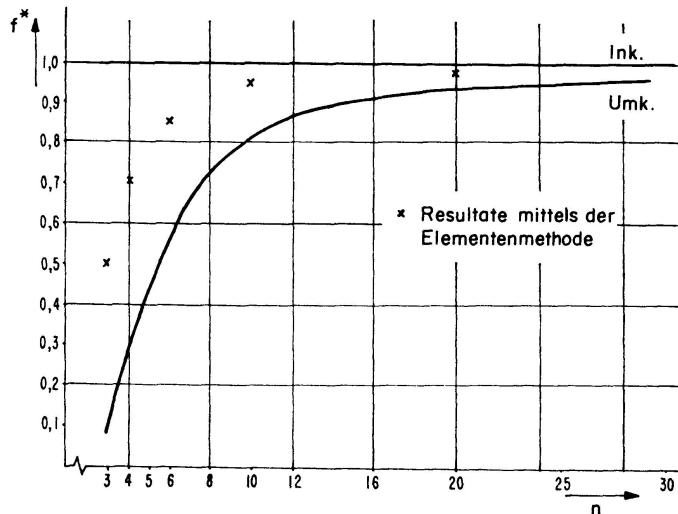
$$1,838 \leq k_2 \leq 1,848.$$

Für eine Reihe von regelmässigen Polygonen mit variabler Anzahl von Eckpunkten wurden die am meisten interessanten Charakteristiken berechnet. Es ist vorteilhaft, dimensionslose Kenngrössen  $f^*$  und  $\tau_{max}^*$  zu definieren, die für die Flexibilität bzw. die maximale Schubspannung massgebend sind:

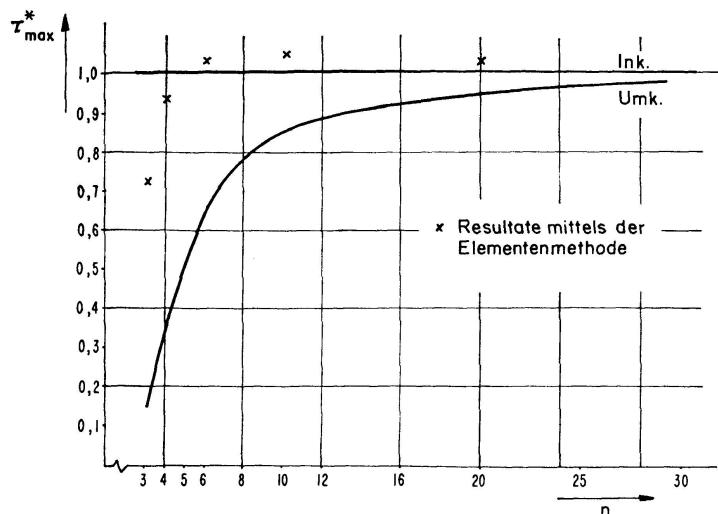
$$f^* = \frac{1}{2} \pi a^4 \frac{G \beta}{M}, \quad (5.8)$$

$$\tau_{max}^* = \frac{1}{2} \pi a^3 \frac{\tau_{max}}{M}. \quad (5.9)$$

Aus den graphischen Darstellungen 5.1 und 5.2 sind die Resultate für  $f^*$  und  $\tau_{max}^*$  ersichtlich. Zum Vergleich sind in diesen Darstellungen auch die entsprechenden Werte für zwei Stäbe mit kreisförmigem Querschnitt gegeben,



Graphik 5.1. Vergleich der Flexibilität.



Graphik 5.2. Vergleich der maximalen Schubspannung.

dessen Radius ebenso gross ist wie der Radius des Innenkreises  $R_i$  bzw. des Umkreises  $R_u$  des betrachteten Querschnitts. Es gilt:

$$R_i = a, \quad (5.10)$$

$$R_u = \frac{a}{\cos \frac{\pi}{n}}. \quad (5.11)$$

## 6. Mehrfach zusammenhängende Querschnitte

Ist der Querschnitt nicht einfach zusammenhängend (siehe Fig. 6.1), so können die in (2.1) bis einschliesslich (2.6) gegebenen Formulierungen nicht benutzt werden.

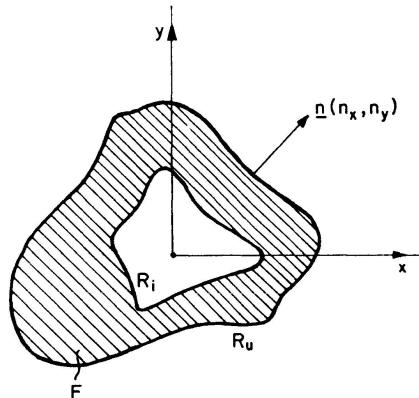


Fig. 6.1. Mehrfach zusammenhängender Querschnitt.

Mit den Buchstaben  $a$ ,  $b$  und  $c$  werden die Änderungen angegeben, die für Querschnitte mit nur einem Loch in den Formulierungen  $a$ ,  $b$  und  $c$  des zweiten Kapitels angebracht werden müssen. Die Erweiterung nach Querschnitten mit mehreren Löchern bietet keine besonderen Probleme.

$$a) \Delta \varphi_0 = 0 \text{ im Gebiet } F, \quad (6.1)$$

$$\frac{d\varphi_0}{dn} = (\text{grad } \varphi_0) = y n_x - x n_y \text{ auf } R_u \text{ und } R_i. \quad (6.2)$$

$$b) \Delta \psi = 0 \text{ in } F, \quad (6.3)$$

$$\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \text{ auf } R_u, \quad (6.4)$$

$$\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C_1 \text{ auf } R_i. \quad (6.5)$$

Dabei ist  $C_1$  eine noch unbekannte Konstante, die bestimmt werden kann nach der Bedingung:

$$\oint_{R_i} \frac{d\psi}{dn} ds = 0. \quad (6.6)$$

$$c) \Delta \varphi = -2 \text{ in } F, \quad (6.7)$$

$$\varphi = 0 \text{ auf } R_u, \quad (6.8)$$

$$\varphi = C_2 \text{ auf } R_i. \quad (6.9)$$

Wenn die Oberfläche des Loches  $A_i$  ist, kann die unbekannte Konstante  $C_2$  bestimmt werden mittels der Bedingung:

$$\oint_{R_i} \frac{d\varphi}{dn} ds = -2 A_i. \quad (6.10)$$

Die Arbeitsweise mit Hilfe der Elementenmethode ändert sich nicht für die Formulierung  $a$ .

Die Änderungen in der Arbeitsweise für die Formulierungen  $b$  und  $c$  werden wir noch näher betrachten.

b) Mit der Elementenmethode kann  $\psi(x, y)$  bestimmt werden, wenn die Randbedingungen explizit gegeben sind. Es berechnet sich:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) \text{ aus } & \begin{cases} \Delta \psi_1 = 0 & \text{in } F, \\ \psi_1 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) & \text{auf } R_u, \\ \psi_1 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) & \text{auf } R_i, \end{cases} \\ \psi_2(x, y) \text{ aus } & \begin{cases} \Delta \psi_2 = 0 & \text{in } F, \\ \psi_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) & \text{auf } R_u, \\ \psi_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + A_i & \text{auf } R_i. \end{cases} \end{aligned}$$

Die gewünschte Lösung  $\psi$  ist eine lineare Kombination von  $\psi_1$  und  $\psi_2$ :

$$\psi = p\psi_1 + q\psi_2 \quad (6.11)$$

mit Unbekannten  $p$  und  $q$ , die bestimmt werden aus:

$$p + q = 1, \quad (6.12)$$

$$p \oint_{R_i} \frac{d\psi_1}{dn} ds + q \oint_{R_i} \frac{d\psi_2}{dn} ds = 0. \quad (6.13)$$

c) Die Arbeitsweise gestaltet sich analog zur Arbeitsweise für Formulierung  $b$  und beruht gleichfalls auf Superposition.

Nachdem die verlangten Funktionen  $\psi$  und  $\varphi$  berechnet worden sind, lassen sich die Schubspannungen und die Torsionssteifigkeit bestimmen. Die Torsionssteifigkeit für die Formulierung  $b$  bzw.  $c$  berechnet sich aus den Formeln:

$$M = G\beta \left[ I_p - \iint_F \left( y \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx dy \right], \quad (6.14)$$

$$M = G\beta [2 \iint_F \varphi dx dy + 2 \varphi_{R_i} A_i], \quad (6.15)$$

wobei  $\varphi_{R_i}$  und die Konstante  $C_2$  aus Gleichung (6.9) identisch sind.

Das grösste Bedenken gegen die vorgeschlagene Arbeitsweise besteht darin, dass die Berechnungsgenauigkeit der Kreisintegrale entlang  $R_i$  beschränkt ist. Die in dieser Weise für einen Querschnitt in der Form eines Kreisringes berechneten Resultate stimmen jedoch mit den exakten Werten sehr gut überein.

Eine völlig andere Möglichkeit zur Berechnung der Torsionsgrößen für mehrfach zusammenhängende Querschnitte ergibt sich, wenn in der Methode für einfach zusammenhängende Querschnitte mit einem variablen Schubmodul gerechnet wird. Ein Loch kann dann simuliert werden, wenn an der Stelle des Loches der Schubmodul viel kleiner gesetzt wird als im übrigen Querschnitt.

Mit den Buchstaben  $a$ ,  $b$  und  $c$  werden wir die Änderungen in den Gleichungen für die Formulierung der Theorie mit bzw.  $\varphi_0$ ,  $\psi$  und  $\varphi$  angeben. Dabei sind namentlich die Gleichungen für  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  von Bedeutung, weil die Arbeitsweise mittels der Methode der finiten Elemente sich darauf stützt.

a) Die Formeln für  $\tau_{zx}$  und  $\tau_{zy}$  wählen wir identisch mit (2.7) und (2.8), damit die Schubspannungen den Kompatibilitätsanforderungen genügen:

$$\tau_{zx} = G \beta \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - y \right), \quad (6.16)$$

$$\tau_{zy} = G \beta \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + x \right). \quad (6.17)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung folgen die Differentialgleichung und die Randbedingung, die das Torsionsproblem völlig beschreiben:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( G \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( G \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right) + x \frac{\partial G}{\partial y} - y \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \text{ in } F_t, \quad (6.18)$$

$$\frac{d\varphi_0}{dn} = (\text{grad } \varphi_0) = y n_x - x n_y \text{ auf } R_u, \quad (6.19)$$

wobei  $F_t$  die von  $R_u$  umschlossene Oberfläche ist.

Wir definieren  $I_1(\varphi_0)$  mit:

$$I_1(\varphi_0) = \iint_{F_t} G \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 \right] - x \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + y \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right\} dx dy, \quad (6.20)$$

und man kann einfach beweisen, dass für alle Variationen  $\delta \varphi_0$  gilt  $\delta I_1 = 0$ , wenn  $\varphi_0$  die exakte Lösung ist, also den Gleichungen (6.18) und (6.19) genügt.

Die Torsionssteifigkeit kann bestimmt werden aus:

$$M = \beta \iint_{F_t} G \left[ -y \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + x \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + x^2 + y^2 \right] dx dy. \quad (6.21)$$

b) Man wählt derartige Formeln für die Schubspannungen, dass im Inneren der Randkurve  $R_u$  das Gleichgewicht garantiert ist:

$$\tau_{zx} = \beta \left( \frac{\partial G \psi}{\partial y} - G^* y \right), \quad (6.22)$$

$$\tau_{zy} = -\beta \left( \frac{\partial G \psi}{\partial x} - G^* x \right). \quad (6.23)$$

$G^*$  ist eine beliebige Konstante von gleicher Dimension wie  $G$ .

Mit der Kompatibilitätsbedingung ergibt sich die beschreibende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{G} \left( \frac{\partial G \psi}{\partial x} - G^* x \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{G} \left( \frac{\partial G \psi}{\partial y} - G^* y \right) \right\} + 2 = 0 \text{ in } F_t, \quad (6.24)$$

während die Randbedingung in  $\psi$  durch das Gleichgewicht am Rande  $R_u$  bestimmt wird:

$$G \psi = \frac{1}{2} G^* (x^2 + y^2) \text{ auf } R_u. \quad (6.25)$$

Wir definieren  $I_2(\psi)$  mit:

$$I_2 = \iint_{F_t} \left\{ \frac{1}{2G} \left[ \left( \frac{\partial G \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial G \psi}{\partial y} \right)^2 \right] + G \psi \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{G^*}{G} x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{G^*}{G} y \right) - 2 \right] \right\} dx dy. \quad (6.26)$$

Wenn  $\delta I_2 = 0$  für alle zulässigen Variationen  $\delta \psi$  einer Funktion  $\psi$  mit  $G \psi = \frac{1}{2} G^* (x^2 + y^2)$  auf  $R_u$  – also differenzierbare Variationen sind und die Bedingung  $\delta \psi = 0$  auf  $R_u$  genügen –, so ist diese Funktion  $\psi$  die exakte Lösung des Problems. Für die Berechnung der Torsionssteifigkeit soll die nächste Formel benutzt werden:

$$M = 2\beta \iint_{F_t} G \psi dx dy - G^* \beta I_p. \quad (6.27)$$

Zwar ist hinzuzufügen, dass für diese Arbeitsweise Differenzierbarkeit von  $G$  erforderlich ist.

c) In Abweichung von (2.13) und (2.14) wird eine andere Spannungsfunktion  $\varphi$  definiert, woraus die Schubspannungen  $\tau_{zx}$  und  $\tau_{zy}$  folgendermassen abgeleitet werden können:

$$\tau_{zx} = \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (6.28)$$

$$\tau_{zy} = -\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (6.29)$$

Die weitere Berechnung vollzieht sich analog mit der unter b).

Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + 2\beta = 0 \text{ in } F_t. \quad (6.30)$$

Randbedingung:  $\varphi = 0$  auf  $R_u$ . (6.31)

Definiert man  $I_3(\varphi)$  mit:

$$I_3 = \iint_{F_t} \left\{ \frac{1}{2G} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2\beta \varphi \right\} dx dy, \quad (6.32)$$

so gilt, dass  $\delta I_3 = 0$  für alle zulässigen Variationen  $\delta \varphi$  (mit  $\delta \varphi = 0$  auf  $R_u$ ) der Funktion  $\varphi$ , die die exakte Lösung des Problems ist.

Die Torsionssteifigkeit kann bestimmt werden durch:

$$M = 2\beta \iint_{F_t} \varphi \, dx \, dy. \quad (6.33)$$

Sowohl die Formulierung  $a$  wie  $c$  ist für mehrfach zusammenhängende Querschnitte sehr anwendungsfähig, da eine Diskontinuität in  $G$  keine besondern Probleme mit sich bringt.

Schliesslich geben wir einige Resultate für einen Kastenträger mit Querschnitt nach Fig. 6.2.

Auf Grund der Symmetrie des Querschnitts braucht man nur den in Fig. 6.2 schraffierte Teil zu betrachten. Das gewählte Elementenmuster ist in Fig. 6.3 gezeichnet; die Anzahl der Elemente war insgesamt 700.

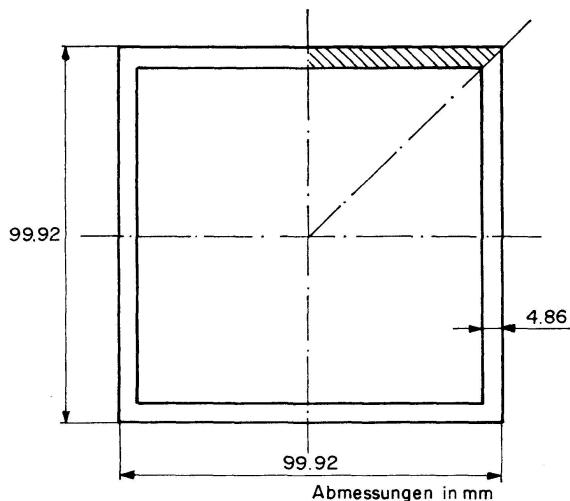


Fig. 6.2. Beispiel eines Querschnitts.

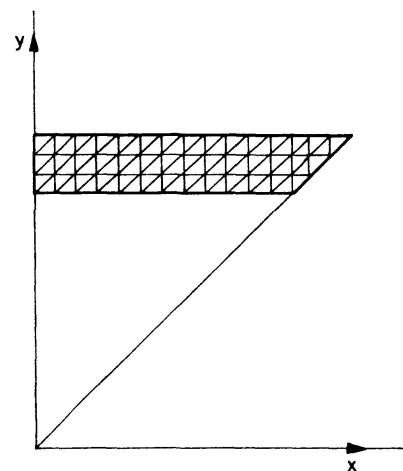


Fig. 6.3. Muster der Einteilung in Elemente.

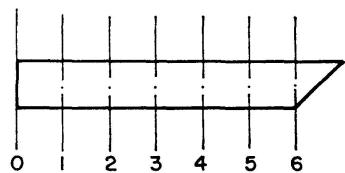
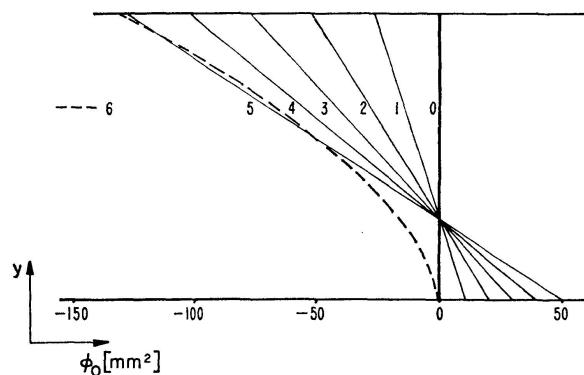
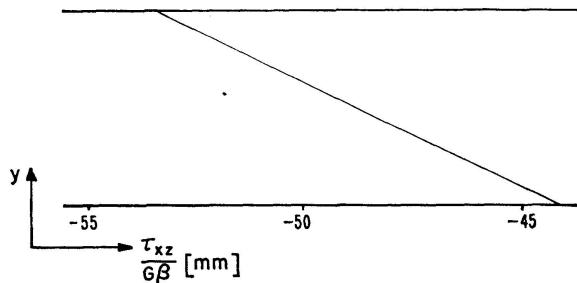


Fig. 6.4. Geraden durch die Wand.



Graphik 6.1. Verwölbung des Querschnitts.

Für dieses Problem wurde zunächst die Arbeitsweise zur Berechnung von  $\varphi_0$  gewählt. In einem physischen Modell charakterisiert  $\varphi_0$  die Verwölbung des Querschnitts. In der Graphik 6.1 ist die Verwölbung für die in Fig. 6.4 gezeichneten Geraden durch die Wand des Trägers entlang dieser Geraden angegeben. Der Verlauf der Schubspannung  $\tau_{zx}$  über der Wand, ein wenig von der Ecke entfernt, ist linear, wie deutlich aus der Darstellung 6.2 hervorgeht.



Graphik 6.2. Verlauf der Schubspannungen.

Mit der Torsionstheorie nach Bredt, die sich auf die Hypothese stützt, wonach die Schubspannung über die Wandstärke hinweg konstant ist, findet man für die Torsionssteifigkeit:

$$\frac{M}{G\beta} = 4,175 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]},$$

während mit der Methode der finiten Elemente (Formulierung mit  $\varphi_0$ )

$$\frac{M}{G\beta} = 4,284 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]}$$

berechnet wird.

Eine weitere Berechnung der Torsionssteifigkeit mittels der Elementenmethode mit bestimmender Grösse  $\varphi$  ermöglicht eine Einschränkung von  $\frac{M}{G\beta}$ :

$$4,268 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} \leq \frac{M}{G\beta} \leq 4,284 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]}.$$

Für den Querschnitt nach Fig. 6.2 ist die Torsionssteifigkeit nach Bredt also um etwa 2,5% zu niedrig.

## 7. Schlussbemerkungen

In dieser Arbeit wurde versucht zu zeigen, dass die Methode der finiten Elemente für eine bestimmte Art von Problemen, nämlich Potentialprobleme, bestens geeignet ist. Als Beispiel wurde die Torsionstheorie nach de St.-Venant gewählt, doch eignet sich die Methode auch z. B. zur Berechnung von Temperaturverteilungen oder zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils in Strömungsproblemen.

Es sei darauf hingewiesen, dass nicht alle Aspekte der Methode untersucht wurden. Die Genauigkeit der Resultate in Abhängigkeit vom Elementenmuster und von der Anzahl ist kaum erwähnt. Es wäre interessant, noch zu prüfen, ob über die Genauigkeit qualitative Entscheidungen gefällt werden können.

Das Vorhergehende behandelt nur ein dreieckiges Element mit linearer Verteilung der interessanten Funktion ( $\varphi_0$ ,  $\psi$  oder  $\varphi$ ) im Inneren des Elementes. Bemerkt sei auch, dass es ohne Schwierigkeiten möglich ist, statt des linearen

Verlaufes für  $\varphi_0$ ,  $\psi$  oder  $\varphi$  einen quadratischen Verlauf anzunehmen. Mit dem gleichen Elementenmuster und der gleichen Anzahl von Elementen sind beim Element mit quadratischem Verlauf viel bessere Resultate zu erwarten als mit dem verwendeten Element.

### Bezeichnungen

|                        |  |
|------------------------|--|
| $\beta$                | Verdrehung des Querschnitts pro Längeneinheit.   |
| $\varphi_0$            | Verwölbungsfunktion.   |
| $\varphi$              | Spannungsfunktion.   |
| $\psi$                 | nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen an $\varphi_0$ hinzugefügte Funktion. |
| $\tau_{zx}, \tau_{zy}$ | Schubspannungen.   |
| $r, \vartheta$         | Polarkoordinaten.  |
| $x, y, z$              | Kartesische Koordinaten.   |
| $F$                    | Querschnittsfläche.  |
| $G$                    | Schubmodul.  |
| $I_1, I_2, I_3$        | Integralformel in bzw. $\varphi_0$ , $\psi$ und $\varphi$ .                                |
| $I_p$                  | polares Flächenträgheitsmoment.  |
| $M$                    | Torsionsmoment.  |
| $R$                    | Rand des Gebietes $F$ .  |
| $V$                    | potentielle Energie.   |
| $V^*$                  | komplementäre Energie.   |

### Literaturverzeichnis

1. ZIENKIEWICS, O. C. and CHEUNG, Y. K.: Finite elements in the solution of field problems. *The Engineer* 220 (1965) September, p. 507–510.
2. VISSER, W.: The finite element method in deformation and heat conduction problems. *Proefschrift Technische Hogeschool Delft* (1968).
3. KRAHULA, J. L. and LAUTERBACH, G. F.: A finite element solution for Saint-Venant torsion. *AAIA Journal* 7 (1969) December, p. 2200–2203.
4. TIMOSHENKO, S. and GOODIER, J. N.: *Theory of elasticity*. McGraw-Hill Book Company Inc., New York, Toronto, London (1951).
5. BREKELMANS, W. A. M.: Torsie van een cilindrische balk met een dwarsdoorsnede, begrensd door een regelmatige veelhoek. Intern rapport groep “Technische Mechanica” van de Technische Hogeschool Eindhoven (1967).
6. HUETTE, DES INGENIEURS TASCHENBUCH. I. Theoretische Grundlagen. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin (1955).
7. WEBER, C. und GÜNTHER, W.: *Torsionstheorie*. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig (1958).

## Zusammenfassung

Die Methode der finiten Elemente ist für die numerische Lösung von Potentialgleichungen vorzüglich geeignet. Das Verfahren wird anhand verschiedener Formulierungen der St.-Venantischen Torsionstheorie für prismatische Stäbe mit einfach und mehrfach zusammenhängenden Querschnitten erläutert. Die Methode bietet die Möglichkeit, die Torsionssteifigkeit zwischen zwei Grenzwerten einzuschliessen. Für einige klassische Beispiele werden die Resultate mit den bei anderen Methoden berechneten Ergebnissen verglichen.

## Summary

The finite element method is very suitable for the analytical solution of potential equations. It is explained by several different formulations of the St-Venant torsion theory of prismatic bars with simple or multiple connected sections. The method offers the possibility to find two threshold values for the torsional stiffness. For some classical examples the results are compared with the solutions of other methods.

## Résumé

La méthode des éléments finis convient très bien à la solution numérique des équations potentielles. Elle est illustrée au moyen de différentes formulations de la théorie de torsion de St-Venant pour des barres prismatiques à sections tubulaires simples ou multiples. La méthode offre la possibilité de trouver deux valeurs limites pour la rigidité torsionnelle. Les résultats sont comparés pour quelques exemples classiques avec ceux trouvés par d'autres méthodes.