

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 32 (1972)

**Artikel:** Beitrag zum plastischen Kippen von Trägern mit nichtformtreuem I-Querschnitt

**Autor:** Warkenthin, Werner

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-24948>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Beitrag zum plastischen Kippen von Trägern mit nichtformtreuem I-Querschnitt**

*Contribution to the Plastic Tipping of Beams with Non-conformed I-Section*

*Contribution au déversement plastique de poutres à section en I non-conforme*

WERNER WARKENTHIN

Dr.-Ing., DDR

## **1. Problemstellung**

Alle bisher bekanntgewordenen Arbeiten auf dem Gebiet des plastischen Kippens (siehe Literaturzusammenstellung in [1]) gingen stets von den Ansätzen der klassischen Kipptheorie aus und setzten einen in seiner Ebene unverformbaren, d. h. formtreuen Trägerquerschnitt voraus, ohne zu prüfen, inwieweit eine solche Annahme in dem jeweils behandelten Berechnungsfall gerechtfertigt ist. Die Frage nach der Berechtigung der Annahme formtreuer Trägerquerschnitte bedarf jedoch für das plastische Kippen gerade deshalb dringend einer Antwort, weil entsprechende Untersuchungen über das Torsions- und Kippverhalten dünnwandiger Stäbe im elastischen Bereich (siehe [2]–[8]) gezeigt haben, dass bei aus mehreren Reckteckelementen zusammengesetzten dünnwandigen Querschnitten die Annahme der Querschnittsformtreue nur bei Vorhandensein bestimmter geometrischer Relationen und einer bestimmten Mindestzahl von Querschnittsaussteifungen gerechtfertigt ist; anderenfalls ist die effektiv wirksame St.-Venant'sche Drillsteifigkeit geringer als der nach der herkömmlichen Stabtheorie berechnete Wert  $GJ_D$ . In solchen Fällen mit nicht ausreichend gewährleisteter Querschnittsformtreue errechnet man deshalb mit den Ansätzen der klassischen Kipptheorie zu hohe Kipplasten. Letzteres trifft insbesondere für gedrungene quersteifenlose I-Träger zu, und es ist zu vermuten, dass der Einfluss des Verlustes der Querschnittsformtreue bei diesem Trägertyp im plastischen Verformungsbereich sogar noch stärkere Auswirkungen auf die Kipplast hat als im elastischen Bereich.

Als Beitrag zur Klärung dieses Problems wird daher im folgenden das

Kippverhalten von geraden Trägern mit gleichbleibendem, dünnwandigem, doppelsymmetrischem I-Querschnitt unter reiner Biegung im elastisch-plastischen Verformungsbereich in Abhängigkeit vom Grad der Querschnittsaussteifung untersucht, wobei für die Trägerenden eine ideale Gabellagerung angenommen wird.

## 2. Theoretische Grundlagen

### 2.1. Kipp-Differentialgleichungssystem

Fig. 1 zeigt den Querschnitt eines der betrachteten I-Träger vor und nach Beginn des Kippens.

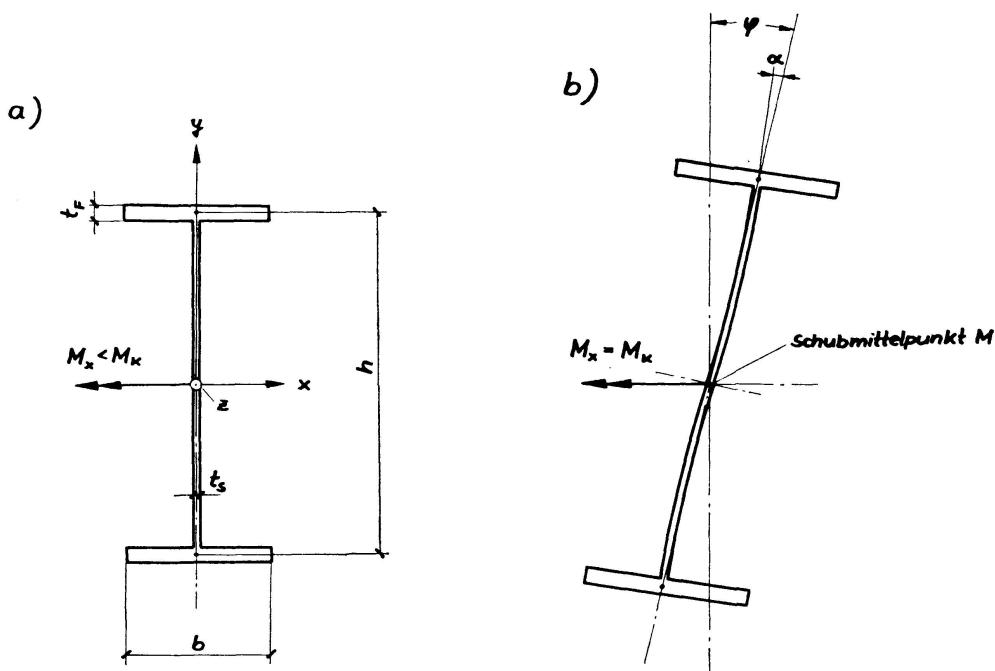


Fig. 1.

Das wesentliche Merkmal der während des Kippvorganges eintretenden Querschnittsverformung ist die *s*-förmige Verbiegung des Steges, welche von der klassischen Kipptheorie vernachlässigt wird. Im Zusammenhang mit dieser *s*-förmigen Stegverbiegung verdrehen sich die Flansche geringer als der Steg.

Setzt man voraus, dass alle gedrückten Querschnittsteile hinreichend beulsicher sind und dass auf Grund der gewählten Flanschabmessungen ein Drillknicken des Druckflansches von vornherein ausgeschlossen ist, so kann man nach Loos [8] die im instabilen Gleichgewichtszustand aus der Faserschrägstellung entstehenden Drillmomentanteile der Biegenormalspannungen in den Flanschen vernachlässigen und bei Gabellagerung der Trägerenden den Kippzustand der betrachteten I-Träger mit hinreichender Genauigkeit durch folgendes Differentialgleichungssystem beschreiben:

$$D_{Fl}[\varphi(\xi) - \alpha(\xi)]'' + \frac{E t_s^3}{12(1-\nu^2)} \frac{l^2}{h} c \alpha(\xi) = 0, \quad (1)$$

$$-W\varphi'''(\xi) + l^2 D\varphi''(\xi) - 2l^2 D_{Fl}\alpha''(\xi) + \frac{l^4 M_K^2}{B_y} \varphi(\xi) = 0. \quad (2)$$

Die Herleitung und der Nachweis hinreichender Genauigkeit dieser Differentialgleichungen für das Kippen wurden von Loos nur für ideal elastische Verhältnisse gegeben. Beide Differentialgleichungen gelten jedoch prinzipiell ebenso auch für Träger aus elastisch-plastischem Werkstoff. Deshalb wurden hier alle in [8] verwendeten elastischen Steifigkeitswerte durch die entsprechenden Größen bei elastisch-plastischer Verformung ersetzt. Es bedeutet:

$M_K$  kritischer Wert des Biegemomentes  $M_x$  (= Kippmoment).

$l$  Trägerlänge.

$h$  Trägerhöhe (= Schwerpunktabstand der Flansche).

$b$  Flanschbreite.

$t_s$  Stegdicke.

$t_F$  Flanschdicke.

$\xi$  dimensionslose Koordinate in Trägerlängsrichtung  $z$

$$\xi = \frac{z}{l}.$$

$\varphi(\xi)$  Kippdrehwinkel, der hier als «Stabdrehwinkel» (d. h. mittlere Neigung) des Steges an der Stelle  $\xi$  aufgefasst wird.

$\alpha(\xi)$  Winkel, um den der Flanschdrillwinkel kleiner als der Kippdrehwinkel  $\varphi(\xi)$  ist.

$(...)'$  Ableitung nach  $\xi$ .

$E$  Elastizitätsmodul.

$G$  Gleitmodul.

$\nu$  Poissonzahl.

$B_y$  Biegesteifigkeit über die minimale Querschnittshauptachse. Im elastischen Bereich ist  $B_y$  gleich  $E J_y$ , wobei  $J_y$  das minimale Hauptträgheitsmoment darstellt.

$D$  St.-Venantsche Drillsteifigkeit des Gesamtquerschnittes. Unter ideal elastischen Verhältnissen ist  $D$  gleich  $G J_D$ , wobei für die betrachteten I-Träger

$$J_D = J_{D\text{Steg}} + 2 J_{D\text{Fl}} \approx \frac{1}{3} h t_s^3 + \frac{2}{3} b t_F^3. \quad (3)$$

$D_{Fl}$  St.-Venantsche Drillsteifigkeit eines Flansches. Im Elastischen ist  $D_{Fl}$  gleich  $G J_{DFl}$ .

$$J_{DFl} \approx \frac{1}{3} b t_F^3. \quad (4)$$

$W$  Wölbsteifigkeit. Im elastischen Bereich ist  $W$  gleich  $E C_M$ , wobei der auf den Schubmittelpunkt  $M$  bezogene Wölbwiderstand  $C_M$  bei den zu untersuchenden dünnwandigen I-Querschnitten näherungsweise aus

folgender Beziehung errechnet werden kann:

$$C_M \approx J_y \frac{h^2}{4}. \quad (5)$$

- $c$  Steifigkeitskoeffizient des Steges. Unter ideal elastischen Verhältnissen ist  $c = 6$ .

### 2.2. Biegemoment bei elastisch-plastischer Biegung

Unter der Voraussetzung, dass das Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Trägerwerkstoffs punktsymmetrisch sei und demzufolge der Bedingung

$$\sigma(\epsilon) = -\sigma(-\epsilon) \quad (6)$$

genügt, ergibt sich auf der Grundlage der technischen Bieglehre für das Biegemoment  $M_x$  der betrachteten I-Träger folgender Ansatz:

$$M_x = b t_F h \sigma_R + \frac{t_s}{2} \left( \frac{h}{\epsilon_R} \right)^2 \int_0^{\epsilon_R} \sigma(\epsilon) \epsilon d\epsilon. \quad (7)$$

Darin bedeutet:

- $\epsilon$  Dehnung in Richtung der Trägerlängsachse  $z$

$$\epsilon \equiv \epsilon_z.$$

- $\epsilon_R$  Randdehnung. Da der I-Querschnitt als dünnwandig vorausgesetzt wird, sei hier  $\epsilon_R$  gleich der mittleren Dehnung in den Flanschen (= Dehnung im Flanschschwerpunkt).

- $\sigma$  die nach dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm  $\sigma(\epsilon)$  der Dehnung  $\epsilon$  zugeordnete Spannung in Richtung  $z$

$$\sigma \equiv \sigma_z.$$

- $\sigma_R$  Randspannung, die bei den hier betrachteten dünnwandigen I-Querschnitten gleich der Spannung im Schwerpunkt der Flansche gesetzt wird.

$$\sigma_R = \sigma(\epsilon = \epsilon_R). \quad (8)$$

Die in der Praxis auftretenden Werte des Biegemomentes  $M_x$  sind nach oben hin begrenzt durch das nur im theoretischen Idealfall zu erreichende vollplastische Grenzmoment  $M_{xgr}$ . Unter dessen Wirkung sollen gedachtermassen die Spannungen  $\sigma$  überall im Querschnitt die Fliessspannung  $\sigma_F$  annehmen. In Wirklichkeit ist  $M_x$  immer kleiner als  $M_{xgr}$ , weil vor Erreichen von  $M_{xgr}$  Risse in den bis zur Bruchdehnung  $\epsilon_B$  gereckten Randzonen auftreten.

Bei den betrachteten I-Trägern berechnet sich das vollplastische Grenzmoment zu

$$M_{xgr} = \sigma_F h (b t_F + \frac{1}{4} h t_s). \quad (9)$$

Das Verhältnis  $M_x/M_{xgr}$  ist dann ein Mass für die Plastifizierung des Trägers und soll als Plastizierungsgrad bezeichnet werden.

### 2.3. Spannungs-Dehnungs-Gesetz

Eine hinreichend genaue mathematische Formulierung des natürlichen Spannungs-Dehnungs-Diagramms  $\sigma(\epsilon)$ , des Tangentenmoduls

$$T(\epsilon) = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \quad (10)$$

und des Sekantenmoduls  $S(\epsilon) = \frac{\sigma(\epsilon)}{\epsilon}$  (11)

wird als gegeben vorausgesetzt. Geeignete Lösungsansätze, mit denen die bei Berechnung der Biegemomente  $M_x$  nach Gleichung (7) oftmals entstehenden Integrationsschwierigkeiten leicht umgangen werden können, sind in [9] zu finden.

### 2.4. Massgebende Plastizitätstheorie

Auf Grund der bisher auf dem Gebiet des plastischen Beulens und des plastischen Kippens durchgeführten Forschung kann verallgemeinernd festgestellt werden (siehe [1]), dass überall dort, wo im plastischen Bereich mit mehrachsigen Spannungszuständen verbundene Stabilitätsprobleme zu untersuchen sind, weder die Plastizitätstheorie von Hencky noch das Prandtl-Reuss-Gesetz, sondern differentielle Verzerrungs-Spannungs-Gesetze zugrunde zu legen sind, die auch die von Haus aus vorhandenen, z. B. als Folge des Walzens entstandenen Werkstoffanisotropien mit berücksichtigen. Im elastischen Bereich kann dagegen der Werkstoff weiterhin im Sinne der klassischen Theorie als quasiiotrop angesehen werden, weil sorgfältige Messungen (siehe z. B. [10]) bestätigt haben, dass das ausgeprägte anisotrope Verformungsverhalten erst bei Beanspruchungen oberhalb der Proportionalitätsgrenze beginnt.

Da dünnwandige I-Querschnitte vorausgesetzt wurden, kann man im weiteren stets mit ebenen Spannungszuständen rechnen. Im Allgemeinfalle können dabei folgende Spannungskomponenten auftreten:

- $\sigma_z$  Normalspannungen in Trägerlängsrichtung  $z$ .
- $\sigma_s$  Normalspannungen in der Flansch- bzw. Stegebene rechtwinklig zur Längsrichtung  $z$ .
- $\tau_{zs}$  Schubspannungen in der Flansch- bzw. Stegebene.

Wird der Werkstoff, wie zuvor gefordert, als elastisch-isotrop, plastisch-anisotrop angesehen, so kann unter der Voraussetzung, dass der Werkstoff

zum ersten Male plastisch deformiert wird, sein Spannungs-Verformungs-Verhalten wie folgt beschrieben werden:

*Vergleichsspannung:*

$$\sigma_v^2 = f_z \sigma_z^2 - f_{zs} \sigma_z \sigma_s + f_s \sigma_s^2 + 3 f_\tau \tau_{zs}^2, \quad (12)$$

wobei  $f_z$ ,  $f_s$ ,  $f_{zs}$  und  $f_\tau$  von der jeweiligen Plastizierung abhängige Anisotropieparameter darstellen, die im Falle der Isotropie, also im elastischen Verformungsbereich, alle gleich 1 sind.

*Verzerrungs-Spannungs-Gesetze:*

bei Entlastung oder neutraler Spannungsänderung ( $\delta \sigma_v \leq 0$ ):

$$\delta \epsilon_z = \frac{1}{E} (\delta \sigma_z - \nu \delta \sigma_s), \quad (13a)$$

$$\delta \epsilon_s = \frac{1}{E} (\delta \sigma_s - \nu \delta \sigma_z), \quad (13b)$$

$$\delta \gamma_{zs} = \frac{1}{G} \delta \tau_{zs}, \quad (13c)$$

bei Belastung ( $\delta \sigma_v > 0$ ):

$$\delta \epsilon_z = \frac{1}{E} (\delta \sigma_z - \nu \delta \sigma_s) + \left( \frac{2}{3} f_z \sigma_z - \frac{1}{3} f_{zs} \sigma_s \right) d\lambda, \quad (14a)$$

$$\delta \epsilon_s = \frac{1}{E} (\delta \sigma_s - \nu \delta \sigma_z) + \left( \frac{2}{3} f_s \sigma_s - \frac{1}{3} f_{zs} \sigma_z \right) d\lambda, \quad (14b)$$

$$\delta \gamma_{zs} = \frac{1}{G} \delta \tau_{zs} + 2 f_\tau \tau_{zs} d\lambda. \quad (14c)$$

Hierbei bedeuten:

$\delta \sigma_v, \delta \sigma_z, \delta \sigma_s, \delta \tau_{zs}$	differentielle Änderungen der Spannungen.
$\delta \epsilon_z, \delta \epsilon_s, \delta \gamma_{zs}$	differentielle Änderungen der Verzerrungen.
$E$	Elastizitätsmodul.
$G$	Gleitmodul.
$\nu$	Poissonzahl.
$d\lambda$	skalarer Faktor differentieller Grösse, der aus der Beziehung

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{\delta \epsilon_v^p}{\sigma_v} \quad (15)$$

zu berechnen ist, wobei  $\delta \epsilon_v^p$  die differentielle Änderung des plastischen Anteiles der Vergleichsdehnung  $\epsilon_v$  darstellt.

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_v^p = & \left\{ \frac{1}{f_s f_z - \frac{1}{4} f_{zs}^2} \left( f_s \left[ \delta \epsilon_z - \frac{1}{E} (\delta \sigma_z - \nu \delta \sigma_s) \right]^2 \right. \right. \\ & + f_z \left[ \delta \epsilon_s - \frac{1}{E} (\delta \sigma_s - \nu \delta \sigma_z) \right]^2 \\ & + f_{zs} \left[ \delta \epsilon_z - \frac{1}{E} (\delta \sigma_z - \nu \delta \sigma_s) \right] \left[ \delta \epsilon_s - \frac{1}{E} (\delta \sigma_s - \nu \delta \sigma_z) \right] \Big) \\ & \left. \left. + \frac{1}{3 f_\tau} \left[ \delta \gamma_{zs} - \frac{1}{G} \delta \tau_{zs} \right]^2 \right\}^{1/2}. \right. \end{aligned} \quad (16)$$

### 2.5. Steifigkeitsberechnung des infolge Biegung teilweise plastizierten Trägers

Es wird angenommen, dass die zu untersuchenden Träger im unbelasteten Zustand weder verdreht noch verbogen seien und dass der Biegevorgang im stabilen Gleichgewichtszustand exakt über die maximale Querschnittssachse  $x-x$  erfolgt. Es gelten die Annahmen der technischen Bieglehre (inkompressibler Werkstoff und lineare Dehnungsverteilung über der Trägerhöhe nach der Hypothese von Bernoulli-Navier).

Unter diesen Voraussetzungen sind in den zu untersuchenden I-Trägern im betrachteten Fall der reinen Biegung vor Erreichen der Stabilitätsgrenze nur Längsspannungen  $\sigma \equiv \sigma_z$  vorhanden, so dass

$$\sigma_s = \tau_{zs} = 0. \quad (17)$$

Die Verknüpfung zwischen diesen Längsspannungen  $\sigma_z$  und dem Biegemoment  $M_x$  ist durch die Gleichung (7) gegeben; der Verlauf von  $\sigma_z$  über der Trägerhöhe folgt dem Spannungs-Dehnungs-Gesetz  $\sigma(\epsilon)$  entsprechend der linearen Dehnungsverteilung

$$\epsilon \equiv \epsilon_z = y \frac{2 \epsilon_R}{h}. \quad (18)$$

Bei Beginn des Kippens treten dann durch die im Verzweigungspunkt beginnende seitliche Ausbiegung, gekoppelt mit einer entsprechenden Querschnittsverdrehung, sowie durch die in der gleichen Zeit mögliche Vergrösserung des Biegemomentes  $M_x$  zu dem kritischen Grundspannungszustand  $\sigma_z \rightarrow \sigma_{z\text{krit}}$  noch Spannungsänderungen  $\delta \sigma_z$ ,  $\delta \sigma_s$  und  $\delta \tau_{zs}$  hinzu, denen allgemein nach den Gleichungen (13a, b, c) und (14a, b, c) Verzerrungsänderungen  $\delta \epsilon_z$ ,  $\delta \epsilon_s$  und  $\delta \gamma_{zs}$  zugeordnet sind. Während die infolge Querschnittsverformung entstehende Spannungsänderung  $\delta \sigma_s$  nur im Steg der betrachteten I-Träger auftritt, treten die Spannungsänderungen  $\delta \sigma_z$  in allen Querschnittsteilen auf und setzen sich aus folgenden drei Anteilen zusammen:

- Biegespannungen  $\delta \sigma_z(\delta M_y)$  infolge des beim seitlichen Ausweichen entstehenden Biegemomentes  $\delta M_y$ ;
- Wölbnormalspannungen  $\delta \sigma_z(\delta M_z)$  infolge des mit dem Kippvorgang wirksamen werdenden Torsionsmomentes  $\delta M_z$ ;

- Biegespannungen  $\delta \sigma_z (\delta M_x)$  infolge einer auch unmittelbar bei Beginn des Kippvorganges noch fortwährenden Laststeigerung  $\delta M_x$ . Letztere ist abhängig von der Grösse der Belastungsgeschwindigkeit.

Um den ungünstigsten Fall mit dem kleinsten Kippmoment zu erfassen, wird nach der Theorie von Engesser-Shanley angenommen, dass die Belastungsgeschwindigkeit so gross ist, dass während des Kippvorganges überall im Träger  $\delta \sigma_v > 0$  ist und demzufolge für die Verknüpfung der Verzerrungs- und Spannungsänderungen nur die Gleichungen (14a, b, c) massgebend sind.

Auf Grund von (17) erhält man dann aus (12):

$$\sigma_v = \sqrt{f_z} \sigma_z, \quad (19)$$

aus (14a, b, c):

$$\delta \epsilon_z = \frac{1}{E} (\delta \sigma_z - \nu \delta \sigma_s) + \delta \epsilon_z^p, \quad (20a)$$

$$\delta \epsilon_s = \frac{1}{E} (\delta \sigma_s - \nu \delta \sigma_z) - \frac{1}{2} \frac{f_{zs}}{f_z} \delta \epsilon_z^p, \quad (20b)$$

$$\delta \gamma_{zs} = \frac{1}{G} \delta \tau_{zs}, \quad (20c)$$

wobei

$$\delta \epsilon_z^p = \frac{2}{3} f_z \sigma_z d\lambda \quad (21)$$

den plastischen Anteil der Verzerrungsänderung  $\delta \epsilon_z$  darstellt. Mit Einführung des bei einachsiger Zug-Druck-Bearbeitung in Trägerlängsrichtung gemessenen Tangentenmoduls

$$T(\epsilon_z) = \frac{d\sigma_z}{d\epsilon_z} \quad (22)$$

kann man mit der aus Fig. 2 abzulesenden Beziehung

$$\delta \epsilon_z^p = \frac{\delta \sigma_z}{T(\epsilon_z)} - \frac{\delta \sigma_z}{E} \quad (23)$$

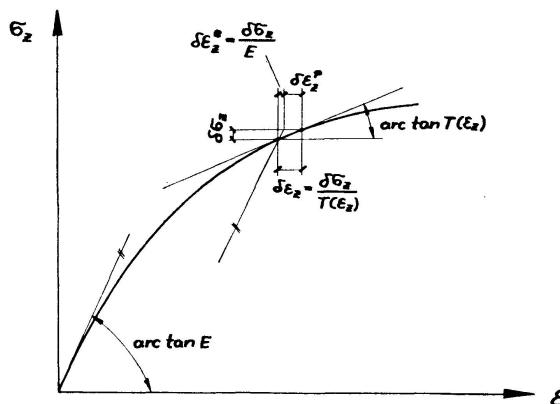


Fig. 2.

an Stelle der Gleichungen (20a) und (20b) auch folgendes schreiben:

$$\delta \epsilon_z = \frac{\delta \sigma_z}{E} - \nu \frac{\delta \sigma_s}{E} + \frac{\delta \sigma_z}{T(\epsilon_z)} - \frac{\delta \sigma_z}{E} = \frac{\delta \sigma_z}{T(\epsilon_z)} - \nu \frac{\delta \sigma_s}{E}, \quad (24a)$$

$$\delta \epsilon_s = \frac{\delta \sigma_s}{E} - \nu \frac{\delta \sigma_z}{E} - \frac{1}{2} \frac{f_{zs}}{f_z} \left( \frac{\delta \sigma_z}{T(\epsilon_z)} - \frac{\delta \sigma_z}{E} \right) = \frac{\delta \sigma_s}{E} - \delta \sigma_z \left[ \frac{\nu}{E} + \frac{1}{2} \frac{f_{zs}}{f_z} \left( \frac{1}{T(\epsilon_z)} - \frac{1}{E} \right) \right]. \quad (24b)$$

Die Gleichungen (20c), (24a) und (24b) bilden die theoretische Grundlage für die Berechnung der Steifigkeitswerte der hier betrachteten rein auf Biegung beanspruchten dünnwandigen I-Träger. Sie zeigen, dass lediglich die Spannungsänderungen  $\delta \sigma_z$  plastische Verzerrungsanteile liefern.

Daraus ergeben sich folgende Schlussfolgerungen:

- Der spezifische Gleitwiderstand und demzufolge auch die St.-Venantsche Drillsteifigkeit der einzelnen Querschnittselemente sind unabhängig vom Plastizierungsgrad des Trägers (siehe Formel 20a). Das heisst, dass

$$D = G J_D, \quad (25)$$

$$D_{Fl} = G J_{D Fl}. \quad (26)$$

- Ebenso ist auf Grund von Formel (24b) der Widerstand des Stegbleches gegenüber seiner mit Beginn des Kippvorganges einsetzenden *s*-förmigen Verbiegung rechtwinklig zur Ebene  $y-z$ , wobei Biegespannungen  $\delta \sigma_s$  und entsprechende Dehnungsanteile  $\delta \sigma_s/E$  auftreten, unabhängig von den durch die Längsspannungen  $\sigma_z$  und  $\delta \sigma_z$  hervorgerufenen plastischen Verformungen. Der in Gleichung (1) enthaltene Steifigkeitskoeffizient des Steges ist deshalb bei reiner Biegung stets

$$c = 6. \quad (27)$$

- Allein bei der Berechnung der Biegesteifigkeit  $B_y$  und der Wölbsteifigkeit  $W$  des durch die Biegespannungen  $\sigma_z$  teilweise plastizierten dünnwandigen I-Trägers ist entsprechend Formel (24a) im Ansatz der Steifigkeitsanteile der einzelnen differentiellen Querschnittselemente, in Abhängigkeit von der nach Gleichung (18) linear ansteigenden Dehnung  $\epsilon_z$ , an Stelle von  $E$  der entsprechende Tangentenmodul  $T(\epsilon_z)$  zu setzen. Man erhält:

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{1}{12} \int_{-y_R}^{+y_R} T(\epsilon_z) b^3(y) dy \quad (\text{Gleichung (18) einsetzen!}) \\ &= 2 T(\epsilon_R) \frac{b^3 t_F}{12} + \frac{h t_s^3}{12} \underbrace{\frac{1}{\epsilon_R} \int_0^{\epsilon_R} T(\epsilon_z) d\epsilon_z}_{= \sigma(\epsilon_R)} \\ &= 2 T(\epsilon_R) J_{y Fl} + S(\epsilon_R) J_{y St}, \end{aligned} \quad (28)$$

wobei  $J_{y Fl}$  und  $J_{y St}$  die Trägheitsmomente eines Flansches sowie des Steges bezogen auf die  $y$ -Achse sind.

$$W = \int_F T(\epsilon_z, s) \omega^2(s) t(s) ds, \quad (29)$$

wobei  $\omega(s)$  die auf den Schubmittelpunkt bezogene Einheitsverwölbung in Abhängigkeit von der entlang der Querschnittsmittellinie verlaufenden Koordinate  $s$  darstellt.  $t(s)$  ist die Wanddicke an der jeweiligen Schnittstelle  $s$ .

Da beim I-Querschnitt der Steg als quasi-wölf frei angesehen wird, gilt für die hier interessierenden, mit  $M_x = \text{konst}$  plastisch gebogenen, dünnwandigen I-Träger

$$W = T(\epsilon_R) C_M. \quad (30)$$

Damit sind für den Fall der reinen Biegung alle in den Differentialgleichungen (1) und (2) enthaltenen Steifigkeitswerte bestimmt.

In Auswertung der Fachliteratur ist es jedoch notwendig, an dieser Stelle noch zu einigen Ergebnissen der Plastizitätstheorie von Hencky Stellung zu nehmen, da diese Theorie in vielen früher zum Problem des plastischen Kippens veröffentlichten Beiträgen eine besondere Rolle spielt.

Nach der Plastizitätstheorie von Hencky erhält man für plastisch gebogene Träger bei anschliessender Torsionsbeanspruchung generell kleinere St.-Venant'sche Drillsteifigkeiten als nach den Formeln (25) und (26) und speziell für die  $s$ -förmigen Stegverformungen eines I-Querschnittes Steifigkeitskoeffizienten  $c < 6$ . Für den Fall, dass der Stegrand die Fliessgrenze  $\sigma_F$  erreicht, müsste sich dann bei einem rein auf Biegung beanspruchten I-Träger, als Sonderfall der  $s$ -förmigen Stegverformungen, längs der Flansch-Steg-Verbindung sogar ein scharnierartiges plastisches Gelenk bilden. Letzteres konnte jedoch bei plastischen Biege- und Kippversuchen nicht beobachtet werden. Ebenso konnte in sorgfältig durchgeföhrten Versuchen von NEAL [11] nachgewiesen werden, dass bei Trägern mit Vollquerschnitt eine Abminderung der St.-Venant'schen Drillsteifigkeit auf Grund vorangegangener plastischer Biegung nicht erforderlich ist. Wenn also bei unausgesteiften, kurzen, plastisch gebogenen und anschliessend geringfügig toradierten I-Trägern geringere effektive St.-Venant'sche Drillsteifigkeiten als  $GJ_D$  festzustellen sind, so ist das, wie im folgenden gezeigt wird, in der Hauptsache auf den Verlust der Querschnittsformtreue zurückzuführen. (Etwaige Einflüsse von Imperfektionen sollen hier ausser acht bleiben!)

### **3. Berechnung der Engesser-Shanleyschen Kippmomente querausgesteifter I-Träger in Abhängigkeit von der Steifenzahl**

Da Gabellagerung der Trägerenden sowie konstanter Biegemomenten- und Querschnittsverlauf vorausgesetzt sind, werden unter der Annahme, dass die Stegquersteifen gleichmässig über die Trägerlänge verteilt, extrem drillweich und hinsichtlich Biegung rechtwinklig zur Stegebene quasistarr sind, für die

Variablen  $\varphi$  und  $\alpha$  folgende Näherungslösungen gewählt:

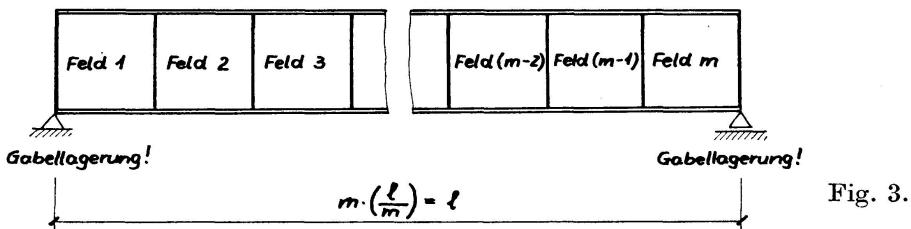
$$\varphi = a_1 \sin \pi \delta, \quad (31)$$

$$\alpha = \begin{cases} b_1 \sin \pi \delta, & \text{für } 0 \leq \delta \leq \frac{1}{2m} \text{ und } 1 - \frac{1}{2m} \leq \delta \leq 1, \\ \frac{b_1}{2} \sin \pi \delta (1 - \cos 2m\pi \delta), & \text{für } \frac{1}{2m} \leq \delta \leq 1 - \frac{1}{2m}. \end{cases} \quad (32)$$

Dabei bedeutet:

$m$  Anzahl der von den Stegquersteifen abgegrenzten Stegfelder (siehe Fig. 3).

Die Zahl der Stegquersteifen ist dann  $m+1$ .



Mit  $c=6$  entsprechend (27) erhält man damit aus (1) und (2) folgende Galerkinsche Gleichungen:

aus (1):

$$a_1 \pi^2 \int_0^1 \frac{\varphi'' \alpha}{a_1 b_1 \pi^2} d\delta - b_1 \pi^2 \int_0^1 \frac{\alpha'' \alpha}{b_1^2 \pi^2} d\delta + b_1 \frac{1}{2(1-\nu^2)} \frac{l^2}{h} \frac{E t_s^3}{D_{Fl}} \int_0^1 \frac{\alpha^2}{b_1^2} d\delta = 0, \quad (33)$$

aus (2):

$$\begin{aligned} -a_1 \pi^4 W \int_0^1 \frac{\varphi''' \varphi}{a_1^2 \pi^4} d\delta + a_1 \pi^2 l^2 D \int_0^1 \frac{\varphi'' \varphi}{a_1^2 \pi^2} d\delta \\ + a_1 \frac{M_K^2 l^4}{B_y} \int_0^1 \frac{\varphi^2}{a_1^2} d\delta - b_1 2 D_{Fl} l^2 \pi^2 \int_0^1 \frac{\alpha'' \varphi}{a_1 b_1 \pi^2} d\delta = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Nach Einsetzen von (31) und (32) und Auflösen der Integrale wurde daraus folgendes Gleichungssystem gewonnen:

aus (33):

$$-a_1 + b_1 \left[ k_2(m) + \frac{k_3(m)}{2(1-\nu^2)\pi^2} \frac{l^2}{h} \frac{E t_s^3}{D_{Fl}} \right] = 0, \quad (35)$$

aus (34):

$$a_1 \left( -W \frac{\pi^2}{l^2} - D + \frac{M_K^2 l^2}{B_y \pi^2} \right) + b_1 2 D_{Fl} k_1(m) = 0 \quad (36)$$

mit

$$\begin{aligned} k_1(m) = & \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{m} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{m} - \frac{(-1)^m}{2\pi} \left[ \frac{(2m-1)^2}{m-1} \sin \left( m + \frac{1}{m} - 2 \right) \pi \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(2m+1)^2}{m+1} \sin \left( m - \frac{1}{m} \right) \pi \right] \right\}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} k_2(m) = & \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{2m} - \frac{3}{2\pi} \sin \frac{\pi}{m} + (4m^2+1) \left[ \frac{m-1}{4m} + \frac{\sin \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \pi}{4\pi} \right. \right. \\ & - \frac{(-1)^m}{2\pi} \left[ \frac{2m^2-2m+1}{m-1} \sin \left( m + \frac{1}{m} - 2 \right) \pi \right. \\ & \left. \left. + \frac{2m^2+2m+1}{m+1} \sin \left( m - \frac{1}{m} \right) \pi \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{8\pi} \left[ (2m-1) \sin \left( 2m + \frac{1}{m} - 3 \right) \pi + (2m+1) \sin \left( 2m - \frac{1}{m} - 1 \right) \pi \right] \right\}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} k_3(m) = & \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{2m} - \frac{3}{2\pi} \sin \frac{\pi}{m} - \frac{(-1)^m}{2\pi} \left[ \frac{\sin \left( m + \frac{1}{m} - 2 \right) \pi}{m-1} + \frac{\sin \left( m - \frac{1}{m} \right) \pi}{m+1} \right] \right. \\ & + \frac{m-1}{4m} + \frac{\sin \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \pi}{4\pi} + \frac{\sin \left( 2m + \frac{1}{m} - 3 \right) \pi}{8\pi(2m-1)} + \frac{\sin \left( 2m - \frac{1}{m} - 1 \right) \pi}{8\pi(2m+1)} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$N = 1 + \frac{1}{m} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{m} - \frac{(-1)^m}{2\pi} \left[ \frac{\sin \left( m + \frac{1}{m} - 2 \right) \pi}{m-1} + \frac{\sin \left( m - \frac{1}{m} \right) \pi}{m+1} \right]. \quad (40)$$

$m$	$k_1$	$k_2$	$k_3$
1	1,000	1,000	1,000
2	0,53780	3,9270	0,80486
3	0,51160	9,1257	0,76784
4	0,50496	16,262	0,75773
5	0,50255	25,353	0,75402
6	0,50148	36,416	0,75233
8	0,50062	64,498	0,75099
10	0,50030	100,548	0,75052
15	0,50005	225,619	0,75015
$\infty$	0,5	$\infty$	0,75

Mit wachsendem  $m$  nähern sich  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$  asymptotisch den Funktionen

$$k_1 \approx \frac{1}{2}, \quad (37a)$$

$$k_2 \approx m^2 + \frac{3}{4}, \quad (38a)$$

$$k_3 \approx \frac{3}{4}. \quad (39a)$$

Durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante der Gleichungen (35) und (36) erhält man unter Beachtung von (25) und (26) für das Engesser-Shanleysche Kippmoment schliesslich folgende Beziehung:

$$M_K \approx \frac{\pi}{l} \left\{ B_y \left[ G J_D - \frac{2 G J_{DFl} k_1(m)}{k_2(m) + \frac{k_3(m)}{2(1-\nu^2)\pi^2} \frac{l^2}{h} \frac{E t_s^3}{G J_{DFl}}} + W \frac{\pi^2}{l^2} \right] \right\}^{1/2}. \quad (41)$$

Dieses Moment unterscheidet sich von dem unter Voraussetzung idealer Querschnittsformtreue nach der klassischen Kipptheorie ermittelten Engesser-Shanleyschen Kippmoment allein durch das in (41) enthaltene mittlere Glied der eckigen Klammer. Dieses Glied ist die bei mangelnder Stegquersteifigkeit infolge des Verlustes der Querschnittsformtreue entstehende Verringerung der effektiven St.-Venantschen Drillsteifigkeit.

Man kann also den Einfluss des Verlustes der Querschnittsformtreue in den Ansätzen der klassischen Kipptheorie allgemein dadurch erfassen, dass man als St.-Venantsche Drillsteifigkeit nicht  $G J_D$ , sondern  $\vartheta G J_D$  einführt, wobei bei Ausserachtlassen von Drillkoppeleffekten stets

$$\vartheta \leq 1 \quad (42)$$

ist. Bei den hier untersuchten I-Trägern mit extrem drillweichen, jedoch biegestarren Stegquersteifen ist

$$\vartheta \approx 1 - \frac{2 \frac{J_{DFl}}{J_D} k_1(m)}{k_2(m) + \frac{k_3(m)}{2(1-\nu^2)\pi^2} \frac{l^2}{h} \frac{E t_s^3}{G J_{DFl}}}. \quad (43)$$

Es ist zu vermerken, dass von den in  $\vartheta$  enthaltenen Grössen allein die Trägerlänge  $l$ , die hier als kritische Trägerlänge  $l_K (M_K)$  aufzufassen ist, vom Plastizierungsgrad des Trägers abhängt. Nur dadurch, dass bei zunehmender Plastizierung die Steifigkeiten  $B_y$  und  $W$  und damit auch die kritische Trägerlänge  $l_K$  stark abfallen, verringert sich der Wert  $\vartheta$  im plastischen Bereich stärker als bei ideal elastischer Kippung.

Die Formel (43) gilt strenggenommen nur für I-Träger mit reiner Biegung; denn wie aus den allgemeinen Verzerrungs-Spannungs-Gesetzen (14a-c) zu erkennen ist, sind bei Vorhandensein von Querspannungen  $\sigma_s$  und Schubspannungen  $\tau_{zs}$  unter der Voraussetzung hinreichend grosser Belastungsgeschwindigkeit nicht nur die Spannungsänderung  $\delta \sigma_z$ , sondern auch die Spannungsänderungen  $\delta \sigma_s$  und  $\delta \tau_{zs}$  von Anfang an mit plastischen Formänderungsanteilen behaftet. Dies hat insbesondere für Stegleichbereiche unter örtlich konzentrierten Querlasten grosse Bedeutung; dort fällt bei plastischer Biegung der Widerstand des Steges gegen Verformungen in der Querschnittsebene besonders stark ab. Darum sollten an diesen Stellen stets kräftige Stegquersteifen angeordnet werden, damit der nachteilige Einfluss des Verlustes der Querschnittsformtreue nicht extrem hohe Werte annimmt. Da aber bei einer am Trägerrand angreifenden Einzellast die Querspannungen  $\sigma_s$  rechts und links von der Lasteintragungsstelle verhältnismässig schnell abklingen, kann man bei genügend steifen, die gesamte Trägerhöhe erfassenden Stegquersteifen die Querschnittsformtreue im Einflussbereich der Querlast als aus-

reichend gesichert ansehen. Deshalb darf die oben angegebene Formel (43) näherungsweise auch auf Träger mit konzentrierten Querlasten angewandt werden, wenn bei diesen an jeder Lasteintragungsstelle eine hinreichend bemessene Stegquersteife vorhanden ist.

In diesem Zusammenhang ergibt sich dann die Frage, wieviel Stegquersteifen notwendig sind, um einen I-Träger als hinreichend querschnittsformtreu ansehen zu können.

Die Lösung dieses Problems lässt sich sehr schnell finden, wenn man den Steg des Trägers gänzlich vernachlässigt und annimmt, dass die Formtreue allein durch die in gleichmässigen Abständen angeordneten und quer zur Stegebene biegesteif mit den Flanschen verbundenen Steifen erreicht werden soll. Man erhält dann eine untere Schranke für  $\vartheta$ . Diese nähert sich um so mehr dem Wert 1, dem Grenzfall idealer Querschnittsformtreue, je stärker das Verhältnis  $k_1(m)/k_2(m)$  mit zunehmender Stegfeldzahl  $m$  gegen Null geht.

$m$	$k_1/k_2$
1	1,0000
2	0,1369
3	0,0561
4	0,0310
5	0,0198
6	0,0138
8	0,0078

Ab  $m=4$  ist die Verringerung des Verhältnisses  $k_1(m)/k_2(m)$  praktisch ohne Bedeutung, so dass demzufolge bei einem I-Träger die von der klassischen Kipptheorie vorausgesetzte Querschnittsformtreue hinreichend gewährleistet ist, wenn bei diesem kräftige Stegquersteifen über den Stützen, in Trägermitte, in den Viertelpunkten des Trägers und überall dort angeordnet werden, wo örtlich konzentriert Querlasten angreifen.

Diese Feststellung gilt jedoch nur unter der im Zusammenhang mit der Formulierung der Kipp-Differentialgleichungen (1) und (2) getroffenen Annahme, dass alle gedrückten Querschnittsteile beulsicher sind. Bei plastisch gebogenen I-Trägern aus gewöhnlichem Baustahl ist das der Fall, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind (siehe [12]):

$$\frac{b}{t_F} \leq \frac{3,6}{\sqrt{\epsilon_F \left(3 + \frac{\sigma_B}{\sigma_F}\right) \left(1 + 0,192 \frac{E}{E_v}\right)}}, \quad (44)$$

$$\frac{h}{t_s} \leq 70 \sqrt{\frac{2,3 \text{ MP/cm}^2}{\sigma_F}}. \quad (45)$$

Dabei bedeutet:

- $b$  Flanschbreite
- $t_F$  Flanschdicke
- $h$  Steghöhe

$t_s$	Stegdicke
$\epsilon_F$	Dehnung bei Beginn des reinen Fliessens
$\sigma_F$	Fliessspannung
$\sigma_B$	Bruchspannung
$E$	Elastizitätsmodul
$E_v$	Tangentenmodul bei Beginn der Wiederverfestigung nach Durchlaufen des Fliessbereiches

#### 4. Beispiel und praktische Schlussfolgerungen

Um die Aussage über den Einfluss der Querschnittsaussteifungen auf das plastische Kippen von I-Trägern zu vervollständigen, werden abschliessend einige Ergebnisse eines praktischen Berechnungsbeispiels mitgeteilt.

Querschnittsabmessungen:

$$\begin{aligned} h &= 660 \text{ mm}, & b &= 300 \text{ mm}, \\ t_s &= 12 \text{ mm}, & t_F &= 30 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Werkstoff: St 38 mit  $E = 2100 \text{ MP/cm}^2$ ,  $\sigma_F = 2,4 \text{ MP/cm}^2$ .

Spannungs-Dehnungs-Diagramm  $\sigma(\epsilon)$  siehe Fig. 4.

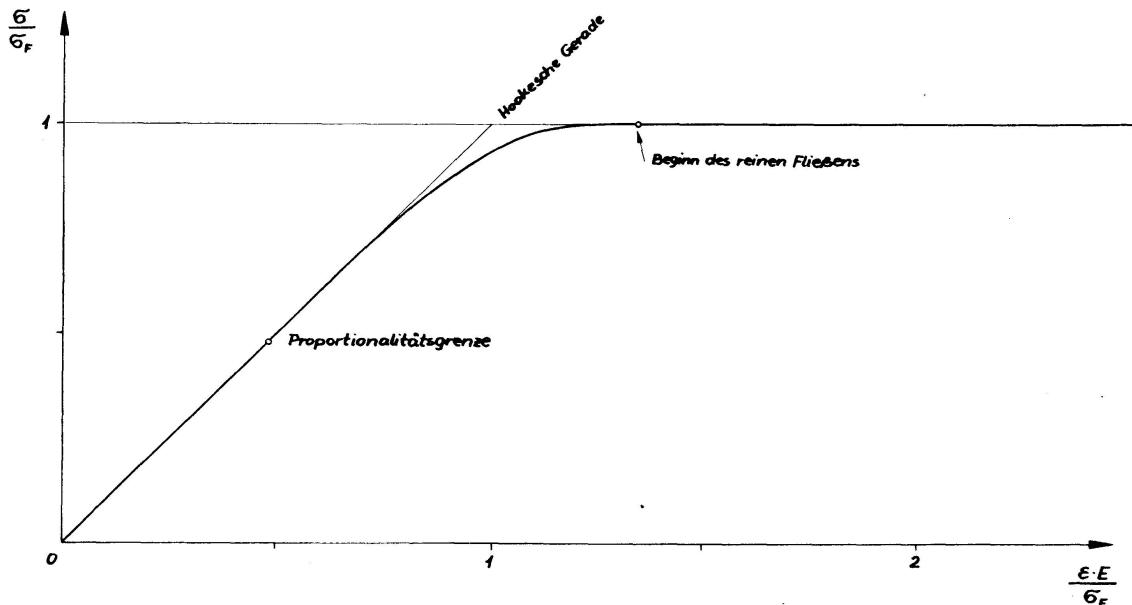


Fig. 4.

Die Bedingungen (44) und (45) sind in diesem Falle erfüllt, so dass der Träger auch bei plastischer Biegung im Druckbereich nicht beult.

Die Fig. 5, 6 und 7 zeigen dann in dimensionsloser Form die Quersteifigkeit  $B_y$ , die Wölbsteifigkeit  $W$  und die effektive St.-Venant'sche Drillsteifigkeit

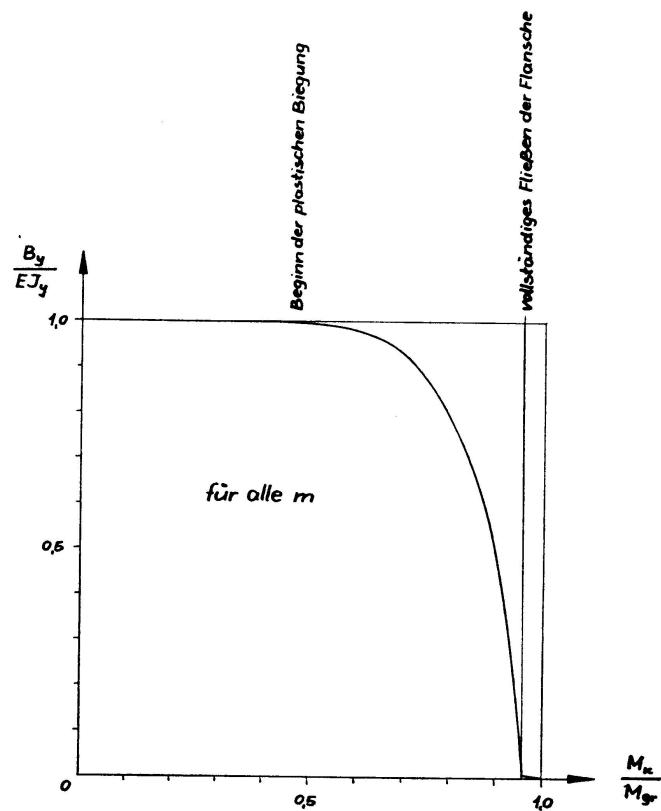


Fig. 5.

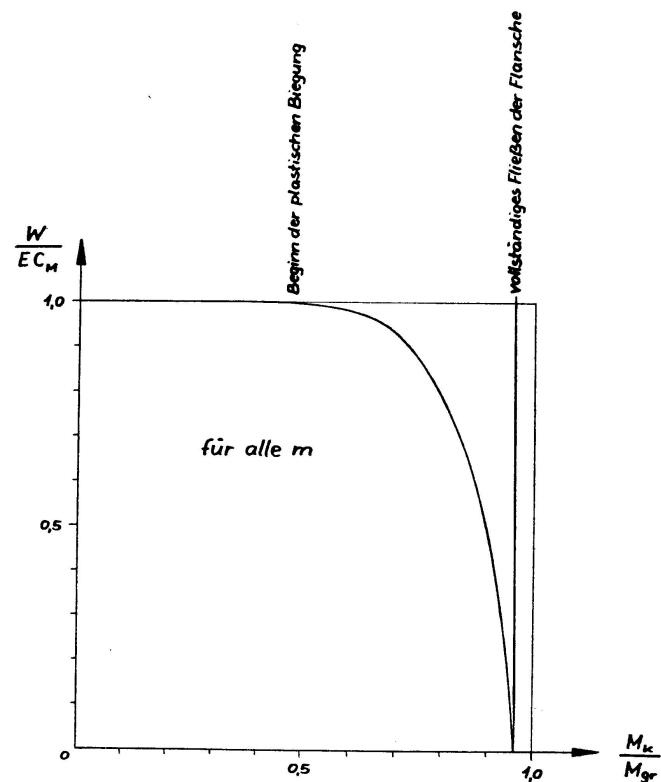


Fig. 6.

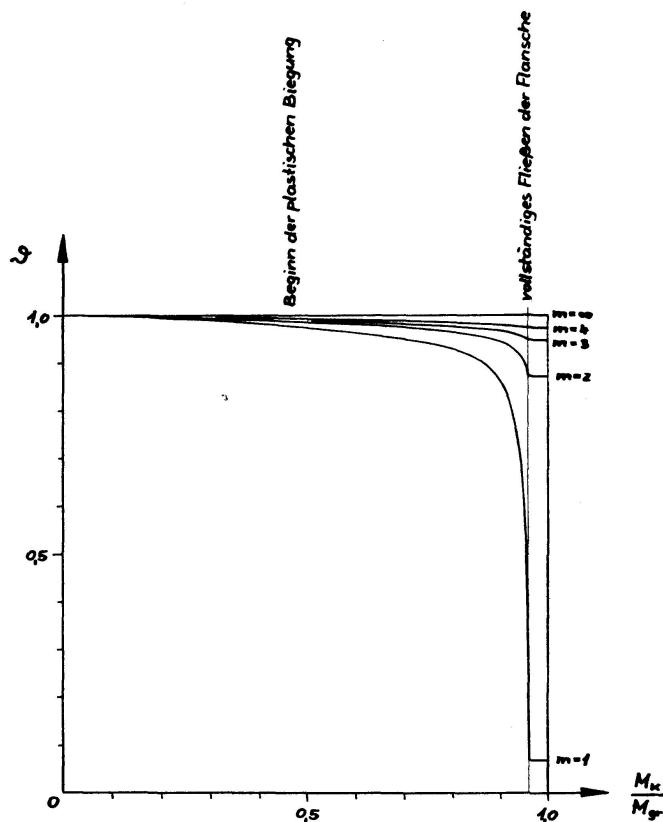


Fig. 7.

$\vartheta G J_D$  in Abhängigkeit vom Plastizierungsgrad  $M_K/M_{gr}$  sowie der Stegfeldzahl  $m$ .

Man erkennt, dass wegen des Verlustes der Querschnittsformtreue die effektive St.-Vennantsche Drillsteifigkeit  $\vartheta G J_D$  beim unausgesteiften I-Träger ( $m = 1$ ) mit zunehmender Plastizierung sehr stark abfällt; erreicht die Stegoberkante die Fliessspannung  $\sigma_F$ , so ist in diesem Falle praktisch nur noch die St.-Vennantsche Drillsteifigkeit des Steges wirksam. Ein Vernachlässigen des Verlustes der Querschnittsformtreue ist deshalb bei unausgesteiften I-Trägern im plastischen Bereich nicht zulässig. Es genügen aber bereits wenige Stegquersteifen, um den Verlust der Querschnittsformtreue beim Kippen weitgehend auszuschalten und die Flansche an der St.-Vennantschen Drillung mit zu beteiligen.

Im Bereich der elastischen Kippung ist dagegen der Einfluss des Verlustes der Querschnittsformtreue meistens relativ klein; lediglich bei I-Trägern, deren Flansche als Hohlquerschnitt ausgebildet sind, hat der Verlust der Querschnittsformtreue auch für das Kippen im elastischen Bereich grössere Bedeutung.

An Hand des oben genannten Beispiels wurde ferner gefunden, dass die in der dimensionslosen Form  $M_K/M_{gr}$  ( $M_{gr}/M_{Ki}$ ) aufgetragenen Kippmomente  $M_K$  für alle Werte  $m$  nahezu zu einer einzigen Kurve zusammenfallen, wenn man den Verlust der Querschnittsformtreue bereits im Ansatz für das ideale Kippmoment  $M_{Ki}$  mit berücksichtigt.

$$M_{Ki} = \frac{\pi}{l} \sqrt{E J_y \left( \vartheta G J_D + \frac{\pi^2}{l^2} E C_m \right)}. \quad (46)$$

Diese Feststellung hat sich bei der Untersuchung weiterer Beispiele bestätigt.

Daraus ergibt sich die Möglichkeit, für die Kippmomente von Trägern mit nichtformtreuem I-Querschnitt eine einfache Näherungslösung anzugeben. Denn wie in [13] gezeigt werden konnte, fallen die Kippkurven  $M_K/M_{gr}$  ( $M_{gr}/M_{Ki}$ ) von I-Trägern mit formtreuem Querschnitt mit sehr guter Genauigkeit zusammen, wenn man als Bezugsgröße nicht das vollplastische Grenzmoment  $M_{gr}$ , sondern dasjenige Biegemoment  $M_{gr}^*$  verwendet, bei dem die Flansche vollständig plastiziert werden, der Steg jedoch gerade erst an seinen Rändern zu fließen beginnt. Für I-Träger aus gewöhnlichem Baustahl gilt:

$$M_{gr}^* \approx \sigma_F h \left( b t_F + \frac{1}{5} h t_s \right). \quad (47)$$

Vergleiche mit Formel (9)!

Lässt man den Kippbereich oberhalb  $M_{gr}^*$  ausser acht, so braucht man also nur noch eine einzige Kippkurve zur Beschreibung des Kippverhaltens von I-Trägern, nämlich die Kippkurve des Trägers mit Sandwich-Querschnitt ( $h t_s \rightarrow 0$ ). Dafür gilt:

$$\frac{M_K}{M_{gr}^*} = \frac{\sigma(\epsilon_R)}{\sigma_F} \equiv \frac{\sigma_K(\lambda_v)}{\sigma_F}, \quad (48)$$

$$\frac{M_{gr}^*}{M_{Ki}} = \frac{\frac{T(\epsilon_R)}{E}}{\frac{\sigma(\epsilon_R)}{\sigma_F}} \equiv \frac{\sigma_F}{\sigma_{Ki}(\lambda_v)}. \quad (49)$$

Diese Kippkurve enthält nur noch Werte des natürlichen Spannungs-Dehnungs-Diagramms und ist identisch mit der Engesser-Shanleyschen Knickspannungslinie  $\sigma_K/\sigma_F$  ( $\sigma_F/\sigma_{Ki}$ ) des jeweiligen Trägerwerkstoffes. Gewöhnlich liegt  $\sigma_K$  als Funktion der Schlankheit  $\lambda$  vor. Ist das der Fall, so kann man dann das Engesser-Shanleysche Kippmoment des Trägers mit nicht formtreuem I-Querschnitt näherungsweise wie folgt berechnen:

$$M_K \approx h \left( b t_F + \frac{1}{5} h t_s \right) \sigma_K(\lambda_v), \quad (50)$$

wobei

$$\lambda_v = \pi \sqrt{\frac{E h \left( b t_F + \frac{1}{5} h t_s \right)}{M_{Ki}}}. \quad (51)$$

und  $M_{Ki}$  das nach Formel (46) unter Berücksichtigung der Querschnittsaussteifung berechnete ideale Kippmoment des Trägers ist.

Die Engesser-Shanleysche Knickspannung  $\sigma_K(\lambda) = \sigma_K(\lambda_v)$  ist den jeweils massgebenden Stabilitätsvorschriften zu entnehmen. Verwendet man an Stelle

von  $\sigma_K$  die Traglastspannungen  $\sigma_{Kr}$ , so erhält man aus Formel (50) eine brauchbare Näherung für das Kippmoment von I-Trägern mit Imperfektionen.

### Schrifttum

1. WARKENTHIN, W.: Zum derzeitigen Stand der Forschung auf dem Gebiet des plastischen Kippens; Vortrag auf der «Tagung Festkörpermechanik» der TU Dresden, Sektion Grundlagen des Maschinenwesens, Oktober 1970 (erscheint demnächst in der Wissenschaftlichen Zeitschrift der TU Dresden).
2. NYLANDER, H.: Drehungsvorgänge und gebundene Kippung bei geraden, doppelsymmetrischen I-Trägern; Ingenjörs Vetenskaps Akademien, Handlingar Nr. 174, Stockholm, 1943.
3. SCHEER, J.: Zum Problem der Gesamtstabilität von einfach-symmetrischen I-Trägern; Stahlbau 28 (1959), H. 5, S. 113 u. H. 6, S. 165.
4. PROTTE, W.: Ein Beitrag zum Problem der Gesamtstabilität querausgesteifter Träger im Kippbereich; Stahlbau 30 (1961), H. 4, S. 103–113.
5. WITTE, H.: Ein Beitrag zum Kipp-Problem bei doppelt-symmetrischen Profilen mit besonderer Berücksichtigung des Stegblechbeulens; Berichte aus Forschung und Entwicklung unserer Werke (Firma Hoesch AG) 2/1966.
6. FISCHER, M.: Das Kipp-Problem querbelasteter exzentrisch durch Normalkraft beanspruchter I-Träger bei Verzicht auf die Voraussetzung der Querschnittsformtreue; Dissertation, Universität Stuttgart 1966. Auszugsweise veröffentlicht in: Stahlbau 36 (1967), H. 3, S. 77.
7. SCHMIED, R.: Die Gesamtstabilität von zweiachsig aussermittig gedrückten dünnwandigen I-Stäben unter Berücksichtigung der Querschnittsverformung nach der nichtlinearen Plattentheorie; Dissertation, TH Darmstadt 1966. Auszugsweise veröffentlicht in: Stahlbau 36 (1967), H. 1, S. 1 u. H. 2, S. 50.
8. LOOS, W.: Beitrag zur Gesamtstabilität quersteifenloser I-Träger im Kippbereich; Dissertation, Hochschule für Bauwesen Leipzig 1965.
9. WARKENTHIN, W.: Kippuntersuchungen im plastischen Bereich; Bauplanung – Bau-technik 23 (1969), H. 5, S. 227–229.
10. RECKLING, K.-A.: Experimente zur Feststellung der Werkstoffanisotropie und zur Überprüfung der Hillschen Verfestigungshypothese; Stahlbau 38 (1969), H. 2, S. 43.
11. NEAL, B. G.: The Lateral Instability of Yielded Mild Steel Beams of Rectangular Cross-Sections; Philosophical Transactions, Royal Soc. of London, Series A, Vol. 242 (1950).
12. VOGEL, U.: Über die Anwendung des Traglastverfahrens im Stahlbau; Stahlbau 38 (1969), S. 329.
13. WARKENTHIN, W.: Kippsicherheitsnachweis von I-Trägern; Bauplanung – Bau-technik 24 (1970), H. 11, S. 550–552.

### Zusammenfassung

Es werden die Engesser-Shanley'schen Kippmomente von dünnwandigen doppelsymmetrischen I-Trägern aus elastisch-plastischem Werkstoff unter Berücksichtigung des Einflusses der beim Kippen auftretenden Querschnittsverformungen in Abhängigkeit vom Grad der Querschnittsaussteifungen untersucht. Es zeigte sich, dass der Verlust der Querschnittsformtreue beim plastischen Kippen gravierender als beim elastischen Kippen ist, dass jedoch bereits wenige Querschnittsaussteifungen (z. B. Stegquersteifen über den Stützen, in den Viertelpunkten, in Trägermitte und an Stellen örtlich konzentrierter Lasteintragung) genügen, um im Sinne der klassischen Kipptheorie mit einem quasi-formtreuen Querschnitt rechnen zu können. Abschliessend wird ein einfaches Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der plastischen Kippmomente von Trägern mit nichtformtreuem I-Querschnitt mitgeteilt.

### Summary

The Engesser-Shanley tipping moments of double symmetrical thin wall I-beams of elastic-plastic material are examined in consideration of the influence of the deformations of sections appearing during the tipping as a function of the degree of the shear reinforcement. It showed that the deformation of section was greater during the plastic tipping than during the elastic tipping, but that already a few reinforcements (e. g. reinforcements of the centroid above the supports, in the quarter points, in the centre of the beam and in points of concentrated loads) are enough to allow to consider an almost conformed section in the sense of the classical tipping theory.

Finally, a simple method is presented for the approximative calculation of the plastic tipping moments of beams with non-conformed I-section.

### Résumé

Les moments de déversement selon Engesser-Shanley de profil à I avec un matériel élastique-plastique sont examinés en considérant l'influence des déformations de la section se manifestant pendant le déversement en fonction du degré des renforcements de section. On a constaté que la déformation de la section était plus importante lors du déversement plastique que lors du déversement élastique. Toutefois, un renforcement faible (p. e. des raidisseurs transversales sur les appuis, dans les points de quart, au milieu de la poutre et aux endroits de charges concentrées) suffit pour envisager le calcul du déversement selon la théorie classique (contours de la section conservée).

Finalement une méthode simple est communiquée pour un calcul approximatif des moments de déversement de profil non-conforme.