

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 30 (1970)

**Artikel:** Eine strenge Lösung des Biegebruchsicherheitsnachweises für den rechteckigen Spanbetonbalken ohne Verbund  
**Autor:** Plähn, Jürgen  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23596>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Eine strenge Lösung des Biegebruchsicherheitsnachweises für den rechteckigen Spannbetonbalken ohne Verbund**

*A Rigorous Analysis for the Moment Carrying Capacity of an Unbonded  
Prestressed Concrete Beam*

*Solution rigoureuse pour l'analyse de la résistance à la rupture en flexion d'une  
poutre isolée en béton précontraint et de section rectangulaire*

**JÜRGEN PLÄHN**  
Madras/Indien

## **1. Einführung**

Die Vorausberechnung des Bruchmoments bereitet für den Spannbetonbalken ohne Verbund zwischen Spannglied und Beton wesentlich größere Schwierigkeiten als für den mit Verbund hergestellten. Bei fehlendem Verbund ist der unmittelbare Zusammenhang zwischen den Verformungen des Stahls und des Betons an den einzelnen Querschnitten nicht mehr gegeben, aus dem das widerstehende innere Kräftepaar in einfacher Weise bestimmt werden könnte. Der genaue Nachweis erfordert vielmehr die vollständige Bestimmung des Spannungszustandes des bei statisch bestimmter Lagerung in der Regel 1fach innerlich statisch unbestimmten Balkens. Dabei sind die im Bruchzustand vorliegenden Verhältnisse, insbesondere das nichtlineare Spannungsdehnungsverhalten der Werkstoffe und die Veränderlichkeit der Querschnittswerte zu berücksichtigen, die infolge des Aufreißens der Zugzone von dem angreifenden Biegemoment abhängen.

Die Aufgabe ist früher bereits von H. RÜSCH, K. KORDINA und C. ZELGER [1] unter Verwendung der in Heft 120 des DAfStB [2] mitgeteilten Verformungsbeziehungen für Beton behandelt worden. Die dort nicht in Form mathematischer Beziehungen, sondern nur als Zahlenpaare vorliegenden Spannungsdehnungsbeziehungen scheinen die Lösung erheblich zu erschweren. Um das Verfahren anwendbar zu machen, waren außer einer Reihe von Hilfstafeln gewisse Korrekturen erforderlich, die nur durch Vergleich mit Versuchsergebnissen bestimmt werden konnten.

Für den Rechteckbalken ohne zusätzliche schlaffe Bewehrung ist kürzlich in [3] eine Lösung angegeben worden, die von leichter zu handhabenden Annahmen für das Verformungsverhalten des Betons ausgeht. Es zeigte sich, daß damit eine exakte und vergleichsweise einfache mathematische Behandlung möglich war.

Im folgenden wird die vollständige Lösung unter Berücksichtigung schlaffer Bewehrungseinlagen mitgeteilt.

## 2. Übersicht, Annahmen

Den folgenden Untersuchungen wird der statisch bestimmt gelagerte, mit einem Spannglied versehene Spannbetonbalken mit unveränderlichem, rechteckigem Querschnitt zugrunde gelegt. Es wird Reibungsfreiheit zwischen Spannglied und Beton vorausgesetzt. Das Tragwerk ist somit 1fach innerlich statisch unbestimmt.

Die zur Ermittlung der statisch Überzähligen zu erfüllende Verformungsbedingung ist die Verträglichkeit der Gesamtverformungen des Spanngliedes nach dem Verankern gegen den Beton und der des Betons entlang des Balkens in Höhe der Spanngliedachse:

$$\int_0^l (\epsilon_s - \epsilon_{s0}) dx - \int_0^l \epsilon_{bs} dx = 0. \quad (1)$$

Darin bedeuten  $\epsilon_s$  die Stahldehnung,  $\epsilon_{s0}$  die zum Vorspannen erforderliche Vordehnung des Spannstahls bei unbeansprucht gedachtem Beton, die daher auch als fiktive Spannbettdehnung aufgefaßt werden kann,  $\epsilon_{bs}$  die Betondehnung in Höhe der Spanngliedachse. Als Überzählige wird die Spanngliedkraft benutzt. Die Dehnungen in Gl. (1) werden in Abhängigkeit von ihr ausgedrückt. Bei der hier eingeführten Verformungsbeziehung für den Beton folgt daraus die Bestimmungsgleichung für die Spanngliedkraft in algebraischer Form. Sie kann durch Probieren, d. h. Einsetzen geschätzter Werte gelöst werden.

Im Hinblick auf das unterschiedliche Verhalten des Balkens im Bereich der gerissenen und der ungerissenen Zugzone ist es zweckmäßig, die bei der Aufstellung der Bestimmungsgleichung erforderliche Integration der Betonverformungen in entsprechenden Teilabschnitten vorzunehmen. Bei Symmetrieverhältnissen folgt dann anstelle der Gl. (1):

$$\int_0^l (\epsilon_s - \epsilon_{s0}) dx - 2 \int_0^{x_1} \epsilon_{bs} dx - 2 \int_{x_1}^{l/2} \epsilon_{bs} dx = 0. \quad (1a)$$

Der auflagernahen Bereich  $0 \leq x \leq x_1$  ist durch die Mitwirkung des vollen Betonquerschnitts gekennzeichnet, während in dem Mittelabschnitt  $x_1 \leq x \leq l/2$  die Zugzone des Betonquerschnitts im Bruchzustand gerissen ist. Die Grenze

$x_1$  ist durch das Erreichen der Biegzugfestigkeit des Betons am unteren Querschnittsrand bestimmt.

Für den auflagernahen Bereich wird mit Rücksicht auf die hier in allen praktischen Fällen durchweg vorliegenden niedrigen Beanspruchungen angenommen, daß der Beton dem Hookeschen Gesetz folgt,

$$\sigma = E_b \epsilon_b. \quad (2)$$

Diese Annahme ermöglicht eine einfache Bestimmung der Integrationsgrenze  $x_1$ . Lediglich für den mittleren, hochbeanspruchten Bereich wird das Verformungsverhalten des Betons nichtlinear eingeführt. Es wird eine quadratische Parabel

$$\sigma = E_b \left( \epsilon_b + \frac{E_b}{4K} \epsilon_b^2 \right); \quad \epsilon_b \leq 0 \quad (3)$$

benutzt; sie ist in normierter Form in Fig. 1 dargestellt. Ihre Anwendung ist

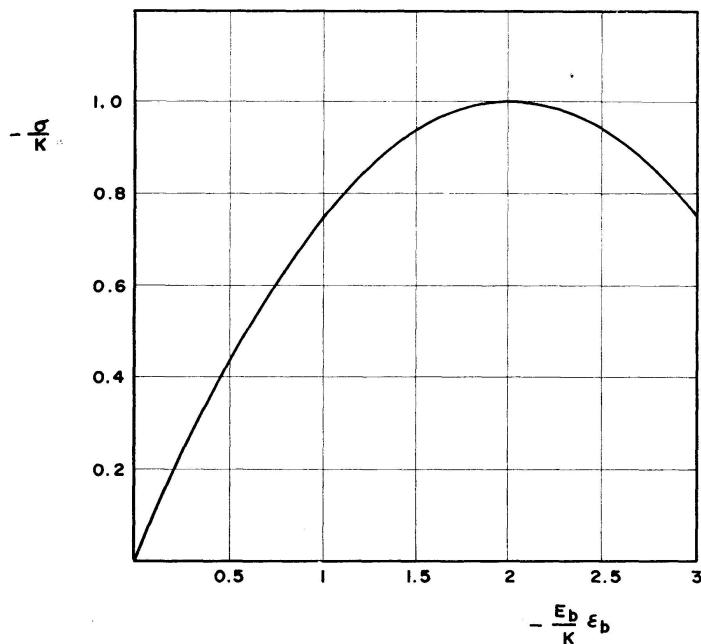


Fig. 1. Spannungsdehnungslinie des Betons.

nur im Sinne monoton nicht zunehmender Dehnungen zulässig.

Das Spannungsdehnungsdiagramm des Spannstahls wird als gegeben vorausgesetzt. Der Einfluß in der Zugzone des Balkens angeordneter schlaffer Bewehrungseinlagen wird berücksichtigt. Es wird eine idealisierte Spannungsdehnungslinie nach Fig. 2 zugrunde gelegt.

Die Untersuchungen werden auf den im Spannbetonbau üblichen schlanken Träger beschränkt, für den der Cosinus des Neigungswinkels des Spanngliedes gegenüber der Stabachse überall zu eins angenommen werden darf.

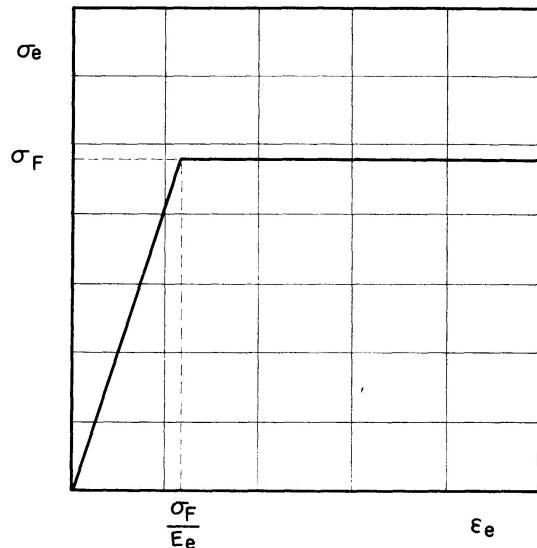


Fig. 2. Spannungsdehnungslinie des Betonstahls.

### 3. Die Verformungen des Spanngliedes

Es wird davon ausgegangen, daß die Lösung der aus Gl. (1a) folgenden Bestimmungsgleichung für die Spanngliedkraft  $Z_s$  im Bruchzustand durch wiederholtes Einsetzen eines geschätzten Wertes zu suchen ist. Damit sind für jeden angenommenen Wert die Gesamtverformungen  $\epsilon_s$ , denen das Spannglied nach dem Einbau im spannungslosen Zustand unterworfen ist, aus der vorliegenden Spannungsdehnungslinie des Spannstahls bekannt. Hier interessieren indes nur die von den Betonverformungen abhängigen Anteile, ohne die zum Vorspannen erforderlichen Vordehnungen. Die Verformungen aus der Stahldehnung  $\epsilon_{s0}$  im sogenannten Spannbettzustand müssen somit von den Gesamtverformungen abgezogen werden. Diese Spannbettdehnungen  $\epsilon_{s0}$  wird man dabei zweckmäßig gleich aus der durch die Vorspannverluste (Kriechen und Schwinden des Betons usw.) reduzierten Vorspannkraft bestimmen.

Die Vorspannkraft  $V_0$  im sogenannten Spannbettzustand wird aus der wirklichen Vorspannkraft  $V$  nach

$$V_0 = \frac{V}{1 - \zeta}$$

errechnet. Die Größe  $\zeta$  folgt bekanntlich mit den für das 1fach statisch unbestimmte, elastische System ermittelten Verschiebungsgrößen, vgl. z. B. [4],

$$\delta_{b11} = \int_0^l \frac{M_1^2}{E_b I_b} dx + \int_0^l \frac{N_1^2}{E_b F_b} dx$$

und

$$\delta_{s11} = \int_0^l \frac{N_1^2}{E_s F_s} dx$$

zu

$$\zeta = \frac{\delta_{b11}}{\delta_{b11} + \delta_{s11}}.$$

$M_1$  und  $N_1$  sind dabei das Biegemoment bzw. die Normalkraft am statisch bestimmten Hauptsystem infolge der als Überzählige eingeführten Spanngliedkraft  $X_1 = 1$ .

Die Vordehnung des Stahls im Spannbettzustand ist dann

$$\epsilon_{s0} = \frac{V_0}{E_s F_s}.$$

Den Anteil der Stahlverformungen in Gl. (1a) erhält man damit zu

$$\delta_s = \int_0^l (\epsilon_s - \epsilon_{s0}) dx = l \left( \epsilon_s - \frac{V_0}{E_s F_s} \right). \quad (4)$$

#### 4. Verformungen des Betons im ungerissenen Bereich

Als Stabachse wird vereinfachend die geometrische Achse benutzt. Der Abstand der Spanngliedachse vom Schwerpunkt des Rechteckquerschnittes mit der Gesamthöhe  $d$  nach Fig. 3 sei  $\lambda(x)d$ . Für parabolisch geführtes Spannglied gilt somit z. B.

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \frac{4(\lambda_m - \lambda_0)}{l^2} (l x - x^2), \quad (5)$$

wobei  $\lambda_m d$  den Abstand in Balkenmitte und  $\lambda_0 d$  den am Balkenende bedeuten. Für  $\lambda_0 = \lambda_m$  geht das gekrümmte Spannglied in ein gerades mit konstantem Abstand  $\lambda_m d$  über.

Bei voller Mitwirkung des Betonquerschnitts und unter der Annahme der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes für den Beton ergeben sich die Betonspannungen am unteren Querschnittsrand genau genug zu

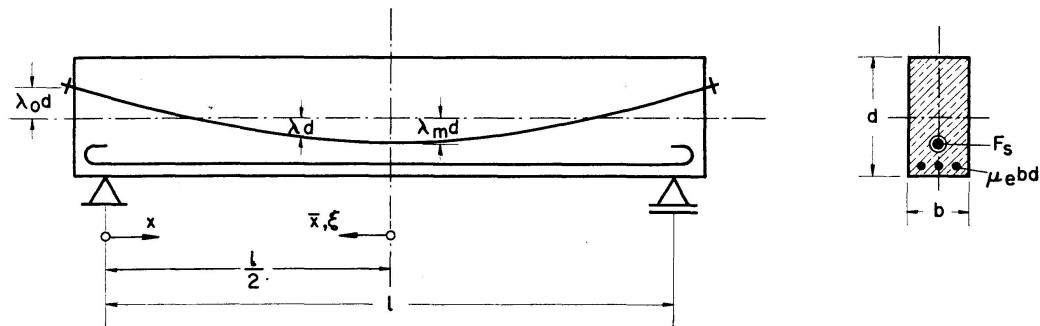


Fig. 3. Prinzipskizze des Balkens mit Bezeichnungen.

$$\sigma_{bu} = -\frac{Z_s}{bd} - \frac{6}{bd} Z_s \lambda(x) + \frac{6}{bd^2} M(x). \quad (6)$$

Für gegebenes äußeres Biegemoment  $M(x)$  erhält man daraus den Abstand  $x = \beta \frac{l}{2}$ , an dem die untere Randspannung die Biegezugfestigkeit  $\sigma_R$  des Betons erreicht. Ist insbesondere die äußere Belastung durch eine gleichmäßig verteilte Last gegeben

$$M(x) = \frac{4}{l^2} M_m (lx - x^2), \quad (7)$$

so folgt für Spanngliedprofile nach Gl. (5)

$$\beta = 1 - \sqrt{1 + \frac{\rho(6\lambda_0 + 1) - \frac{\sigma_R}{\sigma_v}}{6\rho(\lambda_m - \lambda_0) + \frac{\sigma_{bg}}{\sigma_v}}}. \quad (8)$$

Hierin bedeuten

- $\rho = \frac{Z_s}{V}$  das Verhältnis der Spanngliedkraft im Bruchzustand zu der für den Lastfall Vorspannung nach Kriechen und Schwinden,
- $\sigma_v = -\frac{V}{bd}$  die mittlere Vorspannung des Querschnitts aus dem Lastfall Vorspannung nach Kriechen und Schwinden und
- $\sigma_{bg} = \frac{6M_m}{bd^2}$  die aus dem Maximalmoment der äußeren Lasten und dem vollen Betonquerschnitt errechnete Biegerandzugspannung.

Als Integrationsgrenze zwischen der ungerissenen und der gerissenen Zugzone kann nun nicht  $\beta \frac{l}{2}$  selbst gewählt werden. Wenn z. B.  $\sigma_R$  nur an einer Stelle, der Balkenmitte, erreicht wird, also  $\beta = 1$  ist, so würde dann trotz des hier aufgetretenen Risses die Integration der Betonverformungen über die gesamte Balkenlänge für ungerissene Zugzone durchzuführen sein. Um dies sicherlich unzulässige Vorgehen auszuschließen, wird angenommen, daß der Übergang von der Spannungsverteilung mit gerissener Zugzone zur Spannungsverteilung mit ungerissener Zugzone nach dem St. Venantschen Prinzip ungefähr eine Länge entsprechend der Querschnittshöhe  $d$  benötigt (Fig. 4). Damit wird man die Grenze zwischen den beiden Bereichen mit gerissener und ungerissener Zugzone hinreichend genau zu

$$x_1 = \beta \frac{l}{2} - \frac{d}{2} = \frac{l}{2} \left( \beta - \frac{d}{l} \right) = \frac{l}{2} \tilde{\beta}$$

annehmen können.

Aus den Betonspannungen in Höhe der Spanngliedachse

$$\sigma_{bs} = -\frac{Z_s}{bd} - \frac{12Z_s}{bd} [\lambda(x)]^2 + \frac{12M(x)}{bd^2} \lambda(x)$$

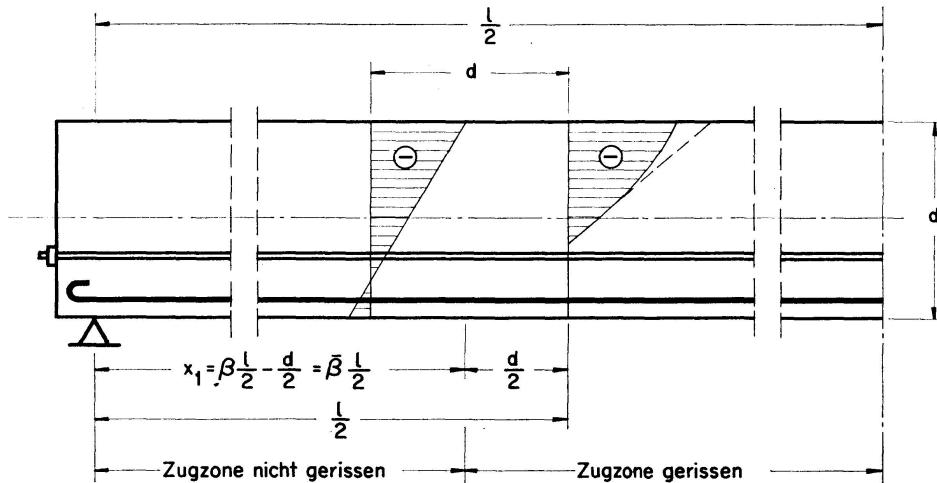


Fig. 4. Erläuterungsskizze zur Festlegung der Integrationsgrenze zwischen dem gerissenen und dem ungerissenen Teil des Balkens. (Die eingezeichneten Spannungsverteilungen geben die Verhältnisse für Balken «München I» im Bruchzustand maßstäblich richtig wieder.)

folgt die gesamte Verlängerung

$$2 \int_0^{x_1} \epsilon_{bs} dx = \delta_{b1} = \frac{2}{E_b} \int_0^{(l/2)\bar{\beta}} \epsilon_{bs} dx$$

der Betonfaser neben dem Spannglied im ungerissenen Bereich für einen Spanngliedverlauf nach Gl. (5) und gleichmäßig verteilte Belastung zu

$$\delta_{b1} = \frac{2l}{E_b} \left\{ \frac{1}{2} \rho \sigma_v (1 + 12 \lambda_0^2) \bar{\beta} - [4 \rho \sigma_v (\lambda_m - \lambda_0) + \frac{1}{3} \sigma_{bg}] \lambda_0 (3 \bar{\beta}^2 - \bar{\beta}^3) + [\rho \sigma_v (\lambda_m - \lambda_0) + \frac{1}{6} \sigma_{bg}] (\lambda_m - \lambda_0) (8 \bar{\beta}^3 - 6 \bar{\beta}^4 + 1,2 \bar{\beta}^5) \right\} \quad (9)$$

## 5. Verformungen des Betons im Bereich der gerissenen Zugzone

### 5.1. Ausgangsgleichungen

Mit den Bezeichnungen nach Fig. 5 erhält man die Betondehnung in der Spanngliedfaser aus der Randdehnung  $\epsilon_R$  am gedrückten Rand, der Höhe der Biegedruckzone  $\alpha d$  und der Lage  $\lambda d$  des Spanngliedes im Querschnitt zu

$$\epsilon_{bs} = -\frac{\frac{1}{2} + \lambda - \alpha}{\alpha} \epsilon_R. \quad (10)$$

Die Größen  $\alpha$  und  $\epsilon_R$  müssen darin in geeigneter Weise durch die Überzählige  $Z_s$  bzw. das Verhältnis  $\rho$  ausgedrückt werden. Aus

$$M = Z_s d (\frac{1}{2} + \lambda - \gamma) + Z_e d (\vartheta - \gamma) \quad (11)$$

folgt zunächst die Lage  $\gamma$  der Druckresultierenden im Querschnitt mit  $Z_e = \sigma_e \mu_e b d$  zu

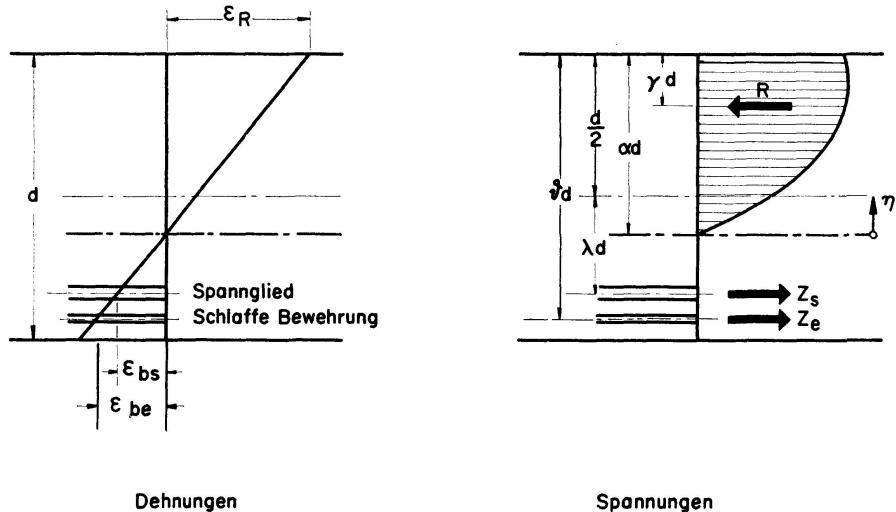


Fig. 5. Dehnungs- und Spannungsverteilung über den Querschnitt im Bereich der gerissenen Zugzone.

$$\gamma(x) = \frac{\frac{1}{2} + \lambda(x) + \frac{1}{6} \frac{\sigma_{bg}(x)}{\rho \sigma_v} - \frac{\mu_e \sigma_e(x)}{\rho \sigma_v} \vartheta}{1 - \frac{\mu_e \sigma_e(x)}{\rho \sigma_v}}. \quad (12)$$

Für gegebenes Spannungsdehnungsverhalten des Betons und der schlaffen Bewehrung lässt sich  $\alpha$  durch  $\gamma$  ausdrücken. Mit

$$\epsilon_b = \epsilon_R \frac{\gamma}{\alpha d} \quad (13)$$

lautet die Spannungsdehnungsbeziehung Gl. (3)

$$\sigma = E_b \frac{\epsilon_R}{\alpha d} \left( \eta + \frac{E_b}{4K} \frac{\epsilon_R}{\alpha d} \eta^2 \right). \quad (14)$$

Die Druckresultierende ist dann

$$R = b \int_0^{\alpha d} \sigma d\eta = \frac{1}{2} E_b \alpha b d \epsilon_R \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{E_b}{K} \epsilon_R \right). \quad (15)$$

Das Moment der Druckspannungen um die Nulllinie beträgt

$$R d(\alpha - \gamma) = b \int_0^{\alpha d} \eta \sigma d\eta = \frac{1}{3} E_b \alpha^2 d^2 b \epsilon_R \left( 1 + \frac{3}{16} \frac{E_b}{K} \epsilon_R \right). \quad (16)$$

Division von (16) durch (15) liefert eine Beziehung für die Randdehnung

$$\epsilon_R = -6 \frac{K}{E_b} \frac{1 - \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\gamma}}{1 - \frac{1}{4} \frac{\alpha}{\gamma}}. \quad (17)$$

Eine weitere folgt aus Gl. (15) unter Beachtung von

$$\begin{aligned} R &= -Z_s - Z_e = +b d (\rho \sigma_v - \mu_e \sigma_e), \\ \epsilon_R^2 + 6 \frac{K}{E_b} \epsilon_R - 12 \frac{K}{E_b^2} \frac{1}{\alpha} (\rho \sigma_v - \mu_e \sigma_e) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Für die weitere Untersuchung muß nun unterschieden werden, ob die schlaffe Bewehrung noch im elastischen Bereich oder bereits im Fließbereich beansprucht ist.

### 5.2. Schlaffe Bewehrung fließt, $\sigma_e = \sigma_F$

Mit  $\sigma_e = \sigma_F$  folgt die gesuchte Abhängigkeit der Lage der Nulllinie von der Lage der resultierenden Druckkraft durch Einsetzen von Gl. (17) in Gl. (18) zu

$$\frac{1}{12} \frac{3 \left( \frac{\alpha}{\gamma} \right)^2 - \left( \frac{\alpha}{\gamma} \right)^3}{\left( 1 - \frac{1}{4} \frac{\alpha}{\gamma} \right)^2} = - \frac{1}{\gamma} \frac{\sigma_v}{K} \left( \rho - \frac{\mu_e \sigma_F}{\sigma_v} \right). \quad (19)$$

Mit  $\gamma$  nach Gl. (12), das für angenommenes  $\rho$  und gegebene Fließspannung  $\sigma_F$  der schlaffen Bewehrung bekannt ist, kann hieraus  $\alpha$  punktweise für diskrete Abstände  $x$  bestimmt werden. Damit ist auch  $\epsilon_R$  nach Gl. (17) bekannt, womit nach Gl. (10) die Betondehnungen  $\epsilon_{bs}$  neben der Spanngliedachse angegeben und numerisch integriert werden können. Anhand der Dehnungen der schlaffen Einlagen ist dabei jeweils nachzuweisen, daß die Stahlspannungen die Fließgrenze auch tatsächlich erreicht haben,

$$\epsilon_{be} = - \frac{\vartheta - \alpha}{\alpha} \epsilon_R \geq \frac{\sigma_F}{E_e}. \quad (20)$$

Gl. (19) ist in Fig. 6 in dem hier in Frage kommenden Bereich graphisch dargestellt. Die Lösungen  $\alpha/\gamma$  können der Auftragung unmittelbar entnommen werden.

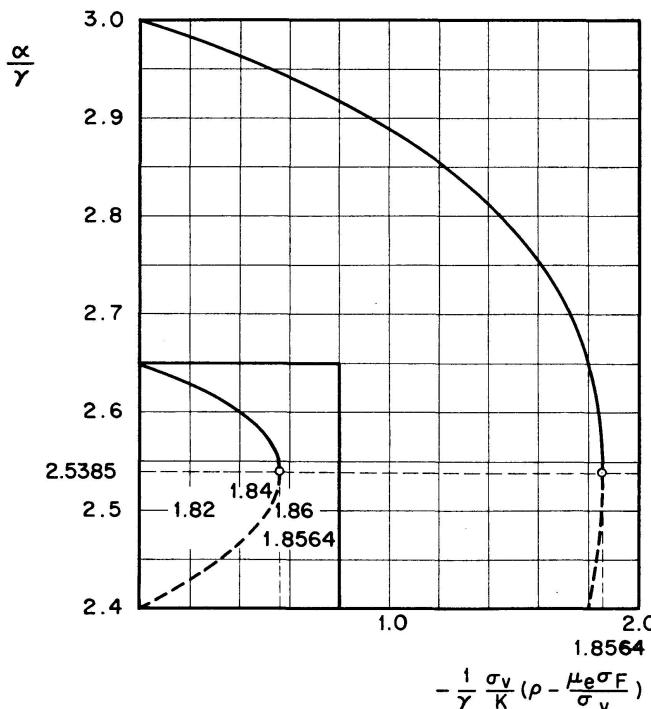


Fig. 6. Lösungskurve der Gl. (19).

### 5.3. Beanspruchung der schlaffen Bewehrung im elastischen Bereich, $\sigma_e < \sigma_F$

Befindet sich die Stahlspannung der schlaffen Bewehrung noch im elastischen Bereich, so ist die Zugkraft  $Z_e$  nicht mehr vorgegeben, sondern hängt von der Stabkrümmung, d. h. den Werten  $\alpha$  und  $\epsilon_R$  ab:

$$\sigma_e = E_e \epsilon_{be} = -E_e \frac{\vartheta - \alpha}{\alpha} \epsilon_R; \quad \sigma_e < \sigma_F. \quad (21)$$

Damit kann  $\gamma$  nicht mehr wie im Falle des Fließens der schlaffen Bewehrung unabhängig von  $\alpha$  vorweg angegeben werden. Beide Werte  $\alpha$  und  $\gamma$  sind vielmehr als Lösungen zweier nichtlinearer algebraischer Gleichungen zu ermitteln. Die Bestimmungsgleichungen folgen aus Gl. (12) und aus Gl. (18), beide in Verbindung mit Gl. (17) und (21.).

Gl. (12) liefert:

$$\gamma - 6 \frac{\mu_e K}{\rho \sigma_v} \frac{E_e}{E_b} \left[ \vartheta \left( 1 + \frac{\gamma}{\alpha} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\alpha}{\vartheta} \vartheta^2 - \gamma \right] \frac{1 - \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\gamma}}{1 - \frac{1}{4} \frac{\alpha}{\gamma}} = \frac{1}{2} + \lambda + \frac{\sigma_{bg}(x)}{6 \rho \sigma_v}. \quad (22)$$

Aus Gl. (18) folgt

$$\frac{1}{12} \frac{3 \left( \frac{\alpha}{\gamma} \right)^2 - \left( \frac{\alpha}{\gamma} \right)^3}{\left( 1 - \frac{1}{4} \frac{\alpha}{\gamma} \right)^2} - 6 \frac{\mu_e}{\gamma^2} \frac{E_e}{E_b} \left( \frac{\vartheta}{\alpha} - \gamma \right) \frac{1 - \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\gamma}}{1 - \frac{1}{4} \frac{\alpha}{\gamma}} = - \frac{\rho \sigma_v}{\gamma K}. \quad (23)$$

### 5.4. Konstante Streckenlast und parabolische Spanngliedführung

Um die Integrationen zu vereinfachen, wird der Ursprung der Längskoordinate hier in die Mitte des Balkens verlegt, Fig. 3. Für die weitere praktische Durchführung der Rechnung ist es außerdem vorteilhaft, die Längskoordinate  $\bar{x}$  auf den Integrationsbereich  $\frac{l}{2}(1 - \bar{\beta})$  bezogen einzuführen:

$$\xi = \frac{\bar{x}}{\frac{l}{2}(1 - \bar{\beta})}.$$

Für den hier näher dargestellten Fall des symmetrischen Balkens mit parabolischer Spanngliedführung und gleichmäßig verteilter äußerer Last ergibt sich  $\lambda$  damit in der Form

$$\lambda(\xi) = \lambda_m - (\lambda_m - \lambda_0)(1 - \bar{\beta})^2 \xi^2 \quad (24)$$

und das Biegemoment zu

$$M(\xi) = M_m [1 - (1 - \bar{\beta})^2 \xi^2]. \quad (25)$$

Die Biegerandzugsspannungen aus  $M(\xi)$  sind dann

$$\sigma_{bg}(\xi) = \frac{6}{b d^2} M(\xi) = \sigma_{bg} [1 - (1 - \bar{\beta})^2 \xi^2]. \quad (25a)$$

Bei Fließen der schlaffen Bewehrung,  $\sigma_e = \sigma_F$ , ist dann die Lage der Druckresultierenden gemäß Gl. (12)

$$\gamma(\xi) = \frac{\frac{1}{2} + \lambda_m + \frac{\sigma_{bg}}{6\rho\sigma_v} - \left(\lambda_m - \lambda_0 + \frac{\sigma_{bg}}{6\rho\sigma_v}\right)(1 - \bar{\beta})^2 \xi^2 - \frac{\mu_e \sigma_F}{\rho\sigma_v} \vartheta}{1 - \frac{\mu_e \sigma_F}{\rho\sigma_v}}. \quad (26)$$

Die entsprechende Gleichung für den Fall  $\sigma_e < \sigma_F$  lautet nach Gl. (22)

$$\begin{aligned} \gamma - 6\frac{\mu_e K}{\rho\sigma_v} \frac{E_e}{E_b} \left[ \vartheta \left( 1 + \frac{\gamma}{\alpha} \right) - \frac{\gamma}{\alpha} \frac{1}{\gamma} \vartheta^2 - \gamma \right] \frac{1 - \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\gamma}}{1 - \frac{1}{4} \frac{\alpha}{\gamma}} = \\ \frac{1}{2} + \lambda_m + \frac{\sigma_{bg}}{6\rho\sigma_v} - \left( \lambda_m - \lambda_0 + \frac{\sigma_{bg}}{6\rho\sigma_v} \right) (1 - \bar{\beta})^2 \xi^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Mit den erhaltenen Lösungen für  $\alpha/\gamma$  und  $\gamma$  werden die Betondehnungen  $\epsilon_{bs}$  in Höhe der Spanngliedachse dann nach

$$\epsilon_{bs} = - \left\{ \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{1}{2} + \lambda_m - (\lambda_m - \lambda_0) (1 - \bar{\beta})^2 \xi^2 \right] \frac{\gamma}{\alpha} - 1 \right\} \epsilon_R \quad (28)$$

bestimmt. Ist  $\epsilon_{bs}$  für  $n+1$  äquidistante Werte  $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$  von 0 bis 1 ermittelt, so kann die Betonverlängerung im Bereich der gerissenen Zugzone durch numerische Integration, z. B. nach der Trapezregel bestimmt werden:

$$\begin{aligned} 2 \int_{x_1}^{l/2} \epsilon_{bs} dx = \delta_{b,2} &= 2 \int_0^{(l/2)(1-\bar{\beta})} \epsilon_{bs}(\bar{x}) d\bar{x} = 2 \frac{l}{2} (1 - \bar{\beta}) \int_0^1 \epsilon_{bs}(\xi) d\xi, \\ \delta_{b,2} &= \frac{l}{2} \frac{(1 - \bar{\beta})}{n} [\epsilon_{bs}(\xi_0) + 2 \epsilon_{bs}(\xi_1) + 2 \epsilon_{bs}(\xi_2) + \dots + \epsilon_{bs}(\xi_n)]. \end{aligned} \quad (29)$$

## 6. Bruchbedingung, Bemerkungen zur praktischen Rechnung

Beim Spannbetonbalken ohne Verbund wird der Biegebruch i. a. durch primäres Versagen des Betons der Druckzone verursacht. Das Fehlen des Verbundes zwischen Spannglied und Beton bewirkt eine über die Länge gleichmäßige Dehnung des Spannstahls und damit sich stark öffnende, schnell fortschreitende Risse an der Zugseite, die die Betondruckzone schnell verkleinern.

Die Bruchbedingung folgt daher aus dem allein mit Hilfe der resultierenden Druckkraft der Biegedruckzone angeschriebenen Moment der inneren Kräfte, für das das Extremum zu bestimmen ist,

$$M = (h - \gamma d) R.$$

Darin ist  $h$  der Abstand der resultierenden Stahlzugkraft  $Z_s + Z_e$  vom oberen Querschnittsrand. Im Bruchzustand wird die schlaffe Bewehrung am

Bruchquerschnitt die Streckgrenze immer erreicht haben. Nach Gl. (26) liegt damit der Wert  $\gamma$  bei gegebener äußerer Belastung fest. Das Moment der inneren Kräfte ist unter Einführung von Gl. (15) und Gl. (17) nur eine Funktion von  $\alpha$ , oder, in der hier benutzten Schreibweise, des Verhältnisses  $\alpha/\gamma$ . Die Bedingung für das Extremum lautet dann

$$\frac{d}{d\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)} \frac{3\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^3}{\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2} = 0.$$

Der Bruch ist die linke Seite der Gl. (19), dargestellt in Fig. 6. Die Lösung ist  $\frac{\alpha}{\gamma} = 2,5385$ . Für kleinere Werte ist bei der hier eingeführten Verformungsbeziehung des Betons das Gleichgewicht nur bei wieder abnehmender äußerer Belastung möglich. Zur Vorausberechnung des Bruchmoments ist somit zu zeigen, daß das Verhältnis  $\frac{\alpha}{\gamma}$  am höchst beanspruchten Querschnitt den Wert 2,5385 angenommen hat und daß dabei die Verträglichkeit der Verformungen des Spanngliedes und des Betons in Höhe der Spanngliedachse gewahrt ist.

Für die übliche Bemessungsaufgabe ist das Bruchmoment bekannt und es ist nachzuweisen, daß es mit den gewählten Querschnittsabmessungen aufgenommen werden kann.

Für den genannten Grenzwert  $\frac{\alpha}{\gamma} = 2,5385$  kann das zugehörige Verhältnis  $\rho$  angegeben werden, das zweckmäßig zuerst bestimmt wird. Die zur Lösung der Aufgabe erforderliche Probierarbeit läßt sich hierdurch wesentlich herabsetzen bzw. ganz vermeiden.

Aus Fig. 6 geht hervor, daß der Ausdruck

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{\sigma_v}{K} \left( \rho - \frac{\mu_e \sigma_F}{\sigma_v} \right) \leq 1,8564$$

bleiben muß. Führt man diesen Grenzwert in die Gl. (26) für das kleinste, in Balkenmitte bei  $\xi=0$  vorliegende  $\gamma$  ein, so erhält man eine quadratische Gleichung für  $\rho$  mit der Lösung

$$\begin{aligned} \rho_{min} = & - \left[ 0,9282 \left( \frac{1}{2} + \lambda_m \right) \frac{K}{\sigma_v} - \frac{\mu_e \sigma_F}{\sigma_v} \right] \\ & - \sqrt{\left[ 0,9282 \left( \frac{1}{2} + \lambda_m \right) \frac{K}{\sigma_v} - \frac{\mu_e \sigma_F}{\sigma_v} \right]^2 - 0,3094 \frac{\sigma_{bg} K}{\sigma_v^2} - \left( \frac{\mu_e \sigma_F}{\sigma_v} \right)^2} + 1,8564 \frac{\mu_e \sigma_F K}{\sigma_v^2} \vartheta. \end{aligned} \quad (31)$$

Dieser Wert ist eine untere Schranke. Für kleinere Werte können die Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr erfüllt werden. Mit diesem  $\rho_{min}$  wird man die erste Verformungsuntersuchung durchführen. Ergeben sich die Betonverformungen größer als die Verformungen des Spanngliedes, so ist damit die ausreichende Momententrägfähigkeit bereits nachgewiesen. Durch Vergrößerung von  $\rho$  lassen sich die Spannstahldehnungen bei gleichzeitiger Ermäßigung

der Betonverformungen erhöhen, so daß die Verformungsbedingung (1a) immer erfüllt werden kann. Wiederholungsrechnungen mit größeren  $\rho$  sind nur dann erforderlich, wenn die zu dem vorgegebenen Biegemoment gehörende Spanngliedkraft genau bestimmt werden soll.

Soll dagegen das tatsächlich zu erwartende Biegemoment ermittelt werden, so wird man die Untersuchungen zunächst für ein geschätztes Biegemoment in derselben Weise durchführen. Bei nicht erfüllter Verformungsbedingung wird man jedoch hier das eingeführte Biegemoment ändern und die Untersuchung bei  $\rho_{min}$  beginnend wiederholen. Überwogen die Betonverformungen die Spannstahldehnungen, so ist für den nächsten Rechnungsgang das Moment zu erhöhen und umgekehrt.

## 7. Vergleich mit Versuchsergebnissen

Zur Überprüfung der Brauchbarkeit wurde das Rechenverfahren auf einige der in Heft 130 des DAfStB mitgeteilten Versuche angewendet. Diese Versuche umfaßten 6 Balken mit geraden, außerhalb des Betonquerschnitts liegenden Spanngliedern. Hiervon waren allerdings 2 unsymmetrisch belastet, so daß sie für den Vergleich nicht herangezogen werden konnten. Bei den symmetrisch beanspruchten war die Belastung durch 4 Einzellasten so aufgebracht worden, daß die Momentlinie etwa der Parabel für gleichmäßig verteilte Belastung entsprach. Weiterhin waren alle für die Rechnung benötigten Baustoffeigenschaften bestimmt worden.

Außerdem wurde noch ein von A. PÁEZ, Madrid, geprüfter Balken mit parabolisch geführtem Spannglied untersucht, der ebenfalls in dem Bericht [1] erwähnt wird. Er war durch 6 Einzellasten beansprucht; die Momentenverteilung war dabei ebenfalls annähernd parabolisch. Hierzu waren allerdings die Betoneigenschaften nicht vollständig mitgeteilt. Die benötigten weiteren Werte wurden aus der bei RÜSCH u. a. angegebenen Prismendruckfestigkeit zu  $\sigma_R = 55 \text{ kp/cm}^2$  und  $E_b = 330 \text{ Mp/cm}^2$  angenommen.

Mit Ausnahme des Balkens «München V» enthielten sie keine schlaffe Bewehrung. Bei «München V» waren oben 2, unten 4 schlaffe Einlagen St I  $\varnothing 10 \text{ mm}$  angeordnet.

Ein Zahlenbeispiel für die Durchführung der Rechnung ist in [3] für einen Balken ohne schlaffe Bewehrung angegeben.

In der Zahlentafel sind die rechnerisch ermittelten Bruchmomente  $M_U$  und Spanngliedkräfte  $Z_s$  den im Versuch bestimmten gegenübergestellt.

Für Balken «München II» waren dem Rechenverfahren zugrunde gelegte wesentliche Annahmen nicht mehr erfüllt. Es ergaben sich tatsächlich merkliche Abweichungen zwischen Versuch und Rechnung, die nicht mehr durch die übliche Streuung der Baustoffeigenschaften allein erklärt werden können. Der Balken war extrem hoch vorgespannt. Die mittlere Vorspannung betrug

*Zahlentafel. Vergleich der Ergebnisse der Versuche und der Rechnung*

Bezeichnung	$\frac{\sigma_v}{K}$	$V(Mp)$	Versuch		Rechnung	
			$Z_s(Mp)$	$M_U(Mpm)$	$Z_s(Mp)$	$M_U(Mpm)$
München I	0,131	23,3	~29	6,77	29,2	6,48
München II	0,293	18,5	24,3	5,18	21,7	4,22
München V*)	0,126	24,3	29,6	8,51	31,8	8,55
München VI	0,084	21,8	30,2	7,60	31,8	7,70
Madrid	0,132	38,3	—	12,6	45,7	12,72

\*) mit zusätzlicher schlaffer Bewehrung

0,29 K, die Randspannung am unteren Rand 0,66 K. Für eine so hohe Beanspruchung ist der für den Bereich der ungerissenen Zugzone angenommene lineare Zusammenhang zwischen Spannungen und Verformungen des Betons nicht mehr gegeben. Tatsächlich hat auch für diesen Balken das von RÜSCH u. a. vorgeschlagene Verfahren, das nichtlineare Verformungsbeziehungen für den Beton über die gesamte Balkenlänge benutzt, eine bessere Übereinstimmung ergeben (Moment 5,05 Mpm, Spanngliedkraft 24,7 Mp). Das errechnete Bruchmoment liegt jedoch auf der sicheren Seite.

Bei den 4 anderen Balken, bei denen die Rechenannahmen gegeben waren, liefert der Vergleich dagegen eine überraschend genaue Übereinstimmung der errechneten mit den im Versuch bestimmten Werten. Die Abweichungen betragen beim Bruchmoment weniger als 5%. Sie sind damit allein aus den unvermeidlichen Streuungen der Baustoffeigenschaften gut erklärbar. Damit ist gezeigt worden, daß das Bruchmoment des rechteckigen Spannbetonbalkens ohne Verbund mit dem hier beschriebenen Verfahren im Rahmen der Unsicherheit der benutzten Ausgangsgrößen, insbesondere der Baustoffkennwerte, zutreffend vorhergesagt werden kann.

**Bezeichnungen**

- $E_b$  Elastizitätsmodul des Betons
- $E_e$  Elastizitätsmodul des schlaffen Bewehrungsstahls
- $E_s$  Elastizitätsmodul des Spannstahls
- $F_b$  Betonquerschnitt des Balkens
- $F_s$  Querschnitt des Spanngliedes
- $I_b$  Trägheitsmoment des vollen Betonquerschnitts
- $K$  Prismendruckfestigkeit des Betons
- $M$  Moment
- $N$  Normalkraft
- $x$  Längskoordinate mit Ursprung am Balkenende
- $\bar{x}$  Längskoordinate mit Ursprung in Balkenmitte
- $V$  Spanngliedkraft nach Kriechen und Schwinden
- $Z_s$  Spanngliedkraft im Bruchzustand

- $Z_e$  Kraft der schlaffen Bewehrung  
 $\delta_{b1}$  Betonverformungen in der Faser der Spanngliedachse im ungerissenen Bereich  
 $\delta_{b2}$  dito im gerissenen Bereich  
 $\delta_s$  Verformung des Spanngliedes  
 $\epsilon_b$  Betondehnung  
 $\eta$  bezogene Querschnittsordinate  
 $\mu_e$  Querschnitt der schlaffen Bewehrung, bezogen auf den Betonquerschnitt (Bewehrungsverhältnis)  
 $\sigma_e$  Spannung der schlaffen Bewehrung  
 $\sigma_s$  Spannung des Spannstahls

### Literatur

1. RÜSCH, H., KORDINA, K. und ZELGER, C.: Bruchsicherheit bei Vorspannung ohne Verbund. Heft 130 DAfStB. Berlin 1959.
2. RÜSCH, H.: Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone. Heft 120 DAfStB. Berlin 1958.
3. PLÄHN, J.: On the Ultimate Moment Analysis of Unbonded Prestressed Concrete Beams. Vorbericht Seminar "Problems of Prestressing" der indischen nationalen Gruppe der IVBH in Madras 1970, S. III/63.
4. ZERNA, W.: Spannbeton. Eine Einführung in seine Theorie. Düsseldorf 1953.

### Zusammenfassung

Die Vorausberechnung der Momententrägfähigkeit des statisch bestimmt gelagerten Spannbetonbalkens ohne Verbund erfordert die Bestimmung des Spannungszustandes des 1fach innerlich statisch unbestimmten Systems unter Berücksichtigung nichtlinearer Verformungsbeziehungen für die Werkstoffe Beton und Stahl sowie der Veränderlichkeit der Querschnitte mit dem Biegemoment infolge des Aufreißens der Zugzone. Eine Lösung dieser Aufgabe wird für den Balken mit Rechteckquerschnitt unter gleichmäßig verteilter Belastung angegeben. Die Brauchbarkeit der Lösung wird durch Vergleich mit Versuchsergebnissen dargelegt.

### Summary

In order to calculate the moment carrying capacity of an unbonded, simply supported, prestressed concrete beam it is necessary to determine the state of stress throughout this one-fold internally indeterminate system. The problem is complicated by non-linear material behaviour and variation in the cross section with moment due to cracking of the tension zone.

A solution to this problem is presented for the case of a beam with rectangular cross section subjected to a uniformly distributed loading. The applicability of the solution is demonstrated by comparison with test results.

### Résumé

On calcule la limite de résistance en flexion d'une poutre isolée en béton précontraint et en appui statiquement déterminé. Ce calcul exige la détermination de l'état de tension du système intérieurement hyperstatique de seul degré en tenant compte des relations non linéaires de déformation pour les matériaux béton et acier ainsi que la variation de section avec le moment par suite des fissures dans la zone de traction. On donne une solution de ce problème pour une poutre de section rectangulaire soumise à une charge répartis. La validité de la solution est établie par comparaison avec les résultats des expériences.