Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 31 (1971)

Artikel: Théorie non-linéaire de la résistance postcritique des grandes poutres en caisson raidies

Autor: Maquoi, R. / Massonnet, Ch.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24221

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Théorie non-linéaire de la résistance postcritique des grandes poutres en caisson raidies

Nichtlineare Theorie der überkritischen Festigkeit grosser ausgesteifter Kastenträger

Non-Linear Theory of Postbuckling Resistance of Large Stiffened Box Girders

R. MAQUOI
Chargé de Recherches du Fonds National de la Recherche Scientifique

CH. MASSONNET
Professeur à l'Université de Liège

1. Introduction

Les accidents qui ont frappé, en l'espace d'un an, trois grands ponts en acier en caisson (pont sur le Danube à Vienne: 6 novembre 1969 [1], [2], [3], pont de Milford Haven: 2 juin 1970 [4], pont sur la Yarra à Melbourne: 15 octobre 1970 [5]) joints au résultat étonnant obtenu par le professeur P. Dubas dans son essai d'une poutre en caisson raidie par des raidisseurs théoriquement strictement rigides [6] nous ont amenés, dans notre Contribution à la discussion préparée du Colloque de Londres de l'A.I.P.C. (25 et 26 mars 1971) à avancer la thèse que, dans le cas du pont de Vienne, au moins, la ruine était imputable à l'application abusive, au cas des caissons, des très bas coefficients de sécurité, 1,35 et 1,25, utilisés dans le dimensionnement des poutres à âme pleine à l'aide de la théorie linéaire du voilement.

Cette thèse semble avoir été confirmée plus récemment (juin 1971) par la nouvelle parue dans la presse, que le Secrétaire d'Etat britannique pour l'Environnement avait, sur l'avis d'une Commission Technique présidée par le Dr. Merrison, de l'Université de Bristol, décidé de restreindre le trafic en fermant une voie de circulation dans chaque sens sur 42 ponts métalliques en caisson. Tous ces ponts seront soumis à une inspection minutieuse en vue de déceler d'éventuels signes avant-coureurs de dommages sérieux. En outre, aucun des 61 ponts en caisson actuellement en construction ne sera ouvert au trafic avant d'avoir été rendu conforme aux règles provisoires édictées par la

Commission Technique. Des mesures analogues pourraient être prises pour l'Ecosse et le Pays de Galles.

Il nous paraît donc qu'il est extrêmement urgent de développer, pour les grandes poutres en caisson raidies, une doctrine de la résistance à la ruine qui soit parallèle à la doctrine établie pour les grandes poutres à âme pleine, par BASLER et THÜRLIMANN, y compris les extensions et perfectionnements qu'elle a reçus au Colloque de Londres.

A première vue, il paraît extrêmement étonnant que le problème examiné n'ait pas déjà reçu une solution dans la littérature technique, puisqu'il intéresse, non seulement les constructeurs métalliques, mais encore les architectes navals et les constructeurs de l'aéronautique.

A vrai dire, de telles solutions ont été proposées, mais nous ne les considérons pas comme satisfaisantes.

La totalité des publications connues de nous ([7] à [12]) qui étudient la résistance ultime de panneaux de tôle raidis longitudinalement, adoptent le point de vue suivant:

Pour les dimensions habituellement adoptées, la tôle voile d'abord entre les raidisseurs. La répartition des contraintes se modifie comme représentée à la fig. 7. On remplace alors les bandes de tôle réelle de largeur b' par des bandes de tôle fictive de largeur effective b'_e définie par la relation

$$\frac{b'_e}{b'} = \frac{|\bar{\sigma}'|}{R_e}, \tag{1.1}$$

qui transmettent le même effort de compression d'intensité moyenne $|\bar{\sigma}'|$. La tôle étant supposée beaucoup plus large que longue ($a \ll b$), tous les raidisseurs se comportent à peu près de la même manière et la résistance ultime du panneau est simplement égale à n fois la résistance ultime d'une des colonnes formée d'un raidisseur et de deux bandes adjacentes de tôle de largeur $b'_e/2$ chacune.

Dans son mémoire de 1965 sur la résistance ultime à la flexion longitudinale des coques de navires, CALDWELL [7] déclare: «Cependant, une méthode générale de calcul satisfaisante (des panneaux raidis), applicable à toutes les proportions de plaque et de raidisseurs et tenant compte des effets possibles du cisaillement et de la pression transversale, manque encore. Pour cette raison, un programme d'essais de compression sur panneaux raidis va être entrepris au Royal Naval College de Greenwich (où l'auteur est professeur).»

En supposant que l'élancement réduit

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{R_e}{E}} \tag{1.2}$$

des raidisseurs est inférieur à 0,6 (ce qui, pour l'acier A 37, correspond à un élancement inférieur à 56) FAULKNER, dans sa discussion du mémoire de CALDWELL [7], admet que la contrainte de ruine dans les raidisseurs est pratiquement égale à la limite élastique.

Il définit le rendement ρ_p d'un panneau comprimé comme étant le rapport de l'effort de compression réel à la ruine à l'effort plastique maximum $R_e\Omega$. On a donc par définition, dans le cas particulier envisagé,

$$\rho_p = \frac{|\bar{\sigma}'|\, b' t + R_e \Omega_r}{R_e (b' t + \Omega_r)} = \frac{R_e (b'_e t + \Omega_r)}{R_e (b' t + \Omega_r)} = \frac{\dfrac{b'_e}{b'} + \dfrac{\Omega_r}{b' t}}{1 + \dfrac{\Omega_r}{b' t}}, \tag{1.3}$$

en appelant Ω_r l'aire de la section droite d'un raidisseur.

FAULKNER déclare avoir analysé l'ensemble des essais sur panneaux raidis longitudinalement exécutés aux Etats-Unis par VASTA, FRANKLAND [8] et plus tard par les chercheurs du David Taylor Model Basin [9]. Une expression de la largeur effective qui correspond raisonnablement à cet ensemble de résultats expérimentaux est

$$\frac{b'_e}{b'} = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{R_e}{|\sigma'_{max}|}} - \frac{1}{B^2}\,\frac{R_e}{|\sigma'_{max}|} \tag{1.4}$$

où

$$B = \frac{b'}{t}\sqrt{\frac{R_e}{E}} \tag{1.5}$$

et σ'_{max} est la contrainte longitudinale membranaire maximum dans le sous-panneau, atteinte au droit des raidisseurs bordant celui-ci.

Cette formule est légèrement plus optimiste que celle proposée par G. WINTER [10], à savoir

$$\frac{b'_e}{b'} = \frac{1{,}9}{B}\sqrt{\frac{R_e}{|\sigma'_{max}|}} - \frac{0{,}9}{B^2}\,\frac{R_e}{|\sigma'_{max}|}. \tag{1.6}$$

Si, à la ruine, σ'_{max} est égal à la limite élastique, la formule (1.4) donne

$$\left[\frac{b'_e}{b'}\right]_{ruine} = \frac{2}{B} - \frac{1}{B^2}. \tag{1.7}$$

Remplaçant $\frac{b'_e}{b'}$ par sa valeur (1.7) dans (1.3), FAULKNER obtient la relation

$$\rho_p = \frac{\left(\dfrac{2}{B} - \dfrac{1}{B^2}\right) + \dfrac{\Omega_r}{b' t}}{1 + \dfrac{\Omega_r}{b' t}}, \tag{1.8}$$

qui lui permet de tracer l'abaque de la fig. 1.

Cet abaque n'est malheureusement valable que pour des raidisseurs de très faible élancement, ce qui n'est pas le cas normalement rencontré dans les ponts métalliques en caisson.

Un autre ensemble de recherches intéressantes ont été réalisées au Japon en 1959 par des spécialistes de la construction navale. YOSHIKI et Collab. [12], [13] obtiennent un accord satisfaisant entre la contrainte moyenne de ruine expérimentale des plaques raidies essayées par eux et la contrainte de flam-

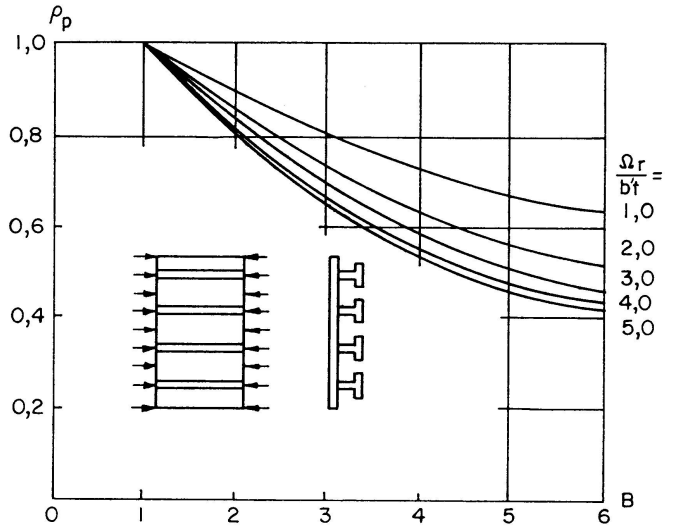

Fig. 1.

bement de l'ensemble formé par un raidisseur et deux bandes adjacentes de tôle de largeur $\frac{b'_e}{2}$ chacune, déterminée par la théorie d'ENGESSER-SHANLEY

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2}. \tag{1.9}$$

Si le raidisseur est de forme dissymétrique et à section ouverte à parois minces, la contrainte critique doit s'évaluer par la théorie du flambement par flexion et torsion.

Pour tenir compte de la courbure initiale du raidisseur, il faut remplacer sa contrainte critique par sa contrainte moyenne de ruine σ_r^{raid}. Cette contrainte est pratiquement atteinte quand la fibre la plus comprimée du raidisseur atteint la limite élastique, ce qui, d'après une formule classique de Résistance des Matériaux, s'écrit:

$$|\sigma_{max}| = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{f_0}{i^2}\,\frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}}\right) = R_e, \tag{1.10}$$

où P est l'effort de compression à la ruine, f_0 la flèche initiale du raidisseur, Ω la section formée du raidisseur et d'une largeur de tôle égale à b'_e déterminée par une formule valable de largeur effective (cf. § 9), i le rayon d'inertie de cette section, et $P_E = \pi^2 E I/a^2$ la charge critique de flambement eulérien *élastique* pour le flambement hors du plan du panneau. On déduit de (1.10).

$$|\sigma_r^{raid}|\left(1 + \frac{f_0}{i^2}\,\frac{1}{1 - \frac{\Omega\,|\sigma_r^{raid}|}{P_E}}\right) = R_e \tag{1.11}$$

formule qui permet de déterminer σ_r^{raid} par tâtonnements, mais sans difficulté.

Le rendement global du panneau raidi vaut, dans ces conditions,

$$\rho_p = \frac{|\sigma_r^{raid}|\,\Omega}{R_e\,(b'\,t + \Omega_r)}. \tag{1.12}$$

2. Position du problème

Le problème de l'évaluation de la résistance à la ruine d'un caisson formé de quatre parois minces en acier soumis à flexion pure, est d'une difficulté considérable parce qu'il est influencé à la fois:

a) par la non-linéarité géométrique (effets des grandes déformations);
b) par la non-linéarité matérielle, due à l'entrée en plasticité de certaines portions de la poutre;
c) par l'interaction entre les quatre parois composant ce caisson;
d) par la présence d'un grand nombre de raidisseurs longitudinaux.

En ce qui concerne le point a), nous croyons qu'il est suffisamment bien établi par nous-mêmes [14] et par d'autres [15] que la prise en compte de la non-linéarité géométrique est absolument indispensable, pour pouvoir nous dispenser de recommencer cette démonstration ici.

En ce qui concerne le point b), la prise en compte simultanée des grandes déformations et des déformations plastiques, quoique théoriquement possible [16], complique à tel point les calculs que, même avec un ordinateur très puissant, ils deviennent extrêmement pesants. D'autre part, la théorie de la plasticité, si elle s'applique couramment aux charpentes, n'est généralement pas considérée comme adéquate pour les ponts. C'est pourquoi, dans la présente étude, nous adoptons le point de vue de Wolmir (17) et de Skaloud [18], [19] selon lesquels *la ruine d'une plaque membrane comprimée est atteinte quand la contrainte moyenne de membrane le long des bords latéraux non chargés atteint la limite élastique R_e déterminée en compression simple.*

Le Professeur Dubas a montré au Colloque de Londres [5] que, dans son premier essai, cette hypothèse était du côté de la sécurité et était erronée de 6,5%. Nous pourrons donc, si nous le voulons, améliorer la valeur de la charge de ruine déterminée par notre théorie en la multipliant par 1,065.

En ce qui concerne le point c), ci-dessus, on peut constater que l'interaction entre la table comprimée et le restant du caisson, c'est-à-dire les deux âmes et la table tendue, est beaucoup plus faible que l'interaction entre l'âme d'une poutre à âme pleine et son cadre raidisseur formé des deux semelles et des deux raidisseurs transversaux adjacents.

D'autre part, la flexibilité des âmes dans leur plan est telle qu'on peut très raisonnablement adopter pour les bords non chargés de la table comprimée des conditions d'appui simple ($w = \partial^2 w/\partial y^2 = 0$) (fig. 2).

En ce qui concerne les conditions aux limites relatives aux contraintes de membrane, un caisson constitué de plaques parfaitement rectilignes et sollicité en flexion pue obéirait à la théorie de Navier et l'on aurait, le long des bords non chargés, $N_y = N_{xy} = 0$.

Si l'on tient compte d'une faible courbure initiale inévitable de la table comprimée, les conditions ci-dessus ($N_y = N_{xy} = 0$) doivent rester raisonnable-

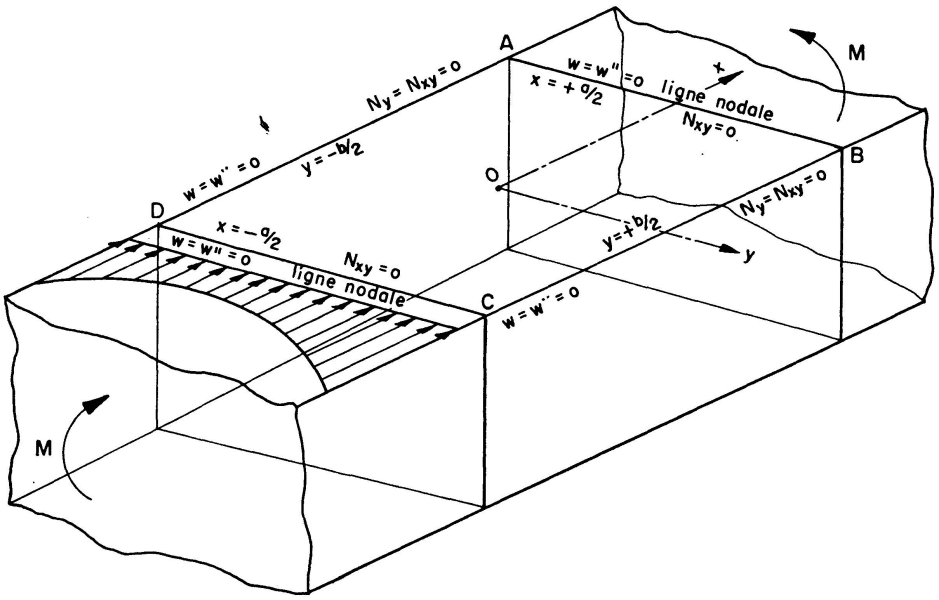

Fig. 2.

ment correctes en régime faiblement postcritique. Or, nous verrons par les exemples numériques discutés à la fin du présent mémoire que le coefficient de postcriticité $n = \bar{\sigma}/\sigma_{cr}$ ne dépasse pas 1,5 pour les caissons habituellement mis en œuvre.

Dans le sens longitudinal, la table comprimée présente une série de bosses alternativement vers le haut et vers le bas, séparées par des lignes nodales transversales rectilignes (fig. 2); nous pouvons donc limiter nos investigations au panneau rectangulaire de dimensions a, b, correspondant à l'une de ces bosses et délimité par les deux lignes nodales adjacentes AB, CD (fig. 2).

Bien sûr, le voilement de la table comprimée entraîne le voilement concomitant des deux âmes; mais l'effet de ce voilement sur la valeur du module de flexion W à la ruine est faible, parce que de toutes façons le module de flexion des âmes $W_{âme}$ ne représente qu'environ 10 pour cent du module de flexion global, de sorte qu'une diminution de 20 pour cent de ce module $W_{âme}$ n'entraînerait qu'une erreur de 2 pour cent sur la résistance globale à la flexion du caisson.

En ce qui concerne le point d) ci-dessus, il faut noter que les grandes poutres en caisson modernes comportent généralement une dizaine de raidisseurs longitudinaux. Dans ces conditions, il n'est plus mathématiquement possible d'analyser l'action individuelle de ces raidisseurs, comme Skaloud et Novotny l'ont fait dans le cas d'un ou deux raidisseurs longitudinaux [18], [20]. Il faut, au contraire, «tartiner» les rigidités de ces raidisseurs, à l'instar de ce qui a été fait avec succès dans la méthode Guyon-Massonnet de calcul des ponts à poutres multiples [21].

On est amené ainsi à adopter, comme équations, fondamentales, celles d'une plaque membrane orthotrope. Les équations de ces plaques sont dues à Rostovtsev [31] dans le cas d'une plaque à matériau orthotrope, à Soper [32] dans le cas d'une plaque à deux cours de raidisseurs perpendiculaires.

Elles ont été obtenues à partir de la théorie classique de HUBER [22], [23], en complétant les expressions des déformations ϵ_x, ϵ_y et γ_{xy} par les mêmes termes non-linéaires que VON KÁRMÁN a employés pour étendre aux plaques membranes isotropes la théorie classique de LAGRANGE.

Cependant, les équations fondamentales, en question (cf. par. 3) ne valent en principe que si c'est le matériau qui est lui-même orthotrope. Or, en réalité, on a affaire ici à une orthotropie de structure, due à des raidisseurs fixés d'un seul côté de la tôle.

PFLÜGER a établi [24] le modèle mathématique de telles plaques en régime linéaire et l'un de nous a montré en 1959 [25]:

a) que l'excentricité en question avait une influence considérable sur la rigidité torsionnelle apparente;
b) qu'il n'était pas possible de ramener le modèle de PFLÜGER à celui de HUBER.

Ces considérations nous ont amenés à généraliser la théorie de PFLÜGER en y introduisant les composantes non linéaires de ϵ_x, ϵ_y et γ_{xy}. Cependant, nous nous sommes aperçus que, face à un déploiement mathématique énorme, cette solution raffinée n'apportait que des corrections de l'ordre de 5 pour cent.

C'est pourquoi, nous avons décidé de reporter la théorie correspondante en annexe et d'axer nos efforts *sur la théorie la plus simple qui tienne compte de façon décente des caractéristiques essentielles du problème.*

Les équations fondamentales étant des équations aux dérivées partielles non linéaires, nous avons choisi de les résoudre par la technique de BUBNOV-GALERKIN. Cette technique, comme celle de RAYLEIGH-RITZ, consiste à se donner comme déformée de voilement une expression simple dépendant d'un petit nombre de paramètres.

WOLMIR montre dans son livre [17] que, tant que le coefficient de postcriticité n reste faible, de bons résultats sont obtenus en adoptant comme déformée le mode fondamental de voilement

$$w = f_{11} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \tag{2.1}$$

donné par la théorie linéaire du voilement, et que l'introduction dans w du terme additionnel

$$\Delta w = f_{31} \cos \frac{3 \pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

ne diminue les contraintes de ruine que d'environ 5 pour cent, tout en entraînant un considérable accroissement des développements mathématiques.

Nous nous en tiendrons donc à l'expression simple (2.1) pour w et nous admettrons que l'erreur par excès commise de ce fait compense l'erreur par défaut commise en adoptant le critère de ruine de WOLMIR-SKALOUD (voir plus haut).

Comme le voilement est un phénomène du second ordre, il aurait fallu, en principe, introduire dans le modèle mathématique l'effet des contraintes résiduelles, ainsi qu'il a été fait dans les recherches de GALAMBOS et KETTER et dans les recherches de la Commission VIII de la C.E.C.M. qui ont conduit aux trois courbes européennes de flambement [26], [27], [28]. La prise en compte correcte des contraintes résiduelles dans le cas actuel, nous paraît très complexe et nous ne l'avons pas envisagée, considérant qu'elle pouvait être tant bien que mal remplacée par une majoration de la flèche initiale f_0 du panneau.

Après avoir développé la théorie, nous avons jugé indispensable de la soumettre au feu de l'expérience. Les seules expériences valables disponibles à l'heure actuelle sont les quatre essais effectués par P. DUBAS [5]. Nous montrons au paragraphe 12 que notre théorie est en accord satisfaisant avec ces essais.

3. Equations fondamentales

Les équations classiques des plaques membranes sont dues à VON KÁRMÁN [29]. MARGUERRE [30] y a introduit l'effet d'une légère courbure initiale. Plusieurs auteurs ([31], [32]) ont étendu ces équations au cas anisotrope. Le lecteur pourra se référer à ces auteurs, ou bien à l'annexe du présent mémoire, où il trouvera la généralisation de la théorie de PFLÜGER au cas non-linéaire. L'examen de cette annexe montre que l'excentricité des raidisseurs a deux effets distincts:

a) elle modifie la forme des équations fondamentales en y introduisant les nouveaux termes

$$+(e_x+e_y)\,w''''-\nu D\left(\frac{e_y}{D_x}\,w''''+\frac{e_x}{D_y}\,w''''\right)$$

et

$$\frac{\nu}{1-\bar{\nu}^2}\left(e_y\frac{D}{D_x}\,\phi''''+e_x\frac{D}{D_y}\,\phi''''\right)-\frac{e_x+e_y}{1-\bar{\nu}^2}\,\phi''''$$

respectivement

b) elle modifie les valeurs des rigidités B, C, D, qui se calculent à présent, à partir des dimensions de la plaque raidie, par les formules:

$$\bar{B}_x = B_x-\frac{\bar{\nu}^2}{1-\bar{\nu}^2}e_x^2 D_x, \qquad \bar{B}_y = B_y-\frac{\bar{\nu}^2}{1-\bar{\nu}^2}e_y^2 D_y,$$

$$\bar{C} = B+\frac{1}{2}(B_{yx}+B_{xy})+\frac{\nu}{1-\bar{\nu}^2}e_x e_y D,$$

$$\bar{D} = \frac{1-\nu}{1-\nu\dfrac{D^2}{D_x D_y}}D, \qquad \bar{\nu} = \frac{D}{\sqrt{D_x D_y}}\nu.$$

Les valeurs de $e_x, e_y, B, D, B_x, B_y, B_{xy}, B_{yx}, D_x, D_y$, sont définies dans l'annexe.

Comme nous l'avons dit au paragraphe 2, les nouveaux termes dans les équations compliquent énormément la résolution déjà si pénible des équations des plaques membranes orthotropes pour un gain de précision minime ($\simeq 6\%$) et nous avons donc décidé de les supprimer.

Par contre, il n'y a aucun inconvénient à adopter, pour les rigidités, les valeurs améliorées données par la théorie développée en annexe. Si l'on introduit de plus les notations simplificatives

$$F' = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad F'' = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad F^{\cdot} = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad F^{\cdot\cdot} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad \ldots \text{etc.} \ldots \tag{3.1}$$

on peut présenter les équations fondamentales sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} &\frac{\phi^{\cdot\cdot\cdot\cdot}}{D_x} + 2\frac{\phi^{\cdot\cdot\prime\prime}}{\bar{D}} + \frac{\phi^{\prime\prime\prime\prime}}{D_y} = \\ &\qquad (1-\bar{\nu}^2)\left[(w_0^{\cdot\prime} + w^{\cdot\prime})^2 - (w_0^{\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot})(w_0'' + w'') - w_0^{\cdot\prime 2} + w_0^{\cdot\cdot} w_0''\right], \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} &\bar{B}_x w^{\prime\prime\prime\prime} + 2\bar{C} w^{\cdot\cdot\prime\prime} + \bar{B}_y w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \\ &\qquad \phi''(w_0^{\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot}) + \phi^{\cdot\cdot}(w_0'' + w'') - 2\phi^{\cdot\prime}(w_0^{\cdot\prime} + w^{\cdot\prime}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

L'équation (3.2) découle des conditions exprimant l'existence d'un champ de déplacement continu (u, v, w) dans la plaque par l'intermédiaire d'une relation de compatibilité entre les composantes du tenseur déformation de membrane $(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy})$; elle porte pour cette raison le nom d'*équation de compatibilité* et régit la fonction de contrainte ϕ qui gouverne elle-même les composantes du tenseur membrane par les relations

$$N_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \phi^{\cdot\cdot}, \qquad N_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \phi'', \qquad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\phi^{\cdot\cdot}. \tag{3.4}$$

L'équation (3.3) provient de la relation exprimant l'équilibre de translation verticale d'un élément de plaque raidie et s'appelle, pour cette raison, l'*équation d'équilibre;* elle gouverne le déplacement transversal w d'un point situé dans le feuillet moyen de la tôle. w_0 est le déplacement initial de ce feuillet.

D_x, $\bar{D}$ et D_y sont les trois rigidités extensionnelles de la plaque raidie et $\bar{B}_x$, $\bar{C}$ et $\bar{B}_y$, ses trois rigidités flexionnelles.

Comme on l'a dit dans le paragraphe «Position du problème, on admettra que la tôle a une déformée initiale

$$w_0 = f_0 \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b} \tag{3.5}$$

et que sa déformée supplémentaire est affine au mode fondamental de voilement donné par la théorie linéaire, à savoir

$$w(x, y) = f \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b}. \tag{3.6}$$

4. Conditions aux limites et marche générale de la solution

Chacune des deux équations fondamentales (3.2), (3.3), admet deux conditions aux limites sur chaque bord; il y a donc en tout pour les quatre bords 16 conditions aux limites. Ces conditions sont les suivantes:

4.1. Conditions de flexion

Le long des bords chargés $x = \pm a/2$:

$$w = 0;\ M_x = 0 \text{ d'où, puisque } \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{4.1}$$

Le long des bords non chargés $y = \pm b/2$:

$$w = 0;\ M_y = 0 \text{ d'où, puisque } \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{4.2}$$

4.2. Conditions de membrane

a) Le long des bords chargés $x = \pm a/2$

a.1.
$$N_{xy} = 0. \tag{4.3}$$

a.2. Les bords AB et CD restent rectilignes, mais peuvent se rapprocher, ce qui s'écrit

$$\delta_x = C^{ste}$$

ou, en vertu de la formule (2.32) de l'annexe:

$$\delta_x \equiv \int_{-a/2}^{a/2} \left\{ \frac{1}{1-\bar{\nu}^2} \left(\frac{\phi^{\cdot\cdot}}{D_x} - \frac{\bar{\nu}}{\sqrt{D_x D_y}} \phi'' \right) - \tfrac{1}{2}(w_0' + w')^2 + \tfrac{1}{2} w_0'^2 \right\} dx = C^{ste}. \tag{4.4}$$

b) Le long des bords non chargés $y = \pm b/2$:

$$N_y = 0, \qquad N_{xy} = 0. \tag{4.5}$$

Le problème mathématique à résoudre est d'intégrer le système d'équations aux dérivées partielles non linéaires (3.2), (3.3) avec les conditions à la surface (4.1) à (4.5). Pour résoudre ce problème, nous nous inspirerons du livre de Wolmir et procéderons comme suit:

La déformée supplémentaire satisfaisant dès le départ aux conditions de flexion à la surface (4.1), (4.2), nous commencerons par rechercher par intégration une fonction de contrainte ϕ qui satisfait rigoureusement à l'équation de compatibilité (3.2) et aux conditions à la surface correspondantes (4.3) à (4.5). Ensuite, en adoptant la technique de Bubnov-Galerkin, nous choisirons le paramètre f de l'expression (3.6) afin de satisfaire «au mieux» à l'équation d'équilibre (3.3), ce qui achèvera la solution.

La condition (4.4) est vérifiée a posteriori.

5. Intégration de l'équation de compatibilité

En remplaçant w_0 et w par leurs expressions (3.5), (3.6) dans l'équation de compatibilité (3.2), on met celle-ci sous la forme:

$$\frac{\phi^{\cdot\cdot\cdot\cdot}}{D_x}+2\frac{\phi^{\cdot\cdot\prime\prime}}{\bar{D}}+\frac{\phi^{\prime\prime\prime\prime}}{D_y}=-(1-\bar{\nu}^2)f(f+2f_0)\frac{\pi^4}{2a^2b^2}\left(\cos\frac{2\pi x}{a}+\cos\frac{2\pi y}{b}\right). \tag{5.1}$$

Cette équation est linéaire en ϕ, et son intégrale générale est donc la somme de l'intégrale générale de l'équation sans second membre et d'une intégrale particulière de l'équation complète.

Le second membre étant à variables séparées et de type harmonique, on choisit une solution particulière de la forme

$$\phi_0(x,y)=A_1\cos\frac{2\pi x}{a}+A_2\cos\frac{2\pi y}{b} \tag{5.2}$$

et l'on trouve par identification des deux membres de (5.1)

$$A_1=-\frac{D_y\alpha^2(1-\bar{\nu}^2)}{32}f(f+2f_0), \tag{5.3a}$$

$$A_2=-\frac{D_x(1-\bar{\nu}^2)}{32\alpha^2}f(f+2f_0)=\frac{D_x}{\alpha^4 D_y}A_1 \tag{5.3b}$$

moyennant la notation connue

$$\alpha=a/b. \tag{5.4}$$

On posera pour simplifier

$$\frac{D_x}{\alpha^4 D_y}=\xi. \tag{5.5}$$

Il faut maintenant ajouter à la solution particulière (5.2) l'intégrale générale ϕ_1 de l'équation homogène

$$\frac{\phi^{\cdot\cdot\cdot\cdot}}{D_x}+2\frac{\phi^{\cdot\cdot\prime\prime}}{\bar{D}}+\frac{\phi^{\prime\prime\prime\prime}}{D_y}=0, \tag{5.6}$$

qui est telle que $\phi=\phi_0+\phi_1$ satisfasse aux conditions à la surface (4.3) à (4.5).

Pour exprimer que la plaque est comprimée dans le sens des x, on introduit une première solution

$$\phi_1^1=p_x\frac{y^2}{2}.$$

A ce stade, on a donc

$$\phi=\phi_0+\phi_1^1=A_1\cos\frac{2\pi x}{a}+A_2\cos\frac{2\pi y}{b}+p_x\frac{y^2}{2}$$

d'où, par les relations (3.4),

$$N_{xy} = 0 \text{ le long de tous les bords puisque } \frac{\partial^2 (\phi_0 + \phi_1^1)}{\partial x \, \partial y} = 0, \quad (5.7\,\text{a, b})$$

$$(N_y)_{y=\pm b/2} = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{y=\pm b/2} = -\frac{4\pi^2}{a^2} A_1 \cos\frac{2\pi x}{a}, \quad (5.7\,\text{c})$$

$$(N_x)_{x=\pm a/2} = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{x=\pm a/2} = -\frac{4\pi^2}{b^2} A_2 \cos\frac{2\pi y}{b} + p_x. \quad (5.7\,\text{d})$$

L'effort total passant dans la plaque comprimée vaut donc

$$\int_{-b/2}^{+b/2} (N_x)_{x=\pm a/2} \, dy = p_x b, \quad (5.8)$$

ce qui montre que la signification physique de p_x est l'effort moyen de compression dans l'unité de largeur de la plaque *raidie*.

En comparant les conditions à satisfaire (4.3) à (4.5) avec les conditions (5.7 a à c), nous voyons que tout est en ordre sauf qu'il subsiste des efforts N_y non nuls le long des bords non chargés. Ces efforts étant en $\cos\frac{2\pi x}{a}$, il est logique, pour les faire disparaître, de choisir une fonction de contrainte

$$\phi_1^2(x, y) = f(y) \cos\frac{2\pi x}{a}$$

comme solution générale de l'équation homogène (5.6).

On voit de suite que $f(y)$ sera une combinaison linéaire de termes en $\operatorname{ch}\beta y$ ou $\operatorname{sh}\beta y$, où β est une constante adéquate. Pour respecter la symétrie du problème, on ne conserve que la forme $\operatorname{ch}\beta y$, puisque $\operatorname{ch}\beta(-y) = \operatorname{ch}\beta y$, de sorte que la fonction à essayer est

$$\operatorname{ch}\beta y \cos\frac{2\pi x}{a}.$$

Introduisons cette expression dans (5.6); on trouve:

$$\frac{\beta^4}{D_x} - 2\frac{4\pi^2}{a^2}\frac{\beta^2}{\bar{D}} + \frac{16\pi^4}{a^4}\frac{1}{D_y} = 0,$$

d'où

$$\beta = \pm\frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{D_x}{\bar{D}}}\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{\bar{D}^2}{D_x D_y}}}. \quad (5.9)$$

Posons à présent

$$\theta = \frac{\bar{D}}{\sqrt{D_x D_y}}. \quad (5.10)$$

On obtient l'intégrale suffisamment générale de (5.6):

$$\phi_1^2(x, y) = K_1 \cos\frac{2\pi x}{a} \operatorname{ch}\beta_1 y + K_2 \cos\frac{2\pi x}{a} \operatorname{ch}\beta_2 y \quad (5.11)$$

avec
$$\beta_1 = \frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{D_x}{\bar{D}}}\sqrt{1+\sqrt{1-\theta^2}} = \frac{2\pi}{a} j_1,$$
$$\beta_2 = \frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{D_x}{\bar{D}}}\sqrt{1-\sqrt{1-\theta^2}} = \frac{2\pi}{a} j_2. \tag{5.12}$$

Les constantes K_1 et K_2, convenablement choisies, doivent permettre de satisfaire à l'ensemble des conditions de membrane à la surface (4.3) à (4.5). La fonction de contrainte ϕ_1^2 seule donne les efforts unitaires

$$(N_{xy})_{x=\pm a/2} = 0, \quad \text{car} \quad \sin\frac{2\pi x}{a} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm a/2, \tag{5.13a}$$

$$(N_{xy})_{y=\pm b/2} = \left(-\frac{\partial^2 \phi_1^2}{\partial x\, \partial y}\right)_{y=\pm b/2} = \frac{2\pi}{a}\left(K_1 \beta_1 \operatorname{sh}\frac{\beta_1 b}{2} + K_2 \beta_2 \operatorname{sh}\frac{\beta_2 b}{2}\right)\sin\frac{2\pi x}{a}, \tag{5.13b}$$

$$(N_y)_{y=\pm b/2} = \left(\frac{\partial^2 \phi_1^2}{\partial x^2}\right)_{x=\pm b/2} = -\frac{4\pi^2}{a^2}\left(K_1 \operatorname{ch}\frac{\beta_1 b}{2} + K_2 \operatorname{ch}\frac{\beta_2 b}{2}\right)\cos\frac{2\pi x}{a}, \tag{5.13c}$$

$$\int_{-b/2}^{+b/2} (N_x)_{x=\pm a/2}\, dy = -[K_1 \beta_1 \operatorname{sh}\beta_1 y + K_2 \beta_2 \operatorname{sh}\beta_2 y]_{-b/2}^{+b/2}. \tag{5.13d}$$

Cette dernière relation montre que la fonction $\phi_1^2(x, y)$ affecte la distribution des N_x.

Faisons maintenant les sommes des expressions homologues (5.7a à d) et (5.13a à c) afin de satisfaire aux conditions (4.3) à (4.5).

On trouve:

1. que la condition $(N_{xy})_{x=\pm a/2} = 0$ est toujours vérifiée,
2. que l'annulation de $(N_{xy})_{y=\pm b/2}$ quel que soit x entraîne la condition
$$K_1 \beta_1 \operatorname{sh}\frac{\beta_1 b}{2} + K_2 \beta_2 \operatorname{sh}\frac{\beta_2 b}{2} = 0, \tag{5.14}$$
3. que l'annulation de $(N_y)_{y=\pm b/2}$ quel que soit x entraîne la condition
$$K_1 \operatorname{ch}\frac{\beta_1 b}{2} + K_2 \operatorname{ch}\frac{\beta_2 b}{2} = -A_1. \tag{5.15}$$

La résolution du système d'équations (5.14), (5.15) donne, en tenant compte des notations (5.12):

$$K_1 = \frac{j_2 \operatorname{sh}\frac{\pi j_2}{\alpha}}{j_1 \operatorname{sh}\frac{\pi j_1}{\alpha} \operatorname{ch}\frac{\pi j_2}{\alpha} - j_2 \operatorname{sh}\frac{\pi j_2}{\alpha} \operatorname{ch}\frac{\pi j_1}{\alpha}} A_1 = \mu_1 A_1, \tag{5.16a}$$

$$K_2 = -\frac{j_1 \operatorname{sh}\frac{\pi j_1}{\alpha}}{j_1 \operatorname{sh}\frac{\pi j_1}{\alpha} \operatorname{ch}\frac{\pi j_2}{\alpha} - j_2 \operatorname{sh}\frac{\pi j_2}{\alpha} \operatorname{ch}\frac{\pi j_1}{\alpha}} A_1 = \mu_2 A_1. \tag{5.16b}$$

L'expression finale de la fonction de contrainte est donc

$$\begin{aligned}\phi(x,y) = {} & A_1 \cos\frac{2\pi x}{a} + A_2 \cos\frac{2\pi y}{b} + p_x \frac{y^2}{2} \\ & + K_1 \cos\frac{2\pi x}{a} \operatorname{ch}\beta_1 y + K_2 \cos\frac{2\pi x}{a} \operatorname{ch}\beta_2 y\end{aligned} \tag{5.17}$$

où A_1, A_2, K_1, K_2 sont définis par les formules (5.3) et (5.16) respectivement.

L'expression (5.17) satisfait *rigoureusement* aux conditions de membrane aux limites (4.3) et (4.5) comme annoncé à la fin du paragraphe 4.

Il faut en plus montrer que la condition $\delta_x = C^{ste}$ est remplie. A partir de l'expression (4.4), on calcule, à l'aide (3.5), (3.6) et (5.17)

$$\delta_x = \frac{a}{D_x(1-\bar{\nu}^2)}\left(p_x - \frac{4\pi^2}{b^2} A_2 \cos\frac{2\pi y}{b}\right) - \frac{\pi^2}{4a} f(f+2f_0)\cos^2\frac{\pi y}{b}. \tag{5.18}$$

Remplaçant la constante A_2 par sa valeur (5.3b), on constate que l'expression ci-dessus de δ_x se réduit à

$$\delta_x = \frac{p_x a}{D_x(1-\bar{\nu}^2)} - \frac{\pi^2}{8a} f(f+2f_0) \tag{5.19}$$

qui est bien indépendante de y comme il le fallait.

6. Intégration approchée de l'équation d'équilibre par la méthode de Bubnov-Galerkin

Si l'on remplace w_0, w et ϕ par leurs expressions (3.5), (3.6) et (5.17) dans l'équation fondamentale d'équilibre (3.3), on obtient une expression très longue de la forme générale $E = F$, dont le membre de gauche s'écrit:

$$E = \frac{\pi^4}{a^4}(\bar{B}_x + 2\alpha^2 \bar{C} + \alpha^4 \bar{B}_y) f \cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}.$$

Le membre de droite F est une expression très longue, qu'on ne reproduira pas ici, pour gagner de la place.

La technique d'intégration approchée de Bubnov-Galerkin consiste, comme on sait, à exiger du paramètre indéterminé qu'il satisfasse l'équation $E - F = 0$ «en moyenne», c'est-à-dire qu'on ait

$$\int_{-a/2}^{+a/2}\int_{-b/2}^{+b/2} (E-F)\, w\, dx\, dy = 0.$$

Remplaçant w par son expression (3.6), tenant compte de ce que le domaine d'intégration est rectangulaire et prenant – par symétrie – le quart de l'intégrale double précédente, on trouve que f est déterminé par la condition:

$$\int_0^{a/2} \cos\frac{\pi x}{a} dx \int_0^{+b/2} (E-F)\cos\frac{\pi y}{b} dy = 0.$$

En effectuant toutes les intégrations nécessaires en tenant compte de la relation (5.14), qui peut s'écrire

$$\frac{\mu_1 j_1}{\alpha}\operatorname{sh}\frac{\pi j_1}{\alpha}+\frac{\mu_2 j_2}{\alpha}\operatorname{sh}\frac{\pi j_2}{\alpha}=0,$$

et en multipliant tout par $\frac{16a}{\pi^2 b}$, on trouve pour déterminer f la condition:

$$\begin{aligned}&\frac{\pi^2}{a^2}(\bar{B}_x+2\alpha^2\bar{C}+\alpha^4\bar{B})f+(f+f_0)p_x+\frac{\pi^2 D_y\alpha^2(1-\nu^2)}{16b^2}f(f+2f_0)(f+f_0)(1+\xi)\\&+\frac{\pi^2 D_y\alpha^2(1-\bar{\nu}^2)}{16b^2}\left(\mu_1\frac{\alpha}{\pi j_1}\operatorname{sh}\frac{\pi j_1}{\alpha}+\mu_2\frac{\alpha}{\pi j_2}\operatorname{sh}\frac{\pi j_2}{\alpha}\right)f(f+2f_0)(f+f_0)=0.\end{aligned}\tag{6.1}$$

On tire de cette relation la valeur de p_x:

$$\begin{aligned}p_x=&-\frac{f}{f+f_0}\frac{\pi^2}{a^2}(\bar{B}_x+2\alpha^2\bar{C}+\alpha^4\bar{B}_y)-\frac{\pi^2 D_y\alpha^2(1-\bar{\nu}^2)}{16b^2}(1+\xi)f(f+2f_0)\\&-\frac{\pi^2 D_y\alpha^2(1-\bar{\nu}^2)}{16b^2}\left(\mu_1\frac{\alpha}{\pi j_1}\operatorname{sh}\frac{\pi j_1}{\alpha}+\mu_2\frac{\alpha}{\pi j_2}\operatorname{sh}\frac{\pi j_2}{\alpha}\right)f(f+2f_0).\end{aligned}\tag{6.2}$$

7. Critère de ruine

Considérons la plaque réelle et introduisons avec KLÖPPEL [34] le coefficient

$$\delta=\frac{\Omega_r}{bt}\tag{7.1}$$

définissant l'aire relative d'un raidisseur.

Soit m le nombre effectif de raidisseurs plus un *).

La section d'acier de la plaque raidie vaut

$$\Omega_{plaque\,raidie}=bt(1+m\delta)\tag{7.2}$$

ce qui signifie qu'on passe de la plaque non raidie à la plaque raidie en multipliant une aire de la plaque non raidie par le facteur $(1+m\delta)$.

La section moyenne d'acier par unité de largeur vaut donc $t(1+m\delta)$.

Conformément au paragraphe 2, nous admettons que la ruine est atteinte quand la contrainte de membrane $\bar{\sigma}_x$ moyenne le long des bords non chargés AD ou BC (Fig. 2) atteint la limite élastique du métal en compression $-\bar{R}_e$ (où $\bar{R}_e=\psi R_e$ représente une limite élastique éventuellement corrigée par un facteur de forme $\psi\cong 1{,}065$ pour tenir compte d'une plastification locale de la plaque avant effondrement).

En multipliant les deux membres par $t(1+m\delta)$, la condition ci-dessus s'écrit:

---

*) Ceci pour tenir compte de ce que les deux bords non chargés de la plaque jouent ensemble le rôle d'un raidisseur supplémentaire.

$$\bar{N}_x = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{+a/2} (N_x)_{y=b/2}\, dx = -\bar{R}_e t(1+m\delta). \tag{7.3}$$

Mais

$$N_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \\ -\frac{4\pi^2}{b^2} A_2 \cos\frac{2\pi y}{b} + p_x + K_1\beta_1^2 \cos\frac{2\pi x}{a}\operatorname{ch}\beta_1 y + K_2\beta_2^2\cos\frac{2\pi x}{a}\operatorname{ch}\beta_2 y. \tag{7.4}$$

Comme l'intégrale de la somme des deux derniers termes du second membre est nulle en vertu de (5.13b), la condition (7.3) se réduit à:

$$\frac{4\pi^2}{b^2} A_2 + p_x = -\bar{R}_e t(1+m\delta)$$

ou, en tenant compte de la valeur (5.3b) de A_2:

$$-\frac{4\pi^2}{b^2}\xi\frac{D_y\alpha^2(1-\bar{\nu}^2)}{32} f(f+2f_0) + p_x = -\bar{R}_e t(1+m\delta) \tag{7.5}$$

et, en remplaçant p_x par sa valeur (6.2),

$$-\frac{f}{f+f_0}\frac{\pi^2}{a^2}(\bar{B}_x + 2\alpha^2\bar{C} + \alpha^4\bar{B}_y) - \frac{\pi^2 D_y\alpha^2(1-\bar{\nu}^2)}{16b^2}(1+3\xi) f(f+2f_0) \\ -\frac{\pi^2 D_y\alpha^2(1-\bar{\nu}^2)}{16b^2}\left(\mu_1\frac{\alpha}{\pi j_1}\operatorname{sh}\frac{\pi j_1}{\alpha} + \mu_2\frac{\alpha}{\pi j_2}\operatorname{sh}\frac{\pi j_2}{\alpha}\right) f(f+2f_0) = -\bar{R}_e t(1+m\delta). \tag{7.6}$$

Si l'on désigne par

$$\sigma_{cr} = -\frac{\pi^2}{a^2 t(1+m\delta)}(\bar{B}_x + 2\alpha^2\bar{C} + \alpha^4\bar{B}_y) \tag{7.7}$$

la contrainte critique de voilement, on peut écrire la condition de ruine (7.6) sous la forme:

$$\frac{f}{f+f_0}\sigma_{cr}(1+m\delta) - \frac{\pi^2 D_y\alpha^2(1-\bar{\nu}^2)}{16b^2 t}(1+3\xi) f(f+2f_0) \\ -\frac{\pi^2 D_y\alpha^2(1-\bar{\nu}^2)}{16b^2 t}\left(\mu_1\frac{\alpha}{\pi j_1}\operatorname{sh}\frac{\pi j_1}{\alpha} + \mu_2\frac{\alpha}{\pi j_2}\operatorname{sh}\frac{\pi j_2}{\alpha}\right) f(f+2f_0) = -\bar{R}_e(1+m\delta). \tag{7.8}$$

Introduisons les quantités non dimensionnelles

$$\frac{f_0}{t} = \epsilon_0, \quad \frac{f}{t} = \epsilon, \quad \frac{b}{t} = \lambda, \quad -\frac{\pi^2 D_y(1-\bar{\nu}^2)}{16\sigma_{cr} t} = k\,(>0!), \quad \frac{-\sigma_{cr}}{\bar{R}_e} = r\,(>0!). \tag{7.9}$$

Nous pouvons alors écrire la condition de ruine (7.8) sous la forme:

$$\boxed{\frac{\epsilon}{\epsilon+\epsilon_0}(1+m\delta) + k\frac{\alpha^2}{\lambda^2}\epsilon(\epsilon+2\epsilon_0)\left[(1+3\xi) + \left(\mu_1\frac{\alpha}{\pi j_1}\operatorname{sh}\frac{\pi j_1}{\alpha} + \mu_2\frac{\alpha}{\pi j_2}\operatorname{sh}\frac{\pi j_2}{\alpha}\right)\right] = \frac{1+m\delta}{r}.} \tag{7.10}$$

8. Définition et calcul du rendement de la table comprimée

On définit le rendement de la table comprimée comme étant le rapport de la contrainte moyenne $\bar{\bar{\sigma}}_x$ le long des bords chargés $x = \pm a/2$ à la valeur de la limite d'élasticité en compression $-\bar{R}_e$, au moment où la valeur moyenne $\bar{\bar{\sigma}}_x$ de σ_x le long des bords non chargés $y = \pm b/2$ atteint $-\bar{R}_e$.

Mais le rapport des contraintes ci-dessus est égal au rapport des efforts unitaires correspondants. Or, la section moyenne d'acier par unité de largeur vaut $t(1+m\delta)$. Le rendement de la table comprimée vaut donc, par définition:

$$\rho_t = \frac{\bar{\bar{\sigma}}_x}{-\bar{R}_e} = -\frac{\bar{\bar{N}}_x}{\bar{R}_e t(1+m\delta)}. \tag{8.1}$$

L'effort unitaire moyen $\bar{\bar{N}}_x$ est donné par

$$\bar{\bar{N}}_x = \frac{1}{b}\int_{-b/2}^{+b/2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_{x=a/2} dy.$$

En y introduisant l'expression (7.4) de $\partial^2\phi/\partial y^2$ et effectuant l'intégration, on trouve

$$\bar{\bar{N}}_x = p_x - \frac{2}{b}\left(K_1\beta_1 \operatorname{sh}\frac{\pi j_1}{\alpha} + K_2\beta_2 \operatorname{sh}\frac{\pi j_2}{\alpha}\right)\cos\frac{2\pi x}{a}.$$

Le dernier terme du second membre est nul en vertu de la relation (5.14), ce qui doit être puisque, si la table n'est soumise à aucune contrainte de cisaillement le long de ses bords non chargés, l'équilibre de translation dans le sens des x du morceau rectangulaire $CDEF$ exige (fig. 3) que l'effort total sur EF soit exactement égal à l'effort total sur CD. Dès lors,

$$\bar{\bar{N}}_x = p_x. \tag{8.2}$$

En remplaçant dans (8.1) $\bar{\bar{N}}_x = p_x$ par son expression tirée de (7.5) et introduisant les notations (7.9), on trouve

$$\boxed{\rho_t = 1 - \frac{2k\alpha^2}{\lambda^2} r \frac{\xi}{1+m\delta}\epsilon(\epsilon + 2\epsilon_0).} \tag{8.3}$$

A titre de contrôle, nous avons particularisé cette formule pour le cas d'une plaque carrée isotrope, qui est traitée dans le livre de Wolmir [17], pp. 138 et 139. On trouve dans ce cas:

$$j_1 = j_2, \quad \mu_1 = -\mu_2, \quad D_x = D_y = D, \quad \xi = 1, \quad \bar{\nu} = \nu, \quad \alpha = 1, \quad \delta = 0.$$

De plus, la plaque n'ayant aucune déformation initiale, $\epsilon_0 = 0$. La formule (8.3) se réduit alors à:

$$\rho_t = 1 - \frac{2k}{\lambda^2} r \epsilon^2.$$

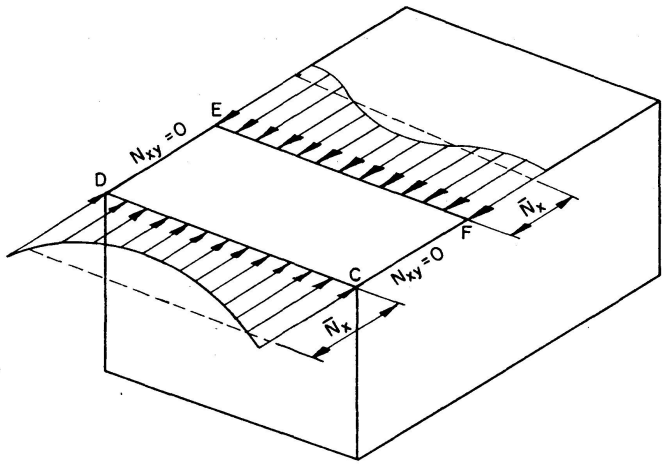

Fig. 3.

La condition de ruine (7.10) se réduit dans le cas actuel à:

$$1+\frac{4k}{\lambda^2}\epsilon^2=\frac{1}{r},$$

d'où

$$\frac{2kr}{\lambda^2}\epsilon^2=\frac{1}{2}(1-r)$$

donc

$$\rho_t=1-\frac{1}{2}(1-r)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sigma_{cr}}{\bar{R}_e}\right). \tag{8.4}$$

Ce résultat est identique à celui obtenu par WOLMIR.

9. Examen de quelques formules de largeur effective des plaques isotropes

Déjà au paragraphe 1, nous avons rencontré la notion de largeur effective, ou largeur de la plaque fictive uniformément comprimée qui transmet le même effort que la plaque réelle en régime postcritique. Comme cette notion joue un rôle important dans une correction à apporter au rendement des plaques raidies (§ 10), il faut s'y arrêter quelques instants.

L'inventeur de la notion de largeur effective est TH. VON KÁRMÁN [10]; il propose la formule (fig. 4)

$$\rho_{vk}=\frac{b'_e}{b'}=\sqrt{\frac{\sigma'_{cr}}{\sigma'_{max}}}=\sqrt{\frac{1}{n}},\qquad (n\geqq 1). \tag{9.1}$$

En remplaçant σ_{cr} par sa valeur classique

$$\sigma'_{cr}=-k\frac{\pi^2 D}{b^2 t}=-75920\left(\frac{t}{b}\right)^2=\frac{-3{,}62\,R_e}{B^2}, \tag{9.2}$$

avec

$$k=4,\quad D=\frac{E\,e^3}{12(1-\nu^2)},\quad \nu=0{,}3,\quad B\equiv\frac{b'}{t}\sqrt{\frac{R_e}{E}}, \tag{1.5}$$

on a

$$n\equiv\frac{\sigma'_{max}}{\sigma'_{cr}}=\frac{0{,}276\,|\sigma'_{max}|}{R_e}B^2 \tag{9.3}$$

et on peut encore écrire la formule (9.1) sous la forme

$$\rho_{vk} = 1{,}90\sqrt{\frac{R_e}{|\sigma'_{max}|}}\,\frac{1}{B}. \tag{9.4}$$

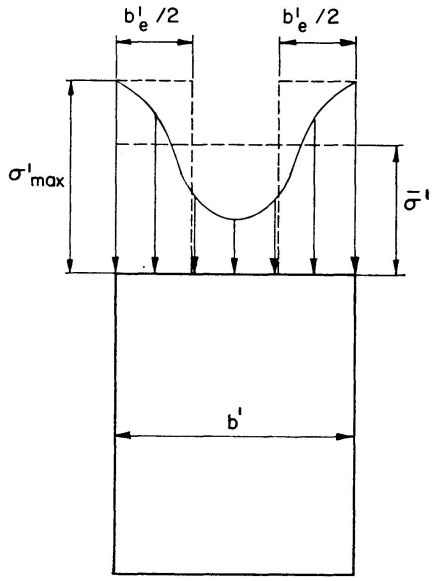

Fig. 4.

La théorie de première approximation développée dans le présent mémoire fournit pour la largeur effective, dans le cas d'une plaque isotrope parfaitement plane, l'expression

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sigma'_{cr}}{\sigma'_{max}}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right), \tag{8.4}$$

qui a été établie au paragraphe 8. En y remplaçant n par son expression (9.3), on peut mettre la formule (8.4) sous la forme

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{3{,}62\,R_e}{|\sigma'_{max}|\,B^2}\right). \tag{9.5}$$

Des expressions plus précises de ρ ont été obtenues par SOKOLOV en adoptant plusieurs paramètres dans la représentation des fonctions w et ϕ (cf. § 3). En analysant les résultats de SOKOLOV, PAPKOVITCH a obtenu (cf. [17]) la formule pratique

$$\rho_{Papkovitch} = 0{,}44+\frac{0{,}56}{n} = 0{,}44+\frac{2{,}03\,R_e}{|\sigma'_{max}|\,B^2}. \tag{9.6}$$

Enfin, à l'aide de la relation (9.3), les formules de FAULKNER et de WINTER (1.4) et (1.6) peuvent aisément être mises sous la forme

$$\rho_{Faulkner} = 1{,}052\sqrt{\frac{\sigma'_{cr}}{\sigma'_{max}}}-\frac{\sigma'_{cr}}{3{,}62\,\sigma'_{max}} = \frac{1{,}052}{\sqrt{n}}-\frac{0{,}276}{n}, \quad (n \geqq 0{,}276), \tag{9.7}$$

$$\rho_{Winter} = \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{0{,}250}{n}, \quad (n \geqq 0{,}25). \tag{9.8}$$

Les expressions (9.1), (8.4), (9.6), (9.7) et (9.8) sont représentées graphiquement sur l'abaque de la figure 5. On voit que la dispersion des diverses formules est assez considérable. C'est la formule (8.4) qui donne les résultats les plus plus optimistes, ce qui n'a rien d'étonnant, puisqu'elle est basée sur la méthode de Bubnov-Galerkin, qui donne des résultats erronés par excès et qu'en plus on suppose la plaque initialement parfaitement plane.

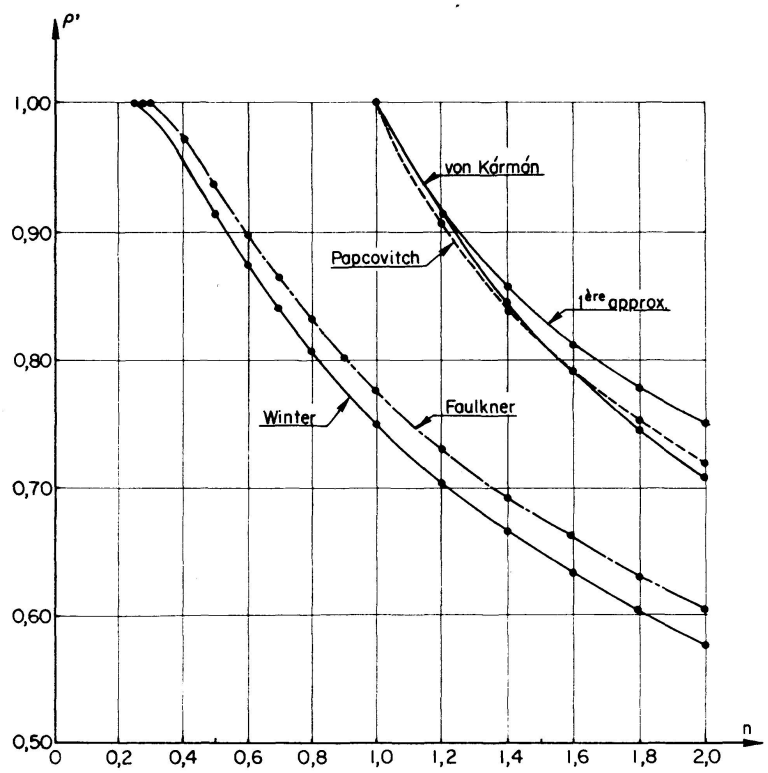

Fig. 5.

10. Correction due au caractère discontinu du raidissage

La théorie développée jusqu'à présent a supposé les raidisseurs «tartinés» continûment sur la table pour en faire une plaque matériellement orthotrope. Comme le révèle l'essai A 1 du professeur DUBAS, dont nous reproduisons ci-dessous (fig. 6) le diagramme des dilatations ϵ_x à diverses étapes du chargement, ce diagramme présente des festons qui correspondent aux déformations locales de la tôle entre raidisseurs adjacents.

10.1. Commençons par considérer le cas où les raidisseurs restent quasi-rectilignes jusqu'au stade de ruine (fig. 7). Alors, la correction est très simple. Quelle que soit la formule de largeur effective adoptée (cf. par. 9), on peut, à titre de première approximation, admettre que la contrainte aux bords de tous les panneaux partiels est la contrainte moyenne du panneau entier, $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_x$ (fig. 7). Avec cette hypothèse, la perte relative d'efficacité de tous les panneaux partiels est la même et vaut

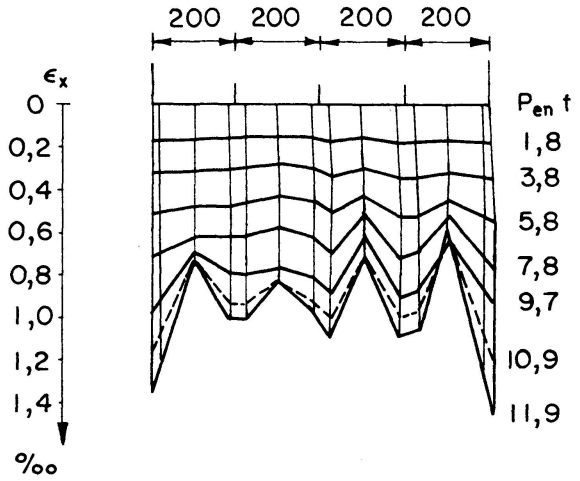

Fig. 6.

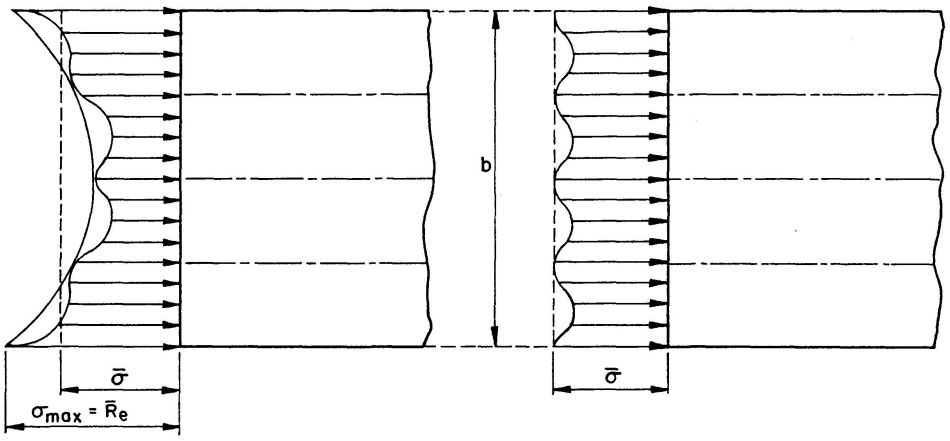

Fig. 7.

$$\frac{b'_e}{b'} = \frac{b'_e}{b'}(\bar{\sigma}).$$

Le rendement partiel dû au caractère discontinu du raidissage est, par définition, le rapport de l'effort de compression total transmis par le panneau raidi réel à l'effort analogue transmis par le panneau continu de substitution considéré dans la présente étude (cf. par. 2). Ce rendement partiel vaut, d'après la fig. 7:

$$\rho' = \frac{m\, b'_e(\bar{\sigma})\, \bar{\sigma}\, t + m\, \Omega_r\, \bar{\sigma}}{(m\, b'\, t + m\, \Omega_r)\, \bar{\sigma}} = \frac{\dfrac{b'_e(\bar{\sigma})}{b'} + \dfrac{\Omega_r}{b'\, t}}{1 + \dfrac{\Omega_r}{b'\, t}} \tag{10.1}$$

où la notation $b'_e(\bar{\sigma})$ spécifie que la largeur effective du sous-panneau doit être calculée pour une contrainte membranaire maximum aux bords de ce sous-panneau, σ'_{max}, égale à $\bar{\sigma}$.

Si, en particulier on adopte pour la largeur effective l'expression (1.4) préconisée par FAULKNER, il faut donc écrire cette formule sous la forme:

$$\frac{b'_e}{b'} = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{R_e}{|\bar{\sigma}|}} - \frac{1}{B^2}\frac{R_e}{|\bar{\sigma}|} \tag{10.2}$$

où $|\bar{\sigma}| = |\bar{\sigma}_x| = \rho_t R_e$, ρ_t étant calculable par la formule (8.3).

10.2. Si, au contraire, le raidissage est faible, la table comprimée présente une seule grande cloque. Les contraintes moyennes de compression dans chaque bande longitudinale de tôle sont différentes.

Dans ce cas, la répartition des contraintes σ_x dépend d'ailleurs de la section transversale considérée. Il est logique, comme dans la discussion du critère de ruine (par. 7) de se baser sur les contraintes $\bar{\sigma}_x(y)$ moyennes sur la longueur du panneau, donc sur les efforts unitaires moyens

$$\bar{N}_x(y) = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{+a/2} N_x\, dx.$$

D'après la formule (7.4), on a

$$\begin{aligned}\bar{N}_x(y) = &-\frac{4\pi^2}{b^2}A_2\cos\frac{2\pi y}{b} + p_x + (K_1\beta_1^2\operatorname{ch}\beta_1 y + K_2\beta_2^2\operatorname{ch}\beta_2 y)\int_{-a/2}^{+a/2}\cos\frac{2\pi x}{a}dx = \\ &-\frac{4\pi^2}{b^2}A_2\cos\frac{2\pi y}{b} + p_x.\end{aligned} \tag{10.3}$$

La section d'acier par unité de largeur étant

$$t(1+m\delta),$$

on a

$$\bar{\sigma}_x = \frac{N_x}{t(1+m\delta)}.$$

Si le nombre de raidisseurs excède 10, on peut parler d'une répartition continue des largeurs effectives, qui varient en travers comme

$$\frac{b'_e}{b'}(y) = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{R_e}{|\bar{\sigma}_x(y)|}} - \frac{1}{B^2}\frac{R_e}{|\bar{\sigma}_x(y)|} \tag{10.4}$$

et adopter comme largeur effective «équivalente» l'expression

$$\left(\frac{b'_e}{b'}\right)_{équ.} = \frac{1}{b}\int_{-a/2}^{+a/2}\frac{b'_e}{b'}(y)\,dy. \tag{10.5}$$

L'intégrale ne semblant pas pouvoir s'effectuer par les fonctions élémentaires, il faut calculer les valeurs de b'_e/b' pour un certain nombre d'ordonnées y régulièrement espacées, puis effectuer l'intégrale (10.5) numériquement par la formule des trapèzes ou de Simpson. L'expression du rendement partiel s'écrit alors

$$\rho' = \frac{\left(\frac{b'_e}{b'}\right)_{équ.} + \frac{\Omega_r}{b't}}{1+\frac{\Omega_r}{b't}}. \tag{10.6}$$

Quelle que soit la formule (10.1) ou (10.6) employée pour ρ', le rendement global de la table raidie, ρ_g, est clairement donné par l'expression

$$\boxed{\rho_g = \rho_t \rho'} \tag{10.7}$$

ou ρ_t reste donné par l'expression (8.3).

La contrainte moyenne de ruine est alors donnée par

$$\boxed{\bar{\sigma}_u = \rho_g R_e .} \tag{10.8}$$

11. Rendement du caisson entier

Le rendement qui intéresse le projeteur d'un pont en caisson n'est pas la perte de résistance à la compression de la table comprimée, mais bien la perte sur le moment fléchissant de ruine.

Considérons donc la section en caisson rectangulaire représentée à la fig. 8.

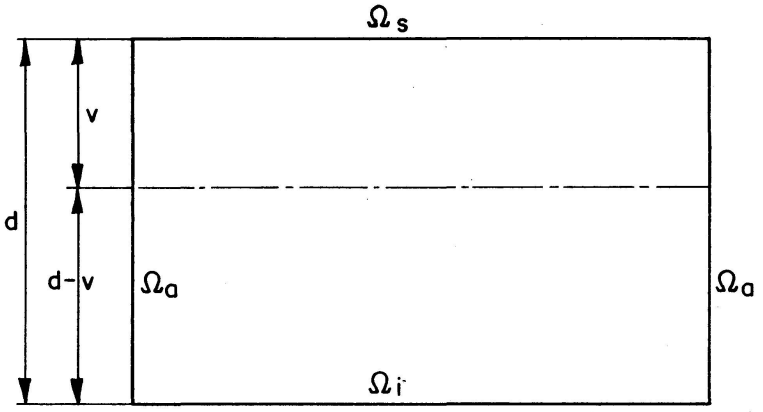

Fig. 8.

Nous pouvons calculer le rendement de ce caisson en supposant successivement, que le caisson est, à la ruine:

en régime élastique,
en régime plastique.

11.1 Rendement du caisson en régime élastique

La géométrie donne, en négligeant l'inertie propre des semelles:

$$\begin{aligned} \Omega_t &= \Omega_s + \Omega_i + 2\Omega_a, \qquad v = \frac{1}{\Omega_t}(\Omega_i d + d\Omega_a), \\ I &= \Omega_s v^2 + \Omega_i (d-v)^2 + \frac{\Omega_a d^2}{6} + 2\Omega_a \left(\frac{d}{2} - v\right)^2 . \end{aligned} \tag{11.1}$$

Si nous supposons que, tant dans le caisson parfait de référence que dans le caisson réel où la table comprimée est en régime postcritique, la fibre la plus

sollicitée est la fibre supérieure, le moment de ruine du caisson parfait de référence est

$$M_p = \bar{R}_e \frac{I}{v} = \bar{R}_e \frac{I(\Omega_s)}{v(\Omega_s)},$$

tandis que le moment de ruine du caisson réel, où la table comprimée a l'aire effective

$$\Omega_s^e = \Omega_s \rho_g,$$

vaut

$$M_u^{él} = \bar{R}_e \frac{I(\Omega_s^e)}{v(\Omega_s^e)}.$$

Le rendement *élastique* du caisson entier vaut alors, par définition:

$$\rho_{caisson}^{élastique} = \frac{M_u^{él}}{M_p} = \frac{I(\Omega_s^e)}{I(\Omega_s)} \frac{v(\Omega_s)}{v(\Omega_s^e)}. \tag{11.2}$$

Pour situer le rendement élastique du caisson par rapport à celui de la table comprimée, supposons que les âmes aient une aire Ω_a négligeable. Alors, on trouve de suite

$$I = \frac{\Omega_s \Omega_i}{\Omega_s + \Omega_i} d^2, \qquad v = \frac{\Omega_i d}{\Omega_s + \Omega_i}$$

d'où

$$M_p = \bar{R}_e \Omega_s d, \qquad M_u^{él} = \bar{R}_e \Omega_s^e d$$

et

$$\rho_{caisson}^{élastique} = \frac{\Omega_s^e}{\Omega_s} = \rho_g. \tag{11.3}$$

Dans l'autre cas extrême où les semelles sont négligeables par rapport aux âmes, un affaiblissement de la semelle comprimée n'affectera pas le rendement du caisson, qui restera égal à l'unité.

Par raison de continuité, dans les caissons réels où les âmes interviennent pour une dizaine de pour cent dans la résistance à la flexion, nous pouvons conclure que le rendement du caisson entier est supérieur de quelque un ou deux pour cent au rendement de la table comprimée.

Si l'on tient compte, à présent, de la perte de rendement des âmes, dont les parties comprimées sont courbées horizontalement par compatibilité avec les déformations de la table, on arrive à la conclusion que, pratiquement:

$$\rho \text{ table comprimée} = \rho \text{ caisson}, \tag{8.6}$$

de sorte qu'il est pratiquement sans intérêt d'analyser mathématiquement le caisson entier, la complication des mathématiques étant hors de proportion avec le gain de précision attendu.

11.2. Rendement du caisson en régime parfaitement plastique

L'axe neutre en régime parfaitement plastique est déterminé par la condition d'équilibre de translation $\int_\Omega \sigma \, d\Omega = 0$. Des calculs élémentaires déjà faits

par CALDWELL donnent (fig. 9) pour le moment ultime:

$$M_u^{pl} = \bar{R}_e d \left\{ \rho_t \Omega_s \gamma + 2\Omega_a \left[\frac{1}{2} - \gamma + \gamma^2 \frac{1+\rho_a}{2} \right] + \Omega_i (1-\gamma) \right\} \tag{11.4}$$

où la position de l'axe neutre plastique est définie par

$$\gamma = \frac{v}{d} = \frac{2\Omega_a + \Omega_i - \rho_t \Omega_s}{2\Omega_a (1+\rho_a)}. \tag{11.5}$$

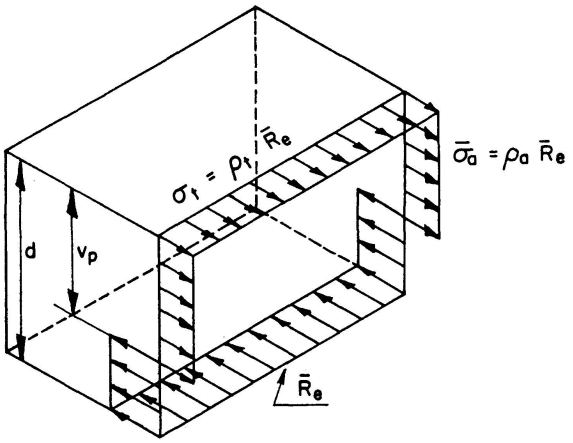

Fig. 9.

12. Comparaison de la présente théorie avec les essais effectués par Dubas

DUBAS [5] a exécuté deux essais de flexion pure jusqu'à la ruine sur des poutres en caisson dont la section droite est représentée à la figure 10.

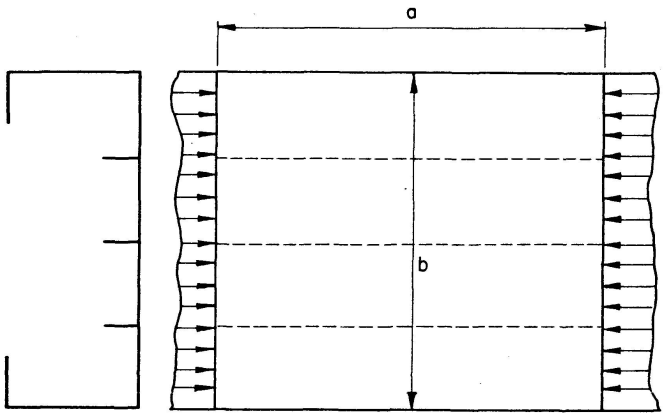

Fig. 10.

12.1. Essai A 1 de Dubas [5]

Le panneau raidi expérimenté a les dimensions suivantes:

$$a = 900 \text{ mm},$$
$$b = 800 \text{ mm},$$
$$t = 3{,}2 \text{ mm}.$$

La tôle est raidie par trois raidisseurs $60 \times 2{,}9$ mm entredistants de 200 mm. La limite apparente d'élasticité vaut 29,5 kg/mm². La flèche initiale observée est de 5 mm. On admet $E = 21\,000$ kg/mm² et $\nu = 0{,}3$.

On calcule successivement:

a) Rapport des dimensions: $\alpha = 1{,}125$

b) Minceur: $\lambda = 250$

c) Rigidités extensionnelles:

$$\begin{aligned} D = D_y &= 7{,}385 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}, \\ D_x &= 9{,}212 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}, \\ \bar{D} &= 6{,}206 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}. \end{aligned}$$

d) Position des axes des nervures:

$$\begin{aligned} e_x &= 6{,}267 \text{ mm}, \\ e_y &= 0. \end{aligned}$$

e) Rigidités flexionnelles et torsionnelles:

$$\begin{aligned} B &= B_y = 6{,}302 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}, \\ B_x &= 2{,}017 \cdot 10^7 \text{ kg/mm}, \\ B_{xy} &= 1{,}976 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}, \\ B_{yx} &= 0, \\ \bar{B}_x &= 1{,}989 \cdot 10^7 \text{ kg/mm}, \\ \bar{B}_y &= 6{,}30 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}, \\ \bar{C} &= 7{,}29 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}. \end{aligned}$$

La contrainte critique de voilement du panneau continu de substitution est donnée par (7.7) et vaut

$$\sigma_{cr} = -60{,}4 \text{ kg/mm}^2.$$

Cette contrainte, bien que supérieure à R_e, doit conserver cette valeur pour l'étude du critère de ruine et du rendement.

On calcule ensuite les paramètres caractéristiques non dimensionnels donnés par (7.9), (5.12), (5.16), (5.5).

Le critère de ruine s'écrit alors d'après (7.10)

$$\frac{\epsilon}{\epsilon + \epsilon_0} + 0{,}00922\, \epsilon\, (\epsilon + 2\, \epsilon_0) = 0{,}488$$

avec

$$\epsilon_0 = \frac{f_0}{t} = \frac{5}{3{,}2} = 1{,}56.$$

La seule solution significative de cette équation est

$$\epsilon = 1{,}22.$$

Le rendement de la table de compression donné par (8.3) vaut

$$\rho_t = 0{,}942.$$

Ce rendement élevé nous permet de substituer à la distribution réelle des efforts pour la détermination du rendement partiel des sous-panneaux, une répartition uniforme de sorte qu'on retrouve le cas examiné au par. 10.1.

Puisque la contrainte critique de voilement d'un panneau partiel de tôle isotrope vaut d'après (9.2)

$$\sigma'_{cr} = -19{,}45 \text{ kg/mm}^2$$

et correspond à un indice de postcriticité

$$n = \frac{29{,}5}{19{,}45} = 1{,}52,$$

on peut appliquer la formule de FAULKNER (1.4) dans laquelle la contrainte maximum σ'_{max} vaut

$$\sigma'_{max} = \rho_t R_e = -27{,}75 \text{ kg/mm}^2$$

et

$$B = 2{,}35.$$

Dès lors, on obtient

$$\frac{b'_e}{b} = 0{,}684.$$

Le rendement partiel ρ' vaut donc selon (10.1)

$$\rho' = 0{,}753.$$

Le rendement global du panneau est donc

$$\rho_g = 0{,}753 \times 0{,}942 = 0{,}710$$

et la contrainte ultime moyenne

$$\bar{\sigma}_u = -21 \text{ kg/mm}^2.$$

La valeur obtenue $\rho_g = 0{,}710$ est en très bon accord avec le résultat de DUBAS (5) $\rho_g = 0{,}69$.

12.1. Essai A 2 de Dubas [5]

Le panneau raidi a les caractéristiques suivantes:

$$a = 900 \text{ mm},$$
$$b = 800 \text{ mm},$$
$$t = 3{,}3 \text{ mm}.$$

Les raidisseurs, au nombre de trois, sont constitués de plats 36×3 mm, entre-distants de 200 mm. La limite apparente d'élasticité R_e vaut 30 kg/mm². La

flèche initiale observée est encore de 5 mm. On admet $E = 21\,000$ kg/mm² et $\nu = 0{,}3$.

Les calculs se conduisent comme pour l'exemple précédent

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 1{,}125, \\
\lambda &= 242{,}4, \\
D &= D_y = 7{,}615 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}, \\
D_x &= 8{,}749 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}, \\
\bar{D} &= 7{,}215 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}, \\
e_x &= 2{,}55 \text{ mm}, \\
e_y &= 0, \\
B &= B_y = 6{,}911 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}, & \bar{B}_y &= 6{,}911 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}, \\
B_x &= 5{,}104 \cdot 10^6 \text{ kg/mm}, & \bar{B}_x &= 5{,}056 \cdot 10^6 \text{ kg/mm}, \\
B_{xy} &= 1{,}312 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}, \\
B_{yx} &= 0, & \bar{C} &= 7{,}567 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}.
\end{aligned}
$$

La contrainte critique de voilement du panneau continu de substitution vaut

$$\sigma_{cr} = -17{,}00 \text{ kg/mm}^2.$$

Le critère de ruine s'écrit donc

$$\frac{\epsilon}{\epsilon + \epsilon_0} + 0{,}0354\, \epsilon\, (\epsilon + 2\, \epsilon_0) = 1{,}764$$

avec

$$\epsilon_0 = \frac{5}{3{,}3} = 1{,}515.$$

La soclution de cette équation fournit

$$\epsilon = 3{,}94.$$

On peut remarquer que la flèche totale au milieu du panneau vaut

$$f_t = (\epsilon + \epsilon_0)\, t = 18 \text{ mm},$$

alors que la valeur expérimentale est d'environ 18,2 mm [5].

Le rendement de la table de compression vaut

$$\rho_r = 0{,}684$$

et montre que la distribution transversale des efforts est loin d'être uniforme. Dès lors, pour calculer le rendement partiel des sous-panneaux, on doit procéder comme expliqué au par. 10.2.

On pourra à cet effet utiliser la formule de FAULKNER, puisque la contrainte critique de voilement du sous-panneau isotrope est de $-20{,}65$ kg/mm² et correspond à un indice de postcriticité $n = 1{,}45$.

La distribution des efforts $\bar{N}_x$ est donnée par (10.3) où A_2 et p_x sont fournis par les relations (5.3b) et (6.2) et valent

$$A_2 = -59{,}07 \cdot 10^4,$$
$$p_x = -73{,}57 \text{ kg/mm}.$$

On obtient donc

$$\bar{N}_x = -73{,}57 + 36{,}44 \cos \frac{2\pi y}{b}.$$

Les ordonnées moyennes pour chacun des sous-panneaux valent:

a) Panneaux extérieurs

$$\bar{\bar{N}}_x^{ext} = \frac{4}{b}\left[-73{,}57\frac{b}{4} + 36{,}44\int_{b/4}^{b/2} \cos\frac{2\pi y}{b}\,dy\right] =$$
$$-73{,}57 - 23{,}21 = -96{,}78 \text{ kg/mm},$$
$$\bar{\bar{\sigma}}_x^{ext} = -25{,}20 \text{ kg/mm}^2.$$

b) Panneaux intérieurs

$$\bar{\bar{N}}_x^{int} = \frac{4}{b}\left[-73{,}57\frac{b}{4} + 36{,}44\int_{0}^{b/4} \cos\frac{2\pi y}{b}\,dy\right] =$$
$$-73{,}57 + 23{,}21 = -50{,}36 \text{ kg/mm},$$
$$\bar{\bar{\sigma}}_x^{int} = -13{,}11 \text{ kg/mm}^2.$$

On peut donc calculer les largeurs effectives de tôle isotrope par (1.4) avec

$$B = 2{,}29$$

et
$$\sigma'_{max} = -25{,}20 \text{ kg/mm}^2 \quad \text{(panneaux extérieurs)}$$
$$= -13{,}11 \text{ kg/mm}^2 \quad \text{(panneaux intérieurs)}$$

On obtient ainsi
$$\left(\frac{b'_e}{b'}\right)_{ext} = 0{,}724,$$
$$\left(\frac{b'_e}{b'}\right)_{int} = 0{,}881.$$

Le rapport
$$\left(\frac{b'_e}{b'}\right)_{équ.} = \frac{0{,}724 + 0{,}881}{2} = 0{,}803$$

et le rendement partiel est donc

$$\rho' = 0{,}831$$

d'où
$$\rho_g = 0{,}684 \times 0{,}831 = 0{,}568$$

et
$$\bar{\sigma}_u = -17 \text{ kg/mm}^2$$

Dubas obtient expérimentalement un rendement ρ_g nettement plus faible, de 0,39. Les nouveaux essais que nous comptons réaliser prochainement nous permettront nous l'espérons, d'éclaircir la raison de ce désaccord.

13. Application de la présente théorie au pont sur le Danube à Vienne

La théorie développée ci-avant permet également d'expliquer l'accident survenu, le 9 novembre 1969, au pont en caisson sur le Danube à Vienne.

Il résulte du rapport des experts [2] que la cause primaire des dégats est le voilement d'un panneau des caissons dans une des travées latérales du pont (Fig. 11).

Les données nécessaires au calcul et à la comparaison nous ont été obligeamment communiquées par le Professeur SATTLER, que nous tenons à remercier vivement ici.

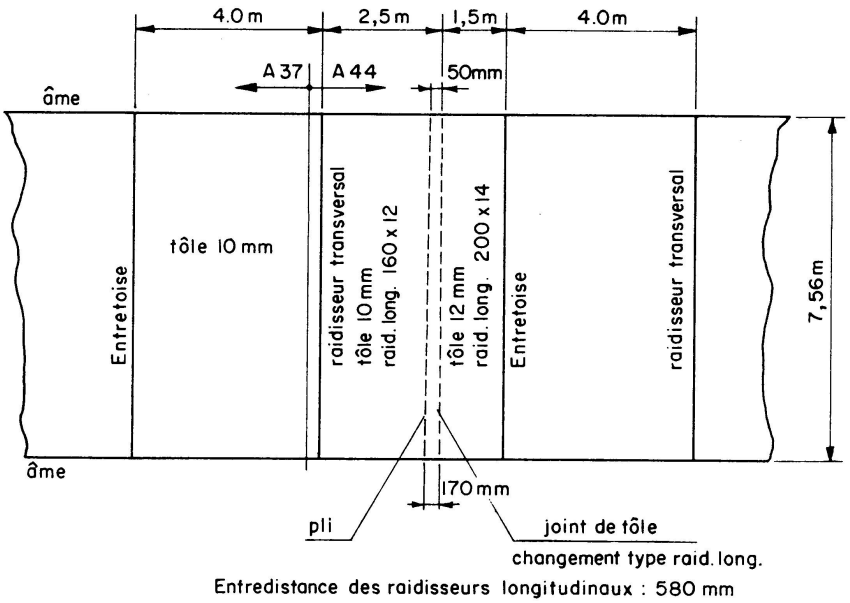

Fig. 11.

Le panneau accidenté devait présenter une courbure initiale particulièrement élevée par suite du soudage bout à bout de la tôle et des raidisseurs, qui changent de section dans ce panneau.

Le calcul exact de la performance de ce panneau étant impossible, nous y substituons, comme les experts, un panneau simplifié.

Ce panneau a les dimensions suivantes:

$$a = 8000 \text{ mm},$$
$$b = 7540 \text{ mm},$$
$$t = 10 \quad \text{mm}.$$

Les raidisseurs longitudinaux, au nombre de 12, sont entredistants de 580 mm, et constitués de plats 160×12. Le seul raidisseur transversal est médian et ses caractéristiques estimées d'après les renseignements en notre possession sont: section 8000 mm² et rigidité flexionnelle unitaire $B_y = 3 \cdot 10^9$ kgmm.

La limite élastique est de 29 kg/mm². On admet en outre

$$E = 21\,000 \text{ kg/mm}^2$$
$$\nu = 0{,}3.$$

La flèche initiale est d'abord prise égale à l'épaisseur de la tôle, donc $\epsilon_0 = 1$.

Pour étudier ce problème, on doit procéder en deux étapes, c'est-à-dire étudier:

a) le panneau complet en admettant que le raidisseur transversal est entraîné lors du voilement;
b) un des sous-panneaux en supposant que le raidisseur transversal constitue une ligne nodale pour le voilement.

On donne ci-après en parallèle les résultats des deux calculs:

Panneau entier		*Sous-panneaux*	
α	$= 1{,}058$	α	$= 0{,}530$
D	$= 23{,}077 \cdot 10^4$ kg/mm	D	$= 23{,}077 \cdot 10^4$ kg/mm
D_x	$= 30{,}030 \cdot 10^4$ kg/mm	D_x	$= 30{,}030 \cdot 10^4$ kg/mm
D_y	$= 27{,}28 \cdot 10^4$ kg/mm	D_y	$= 23{,}077 \cdot 10^4$ kg/mm
$\bar{D}$	$= 20{,}067 \cdot 10^4$ kg/mm	$\bar{D}$	$= 21{,}0 \cdot 10^4$ kg/mm
e_x	$= 19{,}7$ mm	e_x	$= 19{,}5$ mm
e_y	$= 58{,}7$ mm	e_y	$= 0$
B	$= 1{,}923 \cdot 10^6$ kgmm	B	$= 1{,}923 \cdot 10^6$ kgmm
B_x	$= 5{,}36 \cdot 10^8$ kgmm	B_x	$= 5{,}36 \cdot 10^8$ kgmm
B_y	$= 30{,}00 \cdot 10^8$ kgmm	B_y	$= 1{,}923 \cdot 10^6$ kgmm
B_{xy}	$= 1{,}287 \cdot 10^6$ kgmm	B_{xy}	$= 1{,}287 \cdot 10^6$ kgmm
B_{yx}	$= 0{,}540 \cdot 10^6$ kgmm	B_{yx}	$= 0$
$\bar{B}_x$	$= 5{,}29 \cdot 10^8$ kgmm	$\bar{B}_x$	$= 5{,}27 \cdot 10^8$ kgmm
$\bar{B}_y$	$= 29{,}42 \cdot 10^8$ kgmm	$\bar{B}_y$	$= 1{,}923 \cdot 10^6$ kgmm
$\bar{C}$	$= 87{,}94 \cdot 10^6$ kgmm	$\bar{C}$	$= 2{,}566 \cdot 10^6$ kgmm
σ_{cr}	$= -51{,}7$ kg/mm²	σ_{cr}	$= -24{,}6$ kg/mm²

Le critère de ruine s'écrit:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon + \epsilon_0} + 11{,}30 \cdot 10^{-4} \epsilon (\epsilon + 2\epsilon_0) = 0{,}562, \qquad \frac{\epsilon}{\epsilon + \epsilon_0} + 10^{-2} \epsilon (\epsilon + 2\epsilon_0) = 1{,}177.$$

La solution ϵ vaut

$$\epsilon = 1{,}25, \qquad \epsilon = 4{,}95.$$

Le rendement de la table de compression est de

$$\rho_t = 0{,}995, \qquad \rho_t = 0{,}811.$$

La contrainte critique de la tôle isotrope

$$\sigma_{cr} = -\frac{75920 \times 10^2}{(580)^2} = -22{,}6 \text{ kg/mm}^2$$

est telle que l'indice de postcriticité

$$n = \frac{29}{22{,}6} = 1{,}28$$

permet d'appliquer la formule (1.4) de FAULKNER pour calculer la largeur effective de tôle.

On calcule alors le paramètre

$$B = 2{,}15$$

et on admet que, pour chacun des sous-panneaux, $\sigma'_{max} = \rho_t R_e$, donc

$$\sigma'_{max} = -28{,}9 \text{ kg/mm}^2, \qquad \sigma'_{max} = -23{,}5 \text{ kg/mm}^2,$$
$$\frac{b'_e}{b'} = 0{,}718, \qquad \frac{b'_e}{b'} = 0{,}797,$$
$$\rho' = 0{,}789, \qquad \rho' = 0{,}848.$$

On peut alors calculer le rendement global

$$\rho_g = 0{,}785, \qquad \rho_g = 0{,}688$$

et la contrainte ultime moyenne

$$\bar{\sigma}_u = -22{,}77 \text{ kg/mm}^2, \qquad \bar{\sigma}_u = -19{,}95 \text{ kg/mm}^2.$$

Le rendement local ρ' est évidemment (cf. formule (1.4)) d'autant plus faible que la contrainte σ'_{max}, et par conséquent le rendement ρ_t, est plus élevé.

Quant au rendement global $\rho_g = \rho_t \rho'$, on peut aisément le mettre sous la forme:

$$\rho_g = \frac{\frac{2}{B}\sqrt{\rho_t} + \frac{\Omega_r}{b' t}\rho_t - \frac{2}{B^2}}{1 + \frac{\Omega_r}{b' t}},$$

en remplaçant, dans l'expression de ρ', σ'_{max}/R_e par ρ_t.

Cette formule montre que les rendements globaux ρ_g se classent toujours dans le même ordre que les rendements ρ_t.

On aurait donc pu, à partir de l'établissement des valeurs de ρ_t, se dispenser d'achever les calculs pour le panneau entier.

On a également effectué le calcul du sous-panneau pour des valeurs plus faibles de la flèche initiale, à savoir $\epsilon_0 = 0{,}5$ et $\epsilon = 0$ (plaque parfaitement plane). Les principaux résultats sont repris au tableau ci-après, en regard des valeurs obtenues pour $\epsilon_0 = 1$.

Grandeurs	$\epsilon_0 = 1$	$\epsilon_0 = 0{,}5$	$\epsilon_0 = 0$
ϵ	4,95	4,75	4,21
ρ_t	0,811	0,850	0,903
σ'_{max} (kg/mm²)	−23,52	−24,65	−26,19
b'_e/b	0,797	0,757	0,741
ρ'	0,848	0,817	0,805
ρ_g	0,688	0,695	0,727
$\bar{\sigma}_u$ (kg/mm²)	−19,95	−20,16	−21,08

Si l'on adoptait, conformément à certaines recommandations, une flèche initiale valant 1/1000 de la largeur du panneau, on aurait $f_0 = 7{,}56$ mm, ce qui correspond à $\epsilon_0 = 0{,}756$.

Des informations qui nous ont été communiquées par le Professeur SATTLER, il ressort que:

a) La contrainte critique du panneau entier, calculée par la théorie linéaire du voilement, valait $-22{,}1$ kg/mm².

b) La contrainte admissible de ce panneau pendant la période de montage était, selon les Normes Autrichiennes:

$$\sigma_{ad} = \frac{\sigma_{cr}}{1{,}25} = -17{,}6 \text{ kg/mm}^2$$

et la contrainte maximum sous poids mort calculée par le Bureau d'Etudes du pont était inférieure à cette contrainte admissible.

c) A cause d'erreurs sur la distribution du poids mort, la contrainte réelle de poids mort, au moment de l'accident était, selon le Professeur SATTLER:

$$\sigma_{pm} = -19{,}8 \text{ kg/mm}^2.$$

d) Les effets thermiques estimés par le Professeur SATTLER ont provoqué une contrainte supplémentaire de 2,6 kg/mm², de sorte que la contrainte totale au moment de l'accident était de

$$\sigma_t = -22{,}4 \text{ kg/mm}^2.$$

Comme notre théorie donne, pour une flèche initiale nulle

$$\bar{\sigma}_u = -21{,}1 \text{ kg/mm}^2$$

et pour une flèche initiale vraisemblable de 0,5 à 1 fois l'épaisseur de la tôle,

$$\bar{\sigma}_u \cong -20 \text{ kg/mm}^2$$

nous considérons qu'elle fournit l'explication de la ruine.

Ces calculs montrent que la contrainte de ruine est, dans le cas actuel, inférieure à la contrainte critique de voilement donnée par la théorie linéaire. Par conséquent, si l'on veut s'en tenir à cette théorie, il faut augmenter au plus tôt les coefficients de sécurité pour les différents cas de sollicitation.

Quant à nous, nous préconisons d'évaluer la résistance ultime $\bar{\sigma}_u$ des pan-

neaux raidis par la théorie développée dans ce mémoire, puis d'adopter comme contrainte admissible

$$\sigma_{ad} = \frac{\bar{\sigma}_u}{s},$$

s étant le coefficient de sécurité correspondant au cas de sollicitation considéré (c'est-à-dire, en Belgique, $s = 1{,}5$ pour le cas I de sollicitation et $s = 1{,}33$ pour le cas II).

Nous avons également calculé la charge ultime du panneau comme indiqué au par. 1 en considérant que le raidisseur plus une bande de tôle de largeur effective b'_e périt par flambement, pour une contrainte moyenne σ'_{max} dans la tôle égale à la contrainte de flambement σ^{fl}_{cr} de la pièce comprimée.

On remarquera que b'_e dépend de σ'_{max} par la formule de FAULKNER et que d'autre part, σ'_{max} dépend des caractéristiques de la pièce comprimée et, dès lors, de b'_e; on doit donc procéder par approximations successives jusqu'à ce que la valeur σ'_{max} prise en compte dans le calcul coïncide avec la valeur de la contrainte critique de flambement σ^{fl}_{cr} de la pièce comprimée. On a donc les relations

$$\begin{aligned}
B &= 2{,}15\,,\\
\frac{b'_e}{b} &= 0{,}928\sqrt{\frac{29}{|\sigma'_{max}|}} - 0{,}215\,\frac{29}{|\sigma'_{max}|}\,,\\
g &\quad \text{(distance du centre de gravité au plan moyen de la tôle)}\\
&= \frac{1920 \times 85}{1920 + 10\,b'_e} \quad (b'_e \text{ en mm})\,,\\
I &= \frac{12 \times \overline{160}^3}{12} + 10\,b'_e g^2 + 1920\,(85 - g)^2\,,\\
\Omega &= 1920 + 10\,b'_e\,,\\
i &= \sqrt{\frac{I}{\Omega}}\,,\\
\lambda &= \frac{4000}{i}\,,\\
\sigma^{fl}_{cr} &= -29\,\phi_{fl}\ \text{kg/mm}^2\,.
\end{aligned}$$

Le coefficient de réduction ϕ_{fl} a été déterminé à partir de la courbe C proposée par la Commission 8 de la Convention Européenne de la Construction Métallique, valable pour les profils composés par soudage [27].

Après quelques tâtonnements, on aboutit à:

$$\sigma'_{max} = \sigma^{fl}_{cr} \cong -14{,}5\ \text{kg/mm}^2$$

et

$$b'_e = 509\ \text{mm}\,.$$

On constate qu'une telle méthode de calcul conduit dans le cas présent à un vrai gaspillage d'acier; l'économie réalisée par l'application de la théorie proposée est de l'ordre de 39%.

Conclusions

Les essais du professeur DUBAS [5] et les considérations développées par nous ailleurs [6] ont montré clairement que l'application de la théorie linéaire du voilement avec les coefficients de sécurité classiques

$$s = 1{,}35 \text{ dans le cas I de sollicitation,}$$
$$s = 1{,}25 \text{ dans le cas II de sollicitation}$$

(montage p. ex.) à des poutres de pont en caisson raidies est dangereuse parce que la réserve de résistance postcritique est nettement plus faible que dans les poutres à âme pleine de sorte que la méthode donne une sécurité à la ruine nettement insuffisante.

Il importe cependant de ne pas tomber d'un extrême dans l'autre. Si l'on fait abstraction de toute réserve de résistance postcritique, on est amené à concevoir la résistance ultime de la plaque raidie comme étant la somme des charges critiques de flambement des colonnes formées des raidisseurs longitudinaux et d'une bande de tôle égale à la valeur de la largeur effective.

Les exemples numériques présentés au paragraphe 13 montrent que cette méthode, si elle donne toute sécurité, conduit à un réel gaspillage d'acier.

L'objet du présent mémoire est le développement d'une théorie non linéaire des plaques raidies formant membrures comprimées des grands ponts en caisson en acier, qui prenne en compte la réserve de résistance postcritique de ces plaques.

L'analyse du problème (par. 2) montre que la réserve de *résistance plastique* est très faible dans le type de structure considéré et qu'on peut obtenir une valeur suffisamment précise de la charge de ruine par une théorie élastique en exprimant que la contrainte longitudinale moyenne de membrane le long des bords latéraux de la plaque atteint la limite élastique de compression simple $R'_e = -R_e$.

Dans notre esprit, cette théorie représente l'équivalent, pour les ponts en caisson, des méthodes de dimensionnement à la ruine des poutres à âme pleine, à savoir le modèle de Basler-Thürlimann et les perfectionnements divers qui lui ont été apportés au cours du Colloque de Londres en mars 1971.

Nous préconisons de dimensionner les ponts en caisson en adoptant, vis-a-vis de la contrainte de ruine $\bar{\sigma}_u$ déterminée par notre théorie, la même sécurité que celle qui est imposée par la Norme vis-à-vis de la limite élastique de l'acier pour le cas de sollicitation considéré.

Les exemples numériques d'application développés aux paragraphes 12 et 13 montrent:

1. que la théorie proposée permet d'expliquer l'accident survenu, le 9 novembre 1969, au pont sur le Danube à Vienne;
2. que cette théorie est en accord satisfaisant avec le très petit nombre de résultats expérimentaux connus.

Ces résultats sont cependant en nombre nettement insuffisant pour constituer un test réellement valable. C'est pourquoi, vu l'actualité du problème, il est urgent d'entreprendre des essais jusqu'à la ruine sur poutres en caisson raidies ayant les proportions des grands ponts réalisés ces dernières années et d'enregistrer soigneusement un maximum d'informations sur le comportement de ces poutres dans le domaine postcritique et surtout au voisinage de la ruine.

Un obstacle à l'application pratique de la présente théorie est sa complexité mathématique. Il ne nous est pas paru possible de réduire cette théorie à des abaques simples de dimensionnement.

Si l'on dispose d'un petit ordinateur, on peut utiliser le petit programme de calcul que nous avons élaboré et obtenir la solution en quelques secondes. Ce programme, écrit en FORTRAN IV, sera envoyé à tout lecteur qui en fera la demande.

Par ailleurs, on peut simplifier partiellement le calcul manuel en remplaçant les rigidités modifiées selon PFLUGER par leurs expressions classiques. Divers exemples numériques nous ont en effet montré que l'erreur qui en résulte est généralement très faible.

Annexe

Théorie non-linéaire des plaques membranes orthotropes légèrement courbes à nervures dissymétriques

1. Introduction

La théorie non-linéaire des plaques planes orthotropes à nervures dissymétriques est due à PFLUGER [24]. Nous en avons donné un exposé en 1959 [25] dans les «Mémoires de l'A.I.P.C.» en vue:

a) de montrer que ce type de plaques n'obéit pas à l'équation classique de HUBER [22]

$$B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2C \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \tag{1.1}$$

gouvernant les plaques à *matériau* orthotrope; en particulier, il n'a pas de plan moyen déterminé;

b) d'essayer néanmoins d'obtenir, par des considérations énergétiques, les valeurs moyennes des rigidités flexionnelles qu'il convient d'introduire dans l'équation de HUBER (1.1) afin d'obtenir les meilleurs résultats numériques dans l'analyse, par cette équation, d'un pont à poutres multiples.

Dans la présente Annexe, nous nous fixons comme buts:

a) d'étendre la théorie de PFLUGER en tenant compte à la fois des contraintes de membrane et d'une légère courbure initiale de la tôle isotrope;
b) de déterminer, par cette théorie, les expressions des rigidités extensionnelles et flexionnelles qu'il convient d'introduire dans les équations généralisant à la fois l'équation (1.1) de HUBER et celles de VON KÁRMÁN-MARGUERRE, afin d'obtenir les meilleurs résultats numériques dans l'analyse, par ces équations, de la table raidie comprimée d'une grande poutre en caisson;
c) d'évaluer, par des calculs numériques comparatifs, l'erreur commise par l'introduction des diverses simplifications discutées en détail au paragraphe 2 du mémoire.

2. *Equations fondamentales*

2.1. *Hypothèses de calcul*

On analyse ci-après le comportement d'une dalle isotrope renforcée par deux familles orthogonales de nervures identiques et régulièrement espacées, disposées d'un seul côté de cette dalle, et qui peuvent être faites d'un autre matériau que la dalle elle-même (Fig. A. 1) ou même de plusieurs matériaux.

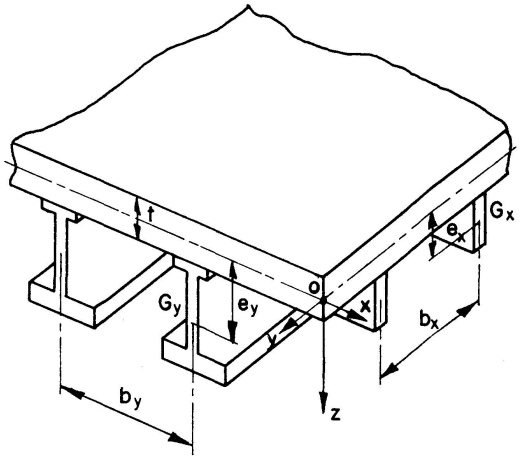

Fig. A. 1.

Les hypothèses adoptées ci-après sont les mêmes que celles mises à la base de la théorie des plaques membranes par VON KÁRMÁN et MARGUERRE:

1. Les matériaux composant la plaque nervurée obéissent à la loi de HOOKE.
2. Les déformations de flexion obéissent à l'hypothèse de BERNOULLI, selon laquelle des sections planes faites normalement au feuillet moyen de la dalle restent planes et perpendiculaires à ce feuillet après déformation.
3. On néglige le gauchissement de ces sections provoqué par les contraintes de cisaillement.
4. Les déplacements des points du feuillet moyen perpendiculairement à ce feuillet sont du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la dalle, de sorte que les extensions de ce feuillet ne peuvent plus être négligés.

En plus de ces quatre hypothèses, nous admettons:

5. Que les efforts de cisaillement parallèles au feuillet moyen sont repris exclusivement par la dalle isotrope; cette hypothèse est d'autant mieux vérifiée que les nervures sont plus minces dans le sens parallèle à la plaque.
6. Que, pour l'évaluation des moments de torsion dans la plaque, les nervures peuvent être supposées détachées de la dalle isotrope.
7. Que les effets provenant du gauchissement des sections droites des nervures sont négligeables, de sorte que ces nervures suivent en torsion les lois de la torsion uniforme selon Saint-Venant.

2.2. Notations

2.2.1. *Les axes coordonnés* sont disposés comme suit: Le plan $z=0$ est le plan moyen de la dalle isotrope; les axes x et y sont parallèles aux deux familles de nervures.

Les composantes du déplacement d'un point du plan moyen suivant les axes x, y, z, sont désignées par, u, v, w.

On désigne par:

t: l'épaisseur de la dalle;

E, ν le module de YOUNG et le coefficient de POISSON des matériaux intervenants;

b_x, b_y: les distances entre deux nervures successives parallèles à $0y$ et à $0x$, respectivement;

$(\,)'$, $(\,)^{\cdot}$: les dérivées partielles par rapport à x et à y, respectivement.

2.2.2. *Rigidités extensionnelles unitaires* de la dalle isotrope:

$$D = \frac{E\,t}{1-\nu^2} \tag{2.1}$$

de la plaque nervurée:

$$D_x = \frac{1}{b_x}\int_{b_x} E(z)\,d\Omega_x, \qquad D_y = \frac{1}{b_y}\int_{b_y} E(z)\,d\Omega_y.$$

Les notations $\int_{b_x}$ et $\int_{b_y}$ représentent des intégrales étendues aux sections de la plaque nervurée de largeurs b_x et b_y respectivement (Fig. A. 1).

2.2.3. *Distances des axes neutres des nervures au plan moyen $z=0$*

$$e_x = \frac{1}{b_x D_x}\int_{b_x} E(z)\,z\,d\Omega_x, \qquad e_y = \frac{1}{b_y D_y}\int_{b_y} E(z)\,z\,d\Omega_y. \tag{2.2}$$

2.2.4. *Rigidités flexionnelles et torsionnelles unitaires.* Rigidité de la dalle isotrope:

$$B = \frac{E\,t^3}{12\,(1-\nu^2)}. \tag{2.3}$$

Rigidités flexionnelles unitaires de la plaque nervurée par rapport aux axes neutres correspondants:

$$B_x = \frac{1}{b_x}\int_{b_x} E(z)\,(z-e_x)^2\,d\Omega_x, \qquad B_y = \frac{1}{b_y}\int_{b_y} E(z)\,(z-e_y)^2\,d\Omega_y. \tag{2.3}$$

Dans les intégrales (2.1) à (2.3) ci-dessus, il faut remplacer E par $E/(1-\nu^2)$ dans la partie de l'intégrale relative à la dalle isotrope.

Les rigidités torsionnelles unitaires des nervures B_{xy} et B_{yx}, sont à déterminer en se basant sur la théorie de la torsion de Saint-Venant. Dans le cas particulier fréquent où ces nervures sont à section ouverte et à parois minces, on calculera $b_x B_{xy}$ et $b_y B_{yx}$ par la formule $G/3\sum b\,t^3$, où b est la largeur d'un des rectangles d'épaisseur t faible composant la section droite de la nervure.

Si M^*_{xy} et M^*_{yx} sont les moments de torsion unitaires repris par ces nervures, on a les relations

$$M^*_{xy} = B_{xy}\,\theta_{xy}, \qquad M^*_{yx} = B_{yx}\,\theta_{yx}, \tag{a}$$

où θ_{xy} et θ_{yx} sont les angles de torsion unitaires des nervures parallèles à l'axe des x et à l'axe des y, respectivement. Dans ces formules, les moments M^* et les torsions sont mesurés positivement dans le sens d'un tire-bouchon vissé dans le sens positif des axes x ou y. D'après cette convention et l'hypothèse 2, on a $\theta_{xy} = w'^{\cdot}$ et $\theta_{yx} = -w'^{\cdot}$, où $w'^{\cdot}$ représente d'ailleurs la torsion géométrique de la dalle isotrope; en remplaçant les θ par ces valeurs dans les formules (a), on trouve les relations

$$M^*_{xy} = B_{xy}\,w'^{\cdot}, \qquad M^*_{yx} = -B_{yx}\,w'^{\cdot}. \tag{2.4}$$

Introduisons encore la notation

$$C = B + B_{xy} + B_{yx}. \tag{2.5}$$

2.2.5. *Etat de contrainte dans la plaque nervurée.* La dalle isotrope est en état double de contrainte caractérisé par les composantes σ_x, σ_y, τ_{xy} et est en outre le siège de contraintes tangentielles transversales τ_{xz} et τ_{yz}. Les nervures sont le siège de contraintes normales σ_x ou σ_y, ainsi que de contraintes tangentielles τ_{xz}, τ_{yz}, provoquées par leur torsion à la Saint-Venant.

La loi de Hooke fournit entre ces contraintes et les déformations correspondantes les relations suivantes:

Dans la dalle isotrope:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\,\sigma_y), \qquad \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\,\sigma_x), \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\ \left(\text{avec } G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\,\epsilon_y), \qquad \epsilon_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\,\epsilon_x), \qquad \tau_{xy} = \frac{E}{2\,(1+\nu)}\gamma_{xy}. \tag{2.6}$$

Dans les nervures, on a

$$\sigma_x = E\,\epsilon_x, \quad \sigma_y = E\,\epsilon_y \tag{2.7}$$

parce qu'il est connu que la torsion à la Saint-Venant ne produit aucune dilatation ϵ_x, ϵ_y ou ϵ_z du matériau.

2.2.6. *Efforts résultants unitaires dans une section droite.* On définit les efforts résultants dans une section droite comme dans la théorie classique des plaques isotropes; ces efforts se divisent en deux groupes:

A. *Efforts de l'état membranaire* (parallèles au plan moyen de la plaque):

Efforts normaux

$$N_x = \frac{1}{b_x}\int_{b_x} \sigma_x\, d\Omega_x, \qquad N_y = \frac{1}{b_y}\int_{b_y} \sigma_y\, d\Omega_y. \tag{2.8}$$

Efforts de cisaillement parallèles au plan moyen:

$$N_{xy} = \frac{1}{b_x}\int_{dalle} \tau_{xy}\, d\Omega_x, \qquad N_{yx} = \frac{1}{b_y}\int_{dalle} \tau_{yx}\, d\Omega_y. \tag{2.8}$$

Les deux dernières intégrales ne s'étendent qu'à la dalle isotrope parce que les contraintes de cisaillement dans les nervures parallèles au plan moyen sont supposées nulles en accord avec l'hypothèse 5.

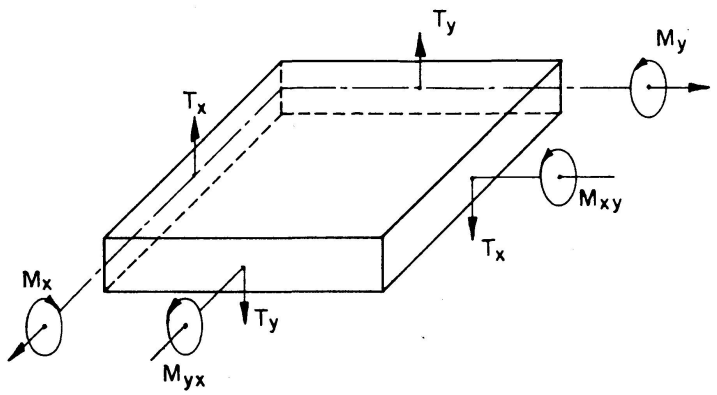

Fig. A. 2.

B. *Efforts de l'état de flexion* (les sens positifs de ces efforts sont définis à la figure A. 2):

— moments fléchissants *par rapport aux axes x et y situés dans le plan moyen de la dalle*

$$M_x = \frac{1}{b_x}\int_{b_x} \sigma_x z\, d\Omega_x, \qquad M_y = \frac{1}{b_y}\int_{b_y} \sigma_y z\, d\Omega_y. \tag{2.9}$$

— moments de torsion (positifs dans le sens positif des axes x et y)

$$M_{xy} = -\frac{1}{b_x}\int_{dalle} \tau_{xy} z \, d\Omega_x + M^*_{xy}, \qquad M_{yx} = -\frac{1}{b_y}\int_{dalle} \tau_{yx} z \, d\Omega_y + M^*_{xy}. \tag{2.9}$$

Efforts tranchants normaux au plan moyen

$$T_x = \int_{b_x} \tau_{xz} \, d\Omega_x, \qquad T_y = \int_{b_y} \tau_{yz} \, d\Omega_y. \tag{2.9}$$

2.3. Equations d'équilibre

La plaque nervurée est supposée chargée de forces normales à son plan moyen, réparties avec l'intensité $p(x, y)$.

L'équilibre de translation parallèlement au plan moyen donne les deux équations (classiques en élasticité plane)

$$N'_x + N^{\cdot}_{yx} = 0, \qquad N'_{xy} + N^{\cdot}_y = 0 \tag{2.10}$$

parce que les angles d'inclinaison sur l'horizontale des éléments dx et dy sont suffisamment faibles, d'après l'hypothèse 4, pour que leurs cosinus soient pris égaux à l'unité.

L'équilibre de translation normalement au plan moyen et l'équilibre de rotation donnent les 3 équations suivantes (cf. par exemple [23]) *)

---

*) Dans le mémoire original de PFLUGER [24], on trouve les équations d'équilibre écrites sous la forme:

$$N'_x + N^{\cdot}_{yx} + 2\,T u'^{\cdot} = 0,$$
$$N^{\cdot}_y + N'_{xy} - N\,(v'' - e w''^{\cdot}) + 2\,T v'^{\cdot} = 0,$$
$$M''_x + (-M_{xy} + M_{yx})'^{\cdot} + M^{\cdot\cdot}_y - N\,(w'' + e v''^{\cdot} - e^2 w''^{\cdot\cdot}) + 2\,T w'^{\cdot} = 0$$

où $N\,(= -N^{\circ}_x)$ et $T = N^{\circ}_{xy}$ sont l'effort constant de compression excentré de e dans le sens x et l'effort constant de cisaillement, respectivement, existant avant voilement, dans le cas où la plaque raidie est initialement parfaitement plane.

Dans nos applications pratiques, T sera toujours nul. De plus, nous négligerons les termes en N apparaissant dans les 2e et 3e équations, qui sont également négligés par GIENCKE ([33] p. 56). En effet, les déformations dans le plan (x, y) sont très petites et, par conséquent, on peut négliger le terme $-N v''$ dans la deuxième équation et le terme $-N e v^{\cdot}$ dans la troisième équation.

Enfin, le terme $(-e^2 w''^{\cdot\cdot})$ de la troisième équation est négligeable devant le terme en w''. En effet, en adoptant comme déformée de la plaque l'expression

$$w = f_{11} \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b},$$

on trouve:

$$w'' - e^2 w''^{\cdot\cdot} = -\frac{\pi^2}{a^2} f_{11} \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b} \left(1 - e^2 \frac{\pi^2}{b^2}\right).$$

Il est visible que la correction $(-e^2 w''^{\cdot\cdot})$ conduit à remplacer l'unité par le terme $\left(1 - e^2 \frac{\pi^2}{b^2}\right)$. Pour une plaque normale de grand pont, on a $e \approx 10$ cm $b = 1000$ cm, d'où

$$\frac{e^2 \pi^2}{b^2} = 10^{-3} \text{ (négligeable).}$$

$$T_x' + T_y^{\cdot} + N_x(w_0'' + w'') + N_y(w_0^{\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot}) + 2N_{xy}(w_0^{\cdot\prime} + w^{\cdot\prime}) + q = 0,$$
$$-M_{xy}' + M_x^{\cdot} - T_y = 0, \qquad M_x' + M_{yx}^{\cdot} - T_x = 0. \tag{2.11}$$

En éliminant les efforts tranchants T_x, T_y, entre ces trois relations, on trouve l'équation:

$$M_x'' + (-M_{xy} + M_{yx})^{\cdot\prime} + M_y^{\cdot\cdot} + N_x(w_0'' + w'') + N_y(w_0^{\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot})$$
$$+ 2N_{xy}(w_0^{\cdot\prime} + w^{\cdot\prime}) + q = 0. \tag{2.12}$$

2.4. Etat de déformation de la plaque nervurée

L'état de déformation du plan moyen de la dalle est caractérisé:

a) *par ses déformations membranaires*, c'est-à-dire par les dilatations

$$\bar{\epsilon}_x = u' + \tfrac{1}{2}(w_0' + w')^2 - \tfrac{1}{2}w_0'^2, \qquad \bar{\epsilon}_y = v^{\cdot} + \tfrac{1}{2}(w_0^{\cdot} + w^{\cdot})^2 - \tfrac{1}{2}w_0^{\cdot 2} \tag{2.13}$$

et par la distorsion

$$\bar{\gamma}_{xy} = u^{\cdot} + v' + (w_0^{\cdot} + w^{\cdot})(w_0' + w') - w_0^{\cdot} w_0'. \tag{2.14}$$

b) *par ses déformations flexionnelles*, c'est-à-dire les courbures

$$\chi_x = -w'', \qquad \chi_y = -w^{\cdot\cdot} \tag{2.15}$$

et la torsion géométrique

$$\theta_{xy} = -\theta_{yx} = w^{\cdot\prime}. \tag{2.16}$$

En vertu de l'hypothèse N⁰ 2 (Bernoulli), l'état plan de déformation en un point de la dalle situé à la distance z du plan moyen est donné par les relations:

$$\epsilon_x = \bar{\epsilon}_x + z\chi_x, \qquad \epsilon_y = \bar{\epsilon}_y + z\chi_y, \qquad \gamma_{xy} = \bar{\gamma}_{xy} - 2z\chi_{xy}. \tag{2.17}$$

En éliminant u et v entre les expressions (2.13) et (2.14), on obtient la condition de compatibilité qui les lie

$$\bar{\epsilon}_x^{\cdot\cdot} + \bar{\epsilon}_y'' - \bar{\gamma}_{xy}^{\cdot\prime} = (w_0^{\cdot\prime} + w^{\cdot\prime})^2 - (w_0^{\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot})(w_0'' + w'') - w_0^{\cdot\prime 2} + w_0^{\cdot\cdot} w_0''. \tag{2.18}$$

2.5. Expressions explicites des efforts unitaires

A l'instar de VON KÁRMÁN, introduisons une fonction de contrainte régissant le tenseur de membrane par les relations

$$N_x = \phi^{\cdot\cdot}, \quad N_y = \phi'', \quad N_{xy} = -\phi^{\cdot\prime}, \tag{2.19}$$

qui satisfont identiquement aux deux premières équations d'équilibre (2.10).

En remplaçant, dans les expressions de définition (2.8) et (2.9) des efforts unitaires, les contraintes par leurs expressions (2.6) ou (2.7) en fonction des déformations, puis les déformations par leurs expressions (2.17), et en tenant compte des relations (2.4), on obtient les formules:

$$\begin{aligned} N_x &= D_x(\bar{\epsilon}_x - e_x w'') + \nu D \bar{\epsilon}_y = \phi^{\cdot\cdot}, \\ N_y &= D_y(\bar{\epsilon}_y - e_y w^{\cdot\cdot}) + \nu D \bar{\epsilon}_x = \phi'', \\ N_{xy} &= N_{yx} = \frac{1-\nu}{2} D \bar{\gamma}_{xy} = -\phi^{\cdot\prime}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} M_x &= -B_x w'' - \nu B w^{\cdot\cdot} + e_x D_x(\bar{\epsilon}_x - e_x w''), \\ M_y &= -B_y w^{\cdot\cdot} - \nu B w'' + e_y D_y(\bar{\epsilon}_y - e_y w^{\cdot\cdot}), \\ M_{xy} &= [(1-\nu) B + B_{xy}] w^{\cdot\prime}, \\ M_{yx} &= -[(1-\nu) B + B_{yx}] w^{\cdot\prime}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Résolvons (2.20) par rapport à $\bar{\epsilon}_x$, $\bar{\epsilon}_y$, $\bar{\gamma}_{xy}$; il vient:

$$\begin{aligned} (1-\bar{\nu}^2) D_x \bar{\epsilon}_x &= (\phi^{\cdot\cdot} + e_x D_x w'') - \frac{\nu D}{D_y}(\phi'' + e_y D_y w^{\cdot\cdot}), \\ (1-\bar{\nu}^2) D_y \bar{\epsilon}_y &= (\phi'' + e_y D_y w^{\cdot\cdot}) - \frac{\nu D}{D_x}(\phi^{\cdot\cdot} + e_x D_x w''), \\ \frac{1-\nu}{2} D \bar{\gamma}_{xy} &= -\phi^{\cdot\prime} \end{aligned} \tag{2.22}$$

avec

$$\boxed{\bar{\nu} = \frac{D}{\sqrt{D_x D_y}} \nu.} \tag{2.23}$$

En remplaçant $\bar{\epsilon}_x$ et $\bar{\epsilon}_y$ par leurs expressions (2.22) dans (2.21), on trouve, pour les composantes du tenseur-moment, les expressions explicites en fonction de w et ϕ:

$$\begin{aligned} M_x &= -B_x w'' - \nu B w^{\cdot\cdot} + \frac{e_x}{(1-\bar{\nu}^2)}\left[(\phi^{\cdot\cdot} + e_x D_x w'') - \frac{\nu D}{D_y}(\phi'' + e_y D_y w^{\cdot\cdot})\right], \\ M_y &= -B_y w^{\cdot\cdot} - \nu B w'' + \frac{e_y}{(1-\bar{\nu}^2)}\left[(\phi'' + e_y D_y w^{\cdot\cdot}) - \frac{\nu D}{D_x}(\phi^{\cdot\cdot} + e_x D_x w'')\right], \\ M_{xy} &= [(1-\nu) B + B_{xy}] w^{\cdot\prime}, \\ M_{yx} &= -[(1-\nu) B + B_{yx}] w^{\cdot\prime}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

2.6. Equations fondamentales

2.6.1. *Equation de compatibilité.* Remplaçons dans la condition de compatibilité (2.18), $\bar{\epsilon}_x$, $\bar{\epsilon}_y$ et $\bar{\gamma}_{xy}$ par leurs expressions (2.22); il vient, en multipliant les deux membres par $(1-\bar{\nu}^2)$

$$\begin{aligned} &\frac{\phi^{\cdot\cdot\cdot\cdot}}{D_x} + 2\frac{\phi^{\prime\prime\cdot\cdot}}{\bar{D}} + \frac{\phi^{\prime\prime\prime\prime}}{D_y} + (e_x + e_y) w^{\prime\prime\cdot\cdot} - \nu D\left(\frac{e_y}{D_x} w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \frac{e_x}{D_y} w^{\prime\prime\prime\prime}\right) = \\ &\qquad (1-\bar{\nu}^2)[(w_0^{\prime\cdot} + w^{\cdot\prime})^2 - (w_0^{\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot})(w_0'' + w'') - w_0^{\prime\cdot 2} + w_0^{\cdot\cdot} w_0''] \end{aligned} \tag{2.25}$$

moyennant la notation

$$\bar{D} = \frac{1-\nu}{1-\nu\dfrac{D^2}{D_x D_y}} D. \tag{2.26}$$

C'est la première équation fondamentale, dite de compatibilité.

2.6.2. *Equation d'équilibre.* En introduisant les expressions (2.24) dans l'équation d'équilibre restante (2.12) et en posant pour simplifier

$$\begin{aligned} \bar{B}_x &= B_x - \frac{\bar{\nu}^2}{1-\bar{\nu}^2} e_x^2 D_x, \\ \bar{B}_y &= B_y - \frac{\bar{\nu}^2}{1-\bar{\nu}^2} e_y^2 D_y, \\ \bar{C} &= B + \frac{1}{2}(B_{yx} + B_{xy}) + \frac{\nu}{1-\bar{\nu}^2} e_x e_y D, \end{aligned} \tag{2.27}$$

on obtient la seconde équation fondamentale, dite d'équilibre:

$$\begin{aligned} &\bar{B}_x w'''' + 2\bar{C} w''^{\cdot\cdot} + \bar{B}_y w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \frac{\nu}{1-\bar{\nu}^2}\left(e_y \frac{D}{D_x} \phi^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + e_x \frac{D}{D_y} \phi''''\right) - \frac{e_x + e_y}{1-\bar{\nu}^2} \phi^{\cdot\cdot\cdot\prime\prime} \\ &\quad - \phi^{\cdot\cdot}(w_0'' + w'') - \phi''(w_0^{\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot}) + 2\phi^{\cdot\prime}(w_0^{\cdot\prime} + w^{\cdot\prime}) - q = 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

2.7. Forme simplifiée des équations fondamentales

Les équations fondamentales (2.25), (2.28) se simplifient considérablement si on y néglige tous les termes qui contiennent explicitement les excentricités e_x et e_y. Elles s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} &\frac{\phi^{\cdot\cdot\cdot\cdot}}{D_x} + 2\frac{\phi^{\cdot\cdot\prime\prime}}{\bar{D}} + \frac{\phi''''}{D_y} = \\ &\qquad (1-\bar{\nu}^2)[(w_0^{\cdot\prime} + w^{\cdot\prime})^2 - (w_0^{\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot})(w_0'' + w'') - w_0'^2 + w_0^{\cdot\cdot} w_0''], \\ &\bar{B}_x w'''' + 2\bar{C} w''^{\cdot\cdot} + \bar{B}_y w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \phi''(w_0^{\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot}) + \phi^{\cdot\cdot}(w_0'' + w'') - 2\phi^{\cdot\prime}(w_0^{\cdot\prime} + w^{\cdot\prime}). \end{aligned} \tag{2.29}$$

C'est sous cette forme que les équations fondamentales ont été appliquées dans le présent mémoire. Cette forme est littéralement identique aux équations des plaques membranes *faites d'un matériau orthotrope* mais les expressions des rigidités extensionnelles et flexionnelles sont cependant différentes. Une fois w et ϕ déterminés par intégration des équations (2.29), les composantes du tenseur se déterminent par les formules (2.19). Quant aux composantes du tenseur moment, on peut les déterminer, soit par les formules (2.24), soit par les formules plus simples

$$\begin{aligned} M_x &= -B_x w'' - \nu B w^{\cdot\cdot} + e_x \phi^{\cdot\cdot}, \\ M_y &= -B_y w^{\cdot\cdot} - \nu B w'' + e_y \phi'', \\ M_{xy} &= [(1-\nu) B + B_{xy}] w^{\cdot\prime}, \\ M_{yx} &= -[(1-\nu) B + B_{yx}] w^{\cdot\prime}, \end{aligned} \tag{2.30}$$

obtenues en gardant la partie principale des termes correctifs, soit enfin par les relations

$$\begin{aligned} M_x &= -B_x w'' - \nu B w^{\cdot\cdot}, \\ M_y &= -B_y w^{\cdot\cdot} - \nu B w'', \\ M_{xy} &= [(1-\nu) B + B_{xy}] w^{\cdot\prime}, \\ M_{yx} &= -[(1-\nu) B + B_{yx}] w^{\cdot\prime}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

qui sont fournies par la théorie des plaques membranes à *matériau orthotrope.*

3. *Expression mathématique de la condition que les deux bords parallèles $x = \pm a/2$ forment des lignes nodales rectilignes, mais qui peuvent se rapprocher*

La condition cherchée s'écrit évidemment

$$\delta_x = C^{ste} \text{ (indépendant de } y),$$

mais
$$\delta_x = u(x = a/2) - u(x - a/2) = \int_{-a/2}^{+a/2} u' \, dx = \text{constante}. \tag{2.31}$$

De la première relation (2.22) où l'on néglige les termes en e_x et e_y pour rester cohérent avec les formules (2.31), on déduit

$$(1-\bar{\nu}^2) D_x \bar{\epsilon}_x = \phi^{\cdot\cdot} - \frac{\nu D}{D_y} \phi''.$$

En égalant la valeur de $\bar{\epsilon}_x$ tirée de cette relation avec celle donnée par la première formule (2.13), on déduit, en tenant compte de (A. 2.23):

$$u' = \bar{\epsilon}_x - \frac{1}{2}(w_0' + w')^2 + \frac{1}{2} w_0'^2 = \frac{1}{1-\bar{\nu}^2}\left(\frac{\phi^{\cdot\cdot}}{D_x} - \frac{\bar{\nu}}{\sqrt{D_x D_y}} \phi''\right) - \frac{1}{2}(w_0' + w')^2 + \frac{1}{2} w_0'^2.$$

En remplaçant u' par cette valeur dans (2.31), on obtient la condition cherchée

$$\int_{-a/2}^{+a/2} \left\{ \frac{1}{1-\bar{\nu}^2}\left(\frac{\phi^{\cdot\cdot}}{D_x} - \frac{\bar{\nu}}{\sqrt{D_x D_y}} \phi''\right) - \frac{1}{2}(w_0' + w')^2 + \frac{1}{2} w_0'^2 \right\} dx = C^{ste}. \tag{2.32}$$

Notations

B	Rigidité flexionnelle unitaire de la dalle isotrope
$B = \frac{b'}{t}\sqrt{\frac{R_e}{E}}$	Coefficient de Faulkner
B_x	Rigidité flexionnelle unitaire selon $0x$ de la plaque nervurée
B_y	Rigidité flexionnelle unitaire selon $0y$ de la plaque nervurée
B_{xy}, B_{yx}	Rigidités torsionnelles unitaires des nervures parallèles à $0x$ et $0y$ respectivement

$\bar{B}_x, \bar{B}_y$	Rigidités flexionnelles unitaires modifiées selon Pflüger
C	Rigidité torsionnelle de la plaque nervurée
D	Rigidité extensionnelle unitaire de la dalle isotrope
D_x	Rigidité extensionnelle unitaire selon $0x$ de la plaque nervurée
D_y	Rigidité extensionnelle unitaire selon $0y$ de la plaque nervurée
$\bar{D}, \bar{D}_x, \bar{D}_y$	Rigidités extensionnelles unitaires modifiées selon Pflüger
$\bar{C}$	Rigidité torsionnelle unitaire modifiée selon Pflüger
E	Module d'élasticité
E_t	Module d'élasticité tangent
$F^{\cdot} = \dfrac{\partial F}{\partial y}$	
$F' = \dfrac{\partial F}{\partial x}$	
I	Moment d'inertie
M_x, M_y	Moments fléchissants unitaires
M_{xy}, M_{yx}	Moments de torsion unitaires
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts membranaires unitaires
P	Effort de compression à la ruine
P_E	Charge critique de flambement eulérien élastique
R_e	Limite apparente d'élasticité en traction
R'_e	Limite apparente d'élasticité en compression
a	Longueur du panneau
b	Largeur du panneau
b'	Entredistance des raidisseurs longitudinaux
b'_e	Largeur effective du sous-panneau isotrope
d	Hauteur de l'âme
e_x, e_y	Distance des axes neutres des nervures parallèles à $0x$ et $0y$ respectivement, par rapport au plan moyen de la dalle isotrope
f_0	Flèche initiale au centre du panneau
f	Flèche additionnelle au centre du panneau
i	Rayon d'inertie
m	Nombre de raidisseurs plus un
$n = \dfrac{\bar{\sigma}}{\sigma_{cr}}$	Indice de postcriticité
p_x	Effort moyen unitaire agissant sur le panneau dans la direction $0x$
s	Coefficient de sécurité
t	Epaisseur de la dalle isotrope
u, v, w	Déplacements selon les axes $0x$, $0y$, $0z$
w_0	Déformée initiale
w	Déformée additionnelle
x, y, z	Axes de coordonnées, liés au centre du panneau
α	Rapport a/b des dimensions du panneau
δ	Aire relative d'un raidisseur

δ_x, δ_0	Déplacements relatifs selon $0x$
$\epsilon_0 = f_0/t$	Flèche initiale relative
$\epsilon = f/t$	Flèche additionnelle relative
$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$	Déformations unitaires
$\bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_y, \bar{\gamma}_{xy}$	Déformations unitaires membranaires
ϕ	Fonction de contrainte
λ	Elancement ou minceur
$\bar{\lambda}$	Elancement réduit
ν	Coefficient de Poisson
$\bar{\nu}$	Coefficient de Poisson modifié selon Pflüger
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	Contraintes
σ_{cr}	Contrainte critique de voilement du panneau continu de substitution
σ'_{cr}	Contrainte critique de voilement d'une plaque isotrope
$\sigma_{max} = -\bar{R}_e$	Contrainte longitudinale membranaire maximum dans le panneau raidi atteinte au droit des âmes du caisson (Fig. 6)
σ'_{max}	Contrainte longitudinale membranaire maximum dans un sous-panneau atteinte au droit des raidisseurs bordant ce sous-panneau (fig. 5)
$\bar{\sigma}'$	Contrainte longitudinale membranaire moyenne sur la largeur b' d'un sous-panneau (fig. 5)
$\bar{\sigma}$	Contrainte longitudinale membranaire moyenne sur la largeur b du panneau raidi (fig. 6)
σ_{ad}	Contrainte admissible
$\bar{\sigma}_u$	Contrainte longitudinale moyenne ultime
σ_r^{raid}	Contrainte moyenne de ruine d'un raidisseur muni d'une largeur effective de tôle
ψ	Facteur de forme
ρ', ρ_p	Rendement partiel
ρ_t	Rendement de la table de compression
$\rho_g = \rho_t \rho'$	Rendement global
Ω_a	Aire de la section transversale d'une âme du caisson
Ω_i	Aire de la section transversale de la semelle inférieure
Ω_r	Aire de la section transversale d'un raidisseur
Ω_s	Aire de la section transversale de la semelle supérieure
Ω_t	Aire totale de la section transversale du caisson

Bibliographie

[1] CICIN, P.: Betrachtungen über die Bruchursachen der neuen Wiener Donaubrücke. Tiefbau, Vol. 12, pp. 665–674, 1970.

[2] SATTLER, K.: Nochmals: Betrachtungen über die Bruchursachen der neuen Wiener Donaubrücke. Tiefbau, Vol. 12, pp. 948–950, 1970.

[3] ROIK, H. K.: Nochmals: Betrachtungen über die Bruchursachen der neuen Wiener Donaubrücke. Tiefbau, Vol. 12, pp. 1152, 1970.

[4] KERENSKY, O. A.: An Engineer's Ethics. Structural Engineer, Décembre 1970.

[5] DUBAS, P.: Essais sur le comportement postcritique de poutres en caisson raidies. Colloque de l'AIPC; Design of Plate and Box Girders for Ultimate Strength, Londres 25 et 26 mars 1971 (à paraître).

[6] MAQUOI, R. et MASSONNET, CH.: Discussion of the Report by Professor P. DUBAS. Ibid.

[7] CALDWELL, J. B.: Ultimate Longitudinal Strength. Trans. Royal. Inst. of Nav. Arch. Vol. 107, pp. 411–430, 1965.

[8] FRANKLAND: E.M.B. report 469, Mai 1940.

[9] CONLEY, BECKER and ALLNUTT: David Taylor Model Basin report 1682, mai 1963.

[10] VON KARMAN, TH., SECHLER, E. E. et DONNELL, L. H.: The Strength of Thin Plates in Compression. Trans. ASME; Vol. 54, 1932.

[11] WINTER, G.: Performance of Thin Steel Compression Flanges. 3e Congrès de l'AIPC, Liège, Publication Préliminaire, pp. 137–148, 1948.

[12] YOSHIKI, M., AKITA, Y. et NAGASAWA, H.: On the Buckling of the Reinforced Thin Sheet Panel of High Tensile Steel under Compression. Naval Architecture and Shipbuilding in Japan, Vol. 104, pp. 141–147, 1958.

[13] YOSHIKI, M. et FUJITA, Y.: On the Ultimate Strength of Stiffened Plates Subjected to Compression Load. Naval Architecture and Shipbuilding in Japan, Vol. 104, pp. 149–155, 1958.

[14] MASSONNET, CH.: Poutres de grandes dimensions à âme mince. Publication Préliminaire du 8e Congrès de l'AIPC, New-York, pp. 157 à 177, 1968.

[15] BASLER, K.: Vollwandträger, Berechnung im überkritischen Bereich. Schweizer Stahlbau-Vereinigung.

[16] MASSONNET, CH.: General theory of elasto-plastic membrane-plates. Dans le Volume: Engineering Plasticity, pp. 443 à 471. Cambridge University Press, 1968.

[17] WOLMIR, A. S.: Biegsame Platten und Schalen. V.E.B., Verlag für Bauwesen, Berlin, 1962.

[18] SKALOUD, M. et NOVOTNY, R.: Überkritisches Verhalten einer anfänglich gekrümmten gleichförmig gedrückten, in der Mitte mit einer Längsrippe versteiften Platte. Acta Technica, C.S.A.V., N⁰ 2, 1965.

[19] SKALOUD, M.: Post-buckled behaviour of stiffened webs. Academia Nakladatelstoi Ceskoslovenske Akademie VED, Prague 1970.

[20] SKALOUD, M. et NOVOTNY, R.: Überkritisches Verhalten einer gleichförmig gedrückten, in der Dritteln mit zwei Längsrippen versteiften Platte. Acta Technica C.S.A.V. n⁰ 6, 1964.

[21] BARES, R. et MASSONNET, CH.: Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes selon la méthode Guyon-Massonnet-Bares. Editeurs-SNTL, Prague et Dunod, Paris, 1966.

[22] HUBER, M. T.: Die Theorie der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten nebst Anwendungen auf mehrere bautechnisch wichtige Aufgaben über rechteckige Platten. Bauingenieur, Vol. 5, 1923.

[23] TIMOSHENKO, S. P.: Theory of Plates and Shells, 2nd edition, Mc Graw Hill Book Co., 1959. Théorie des Plaques et des Coques, Béranger, Paris, 1961.
[24] PFLÜGER, A.: Zum Beulproblem der anisotropen Rechteckplatte. Ingenieur-Archiv, Vol. 16, pp. 111–120, 1947.
[25] MASSONNET, CH.: Plaques et coques cylindriques orthotropes à nervures dissymétriques. Mémoires de l'AIPC, Vol. 19, pp. 202–230, 1959.
[26] BEER, H. et SCHULZ, G.: Die Traglast des planmässig mittig gedrückten Stabs mit Imperfectionen. VDI Zeitschrift Vol. 111, pp. 1537–1541, 1683–1687, 1767–1772, 1969.
[27] BEER, H. et SCHULZ, G.: Bases théoriques des courbes européennes de flambement. Construction Métallique, Vol. 7, 1970, N⁰ 3, pp. 37/57.
[28] FREY, F.: Calcul au flambement des barres industrielles. Bulletin Technique de la Suisse Romande, N⁰ 11, mai 1971, 12 pp.
[29] VON KÁRMÁN, T.: Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Vol. IV, N⁰ 4, Teubner, Leipzig, 1910, pp. 348–352.
[30] MARGUERRE, K.: Proceedings of the Fifth International Congress of Applied Mechanics, Cambridge (Mass.), U.S.A., 1938, p. 93.
[31] Référence citée à la page 291 du livre de S. G. LEKNITSKII: Anisotropic Plates, Gordon and Breach, 1968.
[32] SOPER, W. G.: J. Appl. Mech. Vol. 25, pp. 444–448, 1958.
[33] GIENCKE, E.: Einfluss der Streifen – Exzentrizität auf Biegung und Stabilität orthotroper Platten. Beitrag aus Statik und Stahlbau, Stahlbau-Verlag G.M.B.H., Köln 1961.
[34] KLÖPPEL, K. et MÖLLER, K.: Beulwerte ausgesteifter Rechteckplatten, Vol. II, W. Ernst und Sohn, ed., 1968.

Résumé

Divers accidents ont récemment attiré l'attention sur le problème des ponts en caisson raidis en acier. Les auteurs ont montré ailleurs [6] que les coefficients de sécurité 1,35 ou 1,25 généralement adoptés lors de l'application de la théorie linéaire du voilement des plaques comprimées raidies sont insuffisants.

Dans le présent mémoire, ils établissent une théorie à la ruine des plaques-membranes comprimées à raidisseurs dissymétriques et à déformation initiale, et l'appliquent au problème des ponts en caisson.

Zusammenfassung

Verschiedene Unfälle haben jüngst die Aufmerksamkeit auf das Problem stählerner ausgesteifter Kastenträger-Brücken gelenkt. An anderer Stelle [6] haben die Autoren gezeigt, dass der Sicherheitskoeffizient von 1,35 bzw. 1,25, wie er allgemein unter Benützung der linearen Beultheorie von ausgesteiften Platten verwendet wird, ungenügend ist.

In der vorliegenden Arbeit stellen die Verfasser eine Bruchtheorie zusammengedrückter Membranplatten bei dissymmetrischer Aussteifung und anfänglicher Verformung auf und übertragen diese Theorie auf das Problem der Kastenträgerbrücken.

Summary

Different accidents have recently called the attention to the problem of stiffened box girder steel bridges. On a previous occasion the authors [6] have explained that the security coefficients of 1.35 or 1.25 generally used in the linear buckling theory of compressed stiffened plates are not sufficient.

In the present paper the authors establish a rupture theory for compressed membrane plates with dissymmetric stiffeners and initial deformation and apply the said theory on the problem of box girder bridges.