

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 32 (1972)

**Artikel:** Berechnung der Rissbildung bei auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Stahlbetonbauteilen  
**Autor:** Deutsch, I.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-24941>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Berechnung der Rissbildung bei auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Stahlbetonbauteilen**

*Analysis of Cracking in Reinforced Concrete Members Subjected to Bending and Shear*

*Calcul de la fissuration des éléments en béton armé, sollicités à la flexion à effort tranchant*

I. DEUTSCH

Dozent Dr. Ing., Technische Hochschule Timișoara

## **1. Einführung**

Die Rissbildung in gezogenen und auf reine Biegung beanspruchten Bauteilen wurde weitgehend untersucht. Für den am häufigsten auftretenden Fall der Biegung mit Querkraft trifft dies aber leider nicht zu. Eine Erklärung dafür könnte die Tatsache liefern, dass auch die Bemessung der Querbewehrung noch Gegenstand von Diskussionen ist und das Problem der Rissbildung erst nach einer relativen Klärung des Bruchsicherheitsnachweises angeschnitten wurde.

Der Verfasser setzt sich in dieser Arbeit zum Ziel, ausgehend von der allgemeinen Theorie der Rissbildung, von Ergebnissen eigener Versuche und den Untersuchungen verschiedener Forscher bezüglich des Bruchverhaltens von auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Stahlbetonbauteilen, Formeln für die Berechnung des Rissabstandes und der Rissweite abzuleiten. Diese Grössen werden gesondert gewonnen, je nachdem ob der Bruch durch das Biegemoment oder durch die Querkraft verursacht wird.

Dieser Aufsatz behandelt nur den ersten Fall, also die Rissbildung der auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Bauteile, die durch Biegung zum Bruch kommen. Die im Text vorkommenden Bezeichnungen wurden im Anhang zusammengefasst.

## 2. Die allgemeinen Gleichungen für den Rissabstand und die Rissweite

### 2.1. Grundlegende Annahmen

Die Ableitung der allgemeinen Gleichungen stützt sich auf verschiedene Annahmen. So wird vorausgesetzt, dass sich bei der Rissbildung (Stadium Ia) die Betondruckzone und die Zugbewehrung vollkommen elastisch verhalten. Dagegen wird für die Betonzugzone eine völlige Plastifizierung angenommen, trotzdem dies nicht ganz der Wirklichkeit entspricht. Es wird ferner angenommen, dass die Querschnitte eben bleiben.

Nach der Rissbildung (Stadium II) sind im Rissquerschnitt nur der gedrückte Beton und die vollkommen elastische Zugbewehrung aktiv. Zwischen den Rissen ist die Zusammenarbeit Beton-Bewehrung gesichert. Die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte wird beibehalten. Die Verteilung der Schubspannungen wird in der Druckzone parabolisch und in der Zugzone, allerdings nur bis zur Achse der Längsbewehrung, rechteckig vorausgesetzt.

Die Zugfestigkeit des Betons wurde im Einklang mit den rumänischen Normen [10] mit Hilfe von Biegeversuchen an Prismen  $10 \times 10 \times 30$  cm bestimmt. Dabei wird eine völlige Plastifizierung der Zugzone angenommen, so dass für die Zugfestigkeit gilt:

$$R_t = 3,5 \frac{M}{b h^2}. \quad (1)$$

Der Einfluss der Haftspannungen auf das Rissverhalten der Stahlbetonbauteile ist komplex. Untersuchungen von J. FAURY [7], R. L'HERMITE [8] und M. M. ADAM [9] zeigten, dass in der Nähe der Bewehrungsstäbe (in einem Umkreis von 2 cm) eine Plastifizierung des Betons auftritt. Deshalb ist die Berücksichtigung der wirklichen Haftverhältnisse schwierig und lohnt sich oft nicht. Vereinfachend kann für die Verteilung der Haftspannungen ein bestimmtes Gesetz angenommen, bei der Berechnung jedoch ein experimentell bestimmter Mittelwert angesetzt werden. So erscheint in der Formel für die Berechnung des Rissabstandes (s. Abschnitt 2.3) eine Konstante  $c_1$ , die von der Verteilung der Haftspannungen  $\tau_{as}$  abhängt. Weiter wird aber gemäss den rumänischen Normen [10] für  $\tau_{as}$  ein Rechteckdiagramm eingeführt.

Die Eigenspannungen wurden vernachlässigt. Ihre Berücksichtigung bereitet aber keine Schwierigkeiten.

### 2.2. Theorie der Rissbildung bei Biegung mit Querkraft

Der Einfachheit halber wird ein in Feldmitte konzentriert belasteter Einfeldbalken mit Rechteckquerschnitt betrachtet. Das Verhältnis  $a/h$  ist genügend gross um den Vorrang des Biegemomentes zu sichern und der Balken ist

so bewehrt, dass ein Biegebruch eintritt (Fig. 1). Die für diesen Lastfall entwickelte Theorie bleibt auch für andere Belastungen gültig.

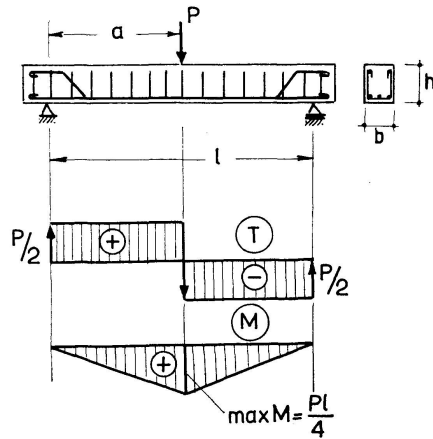


Fig. 1.

Fig. 2a zeigt den Verlauf der in Schrägrissen aufnehmbaren Rissmomente  $M_{fi} = M_{bfi} + M_{afi}$ . Gleichfalls ist die  $M^I$ -Kurve aufgetragen. Sie stellt für bestimmte Werte von  $T$ ,  $\mu$  und  $\mu_t$  den Grenzwert von  $M_z$  dar, bei dem noch keine Schrägrisse auftreten. Bei einem unendlich kleinen Momentenzuwachs erscheint der erste Riss.

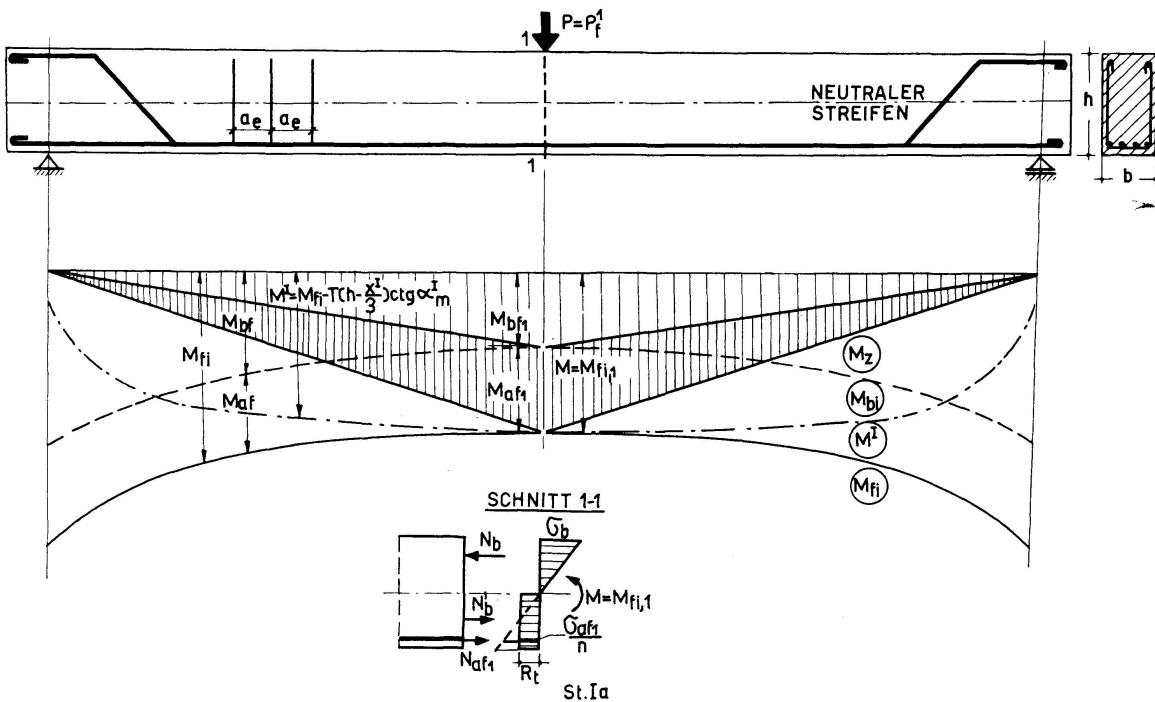


Fig. 2a.

Vor der Rissbildung sind die vom Beton und von der Bewehrung aufgenommenen Spannungen proportional mit den zugehörigen Schnittgrößen und verlaufen in Längsrichtung affin zum  $M_z$ -Diagramm (Stadium I). Steigt die

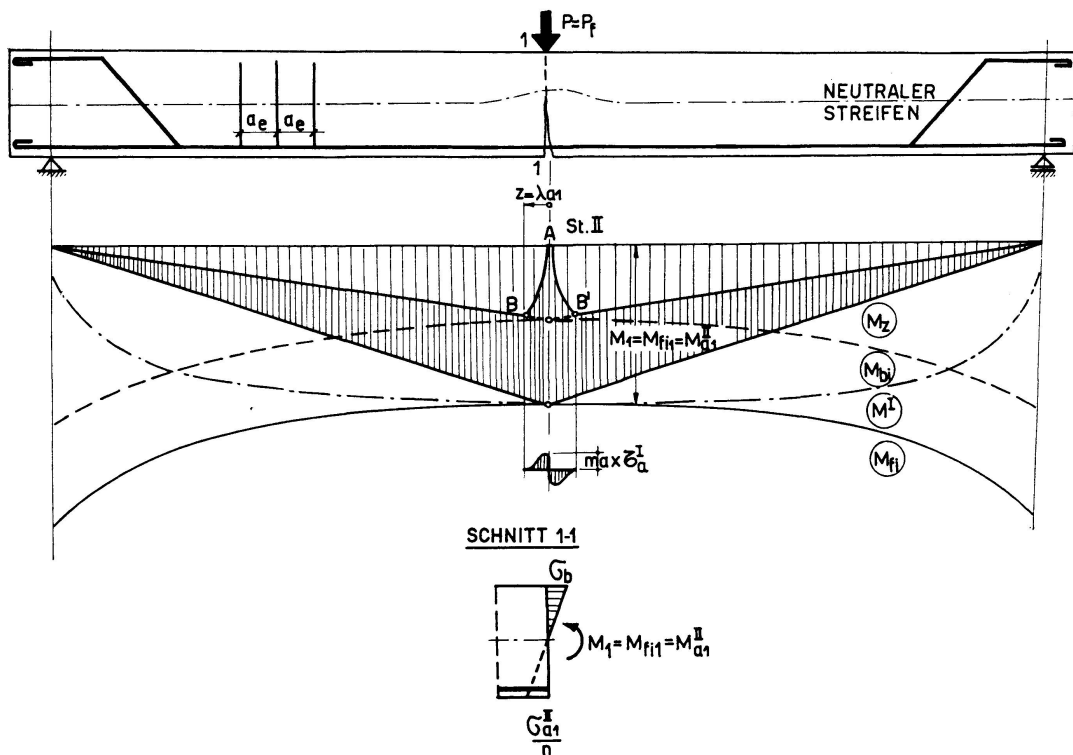


Fig. 2 b.

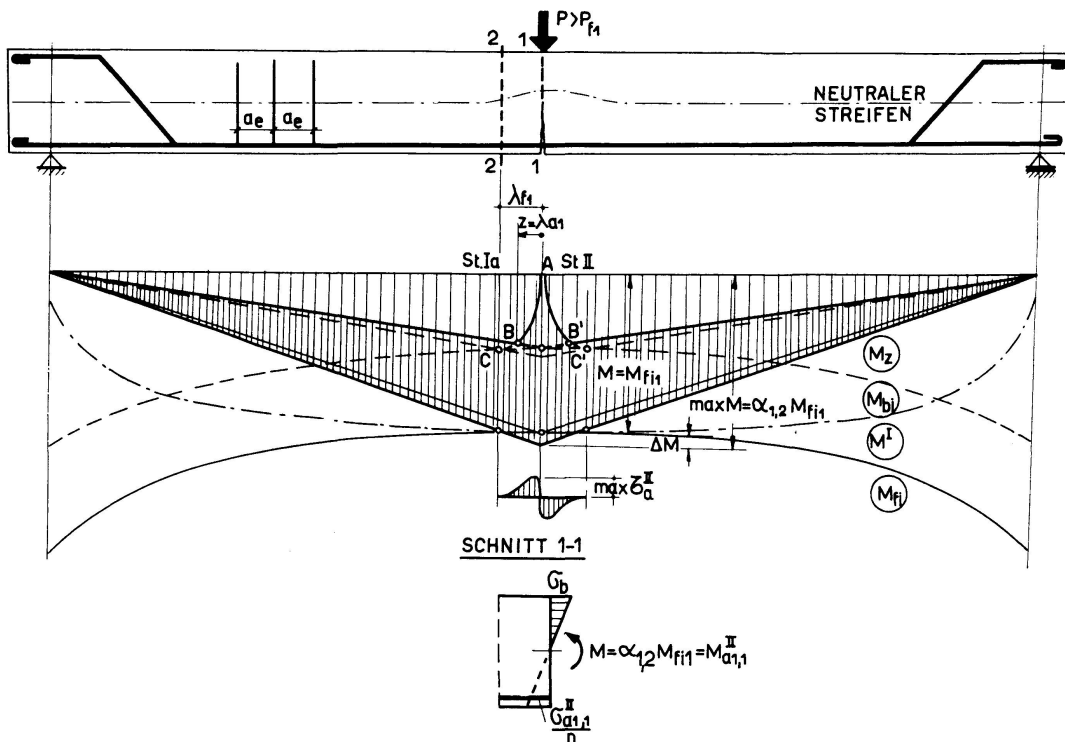


Fig. 2 c.

Last von  $P$  auf  $P_{f1}$ , so dass im Schnitt 1—1 die Betonzugspannung  $\sigma'_b$  den Grenzwert  $R_t$  erreicht, so bildet sich ein Riss. Vor Erscheinen des Risses 1 befindet sich der Querschnitt 1—1 im Stadium Ia, mit:

$$\max M = M_{fi,1} = M_{bfi,1} + M_{afi,1}. \quad (2)$$

Die Figuren 2a und b zeigen die Phasen der Bildung des Risses 1.  $M_{bfi}$  und  $M_{afi}$  stellen die von dem gezogenen Beton bzw. von der Bewehrung aufgenommenen Momentenanteile im Stadium Ia dar. Im Rissquerschnitt wird der gesamte Zug von der Bewehrung aufgenommen.

Der Beton der dem Riss 1 benachbarten Schnitte übernimmt von der Bewehrung durch Haftspannungen einen Teil des Gesamtzuges. So fällt die Stahlspannung bei einem gleichzeitigen Anwachsen der Betonspannungen bis zu  $\sigma'_b < R_t$  in einer Entfernung  $z = \lambda_{a1}$  vom Riss (Zustand I). Im Schnitt 2—2 erhält man den der Bildung von Riss 2 vorangehenden Grenzzustand wenn die Beanspruchung bis zum Grenzwert  $M_{fi,2}$  anwächst. (Dann gilt für die Betonzugspannung  $\sigma'_b = R_t$ , siehe Punkt C in Fig. 2c.)

Wie aus Fig. 2c ersichtlich, tritt dies in einem Abstand  $\lambda_{f,1}$  vom Schnitt 1—1 ein. Gleich vor Erscheinen des Risses 2 gilt für die Last:  $P > P_{f,1}$  und das Biegemoment im Schnitt 1—1 ist von  $M_{fi,1}$  auf  $\max. M = M_{fi,1} + \Delta M_1 = \alpha_{1,2} M_{fi,1}$  angewachsen. Der Schnitt 2—2 befindet sich im Stadium Ia und bei einem unendlich kleinen Zuwachs der Belastung erscheint im Schnitt 2—2 der Riss 2 in Richtung der Hauptdrucklinie.

Dieser Gesetzmässigkeit folgt beim Wachsen der Belastung ein Ansteigen der Zahl der Risse bis auf  $n$  im Gebrauchszustand (Fig. 2d), so dass für den Schnitt 1—1 geschrieben werden kann:

$$\max M = \frac{M_B}{C} = M_G = \alpha_{1,n} M_{fi,1}. \quad (3)$$

Fig. 2d zeigt dass die  $\bar{M}_a^{\text{II}}$ -Linie in bezug auf die  $\bar{M}$ -Linie um eine veränderliche Grösse  $v$  versetzt ist, da es sich um Schrägschnitte handelt [3].

Die Stahlspannung im Stadium II,  $\bar{\sigma}_{a,k}^{\text{II}}$ , im Schrägriss  $k$  beträgt [3]:

$$\bar{\sigma}_{a,k}^{\text{II}} = \frac{\bar{M}_k + \bar{T}_k (h_0 - X_k^{\text{II}}) \operatorname{ctg} \alpha_{m,k}^{\text{II}} - \bar{M}_{at,k}}{A_{a,k} \left( h_0 - \frac{X_k^{\text{II}}}{3} \right)}, \quad (4)$$

wobei:  $\bar{M}_k$  und  $\bar{T}_k$  die Schnittgrössen im Gebrauchszustand sind.

Die Lage der Nulllinie im Stadium II wird nach [4] aus der Gleichung

$$\xi_k^{\text{II}} = \frac{X_k^{\text{II}}}{h_0} = \frac{2\alpha_2 + \alpha_{t2}}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{4}{2\alpha_2 + \alpha_{t2}}} - 1 \right] \quad (5)$$

bestimmt, mit

$$\alpha_2 = n\mu \quad (6)$$

und

$$\alpha_{t2} = n\mu_t \frac{a_t}{h_0} \frac{\sin \beta_t}{\sin \alpha_m^{\text{II}}} \cos(\beta_t - \varphi). \quad (7)$$

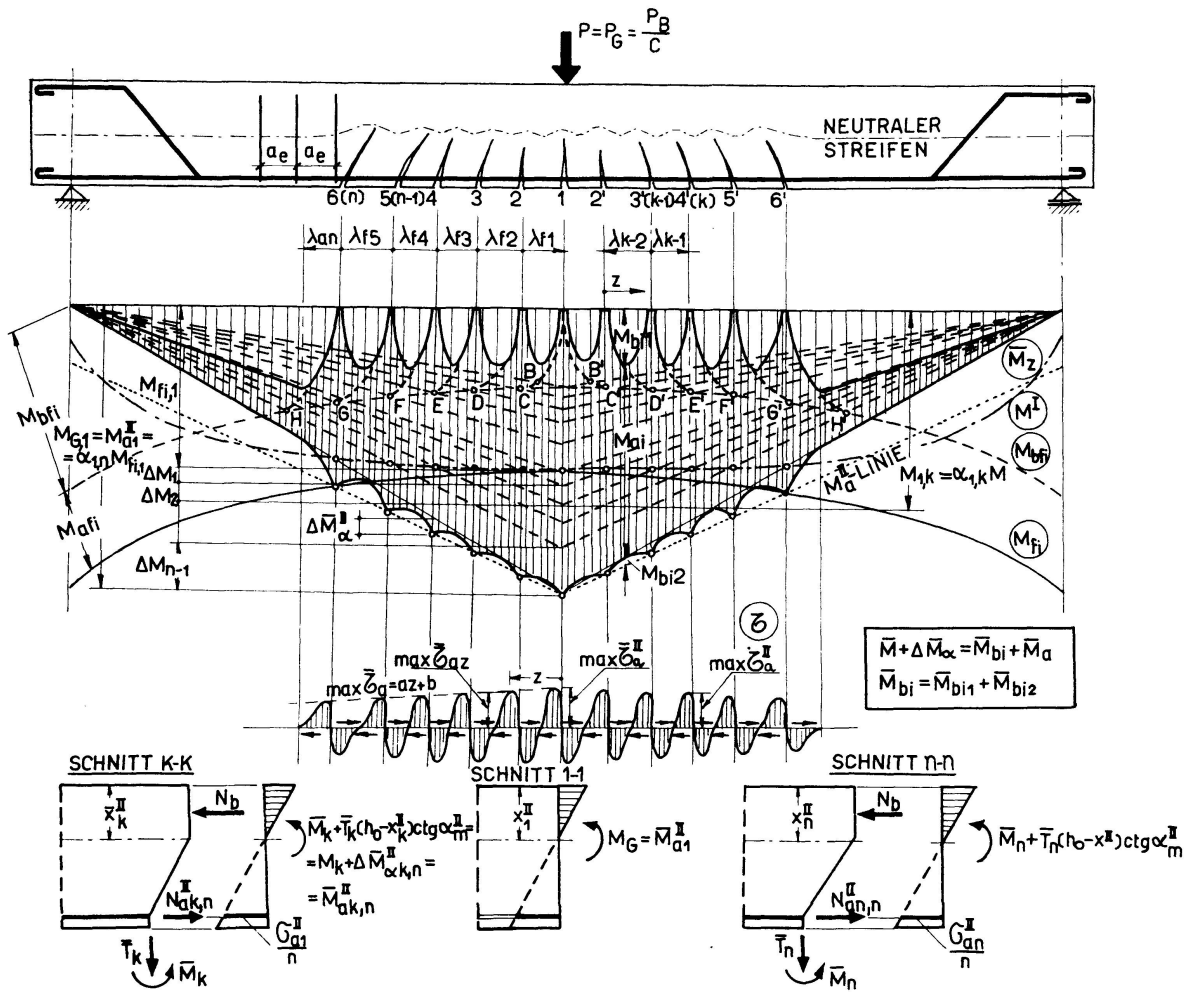


Fig. 2 d.

Die mittlere Rissneigung  $\alpha_{m,k}^{II}$  folgt aus der Beziehung [4]:

$$\operatorname{tg} \alpha_{m,k}^{II} = \frac{h_0 - X_k^{II}}{0,457 h_0 + 0,543 h_0 - X_k^{II} \operatorname{tg} \alpha_{m,k}^I}, \quad (8)$$

wobei die mittlere Neigung im Stadium Ia aus der Gleichung

$$\alpha_m^I = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \quad (9)$$

mit 
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{T h}{M} (0,66 + 2,52 n \mu_1) \quad (10)$$

berechnet wird.

Unter der Gebrauchslast ändert sich im Rissgebiet des Balkens (Fig. 2d) auch die Haftspannung von  $\bar{\tau}_{am,1}^{II}$  im Schnitt 1—1 auf  $\bar{\tau}_{am,n}^I$  für den letzten Riss im Schnitt n—n. Zwischen diesen beiden Werten kann ohne weiteres ein linearer Verlauf der Form

$$\bar{\tau}_{am}^{II} = \bar{\tau}_{am,1}^{II} \left[ \frac{1 - \beta'}{s_n} (s_n - z_k) + \beta' \right] \quad (11)$$

angenommen werden, mit:

$$s_n = \lambda_{f,1} + \lambda_{f,2} + \dots + \lambda_{f,k} + \dots + \lambda_{f,n}, \tag{12}$$

$$z_k = \lambda_{f,1} + \lambda_{f,2} + \dots + \lambda_{f,k}, \tag{13}$$

$$\beta' = \frac{\bar{\tau}_{am,n}^I}{\bar{\tau}_{am,1}^{II}}. \tag{14}$$

Der  $\beta'$ -Wert hängt von der Qualität des Bewehrungsstahls ab, u. zw. können folgende Werte angenommen werden:

$$\begin{aligned} \beta' &= 0,9 \text{ für Rundstahl (OB 38),} \\ \beta' &= 0,65 \text{ für Profilstahl (PC).} \end{aligned}$$

### 2.3. Rissabstand

Die Berechnung erfolgt für einen Riss  $k + 1$ , es wird also  $\lambda_k$  (Fig. 3) bestimmt. Im Schrägriss  $k + 1$  sind im Stadium Ia die Betonzugzone und die Bewehrung aktiv. Es gilt:

$$M_{k+1} + T_{k+1} \left( h - \frac{X_{k+1}^I}{3} \right) \operatorname{ctg} \alpha_{m,k+1}^I = M_{fi,k+1} = M_{bfi,k+1} + M_{afi,k+1} \tag{15}$$

mit: 
$$M_{bfi,k+1} = \frac{A_{bt}}{\sin^2 \alpha_{m,k+1}^I} z_{b,k+1}^I R_t \tag{16}$$

und: 
$$M_{afi,k+1} = 2 n R_t A_a \frac{z_a^I}{\sin \alpha_{m,k+1}^I}. \tag{17}$$

Der Wert  $M_{bfi,k+1}$  kann auch in der Form:

$$M_{bfi,k+1} = u \int_0^{\lambda_{f,k}} z \tau_{as} ds \tag{18}$$

angeschrieben werden.

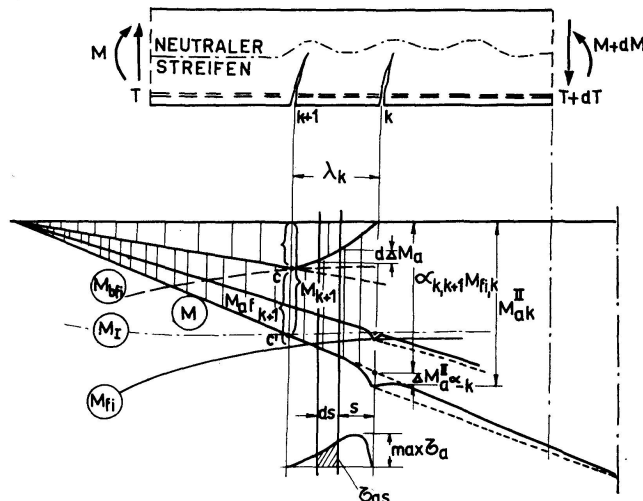


Fig. 3.

Werden die Beziehungen (16) und (18) gleichgesetzt, die Spannung  $\tau_{as}$  als Funktion des Höchstwertes der Haftspannung  $\max \tau_a$  ausgedrückt

$$\tau_{as} = \max \tau_a f\left(\frac{s}{\lambda_{f,k}}\right) \quad (19)$$

und die Bezeichnung  $\varphi_k = \frac{s}{\lambda_{f,k}}$ , also  $ds = \lambda_{f,k} d\varphi_k$  eingeführt, so erhält man

$$\lambda_{f,k} = c_1 \frac{A_{bt}}{\sin^2 \alpha_{m,k+1}^I} \frac{z_{b,k+1}^I}{u z_{a,k}^{II}} \frac{R_t}{\max \tau_a}. \quad (20)$$

Der Koeffizient  $c_1$  hängt vom Verlauf der Haftspannung  $\tau_{as}$  ab und wird aus der Beziehung:

$$c_1 = \frac{1}{\int_0^1 f(\varphi_k) d\varphi_k} \quad (21)$$

berechnet.

Wird für  $\tau_{as}$  ein rechteckiges Diagramm im Einklang mit den rumänischen Vorschriften [10] und für das Verhältnis  $\frac{z_{b,k+1}^I}{z_{a,k}^{II} \sin \alpha_{m,k+1}^I}$  der Mittelwert 0,85 angenommen, so ergibt sich mit der Bezeichnung:

$$\beta_f = 0,85 \frac{R_t}{\omega_1 \max \tau_a} \quad (22)$$

die Formel für die Berechnung des Rissabstandes:

$$\lambda_{f,k} = \beta_f \frac{A_{bt,k+1}}{\sin \alpha_{m,k+1}^I}, \quad (23)$$

wobei

$$A_{bt,k+1} = b(h - X_{k+1}^I) \quad (24)$$

ist.

Der Wert  $X^I$  kann nach [5] berechnet werden:

$$\xi_{k+1}^I = \frac{X_{k+1}^I}{h} = \frac{2n\mu_1 \delta \sin \alpha_m^I + 1 - \frac{T}{2bhR_t} \sin 2\alpha_m^I}{2n\mu_1 \sin \alpha_m^I + 2 - \frac{T}{2bhR_t} \sin 2\alpha_m^I}. \quad (25)$$

Der Koeffizient  $\beta_f$  ist eine variable Grösse und hängt von dem Verhältnis  $\frac{R_t}{\max \tau_a}$  ab, das vom Durchmesser der Bewehrungsstäbe, von der Betondeckung, der Staboberfläche und einigermaßen von der Betongüte bestimmt wird.

Der Wert  $\beta_f$  wurde auf Grund eigener Versuche [4] wie auch der Versuche anderer Forscher [6] bestimmt. Dabei wurde festgestellt, dass er so angenommen werden kann wie es in den rumänischen Normen [10] für reine Biegung vorgeschrieben ist, nämlich:

— für Rundstahl (OB-38)  $\beta_f = 0,5 + 30 \frac{\mu}{d},$  (26)

— für Profilstahl (PC)  $\beta_f = 0,35 + 30 \frac{\mu}{d}.$  (27)

Die Beziehung (23) wird folgendermassen praktisch verwendet. Bei symmetrischer Belastung erscheint der erste Riss in Balkenmitte. Um die Entfernung  $\alpha_{f,1}$  in der der zweite Riss auftritt zu bestimmen, muss die mittlere Neigung dieses Risses  $\alpha_{m,2}^I$  bekannt sein. Sie wird durch stufenweise Annäherung berechnet. Als Ausgangswert wird  $\alpha_{m,2}^I = \alpha_{m,1}^I = 90^\circ$  angenommen und  $\lambda_{f,1}$  bestimmt. Diesem Wert entspricht ein anderes  $\alpha_{m,2}^I$ , das zur zweiten Annäherung dient.

Bei der Berechnung der anderen  $\lambda_{f,k}$ -Werte werden folgende Ausgangsgrößen benützt: für  $\lambda_{f,2}$  das dem Schnitt  $z_3 = 2\lambda_{f,1}$  entsprechende  $\alpha_{m,3}^I$ , für  $\lambda_{f,3}$  das dem Schnitt  $z_4 = \lambda_{f,1} + 2\lambda_{f,2}$  zugehörige  $\alpha_{m,4}^I$  und im allgemeinen für  $\lambda_{f,k}$  der dem Schnitt  $z_{k+1} = \lambda_{f,1} + \lambda_{f,2} + \dots + 2\lambda_{f,k-1}$  entsprechende Wert  $\alpha_{m,k+1}^I$ .

Gewöhnlich genügt die erste Annäherung, da die wirkliche Rissneigung wenig von der angenommenen abweicht (maximale Abweichung: 2%).

2.4. Rissweite unter Gebrauchslasten

Fig. 4 zeigt den Verlauf der Stahldehnungen  $\epsilon_a^{II}$  und  $\epsilon_{am}$  für den auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Balken im Stadium II.

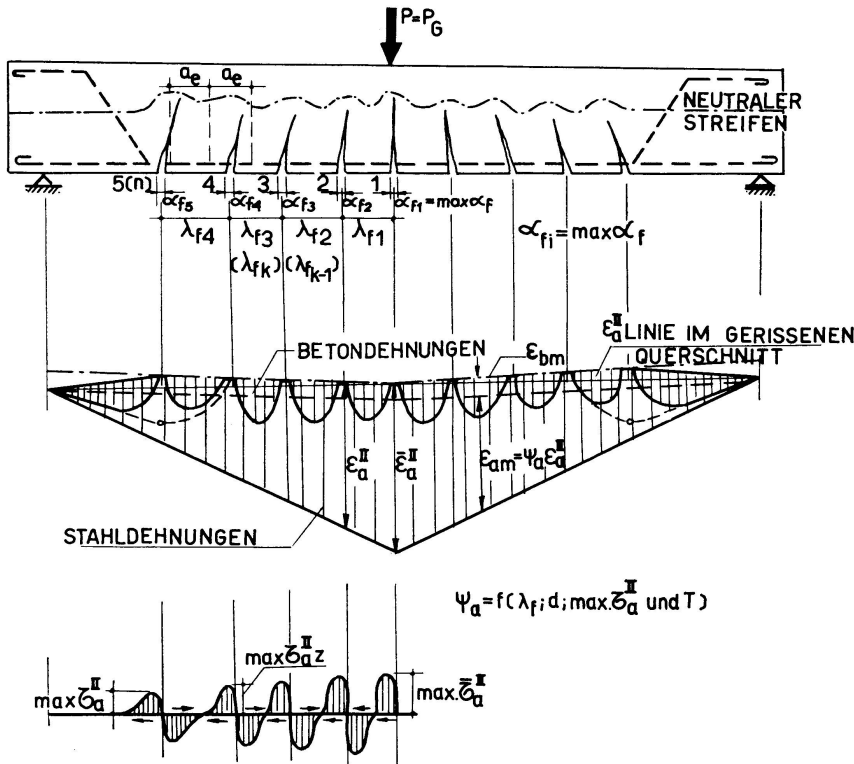


Fig. 4.

Die Rissweite wird getrennt für einen beliebigen Riss ( $k$ ), für den Riss in Balkenmitte (1) und für den letzten Riss ( $n$ ), der unter der Gebrauchslast auftritt, bestimmt.

Im allgemeinen wird die Rissweite von der Bedingung abgeleitet dass die Summe von Rissweite und Dehnung des benachbarten Betons gleich sei mit der Stahldehnung über die gleiche Länge.

a) Rissweite für einen beliebigen Riss ( $k$ )

$$\alpha_{f,k} = \frac{1}{2} (\epsilon_{am,k} - \epsilon_{tm,k}) (\lambda_{f,k} + \lambda_{f,k-1}). \quad (28)$$

Bei Vernachlässigung der elastischen Verformungen des Betons zwischen den Rissen und mit der Bezeichnung

$$\psi_{a,k} = \frac{\epsilon_{am,k}}{\bar{\epsilon}_{a,k}^{\text{II}}}, \quad \bar{\epsilon}_{a,k}^{\text{II}} = \frac{\bar{\sigma}_{a,k}^{\text{II}}}{E_a} \quad (29)$$

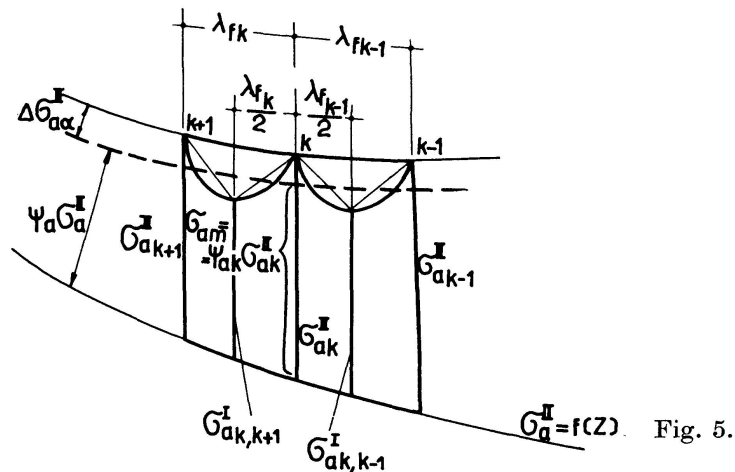
erhält man:

$$\alpha_{f,k} = \psi_{a,k} \frac{\bar{\sigma}_{a,k}^{\text{II}}}{E_a} \frac{1}{2} (\lambda_{f,k} + \lambda_{f,k-1}), \quad (30)$$

wobei  $\psi_{a,k}$  das Zusammenwirken zwischen dem gezogenen Beton und der Bewehrung berücksichtigt.

Für die Bestimmung der Werte von  $\psi_{a,k}$  wird der tatsächliche Verlauf von  $\bar{\sigma}_a^{\text{II}}$  (Fig. 5) durch einen polygonalen ersetzt. So kann geschrieben werden:

$$\psi_{a,k} = \frac{\bar{\sigma}_{a,k}^{\text{II}} + \bar{\sigma}_{am,k}^{\text{I}}}{2 \bar{\sigma}_{a,k}^{\text{II}}}. \quad (31)$$



Nach einigen Umformungen erhält man:

$$\psi_{a,k} = 1 - \beta \frac{A_{bt}}{A_a} \frac{R_t}{\bar{\sigma}_{a,k}^{\text{II}}}. \quad (32)$$

In der Gleichung (32) wurde die Bezeichnung:

$$\bar{\beta} = \frac{0,85}{4} \frac{\bar{\tau}_{am,k}^{\text{II}}}{\bar{\tau}_{am,k}^{\text{I}}} \quad (33)$$

benützt. Für den Wert  $\bar{\beta}$  wurden auf Grund der Versuche folgende Gleichungen aufgestellt:

— für Rundstahl (OB 38)

$$\bar{\beta} = 0,2 (1 - 0,6 V) \left[ \frac{0,1}{s_n} (s_n - z_k) + 0,9 \right], \quad (34)$$

— für Profilstahl (PC)

$$\bar{\beta} = 0,3 (1 - 0,5 V) \left[ \frac{0,38}{s_n} (s_n - z_k) + 0,65 \right] \quad (35)$$

mit den Bezeichnungen:

$$s_n = \lambda_{f,1} + \lambda_{f,2} + \dots + \lambda_{f,k} + \dots + \lambda_{f,n}, \quad (36)$$

$$z_k = \lambda_{f,1} + \lambda_{f,2} + \dots + \lambda_{f,k} \quad (37)$$

und  $V$  das Verhältnis zwischen der Dauerlast und der Gesamtlast.

#### b) Rissweite für den Riss in Balkenmitte (1)

$$\alpha_{f,1} = \psi_{a,1} \frac{\bar{\sigma}_{a,1}^{\text{II}}}{E_a} \lambda_{f,1} \quad (38)$$

Die Grössen  $\psi_{a,1}$  und  $\bar{\beta}$  werden aus den Beziehungen (32), (34) und (35) bestimmt.

#### c) Rissweite für den letzten Riss ( $n$ )

Die Weite dieses Risses hat den kleinsten Wert und kann aus der Beziehung:

$$\alpha_{f,n} = \psi_{a,n} \frac{\bar{\sigma}_{a,n}^{\text{II}}}{E_a} \left( \lambda_{a,n} + \frac{1}{2} \lambda_{f,n-1} \right) \quad (39)$$

wobei  $\lambda_{a,n}$  die aktive Länge der Bewehrung in der Nachbarschaft des letzten Risses darstellt (Fig. 6), bestimmt werden.

Aus Fig. 6a ist ersichtlich, dass der Wert  $\lambda_{a,n}$  durch Gleichsetzen des Abfalls der Beanspruchung  $\Delta M_a$  auf der Länge  $\lambda_{a,n}$  mit dem  $M_{b,c}$ -Wert im Stadium I bestimmt werden kann.

$$\Delta M_a = M_{b,c}^{\text{I}} \quad (40)$$

Dabei sind:

$$\Delta M_a = \int_0^{\lambda_{a,n}} z \tau_{as} ds \cong u \lambda_{a,n} z_{a,n}^{\text{II}} \omega_1 \max \tau_a \quad (41)$$

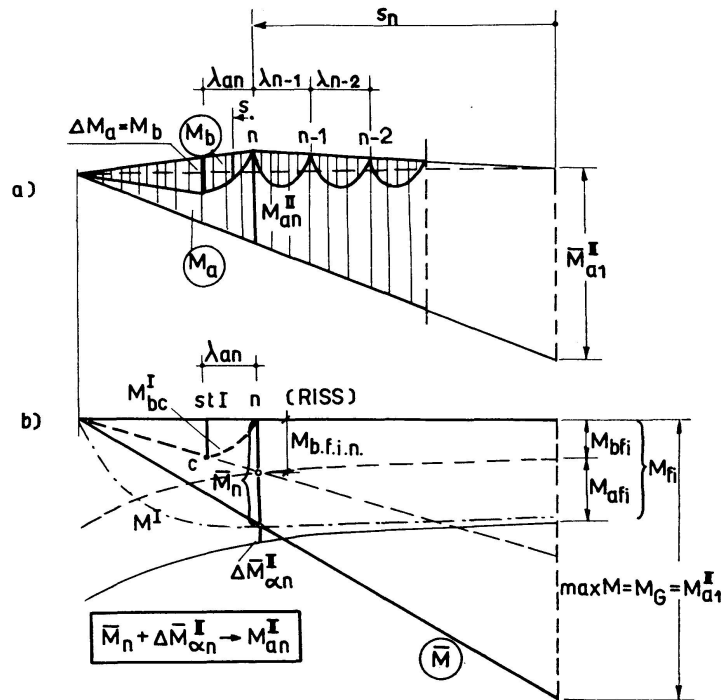


Fig. 6.

und  $M_{b,c}^I$ , für den Fall eines linearen Momentenverlaufs:

$$M_{b,c}^I = \frac{M_{bfi,n}}{l} \left( \frac{l}{2} - s_n - \lambda_{a,n} \right). \quad (42)$$

Wird in (42)  $M_{bfi,n}$  ersetzt und anschliessend (42) und (41) in (40) eingesetzt, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\lambda_{a,n} = \frac{\lambda_{f,n-1} - \left( \frac{l}{2} - s_n \right)}{\lambda_{f,n-1} + \left( \frac{l}{2} - s_n \right)}, \quad (43)$$

mit: 
$$\lambda_{f,n-1} = \beta_f \frac{A_{bt}}{\sin \alpha_{m,n}^I}. \quad (44)$$

Auf gleiche Weise erhält man für eine gleichförmig verteilte Last:

$$\lambda_{a,n} = \frac{\frac{l}{2} - s_n}{2\lambda_{f,n-1}} \left[ \sqrt{\left( \frac{l}{2} - s_n \right)^2 + 4\lambda_{f,n-1}^2} - \left( \frac{l}{2} - s_n \right) \right]. \quad (45)$$

Der Wert  $\psi_{a,n}$  wird genauso wie  $\psi_{a,k}$  bestimmt:

$$\psi_{a,n} = \frac{1}{2} \left( \frac{7}{8} + \frac{\bar{\sigma}_{a,n-1}^{II}}{4\bar{\sigma}_{a,n}^{II}} + \frac{n}{2} \bar{\gamma} \frac{W_{a,n}^{II}}{W_{b,id}} - \beta \frac{A_{bt}}{A_a} \frac{R_t}{\bar{\sigma}_{a,n}^{II}} \right). \quad (46)$$

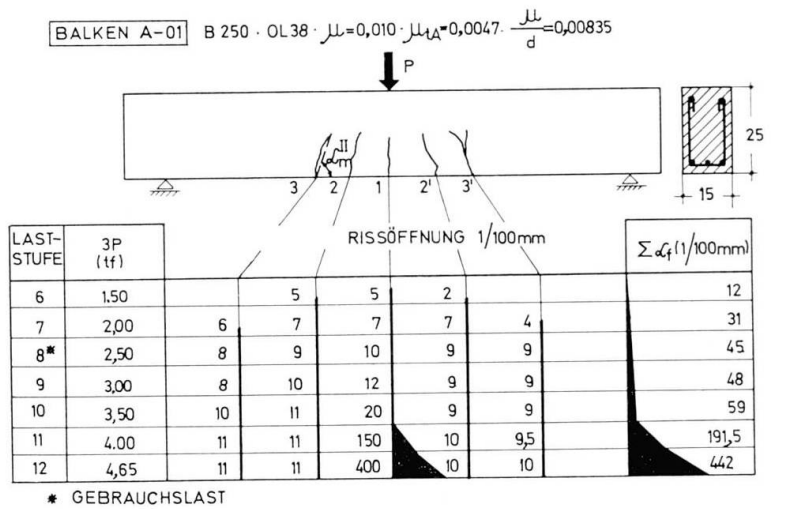
Die Art der Belastung wird durch  $\bar{\gamma}$  erfasst, bzw. gilt:

— für eine Einzellast in Feldmitte:

$$\bar{\gamma} = 1 - \frac{2\lambda_{a,n}}{l}, \tag{47}$$

— für eine gleichförmig verteilte Last:

$$\bar{\gamma} = 1 - \left(\frac{2\lambda_{a,n}}{l}\right)^2. \tag{48}$$



St. Ia RISSBILDUNGSZUSTAND

M <sub>f</sub> (tfm)	VERSUCH	1,0	0,8	0,81	0,9	1,0
	THEORETISCH [4]	1,049	0,885	0,75	0,885	1,049
	$\Delta\%$	- 4,6	- 9,6	+ 8,0	+ 1,7	- 4,6

St. II GEBRAUCHSZUSTAND C-1β

$\alpha_{\text{m}}^{\text{II}}$ (Grade)	VERSUCH	70°	72°	87°	81°	65°
	THEORETISCH [4]	60°	61°30'	90°	61°30'	60°
	$\Delta\%$	+ 16,6	+ 18,1	- 3,3	+ 31,5	+ 8,3

$\lambda_f$ (cm)	VERSUCH	13,5	11,6	13,0	12,8	
	THEORETISCH [GL-16]	13,05	12,65	12,65	13,05	
	$\Delta\%$	+ 3,5	- 8,3	+ 2,8	- 1,9	

$M_G = \frac{MB}{C} = 1,29 \text{ tfm}$

$G_0^{\text{II}}$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	THEORETISCH [GL-3]	1590	1810	1875	1810	1590
	VERSUCH	8	9	10	9	9
	THEORETISCH [GL-21]	7,04	9,45	9,85	9,45	7,04
	$\Delta\%$	+ 13,6	- 4,8	- 1,5	- 4,8	+ 27,8

St. III BRUCHZUSTAND

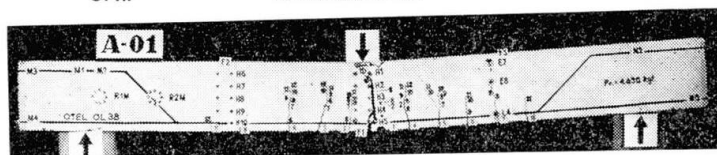


Fig. 7 a.

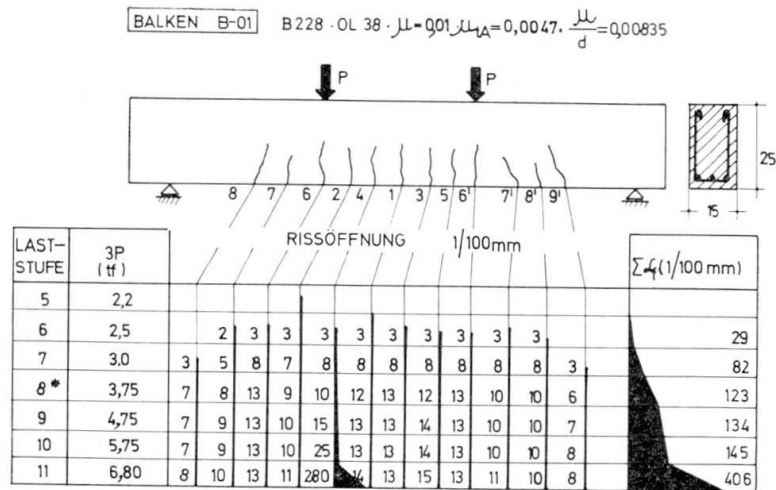
Weiter sind:

$$W_{a,n}^{II} = A_a z_{a,n}^{II}, \tag{49}$$

$$W_{b,id} = \frac{I_{b,id}}{Y_{bt}} \tag{50}$$

und  $\beta$  folgt aus (34) und (35) mit  $s_n = z_k$ .

\* \* \*



\* GEBRAUCHSLAST

RISSBILDUNGSZUSTAND

St. Ia		GEBRAUCHSZUSTAND C = 1,8				
M <sub>f</sub> (tfm)	VERSUCH	1,25	0,9	← 0,7	→ 0,95 1,0 1,2	
	THEORETISCH [4]	1,21	0,88	← 0,73	→ 0,88 1,21 -	
	Δ%	+3,3	+2,3	+2,7	+8,0 -17,4 -	
α <sub>m</sub> <sup>II</sup> GRADE	VERSUCH	64°	72°	← M = konst-90°	→ 60° 55°	
	THEORETISCH [4]	56°	58°	← 90°	→ 58° 56°	
	Δ%	+14,3	+24,2	± 0,00	+3,5 -1,8	
λ <sub>f</sub> (cm)	VERSUCH			← λ <sub>fm</sub> = 11,7	→	
	THEORETISCH [GL-16]	14,1	13,3	← λ <sub>fm</sub> = 12,25	→ 13,3 14,1	
	Δ%			-4,5		
C <sub>d</sub> <sup>II</sup> (kgf/cm <sup>2</sup> )	THEORETISCH [GL-3]	1355	1720	← 1825	→ 1720 1355 -	
	VERSUCH	7	8	13	← α <sub>tm</sub> 11,2	→ 13 10 10 6
L <sub>f</sub> (1/100) mm	THEORETISCH [GL-21]	6,5	10	11,3	← α <sub>fm</sub> = 10,9	→ 11,3 10 6,5 -
	Δ%	+7,7	-20,0	+15	← 2,8	→ +15 0 +54 -

St. III! BRUCHZUSTAND

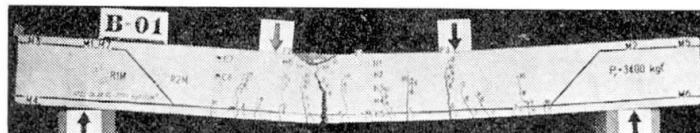
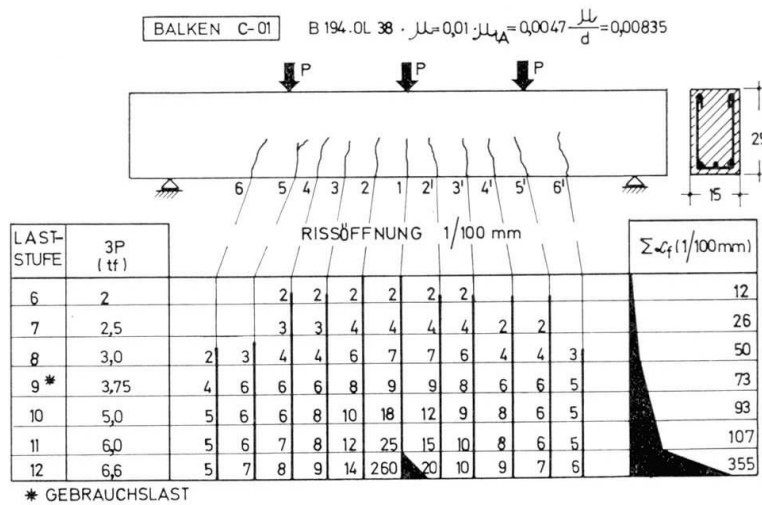


Fig. 7b.

Aus den obigen Ausführungen ist es ersichtlich, dass die Rissweite unter Gebrauchslast über die Länge des Balkens unterschiedlich ist, u. zw. im allgemeinen am grössten in Feldmitte und am kleinsten im Schnitt *n*. Um die so berechneten Rissweiten mit den Normwerten vergleichen zu können wird der Mittelwert gebildet, der folgender Beziehung genügen muss:

$$\alpha_{fM} \leq \text{zul } \alpha_f \tag{51}$$



St. I-a RISSBILDUNGSZUSTAND

M <sub>f</sub> (tfm)	VERSUCH	1,0	1,0	0,83	0,83	0,665	0,665	0,665	0,83	0,83	1,0	
	THEORETISCH [4]	1,08	0,97	0,827	0,80	0,745	0,695	0,745	0,80	0,827	0,97	1,08
	Δ%	-7,4	+3,1	+0,4	+3,8	-10,7	-4,3	-10,7	+3,8	+0,4	-16,5	-7,4

St. II GEBRAUCHSZUSTAND C=1,8

λ <sub>m</sub> <sup>II</sup> (GRADE)	VERSUCH	60°	75°	80°	80°	87°	90°	90°	85°	85°	75°	62°30'
	THEORETISCH [4]	55°30'	73°30'	76°	79°	80°30'	90°	80°30'	79°	76°	73°30'	55°30'
	Δ%	+8,1	+2,0	+5,3	+1,3	+8,1	0	+11,8	+7,6	+11,8	+2,0	+12,6
λ <sub>f</sub> (cm)	VERSUCH	12,7	12	12	11	11,2	10,2	11,7	10,2	13,0	12,7	
	THEORETISCH [GL. 16]	13,65	12,7	12,45	12,38	12,05	12,05	12,18	12,45	12,7	13,65	
	Δ%	-0,7	-5,5	-3,6	-9,7	-7,1	-15,4	-3,9	-18,1	-2,4	-7,0	
σ <sub>d</sub> <sup>II</sup> (kgf/cm <sup>2</sup> )	THEORETISCH [GL. 3]	1260	1495		1710		1710		1495		1260	
			1390		1605		1795		1605		1390	
α <sub>f</sub> (1/100) mm	VERSUCH	4	6	6	6	8	9	9	8	6	6	5
	THEORETISCH [GL. 21]	5,35	7,5	7,9	8,4	8,85	9,3	8,85	8,4	7,9	7,5	5,35
	Δ%	-25,2	-20	-24	-28,6	-9,6	-3,2	+1,7	-4,8	-24	-20	-4,8

M<sub>G</sub> =  $\frac{M_B}{C} = 1,22 \text{ tfm}$

St. III BRUCHZUSTAND

Fig. 7c.

In den Fig. 7a—7d sind für vier Balken mit verschiedener Belastung die Rissbilder, die Bruchbilder, die gemessenen Rissweiten wie auch die berechneten Rissabstände und Rissweiten angegeben.

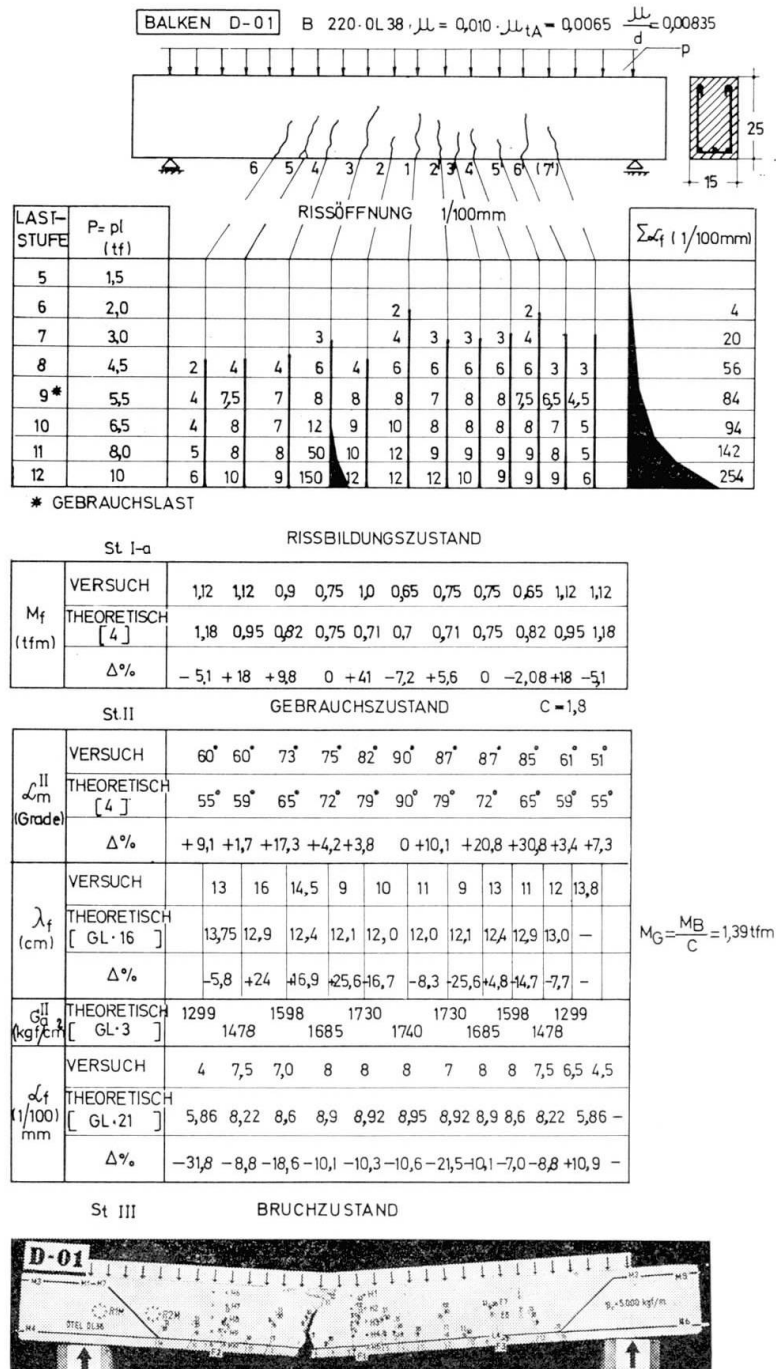


Fig. 7 d.

### 3. Schlussfolgerungen

Die theoretischen Ausführungen können zusammen mit den Versuchsergebnissen einige Klärungen bezüglich der Rissbildung bei Stahlbetonbalken mit Biegung und Querkraft bringen. Davon seien erwähnt:

1. Bei Biegung mit Querkraft hängt der Rissabstand und die Rissweite von der Gestaltung des Balkens (Art der Bewehrung, Verhältnis  $\frac{M}{T h_0}$  usw.) ab.

2. Die Kennwerte  $\lambda_f$  und  $\alpha_f$  für Balken mit Biegebruch können nicht mit den entsprechenden Formeln für reine Biegung bestimmt werden, wie dies von den gültigen Vorschriften [6], [10], [11] und [12] zugelassen wird, da die erhaltenen Werte im allgemeinen von Versuchen nicht bestätigt sind. Die in diesem Aufsatz abgeleiteten Gleichungen (23), (30), (38) und (39) liefern, mit einer mittleren Abweichung von  $\pm 15\%$ , zuverlässige Vergleichswerte.

3. Die Untersuchungen ergaben, dass der Rissabstand hauptsächlich von folgenden Parametern abhängt:

- Durchmesser der Zugbewehrung;
- Prozentsatz der Längs- und Querbewehrung;
- Oberflächenbeschaffenheit der Bewehrungsstäbe;
- Verhältnis  $\frac{M}{T h_0}$  (das die Lage und die mittlere Neigung der Risse bestimmt);
- Betondeckung;
- Belastungsschema;
- Betonqualität.

4. Die Rissweite wird von den obigen Parametern, zu welchen die folgenden hinzukommen, bestimmt:

- Art der Belastung (kurzzeitig statisch, dynamisch usw.);
- Stahlspannung in der Längsbewehrung ( $\sigma_a^{\text{II}}$ ) wie auch in der Querbewehrung ( $\sigma_{at}^{\text{II}}$ );
- Stahlqualität.

5. Ist die Bedingung:

$$T \leq b h_0 R_t \quad (43)$$

erfüllt und das Verhältnis  $\frac{\mu}{d}$  grösser als die in Tafel 1 angegebenen Werte, so ist es nicht notwendig den Grenzzustand der Rissöffnung zu berücksichtigen, ausgenommen die Fälle wenn Impermeabilität verlangt wird.

Tafel 1

Stahlqualität	zul $\alpha_f = 0,1$ mm	zul $\alpha_f = 0,2$ mm	zul $\alpha_f = 0,3$ mm
OB-38	0,5	0,4	0,3
PC	0,55	0,45	0,35

**Bezeichnungen**

$A_a$	Querschnitt der Längszugbewehrung.
$a$	Abstand vom Schwerpunkt der Zugbewehrung zum Zugrand des Balkens.
$a_t$	Abstand zwischen den Stäben der Querbewehrung, längs der Balkenachse gemessen.
$b$	Breite des Querschnitts.
$d$	Durchmesser der Längsbewehrung.
$E_a$	Elastizitätsmodul des Stahls.
$E_b$	Elastizitätsmodul des Betons.
$h$	Balkenhöhe.
$h_0 = (h - a')$	Nutzhöhe.
$M_z$	Biegemoment.
$M_{fi}$	Aufnehmbares Rissmoment im Schrägschnitt.
$M_a; M_a^{II}$	Momentenanteil der Zugbewehrung im allgemeinen bzw. im Risschnitt, Stadium II.
$M_{at}$	Momentenanteil der Querbewehrung nach der Rissbildung.
$n = \frac{E_a}{E_b}$	Verhältnis der $E$ -Moduli von Stahl und Beton.
$R_t = 3,5 \frac{M}{b h^2}$	Betonzugfestigkeit.
$T_z$	Querkraft.
$u$	Umfang der Zugstäbe.
$W_{id}$	Ideeller Widerstandsmodul des Betonquerschnitts bezogen auf die Zugfaser des Querschnitts (im Stadium I).
$W_a^{II} = A_a Z_a^{II}$	Widerstandsmodul der Längsbewehrung im Stadium II.
$X; X^I; X^{II}$	Höhe der Betondruckzone im allgemeinen, im Stadium I und im Stadium II.
$z^{II}$	Hebelarm der inneren Kräfte im Stadium II.
$z$	Abszisse eines beliebigen Querschnitts.
$\alpha_m; \alpha_m^I; \alpha_m^{II}$	Mittlere Neigung der Risse im allgemeinen, bei ihrem Auftreten (im Stadium Ia), beziehungsweise im Stadium II.
$\alpha_f$	Rissweite in der Höhe der Zugbewehrung.
$\beta_f; \bar{\beta}$	Unterschiedliche Koeffizienten für die Berechnung von $\lambda_f$ und $\alpha_f$ .
$\beta_t$	Neigung der Zugresultante für die Querbewehrung.
$\delta = \frac{h_0}{h}$	Bezogene Nutzhöhe des Balkenquerschnittes.
$\lambda_f$	Rissabstand bei Biegung mit Querkraft.
$\lambda_a$	Aktive Länge der Bewehrung beim Auftreten der geneigten Risse bei Biegung mit Querkraft.
$\omega_1$	Vollheitsgrad des $\tau_a$ -Diagramms.

$\psi_a$	Koeffizient der das Zusammenwirken des Zugbetons und der Zugbewehrung zwischen den Rissen kennzeichnet.
$\varphi$	Neigung der Schrägrissnormalen.
$\mu = \frac{A_a}{b h_0}; \mu_1 = \frac{A_a}{b h}$	Bewehrungsgrade der Längsbewehrung.
$\sigma'_b$	Betonzugspannung.
$\sigma_a; \sigma_a^I; \sigma_a^{II}$	Zugspannung in der Längsbewehrung im allgemeinen, im Stadium I, im Stadium II.
$\tau_{as}; \tau_{am}$	Haftspannung im Schnitt mit der Abszisse $s$ ; Mittelwert der Haftspannung.
$\tau_{am}^{II}; \tau_{am}^{II}$	Mittlere Haftspannung im Stadium II, beziehungsweise im Gebrauchszustand.

### Literatur

1. C. AVRAM: Curs de beton armat partea II-a. Calculul și alcătuirea elementelor de constructii, Litografia Invățămîntului Timișoara, 1955.
2. C. AVRAM, I. DEUTSCH, I. FILIMON, A. MIHĂESCU ș. a.: Espacement et ouverture des fissures des éléments prismatiques en béton armé soumis à la torsion pure, Documentation préliminaire, 11e Session plénière CEB Bruxelles, Octobre 1966.
3. I. DEUTSCH: Contribuții la studiul fisurării elementelor de beton armate sollicitate la încovoiere cu forță tăietoare (Teză de doctorat) I.P.T., 1970.
4. I. DEUTSCH: Contributions to the analysis of cracking in reinforced concrete members subjected to bending an Shear. CEB, Commission «Effort Tranchant» Paris, Mars, 1971.
5. I. DEUTSCH: Teoria formării și apariției fisurilor înclinate la elementele de beton armat sollicitate la încovoiere cu forță tăietoare. Buletinul IPT, seria Construcții, nr. 2, 1970.
6. F. LEONHARDT: Rapport sur la Proposition de modification du chapitre R.4-22 «Effort Tranchant des Recommandations Internationales Unifiées CEB». Documentation préliminaire 11e Session plénière CEB, Bruxelles, Octobre 1966.
7. H. LOSSIER und I. FAURY: La fissuration du béton armé Paris, Annales I.T.B.T.P., 1944, mars.
8. R. L'HERMITE: Le comportement du béton autour des armatures. Paris, Annales I.T.B.T.P., 1944, mars.
9. M. M. ADAM: Fissuration des réservoirs en béton armé. Paris, Annales I.T.B.T.P., 1963, mai-juin.
10. STAS 8000 – 1967 București.
11. NITU 3 – 49 Moscova.
12. DIN 1045.
13. CP 114.

### Zusammenfassung

Die Arbeit behandelt die Theorie der Rissbildung und -öffnung unter Gebrauchslasten, für den Fall der auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Stahlbetonbauteile. Ausgehend von der allgemeinen Theorie der Rissbildung, von Ergebnissen eigener Versuche und den Untersuchungen verschiedener Forscher, werden Formeln aufgestellt, die dann anzuwenden sind, wenn ein Biegebruch vorauszusehen ist. Bauteile, die durch Schubbruch versagen, werden in einer anderen Arbeit behandelt.

Der Rissabstand und die Rissweite im Gebrauchszustand können mit genügender Genauigkeit aus den Formeln (23), (30), (38) und (39) berechnet werden. Auf Grund der theoretischen und Versuchsergebnisse konnten die Empfehlungen im Absatz «Schlussfolgerungen» gegeben werden.

### Summary

The theory of formation, outset and width of cracks under service loads in reinforced concrete members subjected to bending and shear, is analysed in this paper. Design relationships for reinforced concrete members subjected to bending and shear (provided failure occurs by bending) are derived, based on the general theory of formation and outset of cracks and on the author's experimental results. The case when failure occurs by shear will form the subject of a further paper.

The spacing and width of cracks under service loads can be determined with sufficient accuracy by using relationships (23), (30), (38) and (39). A set of recommendations for practical design, based on the author's theoretical and experimental results, is given in the chapter entitled "Conclusions".

### Résumé

L'article est consacré à la théorie de la formation, apparition et largeur des fissures dans les éléments en béton armé, sollicités à la flexion à effort tranchant, soumises aux charges de service. Sur la base de la théorie générale de la formation et apparition des fissures, compte tenu aussi des résultats expérimentaux obtenus par l'auteur, on déduit des formules pour le calcul pratique des éléments en béton armé sollicités à la flexion à effort tranchant (en supposant que la ruine se produise par flexion). Le cas où la ruine est causée par l'effort tranchant fera l'objet d'un article ultérieur.

L'espacement et la largeur des fissures sous les charges de service peuvent être déterminés avec une précision suffisante à l'aide des formules (23), (30), (38) et (39). Dans le chapitre intitulé «Conclusions», on donne des recommandations pour les praticiens, basées sur les résultats théoriques et expérimentaux obtenus par l'auteur.