Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 29 (1969)

Teilband: IABSE Publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ASSOCIATION INTERNATIONALE DES PONTS ET CHARPENTES
INTERNATIONALE VEREINIGUNG FÜR BRÜCKENBAU UND HOCHBAU
INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR BRIDGE AND STRUCTURAL ENGINEERING

MÉMOIRES
ABHANDLUNGEN
PUBLICATIONS

29-I

1969

PUBLIÉS PAR LE SECRÉTARIAT GÉNÉRAL À ZURICH
HERAUSGEGEBEN VOM GENERALSEKRETARIAT IN ZÜRICH
PUBLISHED BY THE GENERAL SECRETARIAT IN ZURICH

Editeur - Verleger - Publisher

Association Internationale des Ponts et Charpentes
Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich

Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau
Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich

International Association for Bridge and Structural Engineering
Swiss Federal Institute of Technology, Zurich

En commission pour la vente en librairie
Kommissionsverlag für den Buchhandel - Copies for sale at

Verlag Leemann Zürich

Printed in Switzerland

Préface

Grâce aux auteurs et à notre Secrétariat, nous avons le ferme espoir de sortir de presse dans les délais les deux volumes des «Mémoires 1969» que notre nouvelle politique nous impose. Le présent volume 29/I comprend 9 contributions de valeur. Elles apportent dans des domaines brûlants une série d'idées originales et fort utiles au développement de notre science. Nous pourrions nous demander si la fréquence de parution plus grande ne devrait pas nous inciter à grouper les articles par genre et volume. En raison de l'intérêt d'une publication rapide, nous ne pensons pas que cela soit judicieux sans l'exclure cependant définitivement.

Nous remercions vivement les auteurs et l'éditeur.

Zurich, en juin 1969.

Le Président de l'AIPC:

Prof. MAURICE COSANDEY
Directeur de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Les Secrétaires Généraux:

Dr sc. techn. HANS VON GUNTEN
Professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich

Dr sc. techn. PIERRE DUBAS
Professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich

Dr sc. techn. CHRISTIAN MENN
Coire — Zurich

Vorwort

Dank der Unterstützung durch die Autoren und unser Sekretariat darf erwartet werden, daß die beiden Teilbände der «Abhandlungen» 1969, die nach der neuen Regelung vorgesehen sind, rechtzeitig herausgegeben werden können. Der vorliegende Band 29/I enthält 9 wertvolle Beiträge. Diese Arbeiten bringen auf höchst aktuellen Gebieten eine Reihe von neuen Ideen, die für die Entwicklung unserer Wissenschaft außerordentlich nützlich sein werden. Man könnte sich fragen, ob das öftere Erscheinen der «Abhandlungen» uns nicht dazu veranlassen sollte, die Beiträge nach Art und Umfang aufzuteilen. Im Interesse einer rascheren Veröffentlichung scheint dies aber nicht ratsam, doch möchten wir diese Möglichkeit nicht gleich ausschließen.

Wir sprechen den Autoren und dem Herausgeber hiermit unsern besten Dank aus.

Zürich, im Juni 1969.

Der Präsident der IVBH:

Prof. Maurice Cosandey
Direktor der Eidgenössischen Technischen Hochschule Lausanne

Die Generalsekretäre:

Dr. sc. techn. Hans von Gunten
Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

Dr. sc. techn. Pierre Dubas
Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

Dr. sc. techn. Christian Menn
Chur — Zürich

Preface

Thanks to the authors and to our Secretariat, the two volumes of the 1969 "Publications", which are required by our new policy, may be expected to come out in good time. The present Volume 29/I includes 9 valuable papers. They present a series of original ideas in the most timely fields and will contribute greatly to the development of our science. The question arises whether more frequent publication should not require a grouping of the papers according to contents and length. If the papers are to be published without delay, however, this does not seem advisable, but we should not like to exclude this possibility entirely.

We should like to express our thanks to the authors and the publisher.

Zurich, June, 1969.

The President of IABSE:

Prof. MAURICE COSANDEY
Director of the Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne

The General Secretaries:

Dr. sc. techn. HANS VON GUNTEN
Professor at the Swiss Federal Institute of Technology, Zurich

Dr. sc. techn. PIERRE DUBAS
Professor at the Swiss Federal Institute of Technology, Zurich

Dr. sc. techn. CHRISTIAN MENN
Chur — Zurich

Leere Seite
Blank page
Page vide

Table des matières - Inhaltsverzeichnis - Table of Contents

KUANG-HAN CHU, HSUEH-LIEN CHOW, USA . . . . . English 1

Longueur de flambement des cadres asymétriques
Knicklänge in unsymmetrischem Rahmen
Effective Column Length in Unsymmetrical Frames

M. Z. COHN, E. F. P. BURNETT, D. E. GRIERSON, Canada . . . . . English 17

Sécurités de rupture et de service, et rendement du dimensionnement à la rupture de poutres et de portiques en béton armé
Sicherheit, Nutzbarkeit und Leistung einer Bemessung auf Bruch von Stahlbeton-balken und -rahmen
Safety, Serviceability and Efficiency of Limit Design for Reinforced Concrete Beams and Frames

S. MACKEY, K. T. YING, Hong Kong . . . . . English 33

Calcul dynamique des planchers
Schwingungsberechnung von Decken
Dynamic Analysis of Floor Systems

BÜLENT ÖVÜNÇ, USA . . . . . English 49

Essais de ruine sur des tronçons de cylindres creux
Über Spaltversuche an Hohlzylinderproben
On the Splitting Tests of the Hollow Cylinder Specimens

F. SAWKO, A. M. B. WILDE, England . . . . . English 57

Grandes déformations des cadres élasto-plastiques
Große Ausbiegungen in der Berechnung elasto-plastischer Rahmen
Large Deflection Effects in Elasto-Plastic Frame Analysis

H. STEUP, DDR . . . . . Deutsch 73

Influence des déformations initiales et tensions résiduelles sur le comportement postcritique des plaques
Vorbeulungs- und Eigenspannungs-Einflüsse bei der überkritischen Beulung von Platten
The Influence of Initial Deformations and Initial Stresses on the Postbuckling Behaviour of Plates

A. Vandeghen, M. Alexandre, Belgique . . . . . Français 95

Vibrations des grandes cheminées en acier sous l'action du vent
Schwingungen großer Stahlschornsteine unter Wind
Wind-induced Vibration of Tall Steel Chimney Stacks

R. F. Warner, Australia . . . . . English 133

Flexion biaxale de colonnes élancées en béton armé
Lange Stahlbetonsäulen unter zweiaxialer Biegung
Long Reinforced Concrete Columns in Biaxial Bending

André Winand, Belgique . . . . . Français 149

Effets dynamiques sur les tabliers des ponts
Dynamische Einflüsse auf Brückenplatten
Dynamic Effects on Bridge Decks

Effective Column Length in Unsymmetrical Frames

Longueur de flambement des cadres asymétriques

Knicklänge in unsymmetrischem Rahmen

KUANG-HAN CHU
Ph. D., Professor of Civil Engineering, Illinois Institute of Technology, Chicago, Illinois

HSUEH-LIEN CHOW
Structural Engineer, Westenhoff and Novick, Inc., Chicago, Illinois

Introduction

In the design of bulding frames, the slenderness ratio of any column is determined by its effective column length rather than its actual unbraced length. The ratio K of the effective column length to the actual unbraced length is of great concern to designers working with unbraced frames. This is because K is always less than 1.0 in braced frames but it is usually greater than 1.0 for unbraced frames subject to lateral sway. The value of K for unbraced frames is usually determined by the alignment chart given in the AISC Manual of Steel Construction [1]. This chart is based on an equation (given in the Guide to Design Criteria for Metal Compression Members [2]) which is the buckling equation for columns in a symmetrical rectangular frame subjected to symmetrical vertical loads at the tops of the columns [3]. As shown in Fig. 1, the frame is assumed to be braced in the direction perpendicular to its plane with moments of inertia of the colums (which resist bending in its plane) $I'_c = I_c$ and subjected to loads $P' = P$. Note that the moments of inertia of the beams are not equal ($I'_b \neq I_b$) and the column bases become fixed if $I'_b = \infty$ hinged if $I'_b = 0$.

Since the AISC alignment chart is based on symmetrical frames symmetrically loaded, the question arises as to what will be the value of K if $P' \neq P$ and $I'_c \neq I_c$. In this paper, the basic buckling equation will be derived and a chart which gives a coefficient for modifying the K values given by the AISC chart will be presented. Since coefficients given by the chart are average values, some errors can be expected in the modified K values obtained. How-

ever, the maximum error of the modified K will be at most about 20 per cent and for most pratical cases less than 10 per cent.

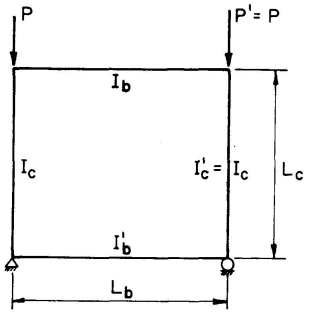


Fig. 1. Symmetrical frame symmetrically loaded.

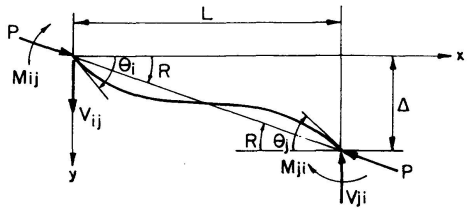


Fig. 2. Notations for the slope deflection equation.

Buckling Equation

The slope deflection method will be used in the derivation of the buckling equation. The slope deflection equation for a member ij subject to an axial load P (Fig. 2) as given in standard textbooks [4, 5] may be written in the following form [6, 7].

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L}(2a\theta_i + b\theta_j - cR), \tag{1}$$

in which M_{ij} = moment at end i (M_{ji} at end j), positive clockwise,

E = modulus of elasticity,

I = moment of inertia about an axis perpendicular to the plane of the frame,

L = length of the member,

θ_i, θ_j = slope at ends i and j respectively, positive clockwise,

R = slope of the chord, positive clockwise,

= Δ/L = end deflection/length of member,

$$a = \frac{\phi}{4}\left(\frac{\phi}{1-\phi\cot\phi} + \cot\phi\right), \tag{2a}$$

$$b = \frac{\phi}{2}\left(\frac{\phi}{1-\phi\cot\phi} - \cot\phi\right), \tag{2b}$$

$$c = 2a + b = \frac{\phi^2}{1-\phi\cot\phi} \tag{2c}$$

and

$$\phi = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}. \tag{3}$$

For small values of ϕ

$$a = 1 - \frac{(2\phi)^2}{30} - \frac{11\,(2\phi)^4}{25000} \cdots, \tag{4a}$$

$$b = 1 + \frac{(2\phi)^2}{60} - \frac{13\,(2\phi)^4}{25000} \cdots, \tag{4b}$$

for $\phi = 0$ $\qquad a = b = 1.$ (4c)

Letting K be the ratio of the effective column length to the actual unbraced length, then P at buckling becomes the critical load P_{cr} given by

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{(K L)^2} \tag{5}$$

and

$$\phi = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{P_{cr}}{E I}} = \frac{\pi}{2K}. \tag{6}$$

Referring to Fig. 3, let

$$P' = \lambda P\,(0 \leqq \lambda \leqq 1), \qquad I'_c = \alpha I_c\,(0 \leqq \alpha \leqq 1), \tag{7a, b}$$

$$G_A = \frac{I_c/L_c}{I_b/L_b}, \qquad G'_A = \frac{I'_c/L_c}{I_b/L_b} = \alpha G_A, \tag{8a, b}$$

$$G_B = \frac{I_c/L_c}{I'_b/L_b}, \qquad G'_B = \frac{I'_c/L_c}{I'_b/L_b} = \alpha G_B, \tag{8c, d}$$

in which I_c and I'_c are moments of inertia for the columns, I_b and I'_b are the same for the beams, L_c and L_b are the lengths of the columns and beams respectively as shown in Fig. 3. With the coefficients $a_1, b_1 \ldots$ etc. for the

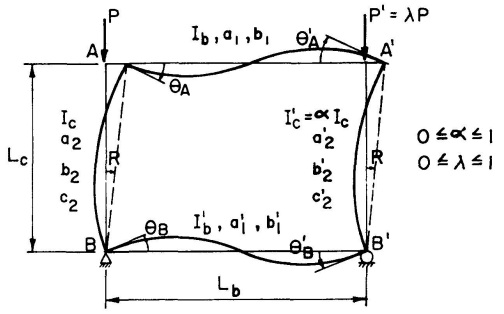


Fig. 3. Unsymmetrical frame unsymmetrically loaded.

members as indicated in Fig. 3, the slope deflection equations for members $A\,A'$ and $A\,B$ are

$$M_{AA'} = \frac{2 E I_b}{L_b}(2 a_1 \theta_A + b_1 \theta_{A'}), \tag{9a}$$

$$M_{AB} = \frac{2 E I_c}{L_c}(2 a_2 \theta_A + b_2 \theta_B - c_2 R). \tag{9b}$$

For equilibrium at joint A, $\sum M_A = M_{AA'} + M_{AB} = 0$, yields

$$2\,(a_1 + G_A a_2)\,\theta_A + G_A b_2 \theta_B + b_1 \theta_{A'} - G_A c_2 R = 0. \tag{10a}$$

Similarly with $\sum M_B = 0$, $\sum M_{A'} = 0$ and $\sum M_{B'} = 0$, one obtains

$$G_B b_2 \theta_A + 2(a_1' + G_B a_2)\theta_B + b_1' \theta_B' - G_B c_2 R = 0, \tag{10b}$$

$$b_1 \theta_A + 2(a_1 + \alpha G_A a_2')\theta_A' + \alpha G_A b_2' \theta_B' - \alpha G_A c_2' R = 0, \tag{10c}$$

$$b_1' \theta_B + \alpha G_B b_2' \theta_A' + 2(a_1' + \alpha G_B a_2')\theta_B' - \alpha G_B c_2' R = 0. \tag{10d}$$

The shear equilibrium equation

$$M_{AB} + M_{BA} + M_{A'B'} + M_{B'A'} + P L_c R + P' L_c R = 0 \tag{11a}$$

gives $$c_2 \theta_A + c_2 \theta_B + \alpha c_2' \theta_A' + \alpha c_2' \theta_B' - 2[c_2 + \alpha c_2' - (1+\lambda)\phi^2] R = 0, \tag{11b}$$

in which $$\phi^2 = \frac{L_c^2 P}{4 E I_c}. \tag{12}$$

Let $$2[c_2 + \alpha c_2' - (1+\lambda)\phi^2] = d. \tag{13}$$

From Eq. (11) $$R = \frac{c_2}{d}(\theta_A + \theta_B) + \frac{\alpha c_2'}{d}(\theta_A' + \theta_B'). \tag{14}$$

Since there is no axial force in the beams AA' and BB',

$$a_1 = b_1 = a_1' = b_1' = 1. \tag{15}$$

Substituting Eqs. (14) and (15) into Eqs. (10a–d), yields

$$(2 + G_A W_1)\theta_A + G_A W_2 \theta_B + (1 - G_A W_5)\theta_A' - G_A W_5 \theta_B' = 0, \tag{16a}$$

$$G_B W_2 \theta_A + (2 + G_B W_1)\theta_B - G_B W_5 \theta_A' + (1 - G_B W_5)\theta_B' = 0, \tag{16b}$$

$$(1 - G_A W_5)\theta_A - G_A W_5 \theta_B + (2 + G_A W_3)\theta_A' + G_A W_4 \theta_B' = 0, \tag{16c}$$

$$-G_B W_5 \theta_A + (1 - G_B W_5)\theta_B + G_B W_4 \theta_A' + (2 + G_B W_3)\theta_B' = 0, \tag{16d}$$

in which $$W_1 = 2a_2 - \frac{c_2^2}{d}, \qquad W_2 = b_2 - \frac{c_2^2}{d}, \tag{17a, b}$$

$$W_3 = 2\alpha a_2' - \frac{(\alpha c_2')^2}{d}, \qquad W_4 = \alpha b_2' - \frac{(\alpha c_2')^2}{d}, \qquad W_5 = \frac{\alpha c_2 c_2'}{d}. \tag{17c–e}$$

The buckling equation is obtained by setting the determinant of the coefficients of the unknown θ's in Eqs. (16) equal to zero, or

$$\begin{vmatrix} 2 + G_A W_1 & G_A W_2 & 1 - G_A W_5 & -G_A W_5 \\ G_B W_2 & 2 + G_B W_1 & -G_B W_5 & 1 - G_B W_5 \\ 1 - G_A W_5 & -G_A W_5 & 2 + G_A W_3 & G_A W_4 \\ -G_B W_5 & 1 - G_B W_5 & G_B W_4 & 2 + G_B W_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Expanding and rearranging Eq. (18), one obtains

$$\begin{aligned} &3 V_1 + (2 U_1 V_1 - U_3 V_2 - U_5 V_3 - U_7 V_4 - U_9 V_5) G_A \\ &\quad + (U_2 V_1 - U_4 V_2 - U_6 V_3 - U_8 V_4 - U_{10} V_5 + V_6) G_A^2 = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

in which

$$\begin{aligned} U_1 &= W_1+W_3+W_5, & U_2 &= W_1 W_3 - W_5^2, \\ U_3 &= W_2+2W_5, & U_4 &= W_1 W_5 - W_2 W_5, \\ U_5 &= W_4+2W_5, & U_6 &= W_3 W_5 - W_4 W_5, \\ U_7 &= 2W_4+W_5, & U_8 &= W_1 W_4 - W_5^2, \\ U_9 &= 2W_2+W_5, & U_{10} &= W_2 W_3 - W_5^2, \\ U_{11} &= W_2 W_4 - W_5^2. \end{aligned} \tag{20a–k}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= 3+2G_B U_1+G_B^2 U_2, & V_2 &= G_B U_5+G_B^2 U_6, \\ V_3 &= G_B U_3+G_B^2 U_4, & V_4 &= G_B U_7+G_B^2 U_8, \\ V_5 &= G_B U_9+G_B^2 U_{10}, & V_6 &= G_B^2 U_{11}^2. \end{aligned} \tag{21a–f}$$

In Eqs. (20), the W's are obtained from Eqs. (17a–e) with a_2, b_2, etc. obtained from Eqs. (2a–c) and (4a, b), using

$$\phi = \frac{L_c}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2K} \tag{22a}$$

for a_2, b_2 and c_2, and

$$\phi = \phi' = \frac{L_c}{2}\sqrt{\frac{P'}{EI_c'}} = \frac{\pi}{2K}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \tag{22b}$$

for a_2', b_2' and c_2'.

Special Cases

The following special cases may be obtained from the general buckling Eq. (18) or (19)

a) If $G_A=0$, $(I_b=\infty)$, then in Eq. (19), $V_1=0$ or

$$3+2G_B U_1+G_B^2 U_2 = 0. \tag{23}$$

b) If $G_A=\infty$, $(I_b=0)$, then in Eq. (19), the coefficient of $G_A^2=0$, hence

$$U_2 V_1 - U_4 V_2 - U_6 V_3 - U_8 V_4 - U_{10} V_5 + V_6 = 0 \tag{24a}$$

or

$$\begin{aligned} &G_B^2(U_2^2-2U_4U_6-U_8^2-U_{10}^2-U_{11}^2) \\ &+G_B(2U_1U_2-U_4U_5-U_3U_6-U_7U_8-U_9U_{10})+3U_2=0. \end{aligned} \tag{24b}$$

c) If $P=P'$ and $I_c=I_c'$ then $\lambda=1$, $\alpha=1$, $W_1=W_3$ and $W_2=W_4$. Consider the case $\theta_A=\theta_A'$ and $\theta_B=\theta_B'$.

Let

$$W_1 = W_1', \qquad W_2 = W_2', \qquad W_5 = W_5' \tag{25a–c}$$

for this particular case. Eq. (18) becomes

$$\begin{vmatrix} 3+G_A(W_1'-W_5') & G_A(W_2'-W_5') \\ G_B(W_2'-W_5') & 3+G_B(W_1'-W_5') \end{vmatrix} = 0 \tag{26a}$$

or

$$9+3(G_A+G_B)(W_1'-W_5')+G_A G_B[(W_1'-W_5')^2-(W_2'-W_5')^2] = 0. \tag{26b}$$

Note that $$W_1' - W_5' = 2\left(a_2 - \frac{c_2^2}{d}\right) = \frac{\phi}{2}(\cot\phi - \tan\phi) = \phi\cot 2\phi, \tag{27a}$$

$$W_2' - W_5' = b_2 - 2\frac{c_2^2}{d} = -\frac{\phi}{2}(\cot\phi + \tan\phi), \tag{27b}$$

in which $$d = 4(c_2 - \phi^2) = \frac{4\phi^3\cot\phi}{1-\phi\cot\phi}. \tag{27c}$$

Eq. (26b) becomes

$$9 + 3\phi\cot 2\phi\,(G_a + G_B) - G_A G_B \phi^2 = 0. \tag{28}$$

With $\phi = \frac{\pi}{2K}$, Eq. (28) is identical to the equation given in Guide to Design Criteria for Metal Compression Members [2].

d) If $I_c' = 0$ ($\alpha = 0$) and $P' \neq 0$ ($\lambda \neq 0$), then $\phi' = \infty$ and W_3, W_4 and W_5 become indefinite. There will be no solution for Eq. (18). The structure will buckle since there is a load on a column of zero flexural rigidity.

However, if $I_c' = 0$ and $P' = 0$, then $\alpha = 0$ and $W_3 = W_4 = W_5 = 0$.

Let $$W_1 = W_1'', \qquad W_2 = W_2'' \tag{29a, b}$$

for this particular case. Eq. (18) becomes

$$\begin{vmatrix} 2 + G_A W_1'' & G_A W_2'' & 1 & 0 \\ G_B W_2'' & 2 + G_B W_1'' & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \tag{30a}$$

or $$9 + 6(G_A + G_B) W_1'' + 4 G_A G_B [(W_1'')^2 - (W_2'')^2] = 0 \tag{30b}$$

with $$W_1'' = 2a_2 - \frac{c_2^2}{d} = W_1' - W_5', \tag{31a}$$

$$W_2'' = b_2 - \frac{c_2^2}{d} = W_2' - W_5' \tag{31b}$$

and $$d = 2(c_2 - \phi^2) = \frac{2\phi^3\cot\phi}{1-\phi\cot\phi}. \tag{31c}$$

The case of $I_c' = 0$ and $P' = 0$ is equivalent to the case with the member $A'B'$ omitted and the ends A' of AA' and B' of BB' supported on rollers (see Fig. 4a). It can be seen that Eq. (30b) is the same as Eq. (26b) for the symmetrical frame symmetrically loaded if $2G_A$ and $2G_B$ are used instead of G_A and G_B. The same result is obtained if $2L_b$ is used instead of L_b. This is because in the present case the points of inflection of the beams are at the ends A' and B', whereas in the symmetrical case, the inflection points are located at the midspan of the beams (see Fig. 4b).

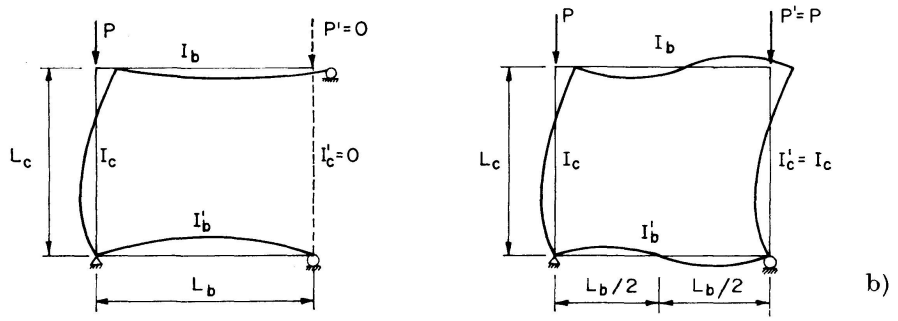


Fig. 4. Comparison of the deflection pattern of the case $P'=0$ and $I'_c=0$ with the symmetrical case.

e) For the case of $P=P'$ and $I=I'_c$ ($\lambda=1$, $\alpha=1$, $W_1=W_3$ and $W_2=W_5$) without the restriction of $\theta_A=\theta_A$ and $\theta_B=\theta_B$, it can be shown that Eq. (18) may be reduced to

$$\{1-(G_A+G_B)(W_1+W_5)+G_A G_B[(W_1+W_5)^2-(W_2-W_5)^2]\}\cdot \\ \cdot\{9+3(G_A+G_B)(W_1-W_5)+G_A G_B[(W_1-W_5)^2-(W_2-W_5)^2]\}=0. \tag{32}$$

Setting the terms in the second pair of braces equal to zero results an equation which is identical to Eq. (26b) for antisymmetrical buckling. Setting the terms in the first pair of braces equal to zero would result an equation for symmetrical buckling. Since K values for symmetrical buckling is always less than 1 while that of the antisymmetrical buckling always greater than 1 (equal to 1 if $I_b=I'_b=\infty$). The buckling load will be governed by the antisymmetrical case instead of symmetrical case.

Solution of the Buckling Equation and Presentation of Results

Eq. (19) may be solved very simply in the following manner. If the values of α, λ, and G_B are given, values of G_A may be determined for any assumed values of K. Since the equation for G_A is quadratic, negative and complex solutions must be discarded. Also some false or physically meaningless roots must be rejected.

It is noted that Eq. (18) is symmetrical with respect to G_A and G_B. Hence G_A and G_B are interchangeable. Thus Eq. (23) may be regarded as an equation for G_A when $G_B=0$ and Eq. (24) as an equation for G_A when $G_B=\infty$.

Various methods of presenting the results were tried. It was found that for a given pair of α and λ values, the β values defined by the following equation remain approximately constant for various values of G_A and G_B.

$$\beta=\frac{K}{K_0}, \tag{33}$$

in which K is the ratio of effective length to actual unbraced length for a given pair of α and λ values corresponding to a pair of specifies G_A and G_B values

(referring to the stronger column) and K_0 is the value of K for $\lambda=\alpha=1$ (symmetrical case) with the same values of G_A and G_B.

The ratio β is determined in the following manner. For given values of α, λ and G_B, using Eq. (19), G_A is obtained for some assumed value of K. Using the same G_A and G_B, K_0 is determined from Eq. (28) by Newton's method for solving transcendental equations. Then β is determined from Eq. (33). All computations were carried out on an IBM 360 computer.

For a given pair of α and λ values, an average value of β is determined for various values of G_A and G_B. A set of curves of the average β versus α for various values of λ is plotted in Fig. 5. This figure is to be used in conjunction with Fig. 6 which is reproduced from the AISC Manual [1]. With known values

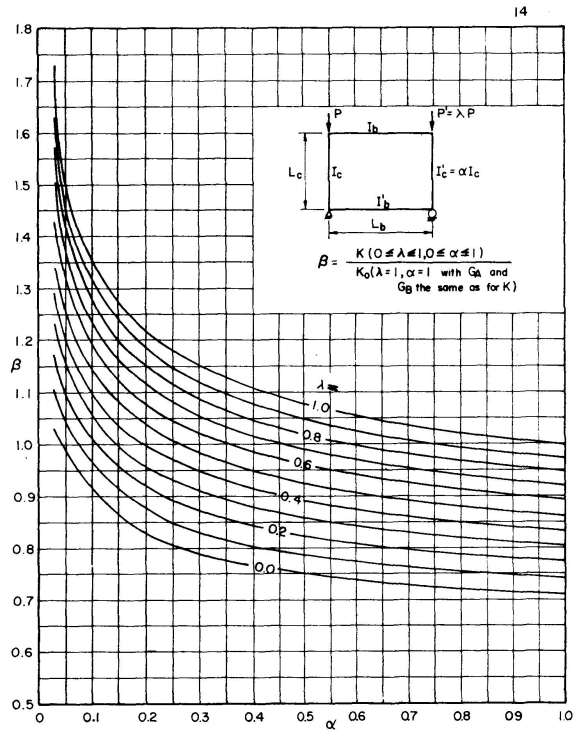


Fig. 5. Curves of average β versus α for various values of λ.

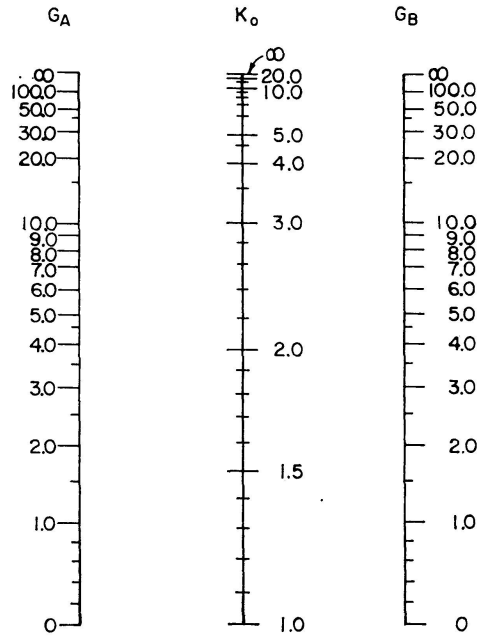


Fig. 6. Chart for the determination of K_0. (After AISC Manual of Steel Construction.)

of λ, α, G_A and G_B, the value of K will be given by βK_0 with β determined from Fig. 5 for a given α and λ and K_0 from Fig. 6 for given values of G_A and G_B.

Since average values of β are used in the plotting, some errors can be expected. It was found that the error increases as α of λ decreases (i.e., as the frame or loading becomes more unsymmetrical). For very small value of α, the error may reach 20 per cent. However, the maximum error is 11.3% for $\alpha=0.3$, 8.9% for $\alpha=0.5$, 4.5% for $\alpha=0.75$ and 1.1% for $\alpha=1.0$. For most practical cases, the error will be less than 10 per cent since α is seldom less than 0.5.

It should be noted that the estimated errors are maximum values. For the

ordinary ranges of G_A and G_B, β will be near the average and the error will be much smaller. In case precise K values are needed, Eq. (19) may be solved by the method of linear interpolation (false position) using as first approximate values of $(1 \pm e)K$ in which e is a small fraction representing an estimated error and K is determined from Figs. 5 and 6.

Numerical Examples

Various problems may be solved by using the charts presented herein intelligently. For readers not familiar with the use of the AISC Chart, examples will be shown for both the case of $\beta = 1$ (for $\lambda = 1$ and $\alpha = 1$) and the case of $\beta \neq 1$.

Example 1. A ten story frame is shown in Fig. 7 (a). The moments of inertia of the columns and beams are as shown in the figure. It may be noted that the ratio of G_A and G_B at all joints are equal.

$$(G_A) \text{ at } A = \frac{(I_c/2)/L_c}{(I_b/2)/L_b} = \frac{I_c/L_c}{I_b/L_b},$$

$$(G_B) \text{ at } B = \frac{[(I_c/2)+(I_c/2)]/L_c}{I_b/L_b} = \frac{I_c/L_c}{I_b/L_b},$$

$$(G_A) \text{ at } C = \frac{I_c/L_c}{[(I_b/2)+(I_b/2)]/L_b} = \frac{I_c/L_c}{I_b/L_b},$$

$$(G_B) \text{ at } D = \frac{(I_c+I_c)/L_c}{(I_b+I_b)/L_b} = \frac{I_c/L_c}{I_b/L_b}.$$

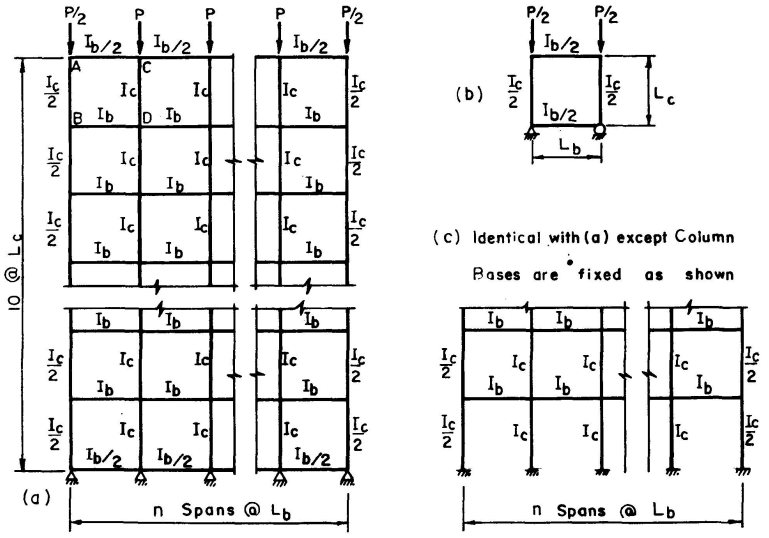


Fig. 7. (a) Frame solved in example 1. (b) A unit of the frame shown in (a). (c) Frame solved in Bleich's book.

The problem may be treated as a superposition of the basic frame as shown in Fig. 7 (b). Noting that $\beta = 1$ and $K = K_0$, from Fig. 6, connecting a straight line between the given values on the G_A and G_B scale and finding the intercepts on the K_0 scale, one can easily determine the values as shown in Table 1.

Table 1. K values for the ten story frame shown in Fig. 7

$G_A = G_B =$	1	2	3	4
$K = K_0$	1.31	1.59	1.83	2.05

The values in Table 1 check very well with the curve given in BLEICH's book [4] for the solution of the frame as shown in Fig. 7 (c). The frames shown in Fig. 7 (a) and Fig. 7 (c) differ only in the degree of fixity of the bases of the bottom story columns. However for tall buildings the effect of base fixity of the columns in the bottom story will be negligible.

Example 2. The problem as shown in Fig. 8 (a) was solved by JOHNSON [8].

$$(G_A)_{AD,CF} = \frac{I/L}{2\,I/(\frac{2}{3}L)} = (G_A)_{BE} = \frac{2\,I/L}{2\cdot 2\,I/(\frac{2}{3}L)} = \frac{1}{3} = 0.33,$$

$$(G_B)_{AD,CF} = \frac{(I+2\,I)/L}{2\,I/(\frac{2}{3}L)} = (G_B)_{BE} = \frac{(2\,I+4\,I)/L}{2\cdot 2\,I/(\frac{2}{3}L)} = \frac{3}{3} = 1,$$

$$(G_A)_{DG,EH,FI} = (G_B)_{AD,CF,BE} = 1,$$

$$(G_B)_{DG,EH,FI} = 0.$$

From Fig. 6, $K = K_0 = 1.21$ for columns AD, CF and BE and $K = K_0 = 1.15$ for columns DG, EH, FI. The given solution is $P = 7.10\,\frac{EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$ with $K = 1.18$ which is exactly equal to the average of 1.21 and 1.15. The frame may be treated as a superposition of two frames shown in Fig. 8 (b). It may be pointed out that the results are good primary because the column stiffness is proportional to the loading.

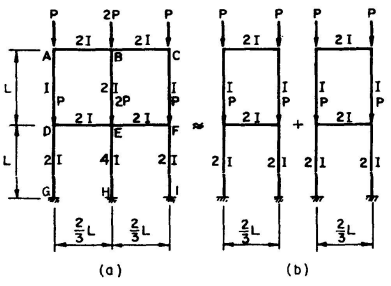


Fig. 8. Frame solved in example 2.

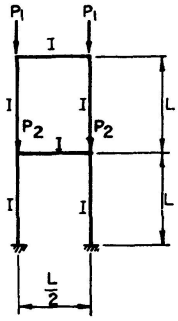


Fig. 9. Frame solved in example 3.

Example 3. The previous example shows that very good results can be obtained by using the AISC Chart for well proportioned rectangular frames.

This example will show the amount of error involved in applying to some other cases. Fig. 9 shows a frame which has been solved in reference 9. The given values of EI/L^2 is 100^T and the solutions are $P_1 = 400^T$ and $(P_1 + P_2) = 807^T$ corresponding to $K = K_0 = \pi/\sqrt{4.0} = 1.56$ and $\pi/\sqrt{8.07} = 1.10$ respectively. From Fig. 6, the K value for the top column is 1.24 for $G_A = \frac{1}{2}$ and $G_B = 1$ and that for the bottom column is 1.15 for $G_A = 1$ and $G_B = 0$. Consider the fact that column stiffness is not proportional to loading, the errors involved are reasonable.

Example 4. The four cases shown in Fig. 10 were solved by ZWEIG [10]. A comparison of the results will be of interest. For cases I and III, $G_A = G_B = 0$

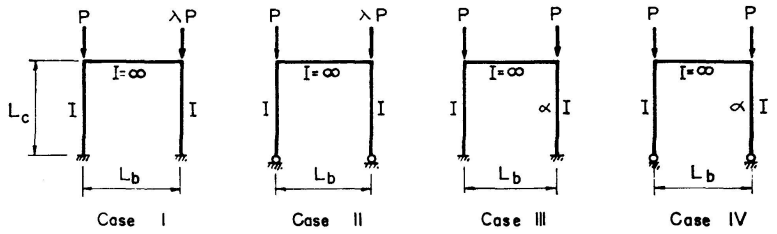


Fig. 10. Frames solved in example 4.

and $K_0 = 1$. For cases II and IV, $G_A = 0$, $G_B = \infty$ and $K_0 = 2$. The values of β for various values of λ and α from Fig. 5 are listed in Tables 2 and 3.

Table 2. β values for cases I and II

$\lambda = \bar{r}^2$	0.16	0.49	0.81	1.0
β	0.76	0.86	0.95	1.0
β (Zweig)	0.765	0.864	0.951	1.0

Table 3. β values for cases III and IV

$\alpha = r^2$	0.16	0.49	0.81	1.0
β	1.27	1.08	1.02	1.0
$\beta' = r\beta$	0.508	0.756	0.918	1.0
β' (Zweig)	0.532	0.812	0.946	1.0
Error	7%	7%	3%	0%

It should be noted that the notations λ and α are respectively corresponding to $\bar{r}^2$ and r^2 given in reference [10] and the β values can easily be derived from the K values given therein. Also for cases III and IV, the critical load in reference [10] is related to the weaker column, thus

$$P = \frac{\alpha \pi^2 E I}{(\beta' K_0 L)^2} = \frac{r^2 \pi^2 E I}{(\beta' K_0 L)^2} = \frac{\pi^2 E I}{(\beta K_0 L)^2}. \quad \text{Hence } \beta' = r\beta.$$

It can be seen that for cases I and II, the β values checks very well and for cases III and IV, the errors are within the maximum values stated previously.

Example 5. This example shown in Fig. 11 (a) was also solved by ZWEIG [10]. It would put a severe test of the versatility of the proposed method. This frame may be treated as a superposition of the frames shown in Fig. 11 (b) and the equivalent frame is as shown in Fig. 11 (c). The conditions of the column bases, however, are dissimilar and can not be replaced by a single

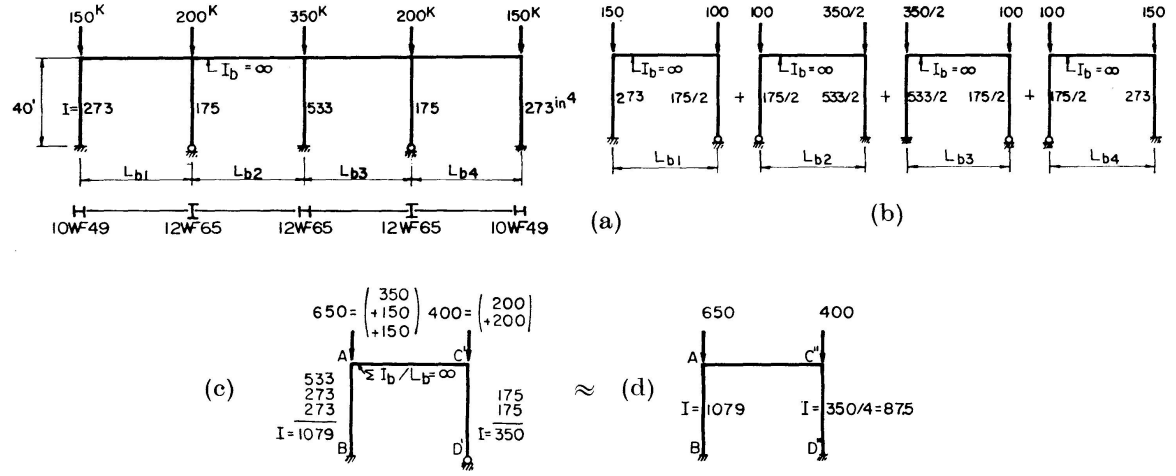


Fig. 11. (a) Frame solved in example 5. (b) Superposition of frames. (c) An equivalent frame. (d) Final equivalent frame.

beam. Nevertheless since column $C'D'$ has $G_A = 0$, $G_B = \infty$ and $K_0 = 2$ (from Fig. 6), it may be replaced by a column of $C''D''$ with $G_A = G_B = 0$ and $K_0 = 1$ if $I_{C''D''} = \frac{I_{C'D'}}{K^2_{C'D'}} = \frac{350}{4} = 87.5$ in^4 as shown in Fig. 11 (d). Noting that $\lambda = 400/650 = 0.615$, $\alpha = 87.5/1079 = 0.081$, and $G_A = G_B = 0$, one obtains $\beta = 1.24$ and $K_0 = 1$ from Figs. 5 and 6 and $K = \beta K_0 = 1.24$. The answer given in reference [10] is 3.14/2.46 = 1.28. The error is only 3% although the α value is very small in this case.

Discussion of Results and Conclusions

The following conclusions may be reached particularly with reference to Fig. 5.

1. Note that for $\lambda = 1$, on the average, $\beta = 1.08$ for $\alpha = 0.5$ and $\beta = 1.15$ for $\alpha = 0.3$. This means that for equal loads, if the stiffness of the column on one side is only 50 per cent of the stiffness of the column on the other side, the K value is only slightly higher than the K_0 value for the symmetrical case.

2. For equal loads ($\lambda = 1$), K will be significantly higher than K_0 only when α is small (say $\alpha < 0.3$).

3. With the exception of $\lambda = 0$, if the loads and stiffness are in the same proportion ($\lambda = \alpha$), the average β will lie between 0.9 and 1.0.

4. With the exception of $\lambda = 0$, β will be greater than 1.0 only when $\lambda > \alpha$.

5. When there is no load on the weaker column ($\lambda = 0$), β will have values lying between 0.8 and 0.7 for $0.3 \leqq \alpha \leqq 1.0$ with a smaller β corresponding to a larger α.

6. As bointed out previously, there will be no solution for the case $\alpha = 0$ and $\lambda \neq 0$. However, for $\alpha = 0$ and $\lambda = 0$ roller supports are assumed for the beams, with the weaker column omitted. The K value may be obtained from the AISC alignment chart using $2\,L_b$ instead of L_b in computing the values of G_A and G_B.

7. As pointed out previously, the maximum error in using Fig. 5 would be less than 9 per cent for $\alpha = 0.5$. It may reach 20 per cent for small values of α.

8. By intelligently using the concept of considering G_A (similarly G_B) as the ratio of $\sum I_c/L_c$ and $\sum I_b/L_b$ instead of the ratio of I_c/L_c and I_b/L_b, the rectangular frame studied may be considered to represent any story of a multistory, multibay frame as shown in the numerical examples.

Notation

a	see Eq. (2a)
a_1, a_1', a_2, a_2'	values of a for members as shown in Fig. 3
b	see Eq. (2b)
b_1, b_1', b_2, b_2'	values of b for members as shown in Fig. 3
c	see Eq. (2c)
c_1, c_1', c_2, c_2'	values of c for members as shown in Fig. 3
d	see Eq. (13)
e	a small fraction representing an estimated error
E	modulus of elasticity
G_A, G_A', G_B, G_B'	see Eq. (8a–d)
I	moment of inertia about an axis perpendicular to the plane of the frame
I_b, I_b'	moment of inertia of top and bottom beams respectively
I_c, I_c'	moments of inertia of columns as shown in Fig. 3
K	ratio of effective column length to actual unbraced length
K_0	K for the symmetrical case $\lambda = \alpha = 1$
L	length of a member
L_b, L_c	lengths of beam and column respectively
M_{ij}	moment at end i of the member ij
P, P'	column axial loads ($P' \leqq P$)
$R = \Delta/L$	chord slope of a member
U_1 to U_{11}	see Eqs. (20a–k)
V_1 to V_6	see Eqs. (21a–f)
W_1 to W_5	see Eqs. (17a–e)

W_1', W_2', W_5' — $W's$ for the symmetrical case $\lambda = \alpha = 1$

W_1'', W_2'' — $W''s$ for the case $\lambda = \alpha = 0$

α = — I_c'/I_c $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$

β = — K/K_0 using the same G_A and G_B for K and K_0

Δ = — deflection of one end of a member with respect to the other end

θ_i = — slope of a member at end i = rotation at joint i

λ = — P'/P $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$

ϕ = — $\frac{L_c}{2}\sqrt{\frac{P}{EI_c}}$

ϕ' = — $\frac{L_c}{2}\sqrt{\frac{P'}{EI_c'}}$

References

1. *Commentary on the AISC Specification*, Manual of Steel Construction, Sixth Edition, American Institute of Steel Construction.
2. *Guide to Design Criteria for Metal Compression Members*, Column Research Council. 2nd Ed. 1966, John Wiley & Sons., N. Y.
3. GALAMBOS, T. V.: Influence of Partial Base Fixity on Frame Stability. Journal of the Structural Division, Am. Soc. of Civil Engrs. May, 1960, p. 85–108.
4. BLEICH, F.: Buckling Strength of Metal Structures. McGraw Hill Book Co., N. Y. 1952.
5. TIMOSHENKO, S. and GERE, J. M.: Theory of Elastic Stability. McGraw Hill Book Co., N. Y. 1961.
6. WINTER, G., HSU, P. T., KOO, B. and LOH, M. H.: Buckling of Trusses and Rigid Frames. Cornell University Eng. Exp. Sta. Bulletin No. 36, 1948.
7. CHU, K. H.: Secondary Moments, End Rotations, Inflection Points and Elastic Buckling Loads of Truss Members. Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering V. 19, 1959, p. 17–46.
8. JOHNSON, D. E.: Lateral Stability of Frames by Energy Method. Trans. Am. Soc. of Civil Engrs. 1961 VI, p. 176.
9. BLASZKOWIAK, S. and KACZKOWSKI, Z.: Iterative Methods in Structural Analysis. Pergamon Press, London 1966.
10. ZWEIG, A.: Buckling Analysis of One-Story Frames. Journal of the Structural Division, Am. Soc. of Civil Engrs., Sept. 1968, p. 2107.

Summary

In this paper, the basic buckling equation is derived for an unsymmetrically loaded unsymmetrical rectangular frame which may be considered as representing a portion of a multistory multibay frame. The ratio, K, of the effective column length to the actual unbraced length may be considered as equal to value of K_0 obtained by the alignment chart given in the AISC Manual of Steel Construction multiplied by a coefficient β. A chart which gives average values of β is presented. For most practical cases, the maximum error of the

K values obtained from this chart in conjunction with the AISC chart will be less than 10 per cent. Numerical examples are given for illustrating the use of the charts presented.

Résumé

Dans cet article, les auteurs étendent l'equation générale du flambement au cas d'un cadre rectangulaire asymétrique et changé asymétriquement que l'on peut considérer comme une portion d'un cadre à plusieurs étages et à plusieurs ouvertures. Le rapport K (longueur de flambement sur longueur théorique) peut être considéré comme égal à la valeur de K_0, obtenue par les diagrammes du manuel de l'AISC pour la construction métallique, multipliée par un coefficient β. On donne un diagramme indiquant des valeurs moyennes de β. Dans la plupart des cas, l'erreur maximum des valeurs K obtenues à l'aide de ce diagramme et de celui de l'AISC est en dessous de 10%. Pour montrer l'utilisation des diagrammes, on a apporté des exemples numériques.

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird die Grundknickgleichung für einen unsymmetrisch belasteten, unsymmetrisch gebauten und rechteckigen Rahmen hergeleitet, der als Ausschnitt eines vielstöckigen und mit vielen Öffnungen versehenen Rahmens aufgefaßt werden kann. Das Verhältnis K der Knicklänge zur geometrischen Länge kann gleich dem Wert K_0, den man aus dem Schaubild des AISC-Handbuchs für Stahlkonstruktionen herausliest, multipliziert mit einem Beiwert β gesetzt werden. Ein Diagramm für durchschnittliche Werte von β ist abgebildet. Für die meisten praktischen Fälle liegt der maximale Fehler des Wertes K, den man aus dem Schaubild für β und K^0 der AISC erhält, unterhalb zehn Prozent. Numerische Beispiele sind beigefügt worden, um die Anwendung der Schaubilder zu zeigen.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Safety, Serviceability and Efficiency of Limit Design for Reinforced Concrete Beams and Frames

Sécurités de rupture et de service, et rendement du dimensionnement à la rupture de poutres et de portiques en béton armé

Sicherheit, Nutzbarkeit und Leistung einer Bemessung auf Bruch von Stahlbetonbalken und -rahmen

M. Z. COHN
Prof. of Civil Eng.

E. F. P. BURNETT
Assist. Prof. of Civil Eng.

D. E. GRIERSON
Assist. Prof. of Civil Eng.

University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada

Introduction

A variety of methods is presently available for the analysis and design of reinforced concrete structures allowing for different degrees of moment redistribution [1] . . . [8].

Recently a comprehensive study was devoted to the presentation of the specific techniques, features, field of application and limitations of these methods [9].

The study was prompted by the need for providing structural engineers with an overall view of the potential applications of limit design and with some illustration of the problems involved in the available approaches. Two important results of this study [9] are noted:

1. A set of objective criteria for quantitatively comparing structural design solutions evolved.
2. Some theoretical developments in the ultimate load design [10], optimal design [11], [12], compatibility analysis [13] and computer techniques in plastic analysis [14] followed.

While the theoretical developments mentioned above are reported elsewhere, this paper elaboratores on the objective criteria first presented in [9],

i. e., the collapse safety, serviceability and efficiency of limit design solutions and methods.

The paper does not attempt to recommend the application of any specific method in preference to the other. It only provides the designer with a set of standard criteria for evaluating various limit design methods [2] . . . [8] with respect to the currently used ultimate strength design (USD) method [1].

Design Criteria and Limit Design Methods

A summary of the design criteria and basic assumptions adopted in various methods is reproduced in Table 1 [9].

The ultimate safety is expressed by the ultimate load factor for a particular loading arrangement, which is defined as the ratio of the collapse load for the given loading arrangement to the corresponding service load, $\lambda^+ = W_u^+/W$. The ultimate safety parameter (u. s. p.) u_i, can be introduced as a convenient measure of the structural safety, and is defined by the ratio of the ultimate to the specified load factors, i. e., $u_i = \lambda_i^+/\lambda_0$.

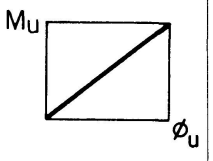
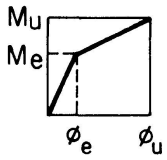
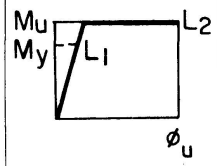
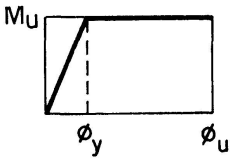
The serviceability is basically dependent on the safety against the first section reaching its ultimate stage. In brief, this is here referred to as yield safety, and is measured by the yield load factor. This is defined as the ratio of the load at which the ultimate moment is reached at section j (first plastic hinge load) and the service load, i. e., $\lambda_{1j} = W_{1j}/W$. A convenient measure of the yield safety of a critical section for a particular loading arrangement is the yield safety parameter (y. s. p.), which is the ratio of the yield load factor of the section to the specified overall load factor of the structure, i. e., $x_j = \lambda_{1j}/\lambda_0$.

The compatibility condition ensures that section behaviour in the inelastic range follows the load-deformation curve of the material. For the elastic-plastic material idealization it reduces to a limitation of the inelastic rotations, i. e., $\theta_j \leqq \theta_{pj}$ [16]. This condition presupposes a limiting concrete strain which varies with different methods, as listed in line 3 of table 1.

The efficiency of a particular design solution may be considered in relation to total or initial cost, material consumption or other criteria. When geometry, concrete sections and shear reinforcement are maintained constant for various solutions, a reasonable criterion of economy is the consumption of flexural reinforcing steel. If V_e and V_k are the steel volumes required by the elastic, U.S.D. solution and by limit design respectively, the ratio $v_k = V_k/V_e$ is a measure of the relative steel consumption in limit vs. elastic design, and is referred to in this and previous studies [9], [11] as the efficiency index of the structure.

This paper suggests that ratios u_i, x_j and v_k, enable a meaningful comparison of design solutions to be made in relation to safety, serviceability and efficiency, respectively.

Table 1. Design Criteria and Basic Assumptions for Various Limit Design Methods

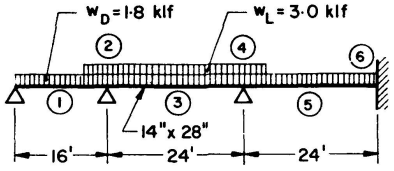
Class of method		Elastic	Compatibility		Serviceability		
Specific method		USD	BLD	SLD	LRD	FRD	OLD
Design criteria	Ultimate safety λ_0 against	1st yield or crushing	1st crushing	Structure becoming statically determinate	Formation of at least one mechanism	Formation of m mechanisms	Formation of mechanisms
	Serviceability $\lambda_1 =$	λ_0	(1.39)	(1.2)	1.2		
	Compatibility $\theta_i \leqq \theta_{pi}$ with $\epsilon_u \leqq$	0.3%	0.38%	1%	(0.4%)		
	Efficiency $v_k = V_k/V_e$	1.0	—	—	—	—	Min. V_k
Basic assumptions	Loading scheme	Any	Any	Full load	Any		
	Ultimate load	W_u	0.9 W_u	$W_u = \lambda_0 (W_D + W_L) = 1.5\ W_D + 1.8\ W_L$			
	Design moment	$M_p = \phi\ b\ d^2\ q\ (1 - 0.59\ q)$ with $\phi = 0.9$					
	Material behaviour						

( ) Not considered explicitly as part of the method.

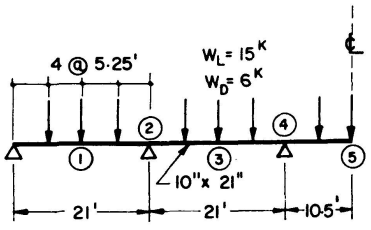
The following methods are investigated:

1. USD: "Ultimate Strength Design" as proposed in the ACI Building Code [1], currently accepted in American design practice, and implying an elastic structural analysis and plastic sectional design.
2. BLD: "Bi-Linear Design" as proposed by H. A. SAWYER, Jr., [2], [3] and similar in principle to the method of imposed rotations by MACCHI [15].
3. SLD: "Simplified Limit Design", as proposed by A. L. L. BAKER [4], [5] with amendments to include a serviceability criterion and consistency in the ultimate conditions [10].
4. LRD and FRD: "Limited and Full Redistribution Designs", as proposed by M. Z. COHN, [7], [8], formerly referred to as OLD 2 and OLD 1 methods respectively, [6].
5. OLD: "Optimum Limit Design" as proposed by M. Z. COHN and D. E. GRIERSON [8], [11].

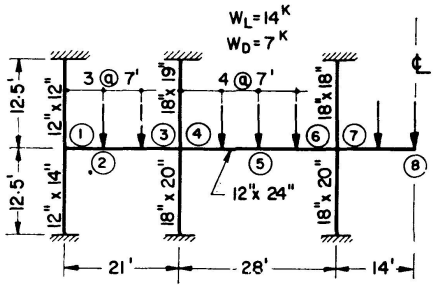
Methods 2., 3. and 4. above have been selected because they have a relatively higher potential for application, are representative of methods in the



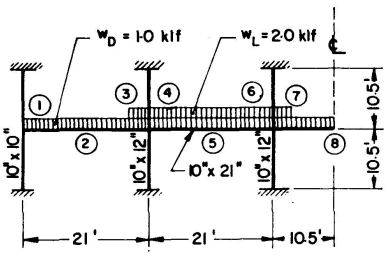
Example 1



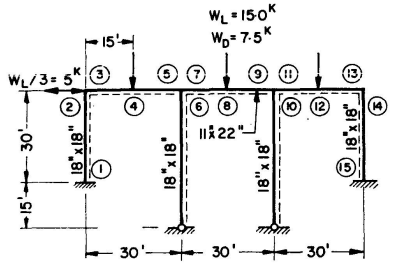
Example 4



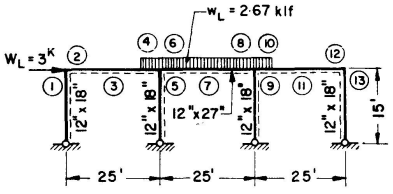
Example 2



Example 5



Example 3



Example 6

Fig. 1. Geometry and loading of 6 examples of building structures.

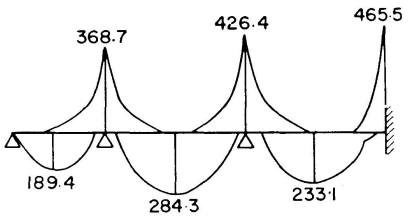
"compatibility" and "serviceability" classes [7] and have been retained for consideration by the Joint ASCE-ACI Committee 428, Limit Design.

Methods 1. and 5. have been included because they represent the extreme trends in relation to the safety, serviceability and efficiency of structural designs.

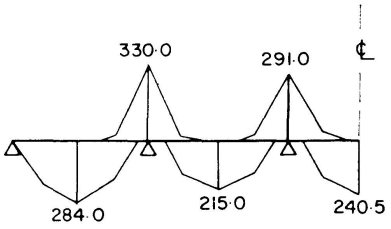
The lines in table 1 are self-explanatory and summarize the basic assumptions and criteria adopted in various limit design methods illustrated in the paper.

Examples of Building Structures

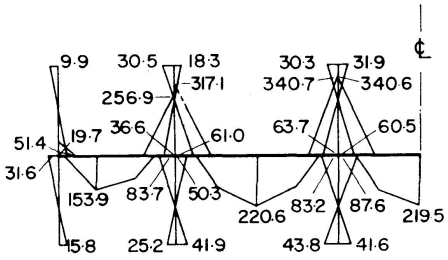
Design solutions based on various methods are studied by reference to six examples of building structures to which limit design may safely be applied at this time. It is believed that limit design principles are acceptable for all the examples investigated because flexural action prevails and, with proper detailing, shear, instability and other effects may be neglected. These examples are indicated in Fig. 1 and consist of two continuous beams, two multi-storey braced frames and two single-storey, unbraced frames. The braced frames were



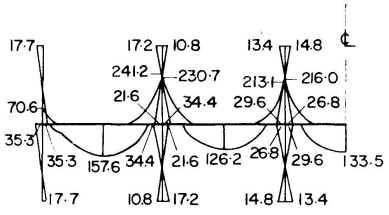
Example 1



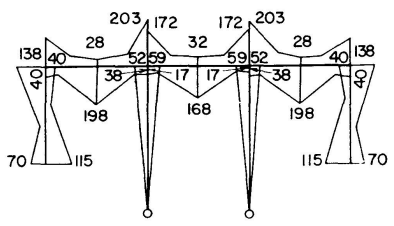
Example 4



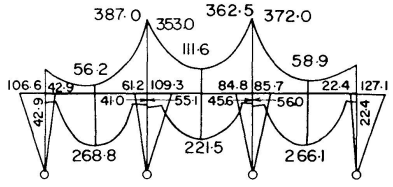
Example 2



Example 5



Example 3



Example 6

Fig. 2. Factored elastic moment envelopes (USD theoretical solutions).

Table 2. Design Solutions and Yield Safety: M_{pj} and x_j Values for Continuous Beam Examples 1 and 4

Example	Section (j)	USD		BLD		SLD		LRD		FRD		OLD	
		M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j
1	1	189.4	1.000	175.0	0.923	143.0	0.755	170.5	0.900	135.0	0.712	135.0	0.712
	2	368.7	1.000	335.0	0.910	270.0	0.732	310.0	0.840	289.0	0.785	271.3	0.736
	3	284.3	1.000	247.0	0.870	297.0	1.045	256.0	0.900	271.0	0.950	234.3	0.824
	4	426.4	1.000	385.0	0.905	331.0	0.777	358.0	0.840	334.0	0.785	426.4	1.000
	5	233.1	1.000	235.0	1.008	265.0	1.138	210.0	0.900	233.0	1.000	166.0	0.712
	6	465.5	1.000	385.0	0.826	331.0	0.710	392.0	0.840	366.0	0.785	408.1	0.877
4	1	284.0	1.000	—	—	275.5	0.970	255.5	0.900	260.5	0.916	253.0	0.889
	2	330.0	1.000	—	—	231.0	0.700	244.5	0.740	235.0	0.712	251.0	0.760
	3	215.0	1.000	—	—	168.0	0.782	193.3	0.900	157.0	0.732	150.3	0.700
	4	291.0	1.000	—	—	205.0	0.704	215.5	0.740	207.0	0.712	203.0	0.700
	5	240.5	1.000	—	—	181.5	0.756	216.5	0.900	171.0	0.712	172.3	0.726

Table 3. Design Solutions and Yield Safety: M_{pj} and x_j Values for Braced Frame Examples 2 and 5

Example	Section (j)	USD		SLD		LRD		FRD		OLD	
		M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j
2	1	51.4	1.000	48.0	0.940	47.0	0.915	46.0	0.890	51.4	1.000
	2	153.9	1.000	155.0	1.010	141.0	0.915	143.0	0.930	153.9	1.000
	3	256.9	1.000	210.0	0.820	235.0	0.915	229.9	0.890	185.6	0.723
	4	317.1	1.000	275.0	0.870	290.9	0.915	282.0	0.890	317.1	1.000
	5	220.6	1.000	236.0	1.070	202.0	0.915	208.0	0.940	170.5	0.773
	6	340.7	1.000	275.0	0.810	312.0	0.915	303.0	0.890	340.7	1.000
	7	340.6	1.000	275.0	0.810	312.0	0.915	303.0	0.890	340.6	1.000
	8	219.5	1.000	236.0	1.070	202.0	0.915	197.0	0.890	159.6	0.727
5	1	70.6	1.000	70.0	0.992	63.3	0.897	56.7	0.803	70.6	1.000
	2	157.6	1.000	169.2	1.074	141.4	0.897	155.8	0.988	125.1	0.794
	3	241.2	1.000	170.0	0.706	216.2	0.897	194.0	0.803	241.2	1.000
	4	230.7	1.000	170.0	0.737	207.0	0.897	185.3	0.803	230.7	1.000
	5	126.2	1.000	124.6	0.986	113.2	0.897	102.8	0.814	89.1	0.706
	6	213.1	1.000	155.0	0.727	191.2	0.897	171.4	0.803	153.9	0.722
	7	216.0	1.000	155.0	0.717	193.9	0.897	173.7	0.803	183.1	0.866
	8	133.5	1.000	132.5	0.993	119.8	0.897	107.5	0.803	94.3	0.706

designed assuming that the requirements of articles 905 and 914 of ACI 318-63 [1] apply.

Examples 1, 2 and 3 are the same as in reference [9] and represent fairly typical loads, geometries and amounts of plastic redistribution. Examples 4, 5 and 6 have been added in an attempt to explore higher limits of redistribution for the same classes of structures.

The five methods mentioned in the previous section have been successively applied to the six examples in Fig. 1. Details of the analysis and design pro-

Table 4. Design Solutions and Yield Safety: M_{pj} and x_j Values for Unbraced Frame Examples 3 and 6

Example	Section (j)	USD				BLD				SLD				LRD				OLD			
		M_{pj}^+	x_j^+	M_{pj}^-	x_j^-	M_{pj}^+	x_j^+	M_{pj}^-	x_j^-	M_{pj}^+	x_j^+	M_{pj}^-	x_j^-	M_{pj}^+	x_j^+	M_{pj}^-	x_j^-	M_{pj}^+	x_j^+	M_{pj}^-	x_j^-
3	1	138.0	1.200	138.0	1.970	120	1.043	120	1.715	110.0	0.955	110.0	1.572	107.0	0.930	107.0	1.530	97.2	0.847	97.2	1.392
	2	138.0	3.450	138.0	1.000	120	3.000	120	0.870	110.0	2.750	110.0	0.797	107.0	2.680	107.0	0.776	97.2	2.436	97.2	0.706
	3	40.0	1.000	138.0	1.000	40	1.000	120	0.870	40.0	1.000	110.0	0.797	40.0	1.000	107.0	0.776	28.3	0.706	97.2	0.706
	4	198.0	1.000	28.0	1.000	180	0.910	28	1.000	167.0	0.843	28.0	1.000	164.0	0.828	28.0	1.000	164.0	0.828	19.8	0.706
	5	38.0	1.000	203.0	1.000	38	1.000	180	0.887	38.0	1.000	160.0	0.788	38.0	1.000	155.0	0.763	26.8	0.706	172.0	0.847
	6	59.0	1.000	59.0	1.135	66	1.118	66	1.270	50.0	0.847	50.0	0.961	42.0	0.712	42.0	0.807	41.7	0.706	41.7	0.801
	7	38.0	2.235	203.0	1.182	38	2.235	180	1.045	38.0	2.235	160.0	0.929	38.0	2.235	155.0	0.901	26.8	1.578	172.0	1.000
	8	168.0	1.000	32.0	1.000	140	0.833	32	1.000	140.0	0.833	32.0	1.000	148.0	0.882	32.0	1.000	118.5	0.706	22.6	0.706
6	1	42.9	1.000	106.6	1.000	—	—	—	—	25.8	0.600	83.3	0.782	25.8	0.600	95.8	0.900	25.8	0.600	93.2	0.875
	2	42.9	1.000	106.6	1.000	—	—	—	—	25.8	0.600	83.3	0.782	25.8	0.600	95.8	0.900	25.8	0.600	93.2	0.875
	3	268.8	1.000	56.2	1.000	—	—	—	—	260.0	0.966	33.8	0.600	228.5	0.850	33.8	0.600	177.5	0.660	33.8	0.600
	4	41.0	1.000	387.0	1.000	—	—	—	—	24.6	0.600	260.0	0.672	24.6	0.600	282.5	0.729	24.6	0.600	387.0	1.000
	5	109.3	1.000	61.2	1.000	—	—	—	—	66.0	0.603	36.8	0.600	74.0	0.677	36.8	0.600	65.6	0.600	36.8	0.600
	6	55.1	1.000	353.0	1.000	—	—	—	—	33.1	0.600	260.0	0.736	33.1	0.600	212.0	0.600	33.1	0.600	353.0	1.000
	7	221.5	1.000	111.6	1.000	—	—	—	—	180.0	0.812	66.8	0.600	180.5	0.815	66.8	0.600	142.0	0.642	66.9	0.600
	8	45.6	1.000	362.5	1.000	—	—	—	—	27.4	0.600	260.0	0.717	27.4	0.600	264.5	0.729	27.4	0.600	362.5	1.000
	9	85.7	1.000	84.8	1.000	—	—	—	—	57.5	0.600	50.9	0.600	51.5	0.600	50.9	0.600	51.5	0.600	50.9	0.600
	10	56.0	1.000	372.0	1.000	—	—	—	—	33.6	0.600	260.0	0.698	33.7	0.600	267.5	0.718	33.6	0.600	272.0	1.000
	11	266.1	1.000	58.9	1.000	—	—	—	—	260.0	0.976	35.4	0.600	226.5	0.850	35.4	0.600	168.0	0.631	35.4	0.600
	12	22.4	1.000	127.1	1.000	—	—	—	—	13.5	0.600	83.3	0.656	13.5	0.600	114.5	0.900	13.5	0.600	127.1	1.000
	13	22.4	1.000	127.1	1.000	—	—	—	—	13.5	0.600	83.3	0.656	13.5	0.600	114.5	0.900	13.5	0.600	127.1	1.000

cedures will not be reproduced here, as they have been extensively described elsewhere [9].

The factored elastic moment envelopes for all six examples, which constitute the theoretical USD solution, are given in Fig. 2 in k-ft. units.

Design solutions based on USD, BLD, SLD, LRD, FRD and OLD are summarized in terms of plastic moments M_{pj} required at each critical section in table 2 for the beam examples 1 and 4, in table 3 for the braced frame examples 2 and 5, and in table 4 for the unbraced frame examples 3 and 6.

For the sake of undistorted comparison, the theoretical moments, as resulting from analysis, are generally assumed as design moments. A 5% overdesign of span moments has been used in SLD as an additional ultimate safety and to avoid collapse mechanism formation at the ultimate load.

The BLD method has been applied only to the first two examples, as it appears to require considerable computational effort. It is believed that the solutions obtained for these two examples and the criteria on which the method is based are sufficient to indicate probable trends in its general application.

Safety

An accurate evaluation of the actual carrying capacity of a given design is not possible. If plastic collapse is assumed to be an acceptable failure condition for all designs, the mechanism collapse load W_u^+ and the ultimate safety parameter $u_i = \lambda_i^+/\lambda_0$ provide a convenient measure of the relative safety of various designs.

Possible collapse modes of the six structures chosen as examples are shown in Fig. 3. For examples 3 and 6 only the most critical mechanisms, i.e., those resulting in lowest safety, are indicated. Values of the ultimate safety parameters u_i for each critical collapse mode and for each design solution are given in table 5.

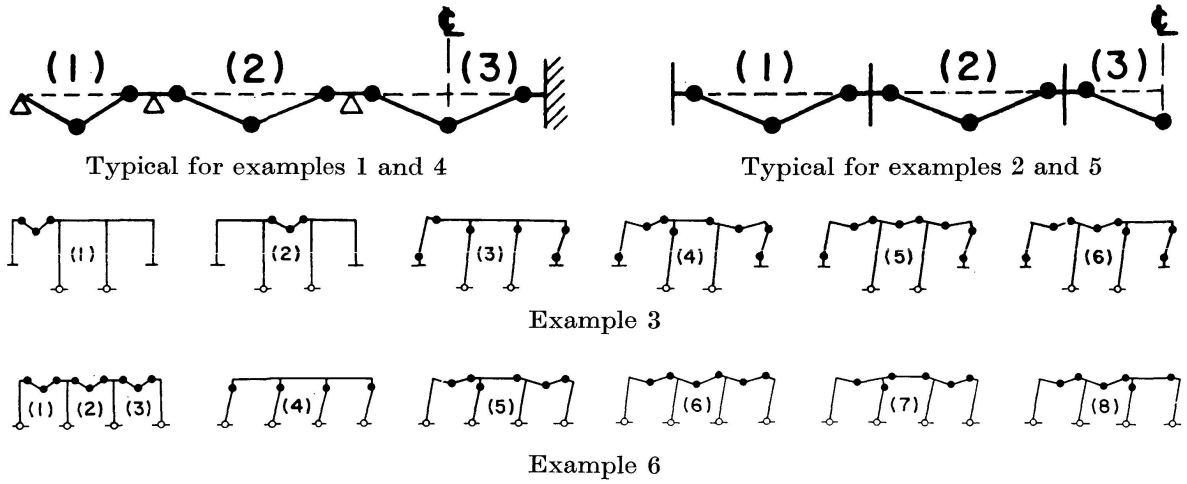


Fig. 3. Collapse modes of example structures.

Table 5. Collapse Safety: u_i Values

Example	Mechanism (i)	USD	BLD	SLD	LRD	FRD	OLD
1	1	1.381	1.269	1.029	1.205	1.000	1.000
	2	1.170	1.042	1.025	1.000	1.000	1.000
	3	1.164	1.063	1.022	1.000	1.000	1.000
2	1	1.095	—	1.028	1.000	1.000	1.000
	2	1.100	—	1.022	1.008	1.000	1.000
	3	1.122	—	1.022	1.028	1.000	1.000
3	1	1.285	1.150	1.052	1.028	—	1.075
	2	1.292	1.116	1.045	1.055	—	1.000
	3	1.975	1.810	1.618	1.542	—	1.396
	4	1.170	1.130	1.030	1.000	—	1.020
	5	1.160	1.100	1.012	1.000	—	1.000
	6	1.170	1.118	1.025	1.000	—	1.000
4	1	1.189	—	1.035	1.000	1.000	1.000
	2	1.389	—	1.022	1.121	1.000	1.000
	3	1.405	—	1.023	1.143	1.000	1.000
5	1	1.116	—	1.029	1.000	1.000	1.000
	2	1.240	—	1.021	1.112	1.000	1.000
	3	1.247	—	1.023	1.118	1.000	1.000
6	1	1.235	—	1.034	1.000	—	1.000
	2	1.387	—	1.054	1.003	—	1.000
	3	1.235	—	1.034	1.000	—	1.000
	4	4.060	—	2.520	2.950	—	3.000
	5	1.241	—	1.018	1.000	—	1.000
	6	1.258	—	1.004	1.000	—	1.050
	7	1.273	—	1.056	1.002	—	1.019
	8	1.325	—	1.020	1.031	—	1.110

It is noted that since the mechanism collapse is the most severe failure criterion considered $u_i = 1$ in methods based on such criterion, i. e., OLD, FRD and LRD, and $u_i > 1$ in SLD, BRD and USD, which adopt more conservative failure criteria. In the full redistribution design (FRD) $u_i = 1$ or $\lambda_i = \lambda_0$ is postulated for a number of collapse modes equal to the number of independent limit equilibrium equations that can be written for the structure. For the optimal limit design (OLD) the same result is obtained, although this condition is not an explicit design requirement. In limited redistribution design (LRD) the condition $u_i = 1$ in at least one collapse mode is imposed and is reflected in table 5. SLD solutions are in general close to those for LRD and for beam problems may be made close to FRD solutions if adequate safety and serviceability criteria are adopted [9], [10].

Safe SLD solutions may be obtained only when all possible loading combinations are considered. This is essential in cases where lateral loads are significant, as the exclusive consideration of the full loading for the structure may be unsafe in some particular loading schemes. The same aspect should be retained in calculating inelastic rotations and checking the compatibility

requirements for all critical sections under the most critical loading arrangements.

BLD solutions result in larger collapse safety than other limit design methods because the governing failure criterion is the crushing of the first, most stressed, section in the structure.

It is seen from table 1 that the largest strength reserves against plastic collapse are provided by the USD solutions, which imply that the structure fails when at least one of its critical section yields.

Serviceability

Normal service performance requires that deflections be within acceptable limits, cracking not be excessive, maximum stresses remain within allowable bounds and inelastic behaviour be avoided. It has been shown [17] that except for the deflection requirement all service conditions are controlled by adopting a sufficiently large margin of safety against the ultimate moment of critical sections. For the under-reinforced sections currently used in reinforced concrete design yielding of steel governs the formation of plastic hinges and the ultimate moment. Hence, the concept of yield safety is introduced, which can be measured by the yield load factor λ_{1j} for each critical section j. By definition, this is the ratio of the ultimate moment to the working moment, i.e., $\lambda_{1j} = M_{pj}/M_j$. Note that, for proportional loading between service and ultimate stages, this ratio also equals the ratio of corresponding first yield to service loads, or $\lambda_{1j} = M_{pj}/M_j = W_{1j}/W$ [7].

It has been shown [9] that adoption of a lower bound for λ_{1j} may ensure the simultaneous satisfaction of all serviceability requirements but the deflection control, and accordingly a tentative bound was suggested as $\lambda_1 = \min \lambda_{1j} = 1.2$.

It is emphasized that further study is necessary for a proper assessment of the minimum values of acceptable yield load factors. Indeed, variable λ_1 values may be warranted to allow for different roles of span, support or column sections or to accomodate different serviceability requirements.

With $\lambda_1 = 1.2$ and λ_0 corresponding to the dead and live loads in each example, minimum values of yield safety parameters, $\min x_j = 1.2/\lambda_0$, resulted as in table 6.

Table 6. Minimum Allowed Yield Safety Parameters for $\lambda_1 = 1.2$

Example	1	2	3	4	5	6
λ_0	1.685	1.700	1.700	1.714	1.700	2.000
$\min x_j$	0.712*)	0.706	0.706*)	0.700	0.706	0.600

*) In BLD, since $\lambda_1 = 1.39$ is adopted, $\min x_j$ for examples 1 and 3 are 0.825 and 0.818 respectively.

For the design solutions listed in tables 2, 3, and 4, it is seen that this serviceability requirement is nowhere violated. Values of $x_j = 1$ in the USD solution reflect the criterion of structural failure associated with the first section becoming a plastic hinge, i.e., $\lambda_{1j} = \lambda_0$. Occasional values of $x_j > 1$ refer to highly conservative designs for column sections, indicating that in no loading arrangement such sections could be the first to yield.

It is seen that extreme values of x_j are used for SLD solutions, particularly for the beam and braced frame examples. This corresponds to the trend of this paper to put each method to its advantage, ensuring maximum redistribution permitted by the standard serviceability requirements adopted.

In this regard it should be mentioned that example 6 is identical with the frame example used in the Institution of Civil Engineers Research Committee Report [18]. In the absence of guidelines on permissible redistribution and serviceability the SLD solution proposed in the report [18] violates drastically the serviceability requirements for the column sections.

Values of x_j in LRD solutions reflect the alternative criteria specific to the method: either equal yield safety for all critical sections or equal x_j for span sections and smaller, but also equal x_j values for support sections. The criterion of equal minimum yield safety for the largest possible number of critical sections is reflected by the FRD solutions [6].

Consistent with the design objective of minimizing the steel volume the yield safety parameters in OLD solutions tend to be at their lowest permissible values wherever possible.

Efficiency

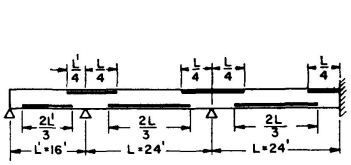
The efficiency index v_k for various solutions is calculated on the following assumptions:

1. Section sizes remain the same in each example.
2. The flexural steel required at each section is proportional to the corresponding design plastic moment, and
3. the arrangement of the flexural reinforcement follows the typical schemes in Fig. 4.

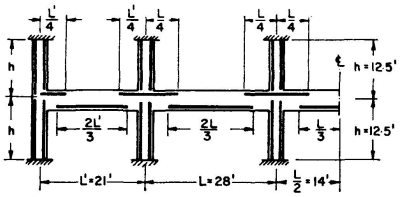
The efficiency indices calculated with the formula

$$v_k = \frac{v_k}{V_e} = \frac{\sum_j x_j \lambda_0 M_j l_j}{\sum_j \lambda_0 M_j l_j}$$

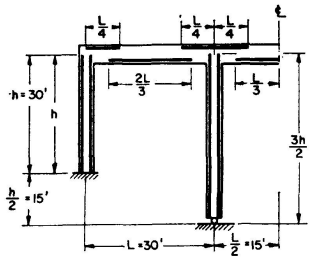
for the examples and methods discussed are listed in table 7. In general, it is seen that with USD solutions taken as reference, v_k values decrease (i.e. the relative reductions in steel consumption are larger) as BLD, SLD, LRD, FRD and OLD solutions are considered in turn.



Example 1



Example 2



Example 3

Fig. 4. Typical reinforcement of example structures for the 6 examples.

Table 7. Structural Efficiency: v_k Values

Example	USD	BLD	SLD	LRD	FRD	OLD
1	1.000	0.907	0.877	0.868	0.850	0.825
2	1.000	—	0.948	0.927	0.922	0.890
3	1.000	0.926	0.934	0.790	—	0.760
4	1.000	—	0.793	0.831	0.768	0.766
5	1.000	—	0.897	0.909	0.866	0.829
6	1.000	—	0.772	0.757	—	0.756

It is noted that for the six examples presented in the paper, limit design resulted in steel savings of from 5.2% to 25% in relation to USD.

For all the examples and limit design methods considered (excluding the extreme USD and OLD solutions) an average efficiency index $v=0.852$ is obtained, which represents a steel saving of about 15% compared to the current design practice. It may be concluded that savings of 15–20% vs. USD may be expected by adopting limit design methods for the classes of structures investigated in this paper.

Conclusions

1. When compatibility considerations are not critical, the three basic criteria governing a design solution are: safety, serviceability and efficiency.

2. The parameters $u_i=\lambda_i^+/\lambda_0$, $x_j=M_{pj}/M_j\lambda_0=\lambda_{1j}/\lambda_0$ and $v_k=V_k/V_e$ are introduced in the paper for a quantitative evaluation of design solutions in relation to the above criteria.

3. Safety and efficiency are conflicting requirements, related to the amount of allowable moment redistribution: structures designed to accomodate a large

redistribution are less safe, but more efficient than those designed for small moment redistribution.

4. Various limit design methods are available for taking advantage to any desirable degree of the inelastic moment redistribution in reinforced concrete structures. Limit design methods illustrated in the examples range in the following descending order in relation to their ultimate safety: USD, BLD, SLD, LRD, FRD and OLD, with the USD and OLD having the largest and smallest reserve strength against plastic collapse respectively. The above order is preserved for the efficiency index, indicating an increase of steel savings vs. USD as one moves from BLD towards OLD.

5. Adoption of a minimum yield load factor λ_1 is a convenient and reliable approach to the control of serviceability requirements in any limit design method.

6. The examples presented in this paper indicate that steel savings of about 15% vs. USD are very likely to be obtained, regardless of the limit design method adopted.

7. Because of the small difference in efficiency of FRD and OLD solutions, it appears that full redistribution should be a practical aim in design, which would ensure results not too far from those based on mathematical optimization.

Notation

i	subscript referring to collapse modes (mechanism i)
j	subscript referring to critical sections
k	subscript referring to particular solutions obtained by using various limit design methods
l_j	conventional length over which the reinforcement of section j is maintained constant
M_j	elastic envelope moment value at critical section j
M_{pj}	design plastic moment at initial section $j \equiv$ ultimate moment load based on U.S.D.
$u_i = \lambda_i^+/\lambda_0$	ultimate safety parameter
$v_k = V_k/V_e$	efficiency index
V_e	flexural steel volume in the elastic, U.S.D. solutions
V_k	flexural steel volume in a particular design solution
W	working load
W_u	ultimate load
W_{1j}	first yield load when section j is first to become a plastic hinge
$x_j = M_{pj}/\lambda_0 M_j = \lambda_{1j}/\lambda_0$	yield safety parameter for section j
$\lambda_0 = W_u/W$	overall load factor of the structure
λ_i^+	collapse load factor of a structure associated with mechanism i
$\lambda_{1j} = W_{1j}/W$	yield load factor of section j

$\lambda_1 (= 1.2)$	minimum allowable value of the yield load factor
θ_j	inelastic rotation of plastic hinge j
θ_{pj}	rotation capacity of plastic hinge j
USD	ultimate strength design
BLD	bi-linear design
SLD	simplified limit design
LRD	limited redistribution design
FRD	full redistribution design
OLD	optimum limit design

Acknowledgements

This paper is part of an extensive investigation on the Inelastic Behaviour of Reinforced Concrete Structures, in progress at the University of Waterloo, Waterloo, Ontario, which is financially supported by the National Research Council of Canada, under Grant no. A-4789.

References

1. ACI 318–63: Building Code Requirements for Reinforced Concrete. American Concrete Institute Publications, June 1963.
2. H. A. Sawyer, Jr.: Design of concrete frames for two failures stages. Proceedings, International Symposium on Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, Miami, Florida, Nov., 1964, ACI Special Publication, SP-12, p. 7–28.
3. H. A. Sawyer, Jr.: Comprehensive design of reinforced concrete frames by plasticity factors. Bulletin d'Information CEB, No. 53, Jan. 1966, p. 299–316.
4. A. L. L. Baker: Ultimate load theory applied to the design of reinforced concrete and prestressed concrete frames. Concrete Series, London, 1956.
5. A. L. L. Baker: Ultimate load design of reinforced concrete frames. A recapitulation and appraisal. March, 1963. Publications IABSE, V. 23, 1963, p. 23–56.
6. M. Z. Cohn: Optimum limit design for reinforced concrete continuous beams. Proceedings ICE, V. 30, April, 1965, p. 675–707.
7. M. Z. Cohn: Limit design solutions for concrete structures. Proceedings ASCE, Journal Structural Division, V. 93, No. ST 1, Feb. 1967, p. 37–58.
8. M. Z. Cohn: Limit design of reinforced concrete frames. Proceedings ASCE, Journal Structural Division, V. 94, No. ST 10, Oct. 1968, p.
9. M. Z. Cohn, E. F. Burnett, O. Dutt, R. Francis, D. E. Grierson, H. C. Parameswar and S. Talwar: Example of limit design for reinforced concrete building structures. Colloquium on Limit Design for Structural Concrete, Univ. of Waterloo, Waterloo, Ontario, Sept. 1967, 132 p.
10. E. F. Burnett and M. Z. Cohn: Modifications to Professor Baker's Simplified Limit Design Method (to be published).
11. M. Z. Cohn and D. E. Grierson: Optimal design of reinforced concrete beams and frames. Final Publication, 8th IABSE Congress, New York, Sept. 1968.
12. D. E. Grierson: Optimal design of reinforced concrete frames. Ph. D. Thesis, Univ. of Waterloo, Waterloo, Ontario, Sept. 1968.

13. H. C. Parameswar: Some contributions to the problem of compatibility in limit design of concrete structures. Ph. D. Thesis, Univ. of Waterloo, Waterloo, Ontario, July, 1968.
14. M. Z. Cohn and D. E. Grierson: An automatic approach to the analysis of plastic frames under fixed and variable loading. Paper presented at the ASCE National Meeting on Structural Engineering, Pittsburgh, Pa., Sept. 1968.
15. G. Macchi: A proposal of analysis based on the theory of imposed rotations. Bulletin d'Information CEB, No. 21, Jan. 1960, p. 121–158.
16. M. Z. Cohn: Rotation compatibility in the limit design of reinforced concrete continuous beams. Proceedings, International Symposium on Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, Miami, Florida, 1964, ACI Special Publication SP-12, p. 359–382.
17. M. Z. Cohn: On the optimum limit design method. Report to the Joint ASCE-ACI Committee 428, Limit Design, February, 1966 (unpublished).
18. ICE Research Committee: Ultimate load design of concrete structures. Proceedings ICE, V. 21, Feb. 1962, p. 339–442.

Summary

Safety, serviceability and efficiency of solutions based on various limit design methods, as applied to some typical reinforced concrete building structures, are compared.

Safety is considered in relation to the failure of structures as collapse mechanisms. Serviceability is evaluated in terms of the safety against first yield of critical sections. Structural efficiency for each limit design method is evaluated by the ratio of flexural steel consumption to that resulting from an elastic design.

Six examples of typical building structures (two continuous beams, two multi-storey, multi-bay braced frames and two single-storey, unbraced frames) illustate the relevant features of solutions based on existing limit design methods.

Résumé

Une comparaison de ces trois facteurs est faite pour différentes méthodes de dimensionnement à la rupture, appliquées à quelques structures typiques en béton armé.

La sécurité de rupture se rapporte au moment de ruine par formation de mécanisme instable. La sécurité de service se rapporte à la plastification des premières sections critiques. Le rendement pour chaque méthode se mesure au tonnage de fer d'armature employé par rapport au dimensionnement élastique.

Six exemples typiques de structures (deux poutres continues, deux portiques à plusieurs étages renforcés, et deux portiques simples, non-renforcés) montrent les caractéristiques essentielles des solutions des diverses méthodes existantes de dimensionnement à la rupture.

Zusammenfassung

Sicherheit, Nutzbarkeit und Leistung von Berechnungen, die auf verschiedenen Traglastkriterien fußen, werden an einigen typischen Stahlbetonbauten miteinander verglichen.

Die Sicherheit bezieht sich dabei auf das Bruchmoment durch Bildung eines instabilen Mechanismus. Die Nutzbarkeit bedeutet die Sicherheit vor dem Nachgeben der ersten kritischen Querschnitte. Die Leistung mißt sich am Verbrauch an Armierungsstahl für die verschiedenen Methoden gegenüber einer elastischen Bemessung.

Sechs typische Beispiele (2 Durchlaufträger, zwei versteifte Stockwerkrahmen und zwei einfache, unversteifte Rahmen) zeigen die wichtigen Charakteristiken der verschiedenen existierenden Bruchbemessungsmethoden.

Dynamic Analysis of Floor Systems

Calcul dynamique des planchers

Schwingungsberechnung von Decken

S. MACKEY
Prof., M. E., B. Sc., Ph. D., F.I.C.E.,
F. I. Struct. E.

K. T. YING
M. Sc. (Eng.)

Introduction

In this paper a method is presented for analysis of floor systems based on a similar technique by SAIBEL and D'APPOLONIA [3] for the treatment of continuous beams. The problem is considered as a two-dimensional plate problem with the slab of the floor system resting on supporting columns, and solution of a fourth order partial differential equation complying with the necessary boundary condition is involved. For solution of the equation the normal mode method is employed together with some properties of orthogonal functions.

A simple frequency equation is derived in terms of the number of "symmetrically situated" columns supporting a floor system. Numerical solutions for the equation, which is of cubic form, are obtained by trial and error methods for a few cases and from the data obtained an approximate formula is derived. A general frequency equation is also derived in terms of the stiffness number for floor system with elastic interior columns. Finally, a brief analysis of mode shape due to free and forced vibrations of floor system is included.

An ideal elastic structure is one in which no internal damping forces exist. Such a structure may vibrate for an infinitely long period of time without the application of external forces, other than those required to initiate the motion. The vibration can occur in any one of several natural modes in which each point in the structure executes harmonic motion about a position of static equilibrium, every point passing through its position of equilibrium at the same instant and reaching its peak position at the same instant. Thus the frequency

of oscillation is the same at every point and this is the natural frequency of the system in the particular mode involved, which is conveniently expressed in terms of the deflected configuration of the structure in the extreme position.

The equilibrium of a dynamical system may be conveniently expressed by application of any one of the following basic principles: 1. Newton's laws of equilibrium; 2. D'Alembert's principle and the associated principle of virtual work; 3. Hamilton's principle and the associated equations of Lagrange. Since physical structures are always more or less continuous, exact governing equations must be in the form of differential or integral equations in which the independent space variables may vary continuously. However, in all but exceptional cases, solution of these equations is not possible unless approximations are made with respect to the actual boundary conditions and to the mode of solution of the equations. The validity of the results obtained will depend directly on how well the assumed mathematical model portrays the actual structure. In this respect structural damping of the real structure plays a dominant role and hence confirmation of theoretical concepts by actual structural records is necessary.

Existing Methods of Analysis for Floor Systems

The most notable contributions to analysis of floor-systems have been made by BLEICH [1] and ROGERS [2]. Bleich's method, essentially, is to reduce the complex structural system to a number of simpler structures, the natural frequency of which can be easily found. The simpler structures are termed complementary systems.

Consider the simplified beam and girder floor system shown in Fig. 1. If the moment of inertia of the main girder is assumed to be infinitely great, ($I_0 = \infty$), the problem resolves itself into a system of independently vibrating floor beams which may be termed System A. The normal shapes and frequencies of each of the floor beams can be readily determined. On the other hand if it is assumed that all the floor beams are infinitely rigid, ($I_B = \infty$), and the main girder remains flexible, a complementary system, (System B), is formed. The normal mode shapes and frequencies of this system must also be determined before the whole system can be analysed.

For the complementary system Bleich has shown that

$$X = X_A + X_B, \tag{1}$$

where
X = shape function of the entire structure,
X_A = shape function of system A,
X_B = shape function of system B.

Eq. (1) holds true regardless of the actual nature of the loads as long as the members forming the structure can be considered elastic. By expressing the shape functions of the complementary systems X_A and X_B in terms of a series

expansion of the normal functions, and making use of the general theories of oscillation and properties of orthogonal functions the following set of equations is obtained [1, 2]:

$$\begin{aligned} C_{1A}\left[1-\frac{p_{1A}^2}{p^2}+\sum_k \frac{\beta_{1k}^2}{(p_{kB}^2/p^2)-1}\right]+C_{2A}\sum_k \frac{\beta_{1k}\beta_{2k}}{(p_{kB}^2/p^2)-1}+\cdots=0,\\ C_{1A}\sum_k \frac{\beta_{1k}\beta_{2k}}{(p_{kB}^2/p^2)-1}+C_{2A}\left[1-\frac{p_{2A}^2}{p^2}+\sum_k \frac{\beta_{2k}^2}{(p_{kB}^2/p^2)-1}\right]+\cdots=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Eq. (2) is comprised of a set of i homogeneous, algebraic equations in the unknowns C_{iA}, and non-trivial solutions will exist only if the determinant of coefficients vanishes. This determinant is the frequency equation for the structure. For more general types of statically indeterminate structures application of the above method becomes highly complicated.

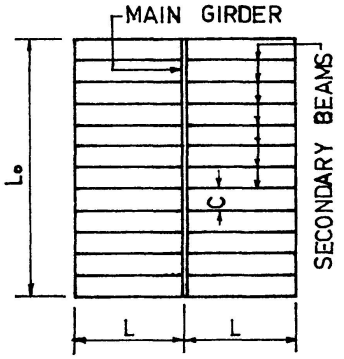


Fig. 1. Simplified floor-system.

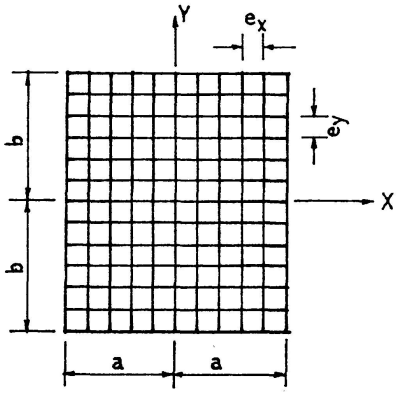


Fig. 2. Grid floor-system.

For the type of structure shown in Fig. 1. Rogers considers the dynamic shear at the end of each floor beam as a dynamic load on the main girder. By a simple approximation these concentrated loads are converted into an equivalent uniformly distributed load represented by:

$$w(x',t)=\frac{E\,I\,\lambda_n^3}{e}(\cot\lambda_n L-\coth\lambda_n L)\,y_0(x',t). \tag{3}$$

The problem is then solved for a forced vibration of the main girder as in Eq. (3). The governing equation is

$$E_0 I_0\frac{\partial^4 y_0}{\partial x'^4}+w_0\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2}=w(x',t). \tag{4}$$

After consideration of the boundary conditions of the main girder the frequency equation is given by:

$$p_n^2=n^4 p_0^2+\frac{E\,I\,\lambda_n^3}{w_0\,e}(\cot\lambda_n L-\coth\lambda_n L), \tag{5}$$

where n designates the particular mode.

A more general case of a grid-floor system with beams running in the x and y directions, as shown in Fig. 2., has also been investigated by Rogers. If, in any given direction the beams are assumed to have the same flexural rigidity, EI; the same spacing, e; and the same mass per unit length, w; the free vibration of the grid is expressed, approximately, by the equation:

$$\frac{E_x I_x}{w_x e_x}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{E_y I_y}{w_y e_y}\frac{\partial^4 y}{\partial y^4}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0. \tag{6}$$

For the grid shown in Fig. 2 with simply-supported edges, its fundamental frequency is given by:

$$p^2=\frac{\pi^4 D_y}{16 b^4 w_y}+\frac{\pi^4 D_x}{16 a^4 w_x} \tag{7}$$

and the mode by.

$$y=C\cos\lambda x\cos\lambda' y\,(A\sin p_{11}t+B\cos p_{11}t). \tag{8}$$

Conventional analysis treats a floor-system as a set of vibrating beams, the mass of the floor slab being either neglected completely or distributed on to the beams. Thus the system is left vibrating as a free body and the effects of interior supporting columns are neglected. But the interior columns and the floor slab mass have significant effects, particularly, on the natural periods and mode shapes of the floor system. These effects are considered in the following sections.

Floor Systems on Rigid Columns

Consider the floor system shown in Fig. 3, consisting of a rectangular slab $A\,B\,C\,D$ of constant thickness, h; modulus of elasticity, E; Poisson's ratio, μ; deflexion Z; mass per unit area, W; and lengths a and b along the x and y axes respectively. It is internally supported by any arbitrary number, N, of rigid columns.

Taking A as the origin the various columns are located by the coordinates

$$(c_1,d_1),\,(c_2,d_2),\,\ldots\,(c_N,d_N).$$

For dynamic analysis of the floor system the following assumptions are made:

1. No deformation occurs in the middle plane of the slab. This plane remains central during bending.

2. Points of the slab lying initially on the normal to its middle plane remain so after bending.

3. The normal stresses perpendicular to the plane of the slab can be neglected.

4. The material of the slab is isotropic.

5. The floor system is taken as a flat slab.

6. The edges of the floor system are assumed simply-supported and the contact surface of the slab with each interior supporting column is taken as a single point.

Assumptions (1), (2), (3) and (4) are those usually adopted in the theory of thin plates. Assumption (5) is reasonable because most of the stiffening power comes from the interior columns. Assumption (6) ignores the rotational resistance but not the translationary resistance of the boundary walls and columns on the grounds that the flexural resistance offered by these members is relatively small. The assumption of point contact at the interior columns is also reasonable unless dropheads are used and it simplifies the analysis considerably.

If the system is considered equivalent to a simply-supported rectangular slab having the same dimensions and distribution of elastic properties as the actual system, and subjected to time-dependent concentrated loads, where the interior columns occur, the governing differential equation is given by:

$$D\,\nabla^2\nabla^2(Z) + W\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = f(x,y,t). \tag{9}$$

The term $f(x,y,t)$ represents the applied load which, in this instance, is the reaction offered by the interior columns. If this term becomes zero then Eq. 9 becomes the governing equation of free vibration for a similar slab simply-supported at the boundaries and having no columns.

Since the whole system is vibrating freely the column reactions must depend upon the frequency of the system. If R_i represents the amplitude of the time-dependent column reaction P_i, acting at the point c_i, d_i then:

$$P_i = R_i \cos(\omega t - \theta), \tag{10}$$

where ω = frequency of the system

and θ = phase angle of the motion

and values of P_1 and θ should be determined through the initial time conditions. The concentrated column reaction, P_1, can be expressed as an equivalent distributed load in terms of the normal functions (3) by:

$$f(x,y,t) = \sum_{i=1}^{N} R_i \cos(\omega t - \theta) \sum_m \sum_n W\,\overline{Z}_{mn}(x,y)\,\overline{Z}_{mn}(c_i,d_i), \tag{11}$$

where $i = 1, 2, 3, \ldots N$ depending on the number of interior columns.

Substituting Eq. 11 into Eq. 9 the solution will take the form

$$Z(x,y,t) = \sum_m \sum_n \overline{Z}_{mn}(x,y)\,q_{mn}(t), \tag{12}$$

which leads to

$$\sum_m \sum_n [W p_{mn}^2\,\overline{Z}_{mn}(x,y)\,q_{mn}(t) + W\,\overline{Z}_{mn}(x,y)\,q_{mn}(t)] = \sum_i^N R_i \cos(\omega t - \theta) \sum_m \sum_n W\,\overline{Z}_{mn}(x,y)\,\overline{Z}_{mn}(c_i,d_i). \tag{13}$$

If the coefficients of $\overline{Z}_{mn}(x, y)$ are matched to get the equation on the time function $q_{mn}(t)$, then:

$$q_{mn}(t) + p_{mn}^2 q_{mn}(t) = \sum_i^N R_i \cos(\omega t - \theta)\, \overline{Z}_{mn}(c_i, d_i). \tag{14}$$

The solution of Eq. 14 takes the form:

$$q_{mn}(t) = D_{mn} \cos(\omega t - \theta), \tag{15}$$

where

$$D_{mn} = \frac{\sum_i^N R_i\, \overline{Z}_{mn}(c_i, d_i)}{p_{mn}^2 - \omega^2}. \tag{16}$$

Since the deflexion at each point of column support must equal zero, then for a column support at (c_j, d_j)

$$Z(c_j, d_j, t) = \sum_m \sum_n \overline{Z}_{mn}(c_j, d_j)\, D_{mn} \cos(\omega t - \theta) = 0 \tag{17}$$

or

$$\sum_m \sum_n \frac{\sum_i^N R_i\, \overline{Z}_{mn}(c_i, d_i)\, Z_{mn}(c_j, d_j)}{(p_{mn}^2 - \omega^2)} = 0. \tag{18}$$

There will be as many equations of type (18) as there are interior supports, each containing as many terms as there are interior supports, and all these equations are linear and homogeneous in the constants, R. By setting the determinant equal to zero the frequencies of the floor system can be obtained, the least value giving the fundamental natural frequency.

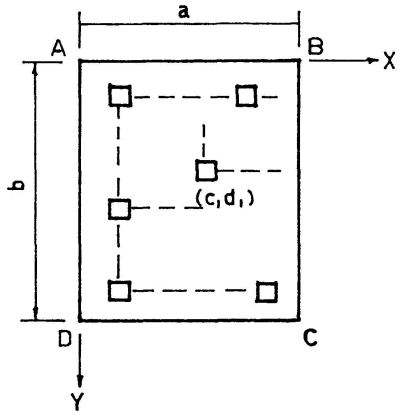


Fig. 3.

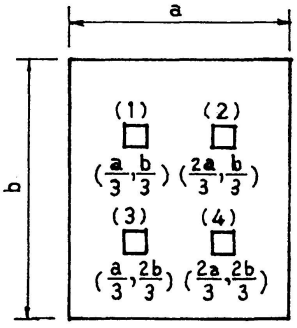


Fig. 4.

Actual solution of Eq. 18, may become intractable if more than four interior columns are considered, or more than two terms of the series. But if the columns are symmetrically spaced about the centrelines of the floor system the amount of computation is greatly reduced.

Consider, for example, the floor system with four symmetrically placed interior columns shown in Fig. 4. For brevity, the column positions are numbered (1), (2), (3) and (4) respectively.

Due to the symmetry of the system, the frequency equation, is given by Eq. 19.

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_m\sum_n \frac{R_1\,\bar{Z}_{mn}(1)\,\bar{Z}_{mn}(1)}{(p_{mn}^2-\omega^2)}+\sum_m\sum_n \frac{R_2\,\bar{Z}_{mn}(1)\,\bar{Z}_{mn}(2)}{(p_{mn}^2-\omega^2)}\\
&\quad+\sum_m\sum_n \frac{R_3\,\bar{Z}_{mn}(1)\,\bar{Z}_{mn}(3)}{(p_{mn}^2-\omega^2)}+\sum_m\sum_n \frac{R_4\,\bar{Z}_{mn}(1)\,\bar{Z}_{mn}(4)}{(p_{mn}^2-\omega^2)}=0,\\
&\sum_m\sum_n \frac{R_1\,\bar{Z}_{mn}(2)\,\bar{Z}_{mn}(1)}{(p_{mn}^2-\omega^2)}+\sum_m\sum_n \frac{R_2\,\bar{Z}_{mn}(2)\,\bar{Z}_{mn}(2)}{(p_{mn}^2-\omega^2)}\\
&\quad+\sum_m\sum_n \frac{R_3\,\bar{Z}_{mn}(2)\,\bar{Z}_{mn}(3)}{(p_{mn}^2-\omega^2)}+\sum_m\sum_n \frac{R_4\,\bar{Z}_{mn}(2)\,\bar{Z}_{mn}(4)}{(p_{mn}^2-\omega^2)}=0,\\
&\sum_m\sum_n \frac{R_1\,\bar{Z}_{mn}(3)\,\bar{Z}_{mn}(1)}{(p_{mn}^2-\omega^2)}+\sum_m\sum_n \frac{R_2\,\bar{Z}_{mn}(3)\,\bar{Z}_{mn}(2)}{(p_{mn}^2-\omega^2)}\\
&\quad+\sum_m\sum_n \frac{R_3\,\bar{Z}_{mn}(3)\,\bar{Z}_{mn}(3)}{(p_{mn}^2-\omega^2)}+\sum_m\sum_n \frac{R_4\,\bar{Z}_{mn}(3)\,\bar{Z}_{mn}(4)}{(p_{mn}^2-\omega^2)}=0,\\
&\sum_m\sum_n \frac{R_1\,\bar{Z}_{mn}(4)\,\bar{Z}_{mn}(1)}{(p_{mn}^2-\omega^2)}+\sum_m\sum_n \frac{R_2\,\bar{Z}_{mn}(4)\,\bar{Z}_{mn}(2)}{(p_{mn}^2-\omega^2)}\\
&\quad+\sum_m\sum_n \frac{R_3\,\bar{Z}_{mn}(4)\,\bar{Z}_{mn}(3)}{(p_{mn}^2-\omega^2)}+\sum_m\sum_n \frac{R_4\,\bar{Z}_{mn}(4)\,\bar{Z}_{mn}(4)}{(p_{mn}^2-\omega^2)}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

Since the relative positions of the columns are known the corresponding normal functions can be written as

$$\bar{Z}_{mn}(1)=C\sin\frac{m\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{3},\qquad \bar{Z}_{mn}(2)=C\sin\frac{2m\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{3},$$

$$\bar{Z}_{mn}(3)=C\sin\frac{m\pi}{3}\sin\frac{2n\pi}{3},\qquad \bar{Z}_{mn}(4)=C\sin\frac{2m\pi}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

Because of the rapid convergence of the series in Eq. 18 it is sufficient to consider values of m and $n \leqq 6$.

It can be shown that all of the interior column reactions, R, have the same absolute value and differ only in sign. The following possibilities exist:

$$\begin{aligned}
&1.\ R_1 = R_2 = R_3 = R_4,\\
&2.\ R_1 = -R_2 = -R_3 = R_4,\\
&3.\ R_1 = R_2 = -R_3 = -R_4,\\
&4.\ R_1 = -R_2 = R_3 = -R_4.
\end{aligned}\quad(20)$$

Using the four possible arrangements of R-values shown in Eq. 20 four corresponding frequency equations can be obtained:

$$\frac{1}{l_{11}^2-\lambda^2}+\frac{1}{l_{15}^2-\lambda^2}+\frac{1}{l_{51}^2-\lambda^2}+\frac{1}{l_{55}^2-\lambda^2}=0, \tag{21}$$

$$\frac{1}{l_{22}^2-\lambda^2}+\frac{1}{l_{24}^2-\lambda^2}+\frac{1}{l_{42}^2-\lambda^2}+\frac{1}{l_{44}^2-\lambda^2}=0, \tag{22}$$

$$\frac{1}{l_{12}^2-\lambda^2}+\frac{1}{l_{14}^2-\lambda^2}+\frac{1}{l_{52}^2-\lambda^2}-\frac{1}{l_{54}^2-\lambda^2}=0, \tag{23}$$

$$\frac{1}{l_{21}^2-\lambda^2}+\frac{1}{l_{25}^2-\lambda^2}+\frac{1}{l_{41}^2-\lambda^2}+\frac{1}{l_{45}^2-\lambda^2}=0, \tag{24}$$

where $l_{mn}^2=(m^2\alpha^2-n^2)^2$, $K^2=\dfrac{\pi^4 D}{b^4 W}$, $p_{mn}^2=K^2 l_{mn}^2$,

$\alpha=\dfrac{b}{a}=$ side ratio, $\lambda=\dfrac{W}{K}=$ Frequency number.

The least value of the solution is given by Eq. 22 which determines the fundamental frequency of the floor system.

For the general case of a floor system with mn symmetrically located, infinitely rigid columns, with m columns in each row parallel to the x-axis and n columns per row, parallel to the y-axis (i.e. $i=m$, $j=n$), the frequency equation may be written as:

$$\frac{1}{l_{m,n}^2-\lambda^2}+\frac{1}{l_{m+2,n}^2-\lambda^2}+\frac{1}{l_{m,n+2}^2-\lambda^2}+\frac{1}{l_{m+2,n+2}^2-\lambda^2}=0. \tag{24}$$

Eq. 24 has as its parameters, K, α, m and n. For definite values of m and n, the equation, after expansion, becomes a cubic equation in the square of the frequency number, λ^2. It can be written as:

$$\begin{aligned}
&4(\lambda^2)^3-3(\lambda^2)^2[l_{m,n}^2+l_{m,n+2}^2+l_{m+2,n}^2+l_{m+2,n+2}^2]\\
&\quad+2(\lambda^2)[l_{m,n}^2 l_{m,n+2}^2+l_{m,n}^2 l_{m+2,n}^2+l_{m,n}^2 l_{m+2,n+2}^2\\
&\qquad+l_{m,n+2}^2 l_{m+2,n}^2+l_{m,n+2}^2 l_{m+2,n+2}^2+l_{m+2,n}^2 l_{m+2,n+2}^2]\\
&\quad-[l_{m,n}^2 l_{m,n+2}^2 l_{m+2,n}^2+l_{m,n}^2 l_{m,n+2}^2 l_{m+2,n+2}^2+l_{m,n+2}^2 l_{m+2,n}^2 l_{m+2,n+2}^2\\
&\qquad+l_{m,n}^2 l_{m+2,n}^2 l_{m+1,n+1}^2]=0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Eq. 25 has been solved, by trial and error process, for different values of α, m and n to obtain the frequency numbers, λ, which are shown in Table 1. The relation between λ and the side-ratio, α, is shown in Fig. 5.

Table 1. Frequency number with change of side ratio (for rigid columns)

m	n	$\alpha=1.0$	$\alpha=1.1$	$\alpha=1.2$	$\alpha=1.3$	$\alpha=1.4$	$\alpha=1.5$
1	1	5.81	6.34	6.79	7.18	7.54	7.89
1	2	9.07	9.80	10.55	11.24	11.85	12.39
2	2	12.94	14.20	15.42	16.60	17.85	19.10
2	3	18.27	19.74	21.23	22.69	24.10	25.55
3	3	22.90	26.40	28.74	31.43	33.92	36.90
3	4	31.42	34.06	36.74	39.43	42.32	45.24

Actual numerical solution of the general frequency equation when applied to a particular case is tedious. For this reason an approximate expression has been worked out from the data given earlier in the paper. This is given below:

$$\lambda = 5.623\,(m\,x\,n)^{0.82}\,(\alpha - 1) + 5.689\,(m\,x\,n)^{0.66}. \tag{26}$$

By comparison with the results obtained from Eq. 25, the frequency values err, on the average, by 6.6% for α-values ranging from 1.0 to 1.4. If α is 1.5 then the error is 12%. But Eq. 26 is limited in its application, to differences in value between m and n not greater than one: i.e. $0 \leqq (n-m) \leqq 1$.

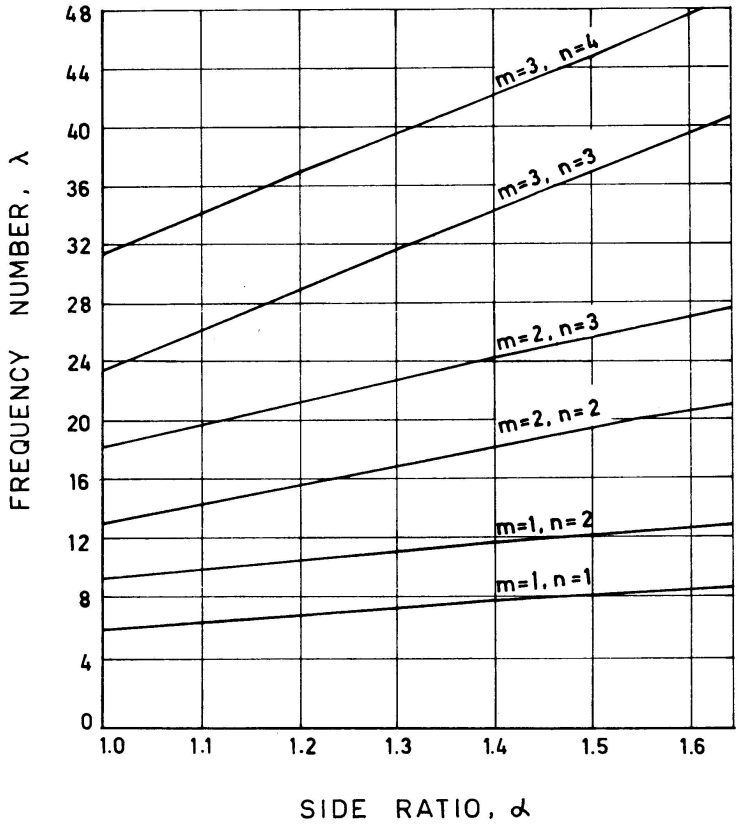


Fig. 5.

Floor System on Elastic Columns

When the interior supporting columns are elastic and have different spring constants, k, analysis can be performed using techniques similar to those shown in the preceding section.

Let the column at point x_i, y_i have a spring constant k_i. The column reaction P_i is represented by:

$$P_i = k_i\,Z\,(x_i, y_i, t). \tag{27}$$

Hence it can be shown that the column reaction is given by:

$$R_i = k_i \sum_m \sum_n Z_{mn}\,(x_i, y_i)\,D_{mn} \tag{28}$$

or for support at j

$$R_j = k_j \sum_m \sum_n \frac{\sum_i^N R_i Z_{mn}(x_i, y_i) Z_{mn}(x_j, y_j)}{(p_{mn}^2 - \omega^2)}. \tag{29}$$

Again, a set of equations of type 29, and linear and homogeneous with respect to R, results. The spring constant will vary from zero for a fully flexible column to infinity for a perfectly rigid column. The two limiting cases have already been defined. For intermediate cases, either all the interior columns have the same degree of elasticity or different values of k. Where k is constant the analysis is considerably simplified, but if k varies, some approximations must be made in order to achieve a solution.

Dealing first with the case where k is constant, it has a dimension of length/force and should have a negative sine in order to ensure that a positive deflexion relates to an upward, or negative load.

Denoting $$k \frac{(m+1)(n+1)}{W a b K^2} = -G, \tag{30}$$

where G can be termed the stiffness number of the floor system, the frequency equation may be written as:

$$1 + G\left[\frac{1}{l_{m,n}^2 - \lambda^2} + \frac{1}{l_{m,n+2}^2 - \lambda^2} + \frac{1}{l_{m+2,n}^2 - \lambda^2} + \frac{1}{l_{m+2,n+2}^2 - \lambda^2}\right] = 0. \tag{31}$$

Eq. 31 has been solved for floor systems having 1, 2, 4, 6, 9 and 12 symmetrically located interior columns and values of G equal to 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4 and ∞ respectively. The results are grouped in Tables 2 to 7 and show that the frequency number, λ, is linearly related to the side ratio, α, for any particular floor system having a particular value of stiffness number, G. The main variation of frequency number with stiffness number lies within the range, $G = 10$ to $G = 10^3$ and as far as dynamic analysis is concerned, interior columns with G-values greater than 10^3 can be regarded as infinitely rigid, in the analysis.

It should be noted, however, that the value of the stiffness number depends on the value of the column spring constant and on the column numbers, m and n. Hence, in order to compare different floor systems with interior columns having the same spring constant, the stiffness number, G, must be divided by the corresponding number $(m+1)(n+1)$.

Where the spring constant, k_i, differs for every interior column the labour involved in solving Eq. 29 becomes prohibitive. Some simplification can be achieved by neglecting some of the terms $\frac{1}{l_{mn}^2 - \lambda^2}$, and this seems reasonable providing $l_{mn} \gg \lambda$, where λ can be estimated from the general equation 24. But the remaining equation may, even then, remain too laborious for solution. Besides no practical advantage seems to be gained by treating the interior columns as having differing spring constants.

Table 2. Influence of stiffness number and side ratio on frequency number

Floor System with Column Numbers: $m=1$, $n=1$						
Log G	α					
	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
0	2.23	2.42	2.63	2.87	3.12	3.40
1	3.46	3.62	3.80	3.98	4.19	4.41
2	5.32	5.72	6.07	6.38	6.67	6.98
3	5.75	6.27	6.70	7.09	7.45	7.79
4	5.80	6.33	6.78	7.17	7.53	7.87
∞	5.80	6.34	6.79	7.18	7.54	7.89

Table 3. Influence of stiffness number and side ratio on frequency number

Floor System with Column Numbers: $m=1$, $n=2$						
Log G	α					
	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
0	5.09	5.30	5.53	5.77	6.04	6.34
1	5.74	6.01	6.23	6.45	6.80	6.96
2	8.03	8.45	8.85	9.22	9.55	9.90
3	8.95	9.63	10.33	10.97	11.53	12.05
4	9.06	9.78	10.53	11.21	11.80	12.36
∞	9.07	9.80	10.55	11.24	11.85	12.39

Table 4. Influence of stiffness number and side ratio on frequency number

Floor System with Column Numbers: $m=2$, $n=2$						
Log G	α					
	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
0	8.08	8.90	9.80	10.80	11.90	13.20
1	8.55	9.35	10.23	11.17	12.23	13.37
2	10.90	11.73	12.60	13.50	14.50	15.52
3	12.60	13.80	14.95	16.10	17.32	18.52
4	12.88	14.13	15.37	16.55	17.80	19.07
∞	12.94	14.20	15.42	16.60	17.85	19.10

Table 5. Influence of stiffness number and side ratio on frequency number

Floor System with Column Numbers: $m=2$, $n=3$						
Log G	α					
	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
0	13.04	13.88	14.80	15.80	16.60	18.09
1	13.36	14.19	15.10	16.07	17.08	18.44
2	15.36	16.21	17.11	18.05	19.03	20.14
3	17.75	19.08	20.40	21.70	23.05	24.23
4	18.17	19.67	21.18	22.60	24.00	25.41
∞	18.27	19.74	21.23	22.69	24.10	25.55

Table 6. Influence of stiffness number and side ratio on frequency number

Floor System with Column Numbers: $m=3$, $n=3$						
Log G	α					
	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
0	18.20	19.92	22.00	24.18	26.63	29.20
1	18.28	20.06	22.20	24.40	26.80	29.50
2	20.02	21.80	23.80	25.90	28.30	30.34
3	22.43	25.30	27.60	29.90	32.40	34.94
4	22.85	26.30	28.70	31.30	33.90	36.40
∞	22.90	26.40	28.74	31.43	33.92	36.90

Table 7. Influence of stiffness number and side ratio on frequency number

Floor System with Column Numbers: $m=3$, $n=4$						
Log G	α					
	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
0	25.05	26.46	28.96	31.69	33.41	36.29
1	25.12	26.58	29.07	31.97	33.80	36.60
2	26.65	28.38	30.42	33.27	35.10	37.42
3	30.08	32.37	34.67	37.42	39.60	42.16
4	31.31	34.00	36.62	39.31	42.25	45.16
∞	31.42	34.06	36.74	39.43	42.32	45.24

Mode Shapes

The mode shapes of the floor system for free vibrations can be determined once the frequencies are known. The column reactions, R, are first determined within an arbitrary limit and these, when substituted into Eq. 12, give the following expression for the mode shape of the system:

$$Z(x,y,t) = \sum_m \sum_n \bar{Z}_{mn}(x,y) \frac{\sum_i^N R_i \bar{Z}_{mn}(c_i, d_i)}{(p_{mn}^2 - \omega^2)} (A \cos \omega t - B \sin \omega t). \quad (32)$$

The arbitrary constants A and B in Eq. 32, should be evaluated using the initial time conditions.

If the floor system is subjected to forced vibration the general analytical principles involved can be illustrated by reference to the simple case of a single concentrated sinusoidal force, F.

If the force is

$$F = F_0 \sin ft, \quad (33)$$

where f = frequency of the applied load, the distributed load has the form:

$$f(x, y, t) = F_0 \sin f t \sum_m \sum_n W \bar{Z}_{mn}(x, y) \bar{Z}_{mn}(u, v). \tag{34}$$

(u, v) being the point of application of the concentrated force.

The distributed load in Eq. 34 is added to the r.h.s. of Eq. 9 to form the new governing differential equation. Its solution consists of a homogeneous part given by Eq. 32 and a particular solution to be determined. The particular solution is investigated by using Eq. 9, which yields the following:

$$q_{mn}(t) + p_{mn}^2 q_{mn}(t) = \sum_i^N F_i Z_{mn}(c_i, d_i) + F_0 \sin f t \, \bar{Z}_{mn}(u, v). \tag{35}$$

Solution of Eq. 35 for a steady-state forced vibration will be of the form:

$$q_{mn}(t) = D_{mn} \sin f t \tag{36}$$

with force P_i given by

$$P_i = R_i \sin f t. \tag{37}$$

Substituting from Eqs. 36, and 37 into Eq. 35 gives:

$$D_{mn} = \frac{\sum_i^N R_i \bar{Z}_{mn}(c_i, d_i) + F_0 \bar{Z}_{mn}(u, v)}{(p_{mn}^2 - f^2}. \tag{38}$$

By using the conditions of constraint at the interior supports

$$Z(c_i, d_i, t) = 0, \tag{39}$$

or

$$Z_{mn}(c_i, d_i) D_{mn} = 0 \tag{40}$$

the values of the coefficients R_i may be found from the equation:

$$\sum_m \sum_n \bar{Z}_{mn}(c_j, d_j) \frac{\sum_i^N R_i Z_{mn}(c_i, d_i) + F_0 \bar{Z}_{mn}(u, v)}{(p_{mn}^2 - f^2)} = 0. \tag{41}$$

N being the number of interior supports. This yields a set of N linear but non-homogeneous equations which can be solved explicitly for the R coefficients. With the R-values known, the constant D_{mn} can be found and, finally, the particular solution for the deflexion, Z, where:

$$Z(x, y, t) = \sum_m \sum_n \bar{Z}_{mn}(x, y) \frac{\sum_i^N R_i \bar{Z}_{mn}(c_i, d_i) + F_0 \bar{Z}_{mn}(u, v)}{(p_{mn}^2 - f^2)} \sin f t. \tag{42}$$

Nomenclature

a, $2a$ = length of slab in x-direction
b, $2b$ = length of slab in y-direction
e = spacing
E = modulus of elasticity
$E_0 I_0$ = flexural rigidity of main girder
$E_x I_x$ = flexural rigidity of beam in x-direction
$E_y I_y$ = flexural rigidity of beam in y-direction
e_x, e_y = spacing of beams in x and y directions respectively
F = applied sinusoidal force
f = frequency of applied load
$f(x, y, t)$ = force function on slab
G = stiffness number
h = constant thickness of slab
k = spring constants of interior supporting columns
L = span length of secondary beams
L_0 = span length of main girder
N = number of columns supporting the slab
P_i = reaction of column i
P_n = frequency of main girder in the nth mode
P_{mn} = natural frequency of slab
q_{mn} = generalised coordinate, function of time t only
R_i = amplitude of column reaction
W_0 = mass per unit length of main girder
W_x, W_y = mass per unit length of beams in x, y direction respectively
W = mass per unit area of slab
X = shape function of entire structure
X_A, X_B = shape function of system A, B respectively
y_0 = vertical deflexion of main girder
$Z_{mn}(x, y)$ = shape function of slab in the (m, n)th mode
z = deflexion of slab
ω = frequency of floor system
θ = phase angle of vibration
μ = Poisson's Ratio
λ_n = frequency number

References

1. Bleich, H. H.: Frequency Analysis of Beams and Girder Floors. Transactions, American Society of Civil Engineers, V. 115, 1950.
2. Rogers, G. L.: Dynamics of Framed Structures. John Wiley and Sons, New York, 1959.
3. Saibel, E., and D'Appolonia: Forced Vibrations of Continuous Beams. Transactions, American Society of Civil Engineers, 1952.

Summary

This paper presents a method for analysis of floor-systems considered as plates resting on supporting columns. The fourth-order partial differential equation involved is solved by the normal mode method. A simple frequency equation in terms of the number of "symmetrically situated" columns is derived and some typical cases are solved numerically. The stiffness of the floor system on elastic interior columns is also considered and mode shapes due to free and forced vibrations briefly dealt with.

Résumé

Cet article présente une méthode de calcul des (systèmes de) planchers appuyés sur des colonnes. Les équations différentielles partielles du 4e ordre utilisées sont résolues par la méthode de la surface élastique.

Une équation d'oscillation simple en fonction du nombre de colonnes situées «symétriquement» est établie et quelques exemples typiques ont été résolus. En outre, on considère la rigidité du plancher appuyé sur des colonnes intérieures élastiques et on étudie brièvement la surface élastique due tant à une oscillation libre qu'à une oscillation entretenue.

Zusammenfassung

Dieser Beitrag zeigt die Berechnung von Decken, die auf Stützen ruhen. Die zugrunde liegende partielle Differentialgleichung vierter Ordnung ist durch die normale Biegefläche-Methode gelöst worden. Ebenso wird eine einfache Schwingungsgleichung in Abhängigkeit der Anzahl symmetrisch angeordneter Stützen hergeleitet und einige typische Fälle werden numerisch gelöst. Weiterhin wird die Steifigkeit der Decke auf elastischen Innenstützen, sowie die Biegefläche infolge freier und erzwungener Schwingungen berücksichtigt.

Leere Seite
Blank page
Page vide

On the Splitting Tests of the Hollow Cylinder Specimens

Essais de ruine sur des tronçons de cylindres creux

Über Spaltversuche an Hohlzylinderproben

BÜLENT ÖVÜNÇ
M. ACI, Ph. D., Assoc. Professor, University of Southwestern Louisiana

This article describes the analytical study of stress distributions within a hollow cylinder due to diametrically applied concentrated loads on its outer or inner boundaries assuming linear elastic behavior.

Increase of the diametrical concentrated loads causes the failure of the hollow cylinder by splitting along the same diameter on which the concentrated forces lie. The failure behavior is close to the failure of beams under constant moment rather than the proper splitting test of cylinders where a constant tensile stress is predominant.

Application of concentrated loads on the inner boundary does not require a costly testing machine and the tests may be performed at any small construction site.

In recent years splitting tests on cylinder specimens [1] have been adopted as a convenient measure of the tensile strength of concrete, although, the split section along the external load line is not subjected to uniaxial tensile stress condition (pure tensile) but to a biaxial stress condition. The value of the compressive stress on perpendicular direction is three times the value of tensile stress [2]. No reliable theory of the strength of the concrete under combined stress has emerged for successful practical use. The difficulty lies on the non-homogeneous nature of the concrete, on its behavior at high stresses influenced by microcraking and other discontinuity phenomena [3]. Its material characteristics are affected also by the variation of temperature, moisture content [4], etc. In spite of all these discrepancies the split test on cylinder specimens is still a convenient measure of the tensile strength of concrete compared to the measures of two other types of tests, such as direct pull tests on briquettes and modulus of rupture test. The former tests suffer from the difficulty to eliminate

eccentricity of the line of action of the load and from the premature failure at the ends due to the stress concentrations near the gripping devices [5, 6]. In the latter tests, the tensile strength computed by assuming the concrete as a linearly elastic material is significantly higher than would be obtained from uniaxial tensile strength [7]. The splitting tests have been extended to cube and beam specimens [8]. The present paper deals with the stress distributions in hollow cylinder specimens. The external loads may be applied arbitrarily on outer and inner boundaries with the condition that they satisfy the equilibrium.

Procedure of Analysis

The procedure of analysis is an application of MUSKHELISHVILI's [9] complex variable method to the solution of the circular ring subjected to the loads acting on its boundary. The two independent complex variable functions, whose combination gives the AIRY stress function, are expressed in infinite polynomial series with unknown coefficients. These unknown coefficients are determined by the boundary conditions. Hence the two independent functions are obtained in infinite polynomial series form. For given external load, in order to increase the convergence these polynomial series are decomposed into logarithmic functions and polynomial series which converge rapidly.

Let the circular region, S, be bounded by two concentric circles L_1 and L_2 with outer radius R_1 and inner radius R_2, whose center being at the origin of coordinate axes (Fig. 1).

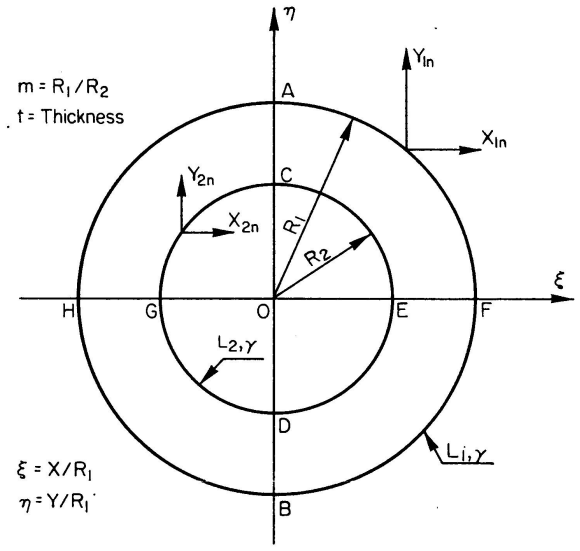


Fig. 1.

X_{1n}, Y_{1n} and X_{2n}, Y_{2n} are the kown components of the external forces acting respectively on the boundaries L_1 and L_2. They will be assumed to be continuous and single valued on L_1 and L_2, satisfying the equilibrium conditions, and varying with polar angle θ from the positive θx axis in a direction

such that the region S always remains at the left hand side while moving along the boundaries γ.

The boundary conditions may be written

$$\varphi(z)+z\bar{\varphi}'(\bar{z})+\bar{\psi}(\bar{z})=\begin{cases} f_1'+if_2' & \text{on } L_1,\ (z=R_1e^{i\theta}),\\ f_1''+if_2'' & \text{on } L_2,\ (z=R_2e^{i\theta}),\end{cases} \tag{1}$$

where
$$f_1+if_2=i\int_\gamma (X_n+iY_n)\,ds=iR\int_0^\theta (X_n+iY_n)\,d\theta. \tag{2}$$

The expression f_1+if_2 may be expanded in the series,

$$f_1+if_2=\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{in\theta} \tag{3}$$

the coefficients of which may be calculated by the fourier expansion of the given external load on the boundary.

It is known that the functions $\varphi(z)$ and $\psi(z)$ must be holomorphic inside the ring, so that they may be represented by Laurent series. Thus inside S,

$$\varphi(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \qquad \psi(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n' z^n, \tag{4}$$

$$\bar{\varphi}'(\bar{z})=\sum_{-\infty}^{+\infty} n\bar{a}_n \bar{z}^{(n-1)}, \qquad \bar{\psi}(\bar{z})=\sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{a}_n' \bar{z}^n. \tag{5}$$

Assuming these series to converge, not only in the interior of the region S, but also on the boundaries L_1 and L_2, and substituting them in (1), one finds,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}+re^{i\theta}\sum_{-\infty}^{+\infty} n\bar{a}_n r^{n-1}e^{-(n-1)i\theta}+\sum_{-\infty}^{+\infty}\bar{a}_n' r^n e^{-in\theta}=\begin{cases}\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n' e^{in\theta} & \text{on } L_1,\\ \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n'' e^{in\theta} & \text{on } L_2.\end{cases} \tag{6}$$

The unknown coefficients, a_n and a_n' are calculated by comparing the coefficients of $e^{in\theta}$. Thus the functions $\varphi(z)$ and $\psi(z)$ are determined.

From the functions $\varphi(z)$ and $\Psi(z)$, the stresses may be calculated in the polar coordinates as follows,

$$\begin{aligned}\sigma_r+\sigma_\theta &= 2[\phi(z)+\bar{\phi}(\bar{z})],\\ \sigma_\theta-\sigma_r+2i\tau_{r\theta} &= 2[\bar{z}\phi'(z)+\psi'(z)]e^{2i\theta},\end{aligned} \tag{7}$$

where
$$\phi(z)=\varphi'(z).$$

Hollow Cylinder specimens Loaded on its Outer Boundary

Let the point of application of external loads Y_1 and Y_2, which are equal to P in this case, be A and B. The coefficients A_k will be determined from the relations:

$$A_k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f e^{-ik\theta}}{R_1^k}d\theta, \qquad k=\pm(1,2,3,\ldots n), \tag{8}$$

On the outer boundary, $f = -i\,P$, one has:

$$A'_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{i\,P\,e^{-ik\theta}}{R_1}\,d\theta = +\frac{i\,P}{k\,R_1^k} \qquad k = \pm(1, 3, 5, \ldots, 2k'+1, \ldots n).$$

On the inner boundary, $f = 0$, one has:

$$A''_k = 0.$$

To increase the convergence, the two complex variable functions (4) can be taken:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{-i\,P}{2\pi t}\{\log(i\,R_1 - z) - \log(-i\,R_1 - z)\} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n z^n, \\ \psi(z) &= \frac{-i\,P}{2\pi t}\{\log(i\,R_1 - z) - \log(-i\,R_1 - z)\} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha'_n z^n. \end{aligned} \tag{9}$$

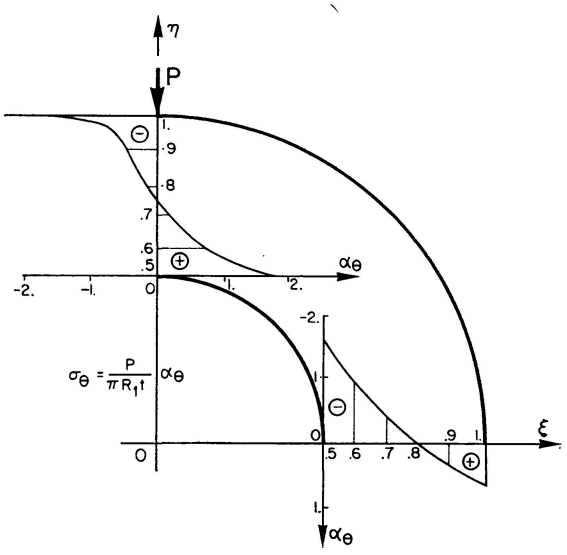


Fig. 2.

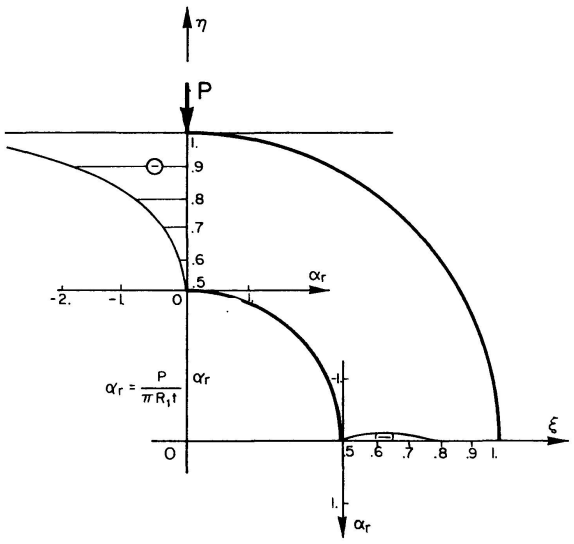


Fig. 3.

Table I

$m = R_1/R_2$	α_θ at Point: ($\sigma_\theta = R_1\,t\,\alpha_\theta$)		
	C	*E*	*F*
0.40	13.6891	−13.7023	3.0632
0.50	20.3065 (19.52)*)	−17.7936	5.8566
0.60	32.7678 (33.16)	−25.6593	11.4105
0.70	60.4456	−42.9946	24.4189
0.80	140.6816 (148.1)	−92.0971	64.6496
0.90	576.5885 (562.7)	−357.5244	299.6246

*) Number in paranthesis refers to SAVIN [10] results.

Subsequently the coefficients α_n, α_{-n}, α'_n, α'_{-n} and the stresses are determined respectively from (1) and (7).

The stress distributions are shown in Fig. 2 and Fig. 3. The values of stresses at various points with different $m = R_1/R_2$ ratios have been given in Table I.

Hollow Cylinder Specimens Loaded on its Inner Boundary

Let the point of application of external loads Y_1 and Y_2, which are equal to P, be C and D.

The coefficients A_k will be determined from the relations (8), hence on the outer boundary, $f = 0$, one has:

$$A'_k = 0$$

and on the inner boundary, $f = i\,P$, one has:

$$A''_k = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{i\,P\,e^{ik\theta}}{R_2^k}\,d\theta = -\frac{i\,P}{k\pi R_2^k}, \qquad k = \pm(1, 3, 5, \ldots, 2k'+1, \ldots n)$$

The two complex variable functions (4) can be taken as follows:

$$\varphi(z) = \frac{-i\,P}{2\pi t}\{\log(i\,R_2 - z) - \log(-i\,R_2 - z)\} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n z^n,$$

$$\psi(z) = \frac{-i\,P}{2\pi t}\{\log(i\,R_2 - z) - \log(i\,R_2 - z)\} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha'_n z^n.$$

Subsequently the coefficients α_n, α_{-n}, α'_n, α'_{-n} and the stresses are determined respectively from (1) and (7).

The stress distributions are shown in Fig. 4 and Fig. 5. The values of stresses at various points with different $m = R_1/R_2$ ratios have been given in Table II.

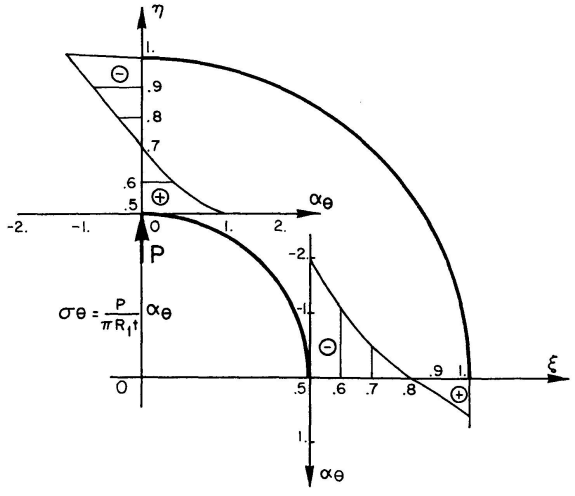


Fig. 4.

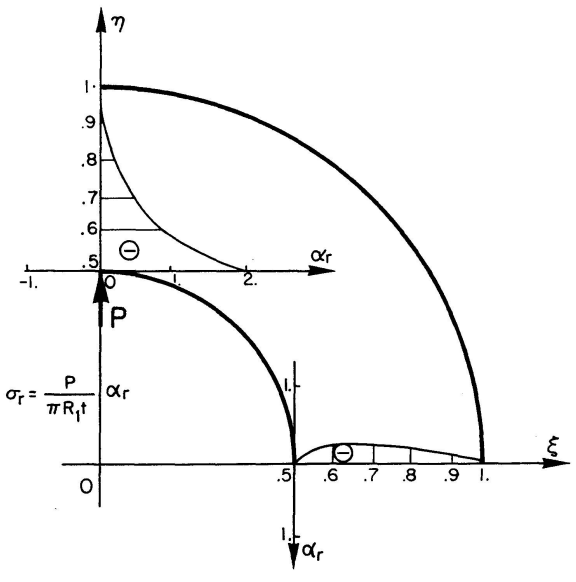


Fig. 5.

Table II

$m=R_1/R_2$	α_r at Point: ($\sigma_r=R_1\, t\, \alpha_r$)		
	A	*E*	*F*
0.40	−7.3775	−14.5627	3.5761
0.50	−12.8197	−18.3799	6.2299
0.60	−23.4063	−26.1008	11.6414
0.70	−47.8021	−43.2316	24.6060
0.80	−121.4331	−92.2009	64.7898
0.90	−537.7226	−354.0734	302.9679

The results obtained are a measure of, but not identical with, the real axial tension. A computer program has been performed for various m ratios and external loads.

References

1. ASTM (American Society for Testing and Materials) Standards. C 496-66.
2. TIMOSHENKO, S., and GOODIER, J. N.: Theory of Elasticity. McGraw-Hill, New York, 1951, p. 107.
3. HSU, T. C., SLATE, F. O., STURMAN, G. M., and WINTER, G.: Microcracking of Plain Concrete and the Shape of the Stress-Strain Curve. J. ACI, Vol. 60, 1963, p. 209.
4. HANSON, J. A.: Effects of Curing and Drying Environments on Splitting Tensile Strength of Concrete. J. ACI. Vol. 65, No. 7, July 1968, p. 535.
5. EVANS, R. H.: Extensibility and Modulus of Rupture of Concrete, The Structural Engineer (London), Vol. 24, No. 12, Dec. 1946, p. 636.
6. HUMPHREYS, R.: Direct Tensile Strength of Concrete, Civil Engineering, Vol. 52, No. 8, August 1957, p. 882.
7. BLAKEY, F. A., and BERESFORD, F. C.: Tensile Strain – Part I and II, Report C 2.2-1, Division of Building Research, Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, Melbourn, 1953.
8. DAVIES, J. D., and BOSE, D. K.: Stress Distribution in Splitting Tests, J. ACI, Vol. 65, No. 8, August 1968, p. 662.
9. MUSKHELISHVILI, N. I.: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Translated from Russian by J. R. M. Radok. P. Noordhoff Ltd. Groningen. The Netherlands, 1963, p. 224.
10. SAVIN, G. N.: Stress Concentration Around Holes. Pergamon Press, New York, 1961, p. 142.

Summary

The stress distributions within a hollow cylinder due to diametrically applied concentrated loads on its outer or inner boundaries has been studied by means of complex variable method assuming linear elastic behavior. The splitting tests have been considered as an application.

It is obvious that such tests do not require costly machine and they may be performed at any small construction site.

Résumé

Le présent article étudie par une méthode aux variables complexes, en supposant un comportement élastique linéaire, la répartition des contraintes dans un cylindre creux soumis à des forces concentrées diamétralement opposées agissant sur les bords extérieur ou intérieur.

Les essais de ruine sur les cylindres en sont présentés comme application.

Il est évident que de tels essais n'exigent pas d'appareils coûteux et qu'ils peuvent être exécutés sur n'importe quel petit chantier.

Zusammenfassung

Die Spannungsverteilung in einem Hohlzylinder unter diametral angeordneten Einzellasten am inneren oder äußeren Rand ist mit Hilfe komplexer Unabhängiger, angenommen der Körper verhalte sich elastisch, untersucht worden. Der Spaltversuch war dabei eine Anwendung hiervon. Offensichtlich brauchen solche Versuche keine kostspielige Maschinen und können auf irgendwelchen kleinen Bau-Plätzen durchgeführt werden.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Large Deflection Effects in Elasto-Plastic Frame Analysis

Grandes déformations des cadres élasto-plastiques

Große Ausbiegungen elasto-plastischer Rahmen

F. SAWKO
Prof., Department of Civil Engineering, University of Liverpool

A. M. B. WILDE
Dr., Babcock and Wilcox Limited, London

Introduction

The adoption of high yield stress steels in design of portal frames and multi-storey buildings, leads to an economic solution. The higher working stresses permitted with the new steels, however, lead to larger deflections in service, and it is important to examine the practical implications of this in design.

Two separate lines of investigation have recently evolved. The first was based on the study of large deflections leading to a change of initial geometry and its effect on the distribution of forces and deflections throughout the structure [1]. The general conclusion arrived at was that within elastic behaviour change of geometry effects do not produce large departures from the usually assumed elastic behaviour, provided instability effects are included. The second study was concerned with the elasto-plastic behaviour of frames built in high yield stress steel with strain hardening effects and instability both included [2]. This enabled the relative importance of the increase in stiffness due to strain hardening to be examined in realtion to the deterioration of stiffness due to increased instability effects.

The study described in this paper has attempted to combine the two effects in order to examine whether change of geometry in the elasto-plastic range produces any significant changes in the behaviour of structures. It is immediately apparent that this effect is likely to be more significant in the elasto-plastic range where deflections are very much larger than within the purely elastic range, and the study is therefore felt to be of considerable practical importance.

The investigation was carried out by developing fully automatic computer

programs based on the stiffness approach capable of simulating the effects of instability, elasto-plastic behaviour, strain hardening and large deflections either separately or in any combination, and applying these to the analysis of several types of frames in high-yield stress steel. The relative importance of large deflections could thus be conveniently investigated.

Basic Assumptions

All the analyses apply only to plane frameworks composed of initially straight uniform members rigidly connected at nodes. The basic element of a framework is a structural member in which strain hardening hinges can form at either or both ends, a modified elastic behaviour being assumed along the lenght of the member. A strain hardening hinge is simulated by a concentrated elastic spring developing an additional moment above the moment causing initial plasticity in the section.

The shape factor of the section is assumed to be unity so that non-elasticity is confined to strain hardening hinges. The stiffness of the hinges, however, includes the effect of spreading plastic zones in an actual member [3].

Axial strains are automatically included in the displacement analysis, and the effect of axial thrust on bending and shearing stiffnesses of individual members, that is the instability effect [4], is also taken into account. Large deflection effects are included by considering the overall displacement of each member from its unloaded position, but the "bowing" effect [5], the difference between actual member length and its chord, is assumed to be small in building frames. It is thus felt that the method includes all the important effects governing the behaviour of steel frames.

Theory of the Method

A longhand analysis of any but the simplest frame is unthinkable, and it was felt that comprehensive computer programs based on the stiffness approach would provide a most powerful tool for the investigation. The stiffness approach has already been used very successfully for instability [4] and elasto-plastic behaviour of frames [6] and grillages [7] and has been modified to include strain hardening effects [2, 8]. These developments have been well documented, and attention will be confined only to the method of treating large deflections.

In small deflection theory equilibrium equations are formulated for the undeformed structure, thus for a structure subjected to loading $[F]$ deforms by $[D]$ where

$$[F] = [S][D], \tag{1}$$

where $[S]$ is the stiffness matrix of the frame. When large deflections are considered, equilibrium must be maintained in the deformed stare, in the new geometry the frame has taken up. Therefore, in general equation (1) will not be satisfied, and for equilibrium a set of external loading $[F_R]$ at joints will have to be applied to maintain equilibrium. Thus:

$$[F] = [S][D] + [F_R], \tag{2}$$

Forces $[F_R]$ can therefore be calculated as the difference of internal member forces $[S][D]$ in the displaced form and the external loading.

Elasto-plastic behaviour commences when the external loading $[F]$ is of sufficient intensity to produce plasticity in some members of the frame. Strain hardening hinges are then brought into play reducing the stiffness of the structure to $[S_p]$ and the external loading by the plastic moments and forces $[F_p]$. The equilibrium conditions can be stated as:

$$[F] = [S_p][D] + [F_p] + [F_R]. \tag{3}$$

The two effects can be combined, and the equation rewritten more conveniently as:

$$[F] - [F_{pR}] = [S_p][D], \tag{4}$$

where $[F_{pR}]$ represents the total reduction of external loading.

Equations for a Single Member

Equations governing the elasto-plastic strain hardening analysis of a typical member of a frame work have been derived fully in the authors' previous publication [2] and only a summary of the results is included here.

A member 1—2 is shown in figure 1 in its undeformed and deformed states. When large deflections are considered, the new length of the member will be defined by the chord length L_c, the member being inclined at an angle α_1 to the x-axis. Since the deformation of the member from its chord is assumed small, the axial force P is assumed to act along the chord, and shearing force S normal to it. Rotations of the two ends of the member relative to its initial position are θ_1 and θ_2.

When plasticity develops at either end of a member, a plastic strain hardening hinge is assumed to form allowing some relative rotation to develop. Considering a hinge at end 1 of the member, the rotation of the elastic portion adjacent to the hinge becomes $\bar{\theta}_1$. Thus the relative hinge rotation is $\theta_1^1 = \theta_1 - \bar{\theta}_1$ and the moment can be expressed by

$$M_{12} = \beta_1 M_p + \frac{E I}{k_1 h_1}(\theta_1 - \bar{\theta}_1), \tag{5}$$

where $\beta_1 = \pm 1$ depending on the direction of rotation of the plastic hinge, k_1 and h_1 are the strain hardening factor and equivalent cantilever length respectively for end 1 of the member.

Parameters h_1 and k_1 can be determined directly from the bending moment distribution in the vicinity of the hinge as follows:

$$h_1 = \frac{M_{12} L_c}{M_{12} + M_{21}}, \tag{5a}$$

$$k_1 = 30.345 - 22.066 \frac{M_p}{M_{12}}. \tag{5b}$$

The numerical value of k_1 applies to high yield stress steel to BS 968: 1962, and has been obtained from several tests on steel beams and specimens [3]. The same procedure can be adopted for other steels.

With reference to figure 1, member forces are given by:

$$\begin{aligned} P_1 &= -P_2 = \frac{E A}{L_0}(q_1 - q_2), \\ M_{12} &= [s\bar{\theta}_1 + s c \theta_2 + s(1+c)\phi]\frac{E I}{L_c}, \\ M_{21} &= [s c \bar{\theta}_1 + s\theta_2 + s(1+c)\phi]\frac{E I}{L_c}, \\ S_1 &= -S_2 = \frac{M_{12} + M_{21}}{L_c}. \end{aligned} \tag{6}$$

Using the Livesley stability functions [4] the above equations become:

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{4 E I}{L_c}\phi_3 \bar{\theta}_1 + \frac{2 E I}{L_c}\phi_4 \theta_2 + \frac{6 E I}{L_c^2}\phi_2 (p_1 - p_2), \\ M_{21} &= \frac{2 E I}{L_c}\phi_4 \bar{\theta}_1 + \frac{4 E I}{L_c}\phi_3 \theta_2 + \frac{6 E I}{L_c^2}\phi_2 (p_1 - p_2), \\ S_1 &= -S_2 = \frac{6 E I}{L_c^2}\phi_2 \bar{\theta}_1 + \frac{6 E I}{L_c^2}\phi_2 \theta_2 + \frac{12 E I}{L_c^3}\phi_2 (p_1 - p_2) \end{aligned} \tag{7}$$

respectively. It is important to note that because the axial force acts along the chord of the deformed member and the shear force normal to the chord, there is no $P_1(p_2 - p_1)$ term used in formulating the shear force equation.

Equations (7) define the behaviour of a strain hardening member with instability effects included but are *not* in equilibrium as they have to be modified for the change of geometry. Compatibility conditions will be satisfied by correcting the projected lengths of each member to correspond with the displaced position of the frame. Thus for member 1—2 with deflection components $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ at ends 1 and 2 respectively with respect to x and y axes, the corrected projected lengths are:

$$\begin{aligned} \bar{x} \text{ corrected} &= \bar{x} \text{ initial} - (x_1 - x_2), \\ \bar{y} \text{ corrected} &= \bar{y} \text{ initial} - (y_1 — y_2), \end{aligned} \tag{8}$$

as shown in figure 1 and the corrected chord length becomes

$$L_c = \sqrt{(\bar{x}^2 \text{ corrected} + \bar{y}^2 \text{ corrected})}.$$

In formulating equation (6) it was assumed that the change of length of the member due to axial forces was $(q_1 - q_2)$ while the actual change of length is given by

$$\epsilon = L_0 - L_c. \tag{9}$$

Thus the error which results in using a first order expression is given by $\epsilon_R = \epsilon - (q_1 - q_2)$.

But

$$q_1 - q_2 = (x_1 - x_2)\cos\alpha_1 + (y_1 - y_2)\sin\alpha_1 \tag{10}$$

and from equations (8)

$$L_c \cos\alpha_1 = L_0 \cos\alpha_0 - (x_1 - x_2)$$

and

$$L_c \sin\alpha_1 = L_0 \sin\alpha_0 - (y_1 - y_2).$$

By squaring and adding the above equations and using equation (9)

$$L_0^2 = (L_c + \epsilon)^2 = [L_c \cos\alpha_1 + (x_1 - x_2)]^2 + [L_c \sin\alpha + (y_1 - y_2)]^2,$$

that is $$\epsilon = \left[\frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y)^2 - \epsilon^2}{2 L_c}\right] + \cos\alpha_1 (x_1 - x_2) + \sin\alpha_1 (y_1 - y_2)$$

and subtracting equation (10)

$$\epsilon_R = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - \epsilon^2}{2 L_c}. \tag{11}$$

Hence the axial displacement error, ϵ_R, in a member can be calculated directly from its end deflections and its initial and chord lengths.

Similarly in formulating the slope deflection equations (7), it was assumed that the member sway displacement, ϕ, was given by $p_1 - p_2/L_c$, whereas the actual sway displacement is given by

$$\phi = \alpha_0 - \alpha_1, \tag{12}$$

where α_0 is the initial angle of inclination of the member to the xy axes, and α_1 is the corresponding angle in the deformed geometry as defined in fig. 1. Hence the error, ϕ_R, in the first order approximation to the member sway displacement is

$$\phi_R = \phi - \frac{p_1 - p_2}{L_c}.$$

But

$$p_1 - p_2 = (y_1 - y_2)\cos\alpha_1 - (x_1 - x_2)\sin\alpha_1,$$

therefore

$$\phi_R = \phi - 1/L_c[(y_1 - y_2)\cos\alpha_1 - (x_1 - x_2)\sin\alpha_1]. \tag{13}$$

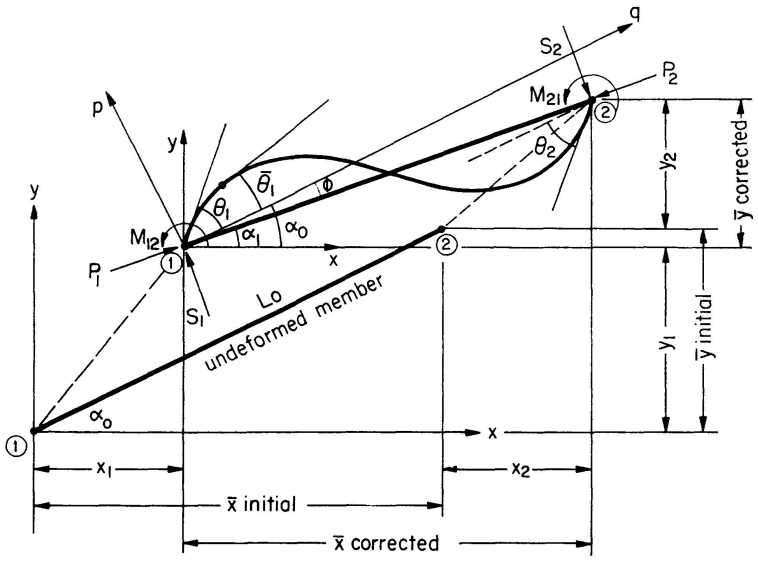


Fig. 1. The deformed member.

From the preceding equations the appropriate restraint forces for the member can be calculated to correct the effects of the displacement errors ϵ_R and ϕ_R and to hold the member in equilibrium.

Thus equations (7) become

$$
\begin{aligned}
P_1 &= -P_2 = \frac{EA}{L_0}(q_1-q_2)+\frac{EA}{L_0}\epsilon_R,\\
M_{12} &= \frac{4EI}{L_c}\phi_3\bar{\theta}_1+\frac{2EI}{L_c}\phi_4\theta_2+\frac{6EI}{L_c^2}\phi_2(p_1-p_2)+\frac{6EI}{L_c}\phi_2\phi_R,\\
M_{21} &= \frac{2EI}{L_c}\phi_4\bar{\theta}_1+\frac{4EI}{L_c}\phi_3\theta_2+\frac{6EI}{L_c^2}\phi_2(p_1-p_2)+\frac{6EI}{L_c}\phi_2\phi_R,\\
S_1 &= -S_2 = \frac{6EI}{L_c^2}\phi_2\bar{\theta}_1+\frac{6EI}{L_c^2}\phi_2\theta_2+\frac{12EI}{L_c^3}\phi_2(p_1-p_2)+\frac{12EI}{L_c^2}\phi_2\phi_R.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

By eliminating $\bar{\theta}_1$ from equations (14) using equation (5) and adding contributions from all members meeting at the node the equilibrium equation for the node is obtained. This contains the external loading, forces due to the imposed strain hardening moments and forces on the node, and the external restraints required to hold it in equilibrium.

Organisation of Computer Program

The computer program to carry out the non linear plane frame analysis was written in Algol 60 and run on the English Electric Leo Marconi KDF9 machine.

The required input data is kept to a minimum, and consists of the geometry of the frame, member section properties and the ratio of loads acting on the frame. This ratio is kept constant and loads are automatically increased at

every stage of the solution. The analysis is completely automatic and requires no human intervention, the results consisting of a set of displacements and distribution of forces and moments at the formation of every successive strain hardening hinge until collapse.

Due to the non linear response of the structure within any load range, the analysis involves an iterative prediction procedure in determining the load and position at which each strain hardening hinge will form, together with the displacements and member forces in the structure at that load. The stability functions, revised frame geometry, and values of h/L_c and k are calculated from the member axial forces, joint displacements and end moments respectively, predicted to be the condition of the structure when a particular strain hardening hinge will form. These are then used to determine the elements of the matrices $[S_p]$ and $[F_{pR}]$ for the next iteration. The procedure continues until the actual and predicted values have converged to within certain tolerances, showing that the equilibrium position of the deformed structure in its strain hardening state has been found.

The program utilizes the banded nature of the matrix $[S_p]$ for an economic solution. It stores only one half of the band width of non-zero coefficients, the locations of the strain hardening hinges being kept in a separate array within the computer store.

Once matrices $[S_p]$, $[F_{pR}]$ and $[F]$ are established, equations (4) are solved using the Square Root Method to give joint displacements, from which, using the displacement errors, stability functions and values of h and k, predicted from the previous iteration, member forces are calculated.

Using a linear prediction procedure, the load, location, displacements and member forces at which the next strain hardening hinge will form are estimated. From the predicted axial forces, values of P/P_E are obtained and from the predicted bending moment distribution values of h/L_c and k for each strain hardening hinge already present in the structure are calculated using equations (5a) and (5b) respectively. Then using equations (8) corrected projected lengths of each member are calculated from the predicted joint displacements, from which the revised frame geometry is determined. Predicted values for the true axial displacement ϵ, the sway displacement φ, and the displacement errors, ϵ_R and φ_R are then calculated using the predicted values of L_c, α_1 and the joint displacements in equations (9), (12), (11) and (13) respectively. Finally revised stability functions are calculated from the predicted P/P_E values.

These quantities are then used for setting up equations (4) for the next iteration and so the process continues until the predicted and actual quantities satisfy a series of fine tolerances [3]. When the location and condition of the structure at which the next plastic hinge is due to form are established, the results are printed out, the applied load is increased, and the iterative prediction procedure for the next hinge commences. The program terminates when the prediction procedure is incapable of locating the next strain hardening hinge,

indicating either a mechanism or a reduction in the load carrying capacity of the frame.

The program contains all the major non linear effects encountered in plane frame analysis, namely the effect of strain hardening, the instability effects of axial forces, and the effect of change in geometry due to the large deflections. The program besides being economical in computer storage and time, is also very versatile, and various effects can be suppressed in the analysis. Thus:

1. The effect of strain hardening can be neglected by putting the value of the strain hardening factor k equal to zero.
2. The analysis can be reverted to a purely elastic analysis by specifying high M_p values for members.
3. The instability effects of axial forces can be suppressed if required.

The program as developed does not make any provision for the possibility of a reduction in the plastic angle of rotation thus restoring elastic behaviour with a certain permanent set in any member. This case was considered during developement of the present program, but was found to be of extremely rare occurrence and of little significance in the accuracy with which load-deformation characteristics for actual frames could be predicted. The penalty in computer effort to check all plastic hinges at every stage and to carry their deformation histories was deemed excessive in an already expensive analysis and this facility was not, therefore, incorporated.

Application to Steel Frames

The computer program was used to analyse three different plane frames shown in figs. 2, 3 and 4, in order to examine the relative important of the effect of large deflections compared with the effects of strain hardening and instability in an elasto-plastic analysis. All the frames were assumed to be fabricated from commercial sections of steel to B.S. 968: 1962 with E = 13,100 t/sq.in. and the yield stress = 28.1 t/sq.in., both values having been obtained from a series of bending and tension tests carried out on the material. In all cases six analyses were carried out, and for easy reference they and their respective failure loads are denoted as follows:

E-P, W_p	simple elasto-plastic analysis
E-P-ST, W_{f1}	elasto-plastic analysis including the effects of instability
E-P-ST-FD, W_{f2}	elasto-plastic analysis including the effects of instability and change of geometry due to large deflections
E-P-SH, W_{f3}	elasto-plastic analysis including the effect of strain hardening
E-P-SH-ST, W_{f4}	elasto-plastic analysis including the effects of strain hardening and instability

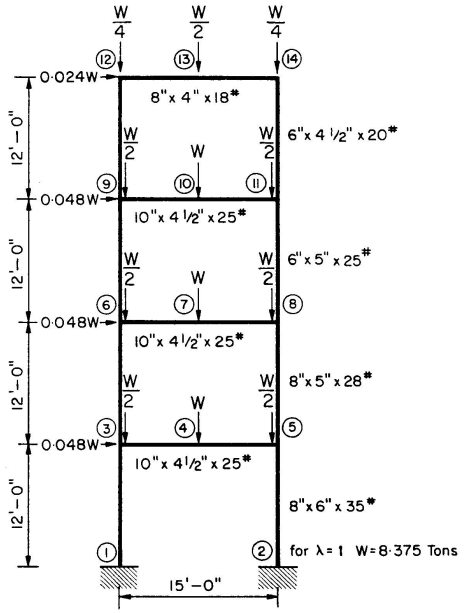


Fig. 2. Wood's four storey single bay frame.

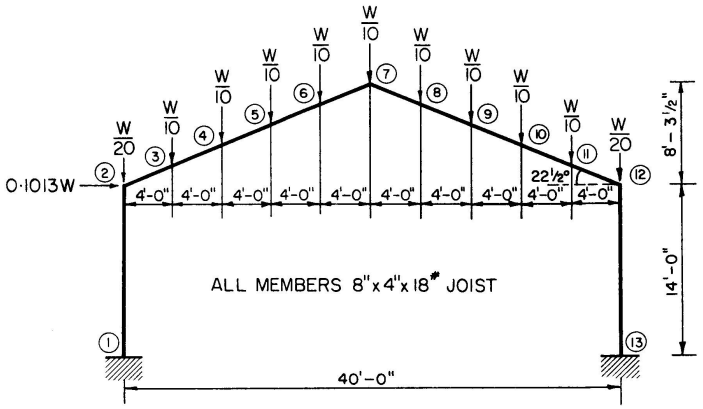


Fig. 3. Heyman's pitched roof portal frame. $\lambda = 1$, $W = 6.96$ tons.

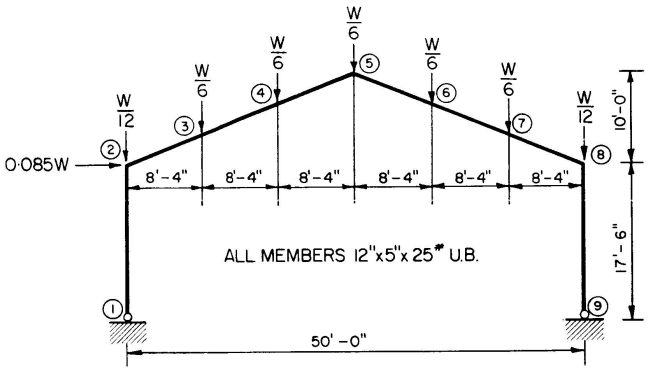


Fig. 4. B.C.S.A. Pitched roof portal frame. $\lambda = 1$, $W = 7.0$ tons.

E-P-SH-ST-FD, W_{f5} elasto-plastic analysis including the effects of strain hardening, instability and change of geometry due to large deflections, that is the analysis described in the paper.

Example 1. Four Storey Single Bay Frame

The frame was first analysed by WOOD [9] in mild steel to illustrate the concept of the deteriorated elastic critical load. The results of the analyses are shown in fig 5 and 6 and a summary of the results at the failure load of each analysis is shown in Table 1.

Even within the elastic range instability is an important effect leading to much larger deflections than those given by the elasto-plastic analysis. The instability effects of axial forces reduces the carrying capacity of the structure by 18.2% below the simple plastic collapse load, and the effect of overall change in geometry on this failure load is negligible.

The effect of strain hardening on the analysis including the effects of instability and change of geometry is to increase the failure load to give a reduction in carrying capacity below the simple plastic collapse load of 13.5% and is accompanied by a large increase in deflections in the horizontal direction,

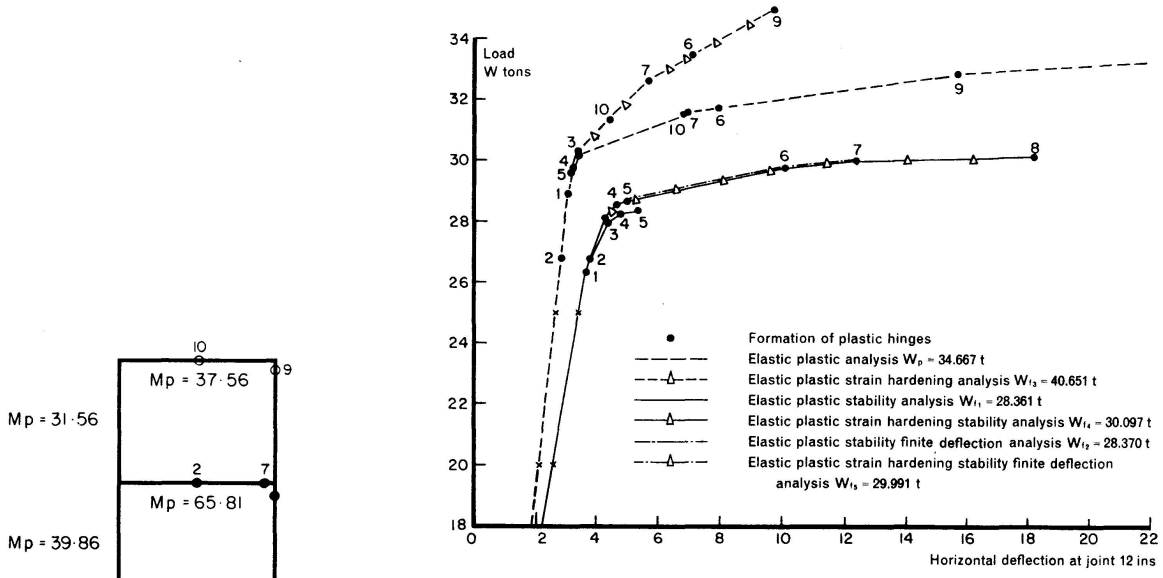


Fig. 6. Elastic plastic strain hardening load deflection curves for Wood's frame. Steel to B.S. 968: 1962.

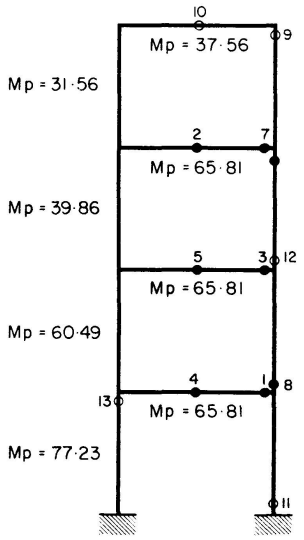


Fig. 5. Order of hinge formation for Wood's frame: Steel to B.S. 968: 1962. Fully plastic moments in t ft., $E = 13{,}100$ t per sq. inch., $fy = 28.1$ t per sq. inch.

● Plastic hinges. o Additional hinges for simple plastic collapse.

Table 1. Four storey single bay frame

Analysis	W_f tons	No. of hinges	Joint 12 x_{max} ins	Joint 13 y_{max} ins	Percentage changes in ultimate load ($W_f = 100\%$)
E-P	34.667	13	62.278	15.737	0
E-P-ST	28.361	5	5.315	1.408	−18.2
E-P-ST-FD	28.370	5	5.312	1.434	−18.2
E-P-SH	40.651	13	24.380	5.383	+17.3
E-P-SH-ST	30.097	8	18.171	1.408	−13.2
E-P-SH-ST-FD	29.991	7	12.340	1.611	−13.5

as two more strain hardening hinges have formed. This seems to agree with conclusions previously reached [9] that strain hardening has little effect compared with the predominance of instability in the plastic analysis and design of tall buildings. The program required 42 iterations, an average of six per hinge and 5 minutes 22 seconds of computer time to complete the final analysis.

Example 2. 40 ft 0 in Span Pitched Roof Portal Frame

The frame has fixed base connections and is subjected to horizontal and vertical loading and was first used by HEYMAN [10] as a design example to illustrate a method of plastic design for pitched roof portal frames. The results

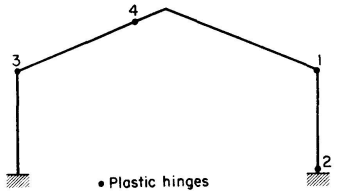


Fig. 7. Order of hinge formation for Heyman's portal. Steel to B.S. 968: 1962. All members

$Mp = 37.56$ t ft.
$E = 13{,}100$ t per sq. inch.
$fy = 28.1$ t per sq. inch.

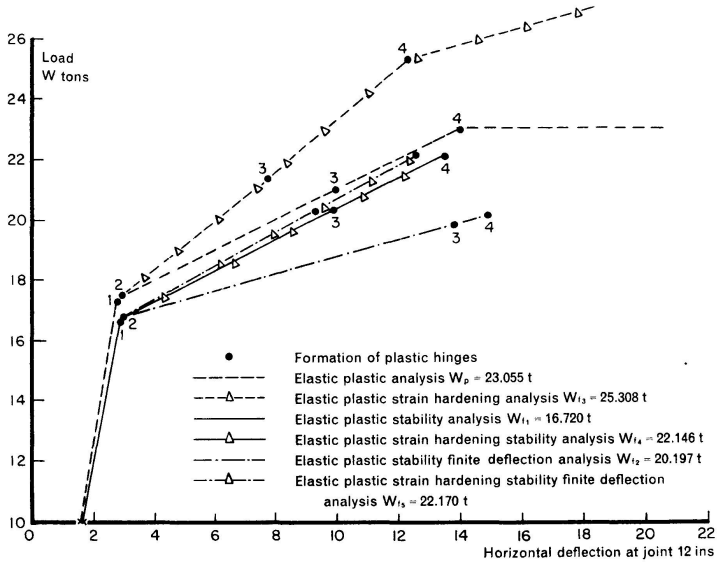


Fig. 8. Elastic plastic strain hardening load deflection curves for Heyman's portal frame. Steel to B.S. 968: 1962.

Table 2. 40 ft 0 in span pitched roof portal frame fixed base connections

Analysis	W_f tons	No. of hinges	Joint 12 x_{max} ins	Joint 7 y_{max} ins	Percentage changes in ultimate load ($W_f = 100\%$)
E-P	23.055	4	14.054	14.468	0
E-P-ST	16.720	2	2.925	4.626	−27.5
E-P-ST-FD	20.197	4	14.928	14.898	−12.4
E-P-SH	25.308	4	12.348	13.979	+ 9.8
E-P-SH-ST	22.146	4	13.571	13.799	− 3.9
E-P-SH-ST-FD	22.170	4	12.640	14.251	− 3.8

of the analyses are shown in fig. 7 and 8 and a summary of the results at the failure load of each analysis is shown in Table 2.

The instability effects of axial forces in an elasto-plastic analysis are smaller in the elastic range than in the four storey frame, but failure follows immediately after the formation of only two hinges by buckling of the right hand column, reducing the carrying capacity of the portal by 27.5% below the simple plastic collapse load. The effect of overall change in geometry on this failure load is to raise it ot 12.4% below the simple plastic collapse load after allowing two more hinges to form thus giving a mechanism and a large increase in deflections.

The effect of strain hardening on the analysis including the effects of instability and change in geometry is to increase the failure load to give a reduction in carrying capacity below the simple plastic colapse load of 3.8%. It is important to note while the effect of overall change in geometry on the elasto-plastic analysis including instability had a pronounced effect, the effect was virtually negligible on the elasto-plastic analysis including instability and strain hardening except for a small variation in deflections. The program required a total of 20 iterations and 1 minute 23 seconds of computer time.

Example 3. 50 ft 0 in Span Pitched Roof Portal Frame

The frame is shown in fig. 4, it has pinned base connections and is subjected to horizontal and vertical loading and was taken from a B.C.S.A. publication [11] where it is elastically designed in mild and high yield steel. The results of the analyses are shown in fig. 9 and 10 and a summary of the results at the failure load of each analysis is shown in Table 3.

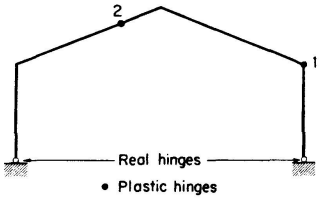


Fig. 9. Order of hinge formation for the B.C.S.A. portal frame. Steel to B.S. 968: 1962. All members

Mp = 77.14 t ft.
E = 13,100 t per sq. inch.
fy = 28.1 t per sq. inch.

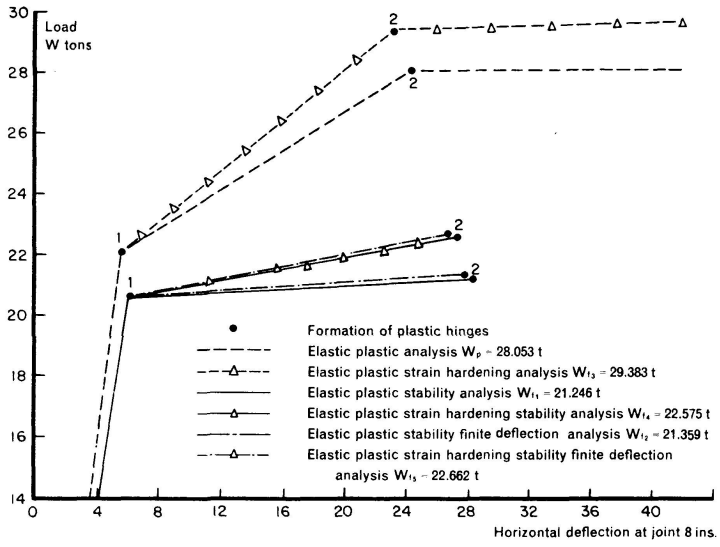


Fig. 10. Elastic plastic strain hardening load deflection curves for the B.C.S.A. frame. Steel to B.S. 968: 1962.

Table 3. 50 ft 0 in span pitched roof portal frame pinned base connections

Analysis	W_f tons	No. of hinges	Joint 8 x_{max} ins	Joint 5 y_{max} ins	Percentage changes in ultimate load ($W_f = 100\%$)
E-P	28.053	2	24.331	14.836	0
E-P-ST	21.246	2	28.383	14.108	−24.3
E-P-ST-FD	21.359	2	27.877	15.548	−23.9
E-P-SH	29.383	2	23.286	14.594	+ 4.7
E-P-SH-ST	22.575	2	27.238	13.817	−19.5
E-P-SH-ST-FD	22.662	2	26.769	15.148	−19.2

As the frame has pinned base connections, only two strain hardening hinges are required to obtain a mechanism, and in all the analyses a mechanism is obtained before local instability. The instability effects of the axial forces reduce the carrying capacity of the structure by 24.3% below the simple plastic collapse load. The effect of overall change in geometry on this failure load is to raise it slightly and is accompanied by a small reduction in the horizontal deflections and a small increase in the vertical deflections.

The effect of strain hardening on the analysis including the effects of

instability and change in geometry is to increase the failure load to give a reduction in carrying capacity below the simple plastic collapse load of 19.2%. This shows that for this particular pinned base portal the effects of instability and change of geometry due to large deflections decrease the stiffness of the portal considerably and that strain hardening has only a small effect. The program required a total of 13 iterations and 35 seconds of computer time.

Conclusions

An investigation into the relative effects of strain hardening and instability due to axial forces on plane frames, together with an examination of the concept of the strain hardening hinge has been fully discussed in the authors' previous paper [2]. The purpose of this paper was to investigate the additional effect of change in geometry due to large deflections in an elasto-plastic analysis which includes the effects of instability and strain hardening.

An examination of results of the three examples summarised in Tables 1, 2 and 3, reveals that the effect of change in geometry on the collapse load of multi-storey frame and the two pitched roof portals is very small.

Thus the general conclusion can be drawn that an accurate prediction of the behaviour and collapse load of building frames can be obtained from an elasto-plastic analysis which only considers the effects of strain hardening and instability due to axial forces, and neglects the effect of change in geometry due to large deflections. Such an analysis, discussed in the authors' previous paper is far more economical in computer time and requires fewer iterations for describing the complete behaviour up to collapse of steel frames. In the exceptional case where a more accurate analysis is required this can be performed without difficulty using the program described.

Notation

A	Cross-sectional area
c	Carry over factor
$[D]$	Generalised displacement matrix
E	Young's modulus of elasticity
EI	Flexural rigidity
$[F]$	Generalised force matrix
$[F_R]$	External restraint matrix
$[F_p]$	Plastic force matrix
$[F_{pR}]$	Total reduced external loading matrix $= [F_p]+[F_R]$
h	Equivalent cantilever length

I	Second moment of area of a section
k	The strain hardening factor
L_0	Initial unstrained length of a member
L_c	Chord length of a deformed member
M	Bending moment
M_p	Fully plastic moment
P	Axial force in a member
q, p	Set of member axes
S	Shear force
$[S]$	Stiffness matrix for the entire structure
$[S_p]$	Stiffness matrix for the reduced structure
s	Stiffness factor
W	Load
W_f	Failure load
$x\,y$	Set of general axes
$\bar{x}$	Projected length of a member with respect to the x-axis
$\bar{y}$	Projected length of a member with respect to the y-axis
α_0	Angle of inclination for an undeformed member to the x-axis
α_1	Angle of inclination for a deformed member to the x-axis
β	A unit multiplying factor of ± 1
ϵ	Axial strain in a member
ϵ_R	Axial strain error
θ	Joint rotation
$\bar{\theta}$	Rotation at the end of a member
θ'	Relative hinge rotation
ϕ	Angle between initial member direction and deformed member direction
ϕ_1 to ϕ_5	The Livesley stability functions
ϕ_R	Member sway displacement error

References

1. Millar, M. A., Brotton, D. M. and Merchant, W.: A Computer Method for the Analysis of Non-Linear Elastic Plane Frameworks. International Symposium on the Use of Electronic Digital Computers in Structural Engineering, University of Newcastle-upon-Tyne, Paper No. 10, Working Session No. 3, June 1966.
2. Sawko, F. and Wilde, A. M. B.: Automatic Analysis of Strain Hardening Structures. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Vol. 37, p. 195–211, May 1967.
3. Wilde, A. M. B.: Strain Hardening Effects in the Plastic Behaviour of Structures. Ph. D. Thesis, Leeds University, August 1967.
4. Livesley, R. K.: The Application of an Electronic Digital Computer to Some Problems of Structural Analysis. The Structural Engineer, Vol. 34, p. 1–12, January 1956.

5. SAAFAN, S. A.: Non-Linear Behaviour of Structural Plane Frames. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 89, No. ST 4, p. 557–579, August 1963.
6. LIVESLEY, R. K.: The Application of the Computer to Problems Involving Plasticity. Symposium on the Use of Computers in Structural Engineering, University of Southampton, September 1959.
7. SAWKO, F.: Analysis of Grillages in the Elasto-Plastic Range. Civil Engineering and Public Works Review, p. 737–739, June 1964 and p. 866–869, July 1964.
8. SAWKO, F.: Effect of Strain Hardening on the Elasto-Plastic Behaviour of Beams and Grillages. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Vol. 28, p. 489–504, August 1964.
9. WOOD, R. H.: The Stability of Tall Buildings. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Vol. 11, p. 69–102, September 1958.
10. HEYMAN, J.: Plastic Design of Portal Frames. Cambridge University Press, 1957.
11. KENT, L. E. and LAZENBY, D. W.: Single Bay Single Storey Elastically Designed Portal Frames. British Constructional Steelwork Association Publication, No. 24, 1964.

Summary

High working stresses permitted with high yield stress steels lead to large deflections in the elastic and post elastic states. The paper investigates the effect of large deflections on ultimate load behaviour of structures by analysing three frames using a computer program in which effects of instability, plasticity, strain hardening and large deflections can be included or suppressed. It is concluded that an elasto-plastic analysis which included strain hardening and instability effects is sufficiently accurate in predicting the behaviour of structures up to collapse.

Résumé

Des tensions admissibles élevées, ainsi que les aciers à haute limite d'élasticité provoquent de grandes déformations dans les domaines élastiques et plastiques. Cet article examine l'effet des grandes déformations sur le comportement à la ruine de trois cadres à l'aide d'un programme d'ordinateur où l'on peut prendre en considération ou négliger les influences respectives de l'instabilité, de la plasticité, de l'écrouissage et des grandes déformations. On en arrive à la conclusion qu'un calcul élasto-plastique qui tient compte de l'écrouissage et de l'instabilité est assez exact pour déterminer le comportement à la ruine des structures.

Zusammenfassung

Hohe zulässige Nutzspannungen sowie hohe Streckgrenzen des Stahles führen zu großen Ausbiegungen im elastischen oder nachelastischen Zustand. Dieser Beitrag untersucht den Einfluß der großen Ausbiegungen auf das Traglastverhalten anhand dreier Rahmen, unter Benützung eines Rechenprogramms, das die Einflüsse der Instabilität, Plastizität, Verfestigung und der großen Ausbiegungen entweder berücksichtigt oder nach Wunsch vernachlässigt. Aus den Berechnungen folgt, daß eine elasto-plastische Rechnung, welche die Verfestigung und die Instabilität berücksichtigt, genügend genau ist für die Voraussagung des Verhaltens bis zum Zusammenbruch.

Vorbeulungs- und Eigenspannungs-Einflüsse bei der überkritischen Beulung von Platten

Effect of the Initial Deformations and the Residual Stresses on the Buckling of Plates in the Post-critical Range

Influences des déformations initiales et des contraintes résiduelles sur le voilement des plaques dans le domaine post-critique

H. STEUP[1])
Dr.-Ing. Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Statik der Baukonstruktionen und Stahlbau der Technischen Universität Dresden

1. Allgemeines

Die bislang ausgearbeiteten Theorien der überkritischen Plattenbeulung und zahlreiche Versuche haben deutlich vor Augen geführt, daß die konventionelle Beullast, als eine Verzweigungslast im Sinne der Eigenwerttheorie, das wirkliche Tragverhalten besonders bei sehr dünnwandigen Stegblechen und verwandten Konstruktionsteilen nur mangelhaft oder auch gar nicht beschreibt. Die praktische Berechtigung der Eigenwerttheorie ist hier allerdings darin zu suchen, daß eine durchaus sichere Abschätzung der Tragfähigkeitsgrenze infolge der Vernachlässigung überkritischer Stabilisierungseffekte mit Formeln relativ einfacher Bauart möglich ist und besonders im Bereich kleiner und mittlerer Plattenschlankheiten die Verzweigungslast eine technisch brauchbare Annäherung an die wirkliche Tragfähigkeitsgrenze bietet. Unterschiedlich zur Notwendigkeit bei dünnwandigen Schalen aus Gründen der Sicherheit quadratische Verzerrungsterme in Rechnung zu stellen, kann bei den Platten hier in vorteilhafter Weise Material eingespart werden, wenn es gelingt eine theoretisch fundierte Bemessungsgrundlage zu entwickeln.

Die theoretische Erforschung des Verhaltens von Platten mit Beanspru-

[1]) Die vorliegende Arbeit ist aus einer Vertragsforschungs-Aufgabe zwischen dem Institut für Industrieanlagenmontagen und Stahlbau, Leipzig, und der Technischen Universität Dresden, Lehrstuhl für Statik der Baukonstruktionen und Stahlbau, Prof. Dr.-Ing. habil. G. Bürgermeister, entstanden.

chungen im elastischen Bereich erweist sich bereits als relativ schwierig, wenn dabei die praktisch auftretenden Randbedingungen bezüglich der Dehnung, Biegung und Torsion der Randglieder (Gurtungen und Pfosten) in exakterer Weise berücksichtigt werden sollen. Demzufolge besitzt eine erweiterte Theorie des elastisch-plastischen Verhaltens derartiger Systeme gegenwärtig nur dann aktuelle Bedeutung, wenn bei Verzicht auf die Anwendung der differentiellen Plastizitätsgesetze ein Grenztragfähigkeitszustand mit Hilfe einfacher Fließmechanismen angegeben werden kann. Vgl. hierzu auch die Arbeiten von BASLER und THÜRLIMANN [5] sowie ŠKALOUD [10]. Der Einsatz leistungsfähiger Digitalrechner bietet jedoch weitere Möglichkeiten, auch komplexere Probleme der geometrisch nichtlinearen Plattentheorie zu lösen und eine Bewertung des Tragverhaltens über die «Pseudo-Traglasten», etwa im Sinne der Spannungstheorie II. Ordnung bei Berücksichtigung quadratischer Verzerrungsterme sowie Imperfektionen hinsichtlich der Vorbeulung und des Eigenspannungszustandes anzustreben. Ein Fließsicherheitsnachweis beulgefährdeter Platten in Anlehnung an das Vorgehen bei den Druckstäben unter Zugrundelegung der linearen Elastizitätstheorie bietet jedoch keine Möglichkeiten, die stabilisierende Wirkung der Membranspannungen im überkritischen Bereich in Rechnung zu stellen.

2. Lösungsansätze

Die hinsichtlich der Vorbeulungen, Eigenspannungen und orthogonalen Anisotropie erweiterten KÁRMÁNschen Differentialgleichungen lauten in dimensionsloser Schreibweise für den «Plattenanteil»

$$\bar{K}_x \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \xi^4} + 2\alpha^2 \bar{K}_{xy} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \alpha^4 \bar{K}_y \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \eta^4} = 12(1-\mu^2)\alpha^2 \cdot \left\{ \frac{\partial^2 (\bar{\Phi}+\bar{\Phi}_0)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 (\bar{w}+\bar{w}_0)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 (\bar{\Phi}+\bar{\Phi}_0)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 (\bar{w}+\bar{w}_0)}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 (\bar{\Phi}+\bar{\Phi}_0)}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 (\bar{w}+\bar{w}_0)}{\partial \xi \partial \eta} \right\} \tag{1}$$

und den «Scheibenanteil» (vgl. v. B. [2])

$$\bar{S}_x \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial \xi^4} + 2\alpha^2 \bar{S}_{xy} \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \alpha^4 \bar{S}_y \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial \eta^4} = \alpha^2 \cdot \left\{ \frac{\partial^2 (\bar{w}+\bar{w}_0)}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 (\bar{w}+\bar{w}_0)}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 (\bar{w}+\bar{w}_0)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 (\bar{w}+\bar{w}_0)}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \eta^2} \right\}. \tag{2}$$

Dabei gilt bei Beschränkung auf NAVIERsche Randbedingungen mit den dimensionslosen Koordinaten $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ für die Vorbeulung, bezogen auf Plattenstärke t

$$\bar{w}_0 = \frac{w_0}{t} = \sum_m \sum_n V_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta = \sum_\rho V_\rho w_\rho(\xi, \eta) \tag{3}$$

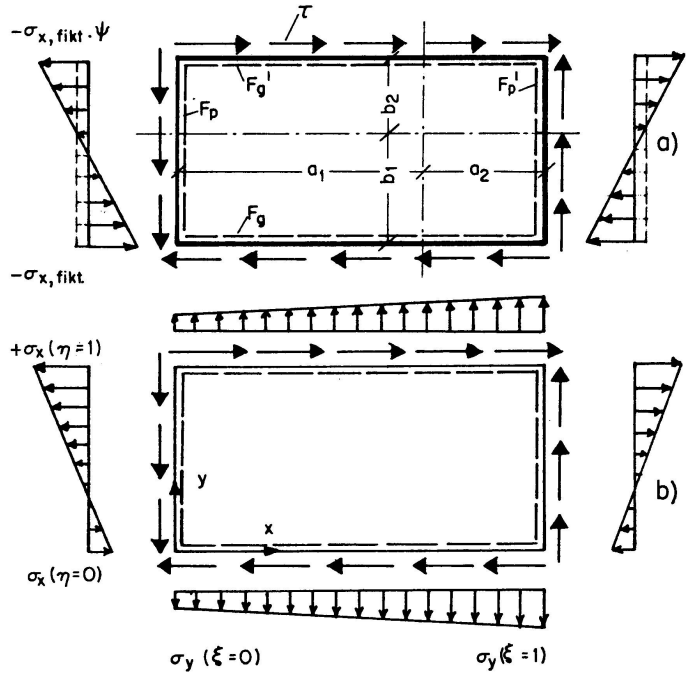


Fig. 1.

a) Randversteifte Platte unter fiktiven überkritischen Spannungen.
b) Spannungsbild für homogenen Anteil der Spannungsfunktion.

sowie die deformationsbedingte Ausbeulung

$$\overline{w} = \frac{w}{t} = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta = \sum_\rho C_\rho w_\rho(\xi,\eta). \tag{4}$$

Die richtungsabhängigen Steifigkeitskoeffizienten lauten

$$\overline{K}_x = \frac{K_x}{K_c}, \quad \overline{K}_y = \frac{K_y}{K_c}, \quad \overline{K}_{xy} = \frac{K_{xy}}{K_c}, \quad K_c = \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)} \tag{5a–d}$$

mit $K_x = \dfrac{(E I)_x}{1-\mu_x\mu_y}, \quad K_y = \dfrac{(E I)_y}{1-\mu_y\mu_x}, \quad K_{xy} = \dfrac{1}{2}(K_x\mu_y + K_y\mu_x) + G_{xy}\dfrac{t^3}{6}$

und $$\bar{S}_x = \frac{E}{E_x}, \quad \bar{S}_y = \frac{E}{E_y}, \quad \bar{S}_{xy} = \frac{E}{2}\left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{\mu_x}{E_x} - \frac{\mu_y}{E_y}\right). \tag{6a–c}$$

Die Spannungsfunktion der Eigenspannungen mit $\Phi_0(\xi,\eta)$ und der deformationsbedingten Spannungen mit $\Phi(\xi,\eta)$ wird in dimensionsloser Schreibweise gesetzt $\bar{\Phi}_0 = \Phi_0/E t^2$ bzw. $\bar{\Phi} = \Phi/E t^2$. α ist das Seitenverhältnis der Platte mit a/b. Um ein den praktischen Gegebenheiten möglichst anpassungsfähiges Feld der Eigenspannungen zu formulieren, wird die zugehörige Spannungsfunktion aus 2 Anteilen aufgebaut. Das Spannungsfeld (A) stellt lediglich in der Querrichtung der Platte eine Gleichgewichtsgruppe dar und beschreibt daher die Verteilung etwa bei längeren geschweißten Gurt-Stegblech-Systemen.

$$\bar{\Phi}_0^{(A)} = \frac{\sigma_F \epsilon_0}{E}\left(\frac{b}{t}\right)^2\left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{k_1}{\pi^2}\sin\pi\eta - \frac{k_2}{9\pi^2}\sin 3\pi\eta\right). \tag{7}$$

Es gelten die Abkürzungen

σ_F Zugspannung an der Fließgrenze.

ϵ_0 Verhältnis der Randeigenspannung zur Fließgrenze $\sigma_{x0}(\eta=0;1)=\sigma_F\epsilon$.

κ_0 Negatives Verhältnis von Randeigenspannung zu Eigenspannung in halber Plattenbreite $\sigma_{x0}(\eta=0;1) = -\kappa\sigma_{x0}(\eta=0{,}5)$.

k_1, k_2 Koeffizienten $k_1 = -0{,}375\pi - 0{,}25\,(1+\frac{1}{\kappa})$; $k_2 = -0{,}375\pi + 0{,}75\,(1+\frac{1}{\kappa})$.

Ein «echtes» Eigenspannungsfeld (B) bildet nach beiden Achsenrichtungen Gleichgewichtsgruppen mit verschwindenden Randspannungen und genügt der Spannungsfunktion

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_0^{(B)} = \frac{\sigma_F \epsilon_1}{E}\left(\frac{b}{t}\right)^2 \frac{1}{8\pi^2(1+2\vartheta_y)}&[(1-\cos 2\pi\xi) + \vartheta_y(3\sin\pi\xi - \sin 3\pi\xi)]\\ &\cdot[(1-\cos 2\pi\eta) + \vartheta_x(3\sin\pi\eta - \sin 3\pi\eta)],\end{aligned} \tag{8}$$

wobei die Abkürzungen gelten

$$\begin{aligned}&\sigma_{x0}(\eta=0;1) = \sigma_F\epsilon_1, \qquad \sigma_{y0}(\xi=0;1) = \sigma_F\epsilon_2,\\ &\kappa_1 = -\frac{\sigma_{x0}(\xi=0{,}5,\ \eta=0)}{\sigma_{x0}(\xi=0{,}5,\ \eta=0{,}5)},\\ &\vartheta_x = \frac{1-\kappa_1}{3\kappa_1}, \qquad \vartheta_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\frac{(1+2\vartheta_x)}{\alpha^2} - 1\right).\end{aligned}$$

Für die Spannungsfunktion $\bar{\Phi}(\xi,\eta) = \bar{\Phi}_H + \bar{\Phi}_H^* + \bar{\Phi}_P$ gilt der homogene Anteil

$$\bar{\Phi}_H = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_x(\eta=0)\,b^2}{E\,t^2}\eta^2\left(1-\frac{\zeta}{3}\eta\right) + \frac{\sigma_y(\xi=0)\,a^2}{E\,t^2}\xi^2\left(1-\frac{\Theta}{3}\xi\right) - 2\frac{\tau\,a\,b}{E\,t^2}\xi\,\eta\right], \tag{9}$$

welcher die linke Seite der Gl. (2) mit Null erfüllt, während eine homogene Zusatzlösung bei Voraussetzung geradebleibender Ränder bezüglich der Deformation in der Stegblechebene außer Ansatz bleibt. Die partikuläre Lösung der Spannungsfunktion wird in bekannter Weise mittels Koeffizientenvergleich abgeleitet.

Multiplikation der Gl. (1) jeweils mit einer Ansatzfunktion und Integration über den Bereich liefert die GALERKINsche Gleichung zur Bestimmung der in ρ indizierten Beulkomponenten $C[\rho]$ bzw. der Gesamtausbeulung $D[\rho] = C[\rho] + V[\rho]$.

$$\begin{aligned}G[\chi] = &\sum_\rho C[\rho]\,\alpha[\rho,\chi] + \sum_\rho D[\rho]\,(\beta[\rho,\chi] + \beta_0[\rho,\chi])\\ &+ \sum_\rho\sum_\mu\sum_\nu (D[\rho]\,D[\mu] - V[\rho]\,V[\mu])\,D[\nu]\,\gamma[\rho,\mu,\nu] = 0.\end{aligned} \tag{10}$$

Hierin sind die bei Produktbildungen auftretenden Indizes entsprechend $m,n \to \rho$ $i,j \to \mu$ $r,s \to \nu$ $p,q \to \chi$ stellvertretend ersetzt. Die auftretenden Integrale, sämtlich geschlossen lösbar, werden in einer ALGOL-orientierten

Schreibweise bezeichnet, wobei auf eine Charakterisierung der jeweils eindeutig festgelegten Terme $\sin p\pi\xi$ bzw. $\sin q\pi\eta$ verzichtet wird.

Die Bezeichnungen s und c charakterisieren sin- bzw. cos-Funktionen, denen die Halbwellenzahlen m bzw. n usw., ggf. geklammert, beigefügt werden. Durch x oder y werden im Integranden auftretende Faktoren ξ bzw. η zum Ausdruck gebracht. Es gilt dann

$$I\,s\,m = \int_0^1 \sin m\pi\xi \sin p\pi\xi\, d\xi, \qquad I\,s\,n = \int_0^1 \sin n\pi\eta \sin q\pi\eta\, d\eta,$$

$$I\,c\,m = \int_0^1 \cos m\pi\xi \sin p\pi\xi\, d\xi, \qquad I\,c\,n = \int_0^1 \cos n\pi\eta \sin q\pi\eta\, d\eta,$$

$$I\,s\,1\,c\,s = \int_0^1 \sin 1\pi\eta \cos s\pi\eta \sin q\pi\eta\, d\eta,$$

$$I\,c\,m\,x = \int_0^1 \cos m\pi\xi \sin p\pi\xi\,\xi\, d\xi, \qquad \text{usw.}$$

Die indizierten Hilfsgrößen in den GALERKINschen Gleichungen lauten dann

$$\alpha[\rho,\chi] = (\bar{K}_x m^4 + 2\alpha^2 \bar{K}_{xy} m^2 n^2 + \alpha^4 \bar{K}_y)\, I\,s\,m \cdot I\,s\,n, \tag{10a}$$

$$\begin{aligned}\beta[\rho,\chi] &= \sigma_x^*(\eta=0)\,\alpha^2 m^2 (I\,s\,m \cdot I\,s\,n - \zeta \cdot I\,s\,m \cdot I\,s\,n\,y)\\ &\quad + \sigma_y^*(\xi=0)\,\alpha^4 n^2 (I\,s\,m \cdot I\,s\,n - \Theta \cdot I\,s\,m\,x \cdot I\,s\,n)\\ &\quad + 2\tau^*\alpha^3 m n \cdot I\,c\,m \cdot I\,c\,n,\end{aligned} \tag{10b}$$

$$\begin{aligned}\beta_0[\rho,\chi] &= 12(1-\mu^2)\,\alpha^2 \left(\frac{b}{t}\right)^2 \frac{\sigma_F}{E}\,\frac{1}{\pi^2}\Bigg\{\frac{\epsilon_1 m^2}{8(1+2\vartheta_y)}[\vartheta_x(3\cdot I\,s\,m\cdot I\,s\,1\,s\,n\\ &\quad - 9\cdot I\,s\,m\cdot I\,s\,3\,s\,n - 3\cdot I\,c\,2\,s\,m\cdot I\,s\,1\,s\,n + 9\cdot I\,c\,2\,s\,m\cdot I\,s\,3\,s\,n)\\ &\quad + \vartheta_y(4\cdot I\,s\,3\,s\,n\cdot I\,c\,2\,s\,n - 12\cdot I\,s\,1\,s\,m\cdot I\,c\,2\,s\,n)\\ &\quad + \vartheta_x\vartheta_y(9\cdot I\,s\,1\,s\,m\cdot I\,s\,1\,s\,n - 27\cdot I\,s\,1\,s\,m\cdot I\,s\,3\,s\,n - 3\cdot I\,s\,3\,s\,m\cdot I\,s\,1\,s\,n\\ &\quad + 9\cdot I\,s\,3\,s\,m\cdot I\,s\,3\,s\,n - 4\cdot I\,s\,m\cdot I\,c\,2\,s\,n + 4\cdot I\,c\,2\,s\,m\cdot I\,c\,2\,s\,n)]\\ &\quad + \frac{\epsilon_2\alpha^2 n^2}{8(1+2\vartheta_x)}[\vartheta_x(4\cdot I\,c\,2\,s\,m\cdot I\,s\,3\,s\,n - 12\cdot I\,c\,2\,s\,m\cdot I\,s\,1\,s\,n)\\ &\quad + \vartheta_y(3\cdot I\,s\,1\,s\,m\cdot I\,s\,n - 9\cdot I\,s\,3\,s\,m\cdot I\,s\,n - 3\cdot I\,s\,1\,s\,m\cdot I\,c\,2\,s\,n\\ &\quad + 9\cdot I\,s\,3\,s\,m\cdot I\,c\,2\,s\,n) + \vartheta_x\vartheta_y(9\cdot I\,s\,1\,s\,m\cdot I\,s\,1\,s\,n -\\ &\quad 27\cdot I\,s\,3\,s\,m\cdot I\,s\,1\,s\,n - 3\cdot I\,s\,1\,s\,m\cdot I\,s\,3\,s\,n + 9\cdot I\,s\,3\,s\,n\cdot I\,s\,3\,s\,n\\ &\quad - 4\cdot I\,c\,2\,s\,m\cdot I\,s\,n + 4\cdot I\,c\,2\,s\,m\cdot I\,c\,2\,s\,n)]\\ &\quad - \frac{2\epsilon_2\alpha^2 m n}{8(1+2\vartheta_x)}[\vartheta_x(6\cdot I\,s\,2\,c\,m\cdot I\,c\,1\,c\,n - 6\cdot I\,s\,2\,c\,m\cdot I\,c\,3\,c\,n)\\ &\quad + \vartheta_y(6\cdot I\,c\,1\,c\,m\cdot I\,s\,2\,c\,n - 6\cdot I\,c\,3\,c\,m\cdot I\,s\,2\,c\,n)\\ &\quad + \vartheta_x\vartheta_y(9\cdot I\,c\,3\,c\,m\cdot I\,c\,3\,c\,n - 9\cdot I\,c\,3\,c\,m\cdot I\,c\,1\,c\,n - 9\cdot I\,c\,1\,c\,m\cdot I\,c\,3\,c\,n\\ &\quad + 9\cdot I\,c\,1\,c\,m\cdot I\,c\,1\,c\,n + 4\cdot I\,s\,2\,c\,m\cdot I\,s\,2\,c\,n]\\ &\quad - \epsilon_0 m^2 [I\,s\,m\cdot I\,s\,n + k_1\cdot I\,s\,m\cdot I\,s\,1\,s\,n + k_2\cdot I\,s\,m\cdot I\,s\,3\,s\,n]\Bigg\},\end{aligned} \tag{10c}$$

$$\gamma[\rho,\mu,\nu] = 12(1-\mu^2)\,\alpha^2 \sum_\sigma f[\sigma]\, F[\rho,\mu,\nu,\sigma], \tag{10d}$$

wobei noch gilt

$$f[\sigma] = \frac{\alpha^2}{4} \frac{m n i j - \omega_1[\sigma]\,\omega_2[\sigma]\,m^2 j^2}{\bar{S}_x(m+\omega_1[\sigma]\,i)^4 + 2\alpha^2 \bar{S}_{xy}(m+\omega_1[\sigma]\,i)^2(n+\omega_2[\sigma]\,j)^2 + \alpha^4 \bar{S}_y(n+\omega_2[\sigma]\,j)^4},$$

$$\begin{aligned} F[\rho,\mu,\nu,\sigma] = {} & \{(m+\omega_1[\sigma]\,i)^2 s^2 + (n+\omega_2[\sigma]\,j)^2\}\, I\,c\,(m+\omega_1[\sigma]\,i)\,s\,r \\ & \cdot I\,c\,(n+\omega_2[\sigma]\,j)\,s\,(s) + (m+\omega_1[\sigma]\,i)\,(n+\omega_2[\sigma]\,j)\,r\,s \\ & \cdot I\,s\,(m+\omega_1[\sigma]\,i)\,c\,r \cdot I\,s\,(n+\omega_2[\sigma]\,j)\,c\,(s) \end{aligned}$$

mit der Vorzeichenzuordnung

	$\sigma=1$	2	3	4
$\omega_1[\sigma]$	-1	-1	$+1$	$+1$
$\omega_2[\sigma]$	-1	$+1$	-1	$+1$

Da sich die Randversteifungsglieder der Platte an der Kraftübertragung beteiligen, wäre eine exakte Befriedigung der Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen an den Rändern wünschenswert. Da der Programmierungsaufwand hierdurch bei Einarbeitung von Korrekturtermen der Spannungsfunktion erheblich anwächst, wird nach dem Vorgehen von DJUBEK und KODNAR [11] lediglich eine mittlere Verträglichkeit von Dehnung des jeweiligen Randgliedes (Gurt bzw. Pfosten) und des anliegenden Plattenrandstreifens längs der Kontaktlinie gefordert. Werden NAVIERsche Randbedingungen nicht beibehalten, so erscheint es bei allgemeineren Belastungsfällen unmöglich, Ansatzfunktionen des GALERKINschen Typs bei Befriedigung der dynamischen Randbedingungen bereitzustellen. Das energetische Verfahren oder auch diskontinuierliche Berechnungsmethoden verdienen dann den Vorzug. Bezüglich der Äquivalenz beider Verfahren im Falle der frei drehbaren Plattenauflagerung vgl. die Arbeiten von KROMM und MARGUERRE [1] sowie KODNAR [7]. Die «mittlere» Erfüllung der erwähnten Randbedingungen führt nach einigen Rechnungen auf die Zuordnung der Randspannungen für die Membranlösung und die überkritischen Schnittkräfte nach Fig. 1 entsprechend den 4 Bestimmungsgleichungen ($\sigma_x^* = \sigma_x/\sigma_E$, $\sigma_y^* = \sigma_y/\sigma_E$ usw.)

$$\sigma_x^*(\eta=0)\,\delta_{a1} + \sigma_x^*(\eta=1)\,\delta_{a2} + \sigma_y^*(\xi=0)\,\delta_{a3} + \sigma_y^*(\xi=1)\,\delta_{a4} = \delta_{a0} \qquad (11)$$

mit den Koeffizienten δ_{ak}, wobei gilt $F_x = F_g + F_g' + b\,t$, $F_y = F_p + F_p' + a\,t$

$$\delta_{11} = \frac{F_g}{F_x}\frac{E}{E_x} + \frac{1}{2}\frac{b\,t}{F_x}, \qquad \delta_{12} = \frac{F_g'}{F_x}\frac{E}{E_x} + \frac{1}{2}\frac{b\,t}{F_x},$$

$$\delta_{13} = -\frac{F_g + F_g'}{F_x}\frac{E}{E_y}\frac{\mu_y}{2}, \qquad \delta_{14} = \delta_{13},$$

$$\delta_{21} = -\frac{F_p + F_p'}{F_y}\frac{E}{E_x}\frac{\mu_x}{2}, \qquad \delta_{22} = \delta_{21},$$

$$\delta_{23} = \frac{F_p}{F_y}\frac{E}{E_y} + \frac{1}{2}\frac{a\,t}{F_y}, \qquad \delta_{24} = \frac{F_p'}{F_y}\frac{E}{E_y} + \frac{1}{2}\frac{a\,t}{F_y},$$

$$\delta_{31} = \frac{F_g}{F_x}\frac{E}{E_x}\frac{b_1}{b} + \frac{1}{3}\frac{bt}{F_x}\left(\frac{b_1}{b} - \frac{1}{2}\frac{b_2}{b}\right), \quad \delta_{32} = -\frac{F_g'}{F_x}\frac{E}{E_x}\frac{b_2}{b} - \frac{1}{3}\frac{bt}{F_x}\left(\frac{b_2}{b} - \frac{1}{2}\frac{b_1}{b}\right),$$

$$\delta_{33} = -\frac{1}{2}\left(\frac{F_g}{F_x}\frac{b_1}{b} - \frac{F_g'}{F_x}\frac{b_2}{b}\right)\frac{E}{E_y}\mu_y, \qquad \delta_{34} = \delta_{33},$$

$$\delta_{41} = -\frac{1}{2}\left(\frac{F_p}{F_y}\frac{a_1}{a} - \frac{F_p'}{F_y}\frac{a_2}{a}\right)\frac{E}{E_x}\mu_x, \qquad \delta_{42} = \delta_{41},$$

$$\delta_{43} = \frac{F_p}{F_y}\frac{E}{E_y}\frac{a_1}{a} + \frac{1}{3}\frac{at}{F_y}\left(\frac{a_1}{a} - \frac{1}{2}\frac{a_2}{a}\right), \quad \delta_{44} = -\frac{F_p'}{F_y}\frac{E}{E_y}\frac{a_2}{a} - \frac{1}{3}\frac{at}{F_y}\left(\frac{a_2}{a} - \frac{1}{2}\frac{a_1}{a}\right),$$

$$\delta_{10} = \frac{-P}{F_x\sigma_E} + \frac{1{,}5\,(1-\mu^2)}{\alpha^2}\frac{F_g + F_g'}{F_x}\sum_m\sum_n m^2\,(D_{mn}^2 - V_{mn}^2),$$

$$\delta_{20} = 1{,}5\,(1-\mu^2)\frac{F_p + F_p'}{F_y}\sum_m\sum_n n^2\,(D_{mn}^2 - V_{mn}^2),$$

$$\delta_{30} = \frac{-M}{\sigma_E F_x b} + \frac{1{,}5\,(1-\mu^2)}{\alpha^2}\left(\frac{F_g}{F_x}\frac{b_1}{b} - \frac{F_g'}{F_x}\frac{b_2}{b}\right)\sum_m\sum_n m^2\,(D_{mn}^2 - V_{mn}^2)$$
$$+\frac{12\,(1-\mu^2)}{\pi^2}\frac{bt}{F_x}\sum_m\sum_n\sum_j (D_{mn}D_{mj} - V_{mn}V_{mj})\,(k\,[1] + k\,[2])_{m=i}\,[1-(-1)^{n+j}],$$

$$\delta_{40} = 1{,}5\,(1-\mu^2)\left(\frac{F_p}{F_y}\frac{a_1}{a} - \frac{F_p'}{F_y}\frac{a_2}{a}\right)\sum_m\sum_n n^2\,(D_{mn}^2 - V_{mn}^2)$$
$$+\frac{12\,(1-\mu^2)}{\alpha\,\pi^2}\frac{bt}{F_y}\sum_m\sum_n\sum_i (D_{mn}D_{in} - V_{mn}V_{in})\,(k\,[1] + k\,[3])_{n=j}\,[1-(-1)^{m+i}].$$

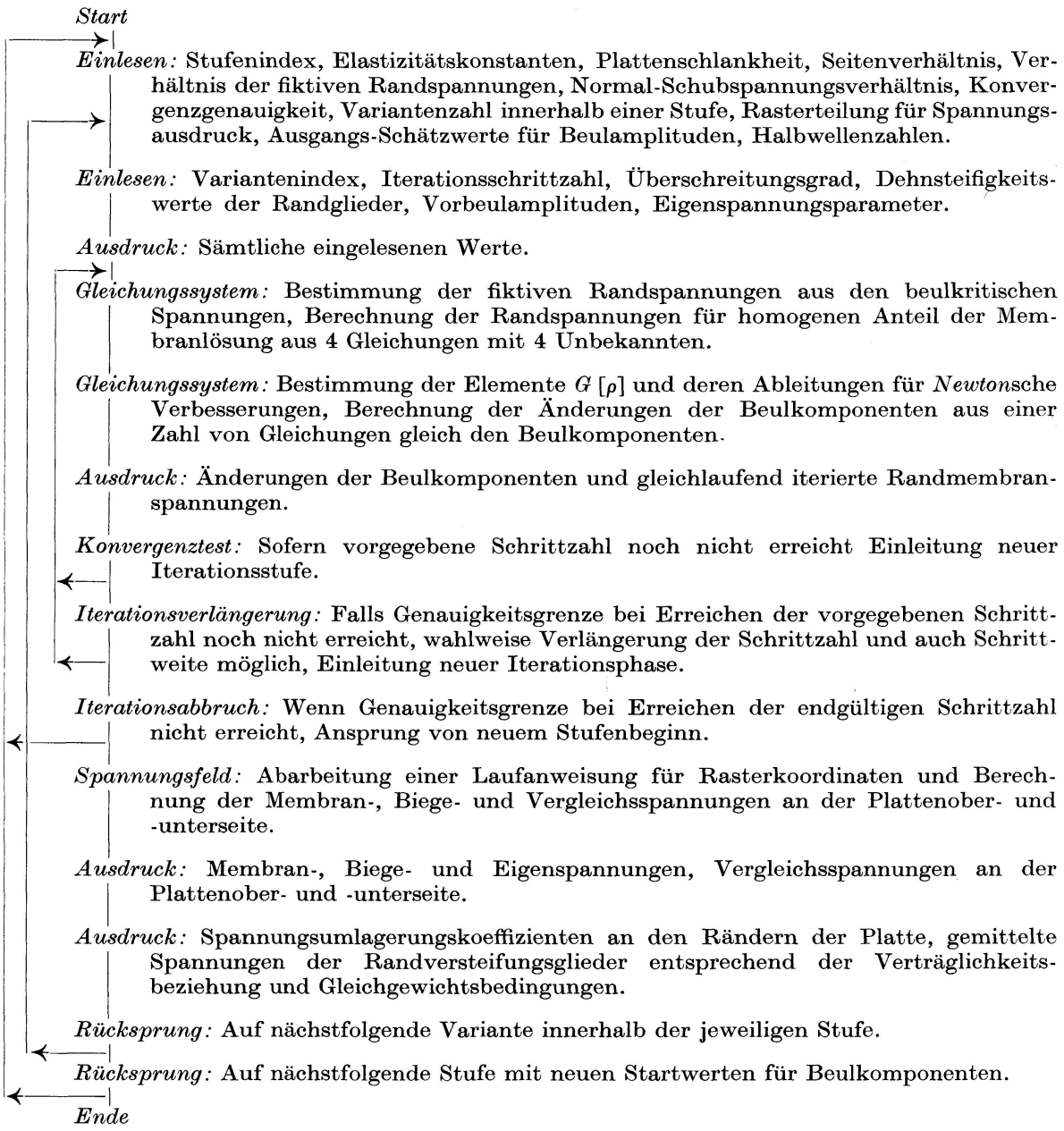
3. Rechenprogramm

Ausgehend von der Verzweigungslast des vorgegebenen Beulfeldes unter der kombinierten Belastung des Systems Stegblech-Gurtung bei NAVIERschen Randbedingungen (z. B. Beulvorschriften oder Tafeln nach KLÖPPEL-SCHEER [4]) werden die fiktiven Schnittkräfte des überkritischen Bereiches bei Einschaltung des vorzugebenden Überschreitungsgrades als «gemittelte» Werte bestimmt. Die Randschubkräfte $\tau = Q/bt$ gelten längs der Berandung als konstant. Die für die Beulberechnung der Platte maßgebenden Randmembranspannungen σ_x^* usw. lassen sich dann innerhalb eines Iterationszyklus mit 4 Unbekannten bestimmen, wenn jeweils die Beulamplituden des vorhergehenden Schrittes vorliegen. Die GALERKINschen Gleichungen werden vorteilhaft nach der Methode NEWTONS aufgelöst, wenn die Startwerte von den Zielwerten nicht zu weit entfernt liegen. Die jeweils verbesserten Beulamplituden folgen aus

$$\sum \Delta C\,[\mu]\frac{\partial G\,[\rho]}{\partial C\,[\mu]} = G\,[\rho], \qquad \mu = 1 \ldots \rho, \tag{12}$$

$$C\,[\mu] + \Delta C\,[\mu] \to C\,[\mu]. \tag{13}$$

Tafel 1. Grobflußdiagramm zur Berechnung der überkritischen Spannungsumlagerungen



Für eine Genauigkeitsschranke $\Delta C = 0{,}00001$ war die Konvergenz mit etwa 3 bis 8 Schritten erreicht. In einigen Fällen, wo die maßgebende Nullstelle der GALERKINschen Gleichungen infolge alternierender Divergenz nicht eingeengt werden konnte, führte eine halbe Schrittweite bei der Verbesserung zum Ziel. Das Rechenprogramm wurde daher für einen Iterationszyklus mit variabel steuerbarer Schrittweite aufgestellt. Nach Berechnung der Beulamplituden erfolgte die Aufrechnung der Membran-, Biege- und Vergleichsspannungen an der Plattenober- und -unterseite für einen beliebig zu wählenden Raster, etwa mit einer 0,2-Teilung für Breite und Höhe der Platte. Die Beschränkung der Hauptspeicherplätze des Digitalrechners NE 503 zwang angesichts des relativ

umfassenden Programms zu einer 5maligen Segmentierung bei Inanspruchnahme der Zusatzkernspeicher. Die Grobstruktur des Flußdiagramms ist aus der Tafel 1 ersichtlich.

4. Einige Auswertungsergebnisse

Bei der Begrenzung der Zahl von Beulparametern zur Approximation der tatsächlichen Beulfigur, die bei jeweils variabler Vorgabe aus praktischen Erwägungen mit 7 erfolgt, sind beulgefährdete Bleche größerer Seitenverhältnisse wegen der zunehmenden Halbwellenzahlen, besonders in der Längsrichtung, schwierig zu erfassen. Überdies ist die Konstanz des Momentes nur bei kleineren α-Verhältnissen in guter Annäherung erfüllt. Bei längeren Platten dürfte die überkritische Tragreserve wegen ungenügender Quersteifungswirkung ohnehin abfallen. Eine Erfassung der Beulfigur setzt hier voraus, daß die Periodizität der Faltung bei Annahme der ungünstigen maximalen und konstanten Biege- und Schubkräfte erkannt wird. Aus diesen Gründen beschränken sich die vorliegenden Ergebnisse zunächst auf Fälle mit $\alpha = 1$ bzw. 2, können aber bei dem vorliegenden Programm auf beliebige Seitenverhältnisse erweitert werden.

Wie in Abschnitt 5 ausführlicher dargelegt wird, interessieren im Rahmen dieser Arbeit vor allem die Faktoren, welche die Erhöhung der fiktiven überkritischen Nennspannungen (bei Ausschaltung des überkritischen Beuleffekts) nun infolge dieser Ausbeulung erfahren. Dabei wird die im Beulfeld auftretende größte vom Überschreitungsgrad ξ_b abhängige Vergleichsspannung, unter Berücksichtigung der Membran-, Biege- und ggf. Eigenspannungsanteile, auf die maximale und ortsmäßig fixierte Vergleichsspannung des beulkritischen Zustandes mit $\xi_b = 1$ wie folgt bezogen

$$\sigma_{V(max)}(\xi_b) = \sigma_{VKi(max)}(\xi_b = 1)\, \xi_b\, f_{GV}\,.$$

Gleicherart gilt für die Erhöhung der beulkritischen Nennspannungen im Druckgurt

$$\sigma_g(\xi_b) = \sigma_g(\xi_b = 1)\, \xi_b\, k_{GV}\,, \qquad \sigma'_g(\xi_b) = \sigma'_g(\xi_b = 1)\, \xi_b\, k'_{GV}\,.$$

Die Spannungsumlagerungen im Zuggurt zeigen eine geringe abbauende Tendenz und werden nicht gesondert betrachtet. Im Falle vorwiegender Schubbeanspruchung verlieren die «Spannungsmultiplikatoren» k_{GV} an Bedeutung, da die beulkritische Bezugsgröße als Normalspannung nicht existiert. Nach dem Vorgehen von Djubek und Kodnar [11] ist die überkritische Gurtspannung dann auf die fiktive Schubnennspannung entsprechend

$$\sigma_g(\xi_b) = \tau_{Ki}(\xi_b = 1)\, \xi_b\, k_s\,, \qquad \sigma'_g(\xi_b) = \tau_{Ki}(\xi_b = 1)\, \xi_b\, k'_s$$

zu beziehen.

Eine Betrachtung des Einflusses der Randversteifungsglieder läßt erkennen, daß die Spannungsmultiplikatoren gewissen Abminderungsbeziehungen genügen. Da die Reduktionen erst im überkritischen Zustand wirksam werden, empfiehlt es sich zunächst ohne Berücksichtigung des Vorbeulungs- und Eigenspannungseinflusses anzusetzen

$$f_G = 1+(f_g-1)\,\delta_G, \qquad k_G = 1+(k_g-1)\,\gamma_G, \qquad k'_G = 1+(k'_g-1)\,\gamma'_G,$$

wobei f bzw. k die vom Überschreitungsgrad abhängigen «Grundwerte» mit $F_g/bt = F'_g/bt = 0$; $F_p/at = F'_p/at = 0$ darstellen. Die «Korrekturkoeffizienten» durch den Index (G) auf Gurtungseinfluß hinweisend, sind demnach für den Überschreitungsgrad $\xi_b = 1$ ebenfalls 1 und hängen von den bezogenen Gurt- bzw. Pfosten-Dehnsteifigkeiten, dem Platten-Seitenverhältnis und dem fiktiven überkritischen Spannungsbild ab. Im Sonderfall des fiktiven konstanten Druckes, bei welchem für den Fall langer Blechabmessungen die Faltung mit quadratischem Raster $\alpha_0 = 1$ erfolgt, gelten die Werte nach Fig. 2. Bei reiner Biegung stellt sich im Falle langer Platten eine Periodizität der Beulfigur mit

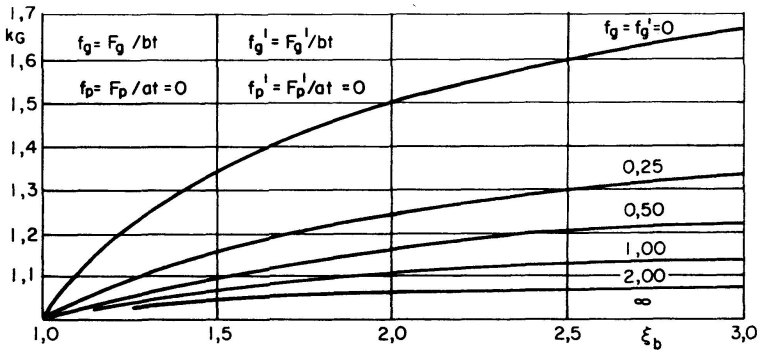


Fig. 2. Spannungsmultiplikator k_G einer quadratischen Platte unter einachsigem Druck in Abhängigkeit des Überschreitungsgrades ξ_b und der Randversteifung $f_g = f'_g$.

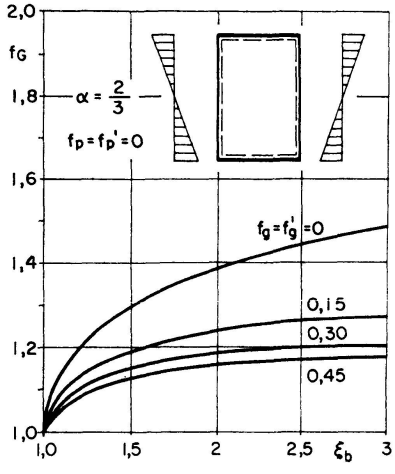


Fig. 3. Vergleichsspannungsmultiplikator f_G abhängig vom Überschreitungsgrad und der Randversteifung.

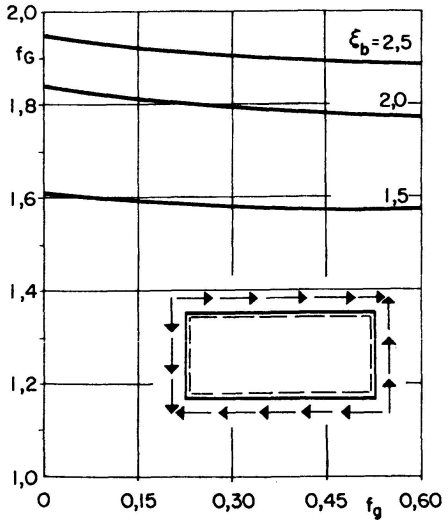


Fig. 4. Vergleichsspannungsmultiplikator f_G bei schubbeanspruchter Platte mit $a/b = 2$.

$\alpha_0 = 2/3$ ein. Das Feld mit den Abmessungen $\alpha = 2$ läßt daher 3 Halbwellen in der Längsrichtung im Bereich kleinerer Überschreitungsgrade erwarten. Die Spannungsmultiplikatoren f sind in Fig. 3 angegeben.

Bemerkenswert sind die aus Tafel 2 ersichtlichen Invarianzeigenschaften der Korrekturbeiwerte innerhalb gewisser Bereiche. Erwartungsgemäß wird die Vergleichsspannung in Abhängigkeit der Gurtsteifigkeiten am meisten für fiktiven konstanten Druck ($\psi = 1$) und auch reine Biegung ($\psi = -1$) reduziert. Bei reinem Schub verändern sich die Werte relativ wenig. Man kann daher in Annäherung für verschiedene κ-Verhältnisse zwischenschalten. (Vgl. auch Fig. 4 und Fig. 11.)

Die Multiplikatoren γ_G, die wegen der Bezugnahme auf fiktive Normalspannungen nur bei nicht zu kleinen Normal-Schub-Spannungsverhältnissen Bedeutung erlangen (etwa $\kappa > 1$), sind bei reiner Biegung auch näherungsweise vom Überschreitungsgrad unabhängig. Sie können ebenfalls nach der sicheren Seite hin eingeschrankt werden.

Würden die überkritischen Gurt- und Pfostenspannungen auf die maximale fiktive Vergleichsspannung oder «Nennspannung» des überkritischen Bereiches bezogen, so wäre die Unterscheidung in Teilbereiche mit starkem und schwächerem Schubanteil belanglos. Da aber mit Rücksicht auf das in der Bemessungspraxis gut eingebürgerte Verhältnis der «mitwirkenden Breite» (im Falle $\psi = 1$, $\kappa = \infty$ entspricht $b_m/b = 1/k_{GV}$) die Spannungsumlagerung der Randnormalspannung im allgemeinen zugeordnet wird, ist im Falle reinen Schubes ($\kappa = 0$), wie bereits von DJUBEK und KODNAR [11] ausgeführt, auf die Nennschubspannung entspr. Gl. (16) zu beziehen. Bei Einfluß von Randsteifigkeiten, welche in den durchgeführten Rechnungen mit $f_g = f'_g \neq 0$, $f_p = f'_p = 0$ berücksichtigt wurden, gelten bspw. die reduzierten Werte entsprechend

$\alpha = 2$	$k_s = 0{,}102$	φ^s_G		$\alpha = 2$	$k_s = 0{,}272$	φ^s_G	
$\kappa = 0$	$f_g = 0{,}00$	1,00		$\kappa = 0$	$f_g = 0{,}00$	1,00	
$\xi_b = 1{,}5$	0,15	0,73		$\xi_b = 2{,}5$	0,15	0,72	
	0,30	0,57			0,30	0,56	
	0,45	0,47			0,45	0,46	
	0,60	0,36			0,60	0,34	

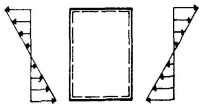
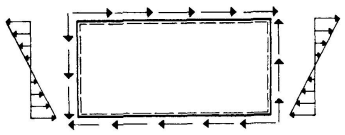
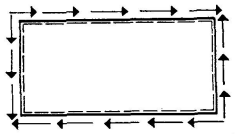
wobei hier abweichend von den anderweitigen Korrekturkoeffizienten gilt

$$f_{GV} = 1 + (f_G - 1)\,\delta_V = 1 + (f_g - 1)\,\delta_G\,\delta_V, \tag{19}$$

$$k_{GV} = 1 + (k_G - 1)\,\gamma_V = 1 + (k_g - 1)\,\gamma_G\,\gamma_V. \tag{20}$$

Die auf die Nennschubspannung des überkritischen Bereiches bezogenen Spannungsgrößen in den vertikalen Randgliedern mit $f_p = f'_p = 0$ ändern sich nur unwesentlich mit der Gurtsteifigkeit, sind aber im vorliegenden Falle kaum aussagekräftig.

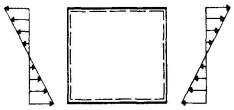
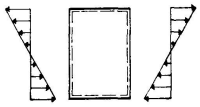
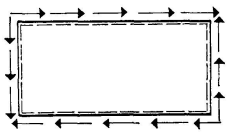
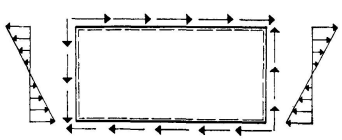
Tafel 2. Korrekturkoeffizienten in Abhängigkeit der Dehnsteifigkeit der Randglieder

System und Beulungstyp	System-parameter	Randversteifung	δ_G	γ_G
 $f_p = f_p' = 0$ $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{31}$	$\alpha = 2/3$ $\psi = -1$ $\kappa = \infty$ $\xi_b = 2$	$f_g = f_g' = 0{,}00$ $0{,}15$ $0{,}30$ $0{,}45$ $0{,}60$	1,00 0,62 0,49 0,43 0,41	1,00 0,49 0,33 0,25 0,22
	$\alpha = 2/3$ $\psi = -1$ $\kappa = \infty$ $\xi_b = 2{,}5$	$f_g = f_g' = 0{,}15$ $0{,}30$ $0{,}45$ $0{,}60$	0,58 0,44 0,38 0,35	0,48 0,33 0,25 0,22
	$\alpha = 2/3$ $\psi = -1$ $\kappa = \infty$ $\xi_b = 1{,}5$	$f_g = f_g' = 0{,}15$ $0{,}30$ $0{,}45$ $0{,}60$	0,64 0,52 0,44 0,39	0,49 0,33 0,26 0,23
 $f_p = f_p' = 0$ $C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{21}, C_{31}, C_{32}, C_{33}$	$\alpha = 2$ $\psi = -1$ $\kappa = 1{,}25$ $\xi_b = 2$	$f_g = f_g' = 0{,}15$ $0{,}30$ $0{,}45$ $0{,}60$	0,93 0,91 0,90 0,89	0,64 0,48 0,38 0,33
	$\alpha = 2$ $\psi = -1$ $\kappa = 5$ $\xi_b = 2{,}5$	$f_g = f_g' = 0{,}15$ $0{,}30$ $0{,}45$ $0{,}60$	0,85 0,80 0,76 0,88	0,59 0,43 0,33 0,28
	$\alpha = 2$ $\psi = -1$ $\kappa = 2{,}5$ $\xi_b = 1{,}5$	$f_g = f_g' = 0{,}15$ $0{,}30$ $0{,}45$ $0{,}60$	0,92 0,88 0,86 0,85	0,61 0,45 0,34 0,29
	$\alpha = 2$ $\psi = -1$ $\xi_b = 2{,}5$	$f_g = f_g' = 0{,}15$ $0{,}30$ $0{,}45$ $0{,}60$	0,89 0,84 0,81 0,80	0,62 0,46 0,36 0,34
 $f_p = f_p' = 0$ $C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{21}, C_{31}, C_{32}, C_{33}$	$\alpha = 2$ $\kappa = 0$ $\xi_b = 1{,}5$	$f_g = f_g' = 0{,}15$ $0{,}30$ $0{,}45$ $0{,}60$	0,97 0,95 0,94 0,94	— — — —
	$\alpha = 2$ $\kappa = 0$ $\xi_b = 2{,}5$	$f_g = f_g' = 0{,}15$ $0{,}30$ $0{,}45$ $0{,}60$	0,97 0,95 0,94 0,94	— — — —

Einige Einflüsse von Vorbeulungen auf den Spannungsmultiplikator f zeigen die Fig. 5, 6 und 7.

Die Berücksichtigung von jeweils ungünstig anzunehmenden Vorbeulungen soll derart erfolgen, daß die infolge Gurtversteifungen abgeminderten Spannungsmultiplikatoren sekundär eine Erhöhung erfahren. Mit dem Index (V)

Tafel 3. Korrekturkoeffizienten in Abhängigkeit des Vorbeulentyps

System und Beulungstyp entspr. Tafel 2	System-parameter	Vorbeulungstyp	δ_V	γ_V
 $f_g = f'_g = 0$ $f_p = f'_p = 0$	$\alpha = 1$ $\psi = 1$ $\kappa = \infty$ $\xi_b = 2$	$V_{11} = 0{,}00$	1,00	1,00
		0,50	1,21	1,25
		1,00	1,37	1,44
		1,50	1,48	1,60
	$\alpha = 1$ $\psi = 1$ $\xi_b = 3$	0,50	1,06	1,09
		1,00	1,13	1,18
		1,50	1,23	1,25
 $f_g = f'_g = 0$ $f_p = f'_p = 0$	$\alpha = 1$ $\psi = -1$ $\xi_b = 2$	0,50	1,21	1,28
		1,00	1,37	1,46
		1,50	1,49	1,62
		$V_{11} = 0{,}50$ $V_{12} = 0{,}50$	1,64	1,79
		1,00 1,00	2,00	2,32
		1,50 1,50	2,20	2,45
	$\alpha = 1$ $\psi = -1$ $\xi_b = 3$	0,50	1,07	1,09
		1,00	1,13	1,16
		1,50	1,21	1,22
		$V_{11} = 0{,}50$ $V_{12} = 0{,}50$	1,24	1,29
		1,00 1,00	1,35	1,44
		1,50 1,50	1,39	1,53
 $f_p = f'_p = 0$	$\alpha = 2/3$ $\psi = -1$ $\xi_b = 2{,}5$ $f_g = 0{,}3$	$V_{11} = 0{,}25$ $V_{12} = 0{,}125$	1,09	1,10
		0,50 0,25	1,17	1,19
		1,00 0,50	1,23	1,26
		1,50 0,75	1,27	1,31
	$\alpha = 2/3$ $\psi = -1$ $\xi_b = 2{,}5$ $f_g = 0{,}45$	$V_{11} = 0{,}25$ $V_{12} = 0{,}125$	1,09	1,10
		0,50 0,25	1,16	1,20
		1,00 0,50	1,45	1,31
		1,50 0,75	1,57	1,37
 $f_p = f'_p = 0$	$\alpha = 2$ $\xi_b = 1{,}5$ $f_g = 0{,}45$	$V_{11} = V_{22} = 0$ $V_{31} = 0{,}00$	1,00	—
		0,50 −0,25	1,29	—
		1,00 −0,50	1,45	—
		1,50 −0,75	1,52	—
	$\alpha = 2$ $\xi_b = 2{,}5$ $f_g = 0{,}45$	$V_{11} = V_{22} = 0$ $V_{31} = 0{,}00$	1,00	—
		0,50 −0,25	1,02	—
		1,00 −0,50	1,04	—
		1,50 −0,75	1,05	—
 $f_p = f'_p = 0$	$\alpha = 2$ $\kappa = 5$ $\xi_b = 1{,}5$ $f_g = 0$	$V_{11} = V_{22} = V_{21} = 0{,}50$	1,48	2,52
		1,00	1,57	3,07
		1,50	1,66	3,28
	$\alpha = 2$ $\kappa = 2{,}5$ $\xi_b = 2{,}5$ $f_g = 0{,}45$	$V_{11} = V_{22} = V_{21} = 0{,}50$	1,02	1,20
		1,00	1,08	1,32
		1,50	1,19	1,37

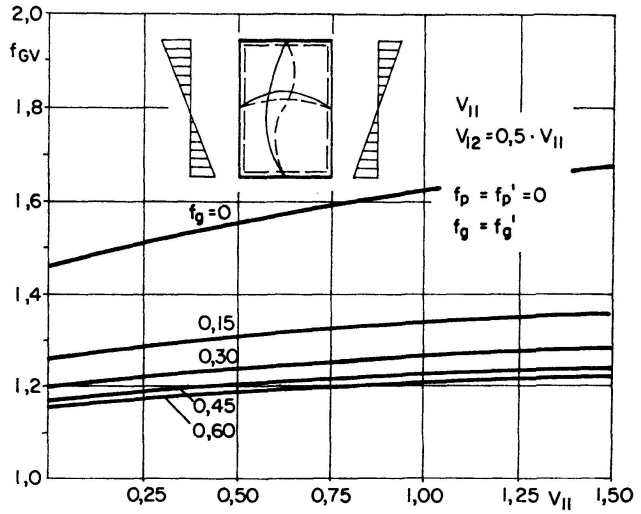


Fig. 5. Vergleichsspannungsmultiplikator f_{GV} bei verschiedenen Vorbeulkomponenten ($a/b=2/3$).

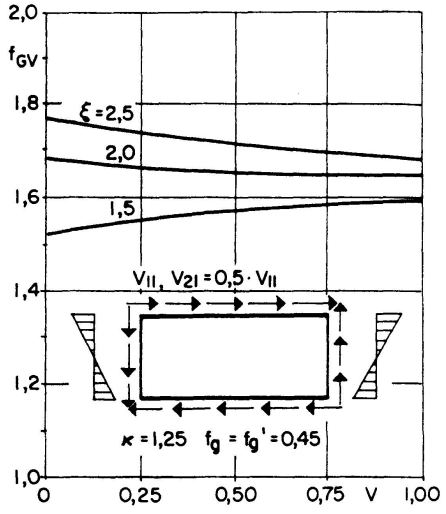


Fig. 6. Vergleichsspannungsmultiplikator f_{GV} bei verschiedenen Vorbeulkomponenten.

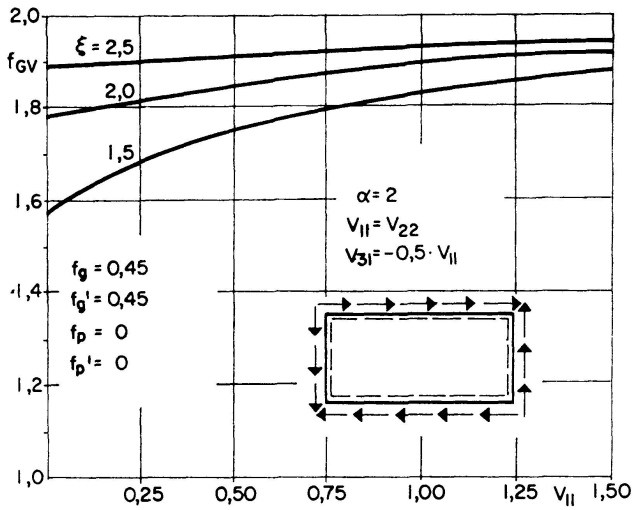


Fig. 7. Vergleichsspannungsmultiplikator f_{GV} bei verschiedenen Vorbeulkomponenten.

auf «Vorbeulung» hinweisend, gilt dann, wenn wieder auf Grundwerte bezogen wird (vgl. Tafel 3)

$$k_s(f_g=f_g'\neq 0) = k_s(f_g=f_g'=0)\,\varphi_G^s, \qquad k_s = k_s' \quad (\text{für } f_g=f_g';\ f_p=f_p'). \tag{18}$$

Wird ein Vorbeuleneinfluß nicht berücksichtigt, so lauten die Korrekturkoeffizienten $\delta_V=1$, $\gamma_V=1$. Liegen die Werte k oder f nahe bei 1, so werden bereits kleine Abweichungen infolge des Vorbeulungseinflusses durch relativ große δ- und γ-Werte zum Ausdruck gebracht. Für unterkritische Zustände sowie den Fall $\xi_b=1$ verliert daher dieses Vorgehen an Bedeutung. Die Vorbeulungen sind in ihrem Einfluß auf die maßgebenden Spannungen unterschiedlich. Für praktische Berechnungen erscheint es ausreichend, den Vor-

beulungstyp bei Beschränkung auf 3 den größten Beulamplituden etwa proportional zugeordnete Komponenten anzusetzen. Im Falle der reinen Biegung ist z. B. mit $V_{11} = 2\,V_{12}$ gegenüber $V_{12} = 0$ ein ungünstigerer Einfluß ersichtlich. Bei $\kappa = \infty$ sind die Faktoren δ_V für $\psi = 1$ und $\psi = -1$ etwa gleichermaßen von den entsprechenden Vorbeulkomponenten abhängig. Bemerkenswert ist auch die Verwandtschaft der γ_V-Werte bei unterschiedlichen Randversteifungen unter sonst gleichen Parametern ($\alpha = 2/3$, $\psi = -1$). Bei schub- oder biegeschubbeanspruchten Feldern liegen die δ_V-Werte für gleiche Überschreitungsgrade ebenfalls benachbart. Eine Vereinheitlichung der γ_V-Werte erscheint schwierig, da diese besonders bei kleinen k_g-Werten recht unterschiedlich sind. Jedoch läßt sich eine Einschrankung der γ_V-Werte in Abhängigkeit der effektiven Vorbeulamplitude und des Überschreitungsgrades nach Fig. 12 vornehmen, sofern keine genaueren Berechnungen durchgeführt werden.

Bei der Bewertung des Eigenspannungseinflusses interessieren vor allem die Erhöhungen der Vergleichsspannungen im Feldbereich. Da die Druckspannungstrajektorien bei der überkritischen Beulung in die steiferen Randzonen verstärkt einfließen, wirken die dort allgemein auftretenden Zugeigenspannungen abbauend. In der Zuggurtung oder den zugbeanspruchten Randstreifen kommt es zu einer Spannungserhöhung. Für den Fall des fiktiven konstanten Druckes ist in Fig. 8 die Erhöhung der Vergleichsspannung für einige Feldpunkte angegeben. Bei größeren Überschreitungen entsprechend größeren Ausbeulungen geht der Eigeneinspannungseinfluß merklich zurück.

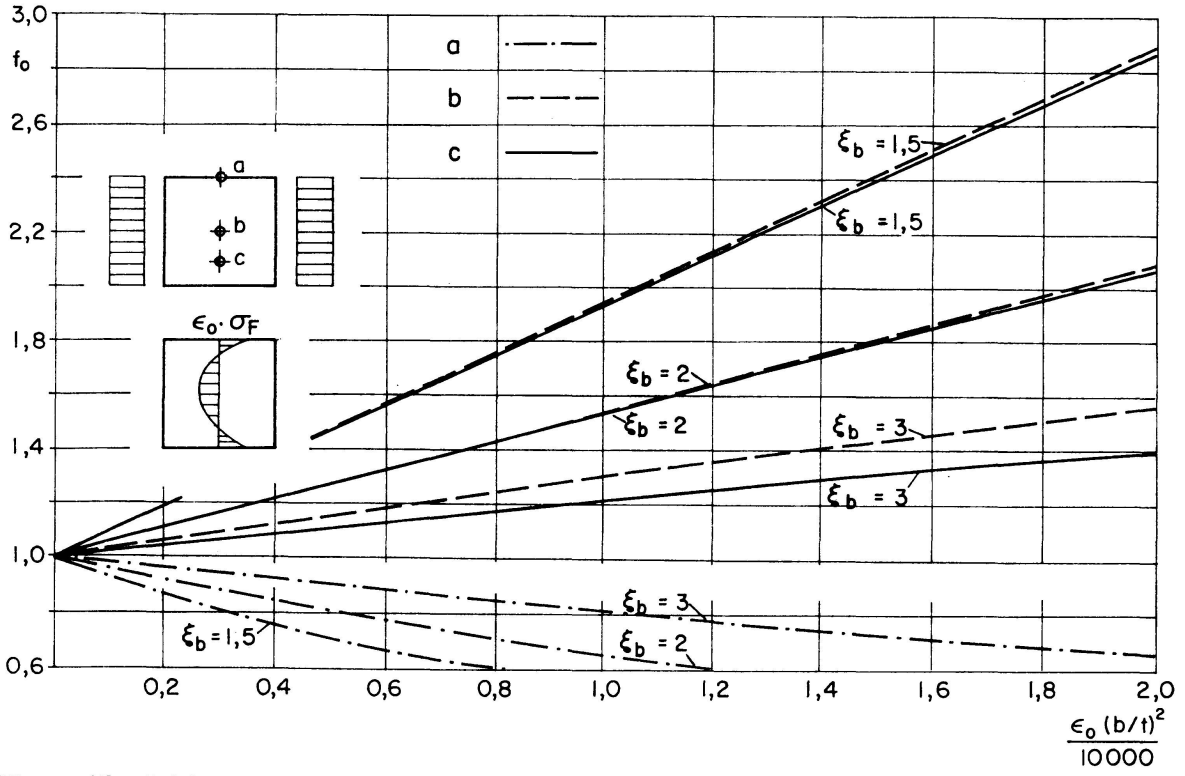


Fig. 8. Vergleichsspannungsmultiplikatoren f_0 in Abhängigkeit der Eigenspannungen und des Überschreitungsgrades ($\psi = 1$).

Da die beulkritische Spannung mit zunehmendem Schlankheitsverhältnis reduziert wird, steigen bei gleichen Überschreitungsgraden die vorspannungsabhängigen Vergleichsspannungen an. Fig. 9 zeigt die Abhängigkeit der Vergleichsspannungserhöhung bei einem quadratischen Feld unter reiner Biegung, wobei die Eigenspannung am Rand von doppeltem Betrag wie in Feldmitte

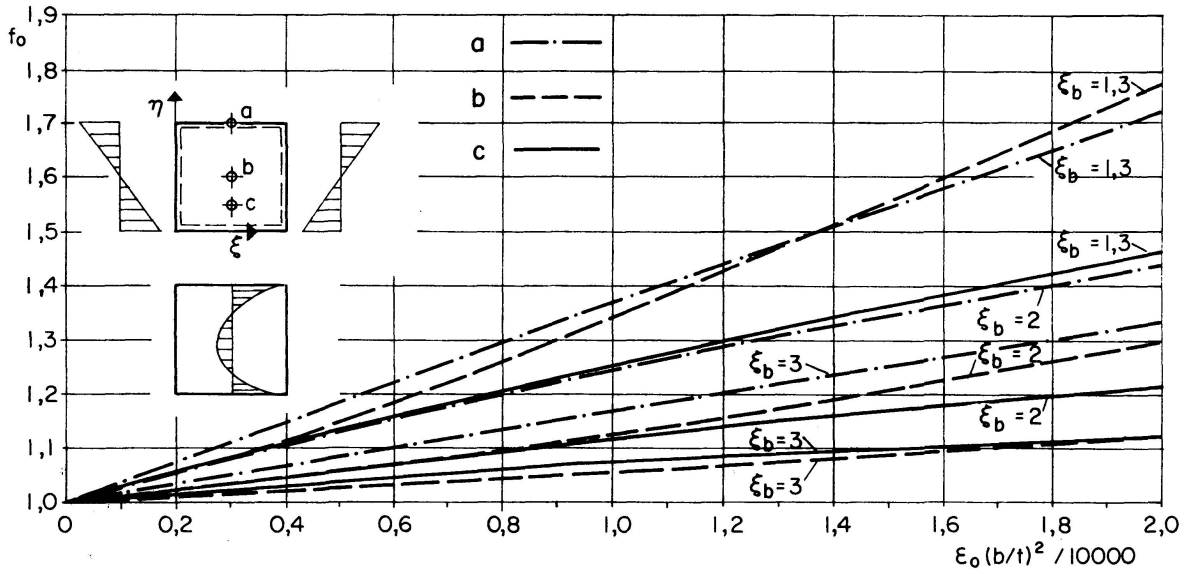


Fig. 9. Vergleichsspannungsmultiplikatoren f_0 in Abhängigkeit der Eigenspannungen und des Überschreitungsgrades ($\psi = -1$).

angesetzt wurde. Ein Vergleich derjenigen Werte, welche für die Parameter ϵ_0, ϵ_1, ϵ_2 sowie κ_0 und κ_1 bestimmt wurden, zeigt eine relativ gute Übereinstimmung der maximalen Vergleichsspannungen und damit auch der bezogenen Werte. So gilt bspw. auf die EULERspannung im Falle der 2fachen Überschreitung bezogen

	$\xi=0,\ \eta=0{,}25$	$\xi=0{,}5,\ \eta=0{,}5$	$\xi=0{,}5,\ \eta=1$
$\epsilon_1=\epsilon_2=0{,}5$ $\kappa_1=2$ $\psi=-1$	42,8	20,9	50,1
$\epsilon_0=0{,}5$ $\kappa_0=2$ $\psi=-1$	41,7	20,7	50,5

Schließlich gilt für ein anderes Verteilungsverhältnis der Eigenspannungen an den entsprechenden Feldpunkten

$\epsilon_1=\epsilon_2=0{,}5$ $\kappa_1=3$ $\psi=-1$	42,9	20,7	50,2

Es liegt daher nahe, den ohnehin schwierig zu erfassenden Verlauf der Eigenspannungen in brauchbarer Näherung einachsig, nämlich im Sinne des Eigenspannungsfeldes (A) anzunehmen. Ob ein solches vereinfachtes Vorgehen auch im Falle der schubbeanspruchten Platten statthaft ist, bedarf noch weiterer Untersuchungen.

5. Zur Bemessung beulgefährdeter Platten unter Ausnutzung überkritischer Tragreserven

Die Forschung auf dem Gebiete der überkritischen Beulung kann noch nicht als abgerundet gelten, da eine Reihe von Einflüssen, nämlich die Biegesteifigkeit und auch Torsionssteifigkeit der Randglieder bei Deformationen in und aus der Plattenebene, das Verhalten relativ langer Platten und das praktisch auftretende Bild der Eigenspannungsverteilungen, noch nicht genügend abgeklärt sind. Es erscheint z. Z. übereilt, die bewährte Bemessungsgrundlage,

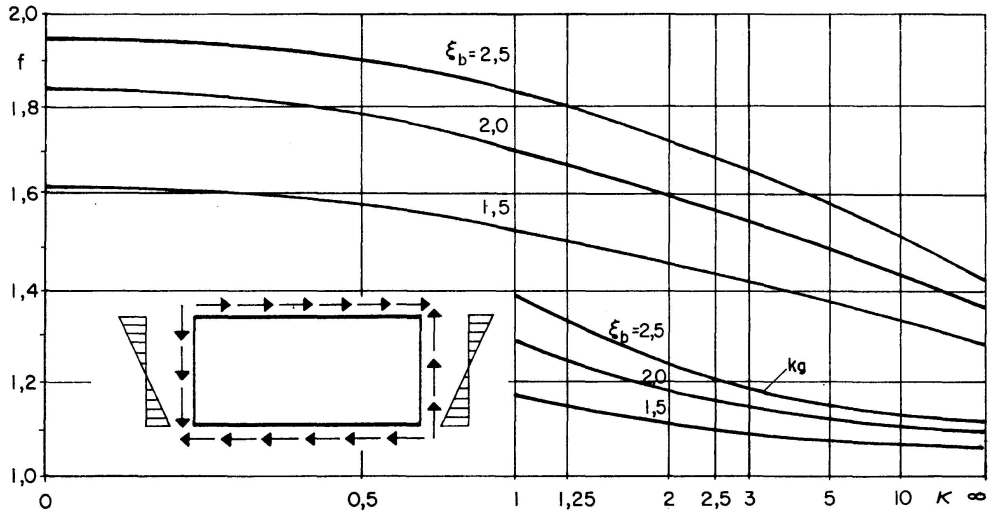


Fig. 10. Vergleichsspannungsmultiplikator f und Randspannungsmultiplikator k_g in Abhängigkeit des Normal-Schubspannungsverhältnisses κ ($a/b=2$).

beruhend auf der Konzeption der beulkritischen Spannungen, in der ganzen Breite der Bemessungspraxis des Stahlbaues generell zu verlassen um auf eine noch nicht ausreichend fundierte Traglast- bzw. Pseudotraglast-Theorie überzugehen. Da die im Stahlbau erst seit einigen Jahren breiter diskutierten Bemessungsfragen des überkritischen Bereiches ein schrittweises Überleiten ratsam erscheinen lassen, sollte etwa entsprechend der Konzeption MASSONNETS u. a. Forscher die Kenntnis der gröber einzuschrankenden Traglasten bzw. Pseudotraglasten des elastisch-plastischen bzw. elastischen Körpers in eine weitere Reduktion der bisher gebräuchlichen Sicherheitszahlen einfließen. Zur Beschreibung des hier betrachteten Pseudo-Traglast-Zustandes ist jeweils ein Überschreitungsgrad der beulkritischen Belastung zu bestimmen, für welchen

eine Fließspannungs-Ungleichung erfüllt werden kann und für welchen die Tragfähigkeit der Randglieder infolge der Spannungsumlagerungen verbürgt ist. Vgl. [6], [8], [12]. In dem hier der Theorie zugrunde gelegten Fall geradebleibender Ränder, bei welchen also eine genügende Biegesteifigkeit hinsichtlich der Deformationen in und aus der Plattenebene vorhanden ist, kann in Anlehnung an das bisherige Bemessungsverfahren wie folgt verfahren werden.

a) Verzweigungslast der gewöhnlichen Beulung

Für die Spannungs-Parameter $\psi = -1 \quad 0 < \kappa < \infty$ gilt unter der Voraussetzung der Überlagerung nach dem «Beulkreis» für die kombinierte kritische Normalspannung

$$\sigma_{Ki} = \frac{\sigma_E}{\sqrt{\frac{1}{k_\sigma^2} + \frac{1}{\kappa^2 k_\tau^2}}}$$

und die kombinierte kritische Schubspannung

$$\tau_{Ki} = \frac{\sigma_{Ki}}{\kappa}$$

worin bedeuten σ_E Eulerspannung des Beulfeldes,
k_σ Beulwert für reine Biegung,
k_τ Beulwert für reinen Schub.

Liegt die Beulvergleichsspannung σ_{VKi} oberhalb des elastischen Formänderungsbereiches, so ist in der althergebrachten Weise bei Abminderung der ideellen Beulvergleichsspannung zu bemessen. Für eine Beulvergleichsspannung unterhalb der Fließgrenze kann eine überkritische Reserve näherungsweise in Rechnung gestellt werden

b) Pseudo-Traglast des überkritischen Bereiches

Unter Zugrundelegung der Plattenschlankheit $\lambda = b/t$ kann eine maßgebende Vorbeulenamplitude, bezogen auf Blechstärke, z. B. aus der Fig. 14 entnommen werden. Die ungünstige Wirkung von Schweißeigenspannungen läßt sich stellvertretend durch eine Vergrößerung des Vorbeuleneinflusses abdecken, oder aber durch eine Vergrößerung der Spannungsmultiplikatoren, etwa entspr. Fig. 10 erfassen. Da der Faktor ϵ_0 das Verhältnis von Eigenspannung am Rand zur Fließspannung anzeigt, kann den praktischen Gegebenheiten entsprechend wenigstens eine technisch angenäherte Erfassung des Eigenspannungseinflusses vorgenommen werden. Mit zunehmender Schlankheit des Bleches sollte jedoch wegen dessen Verformungsnachgiebigkeit der Eigenspannungsparameter ϵ_0 relativ niedriger angesetzt werden. Quantitative Aussagen bedürfen hier noch weiterer theoretischer und auch experimenteller Untersuchungen.

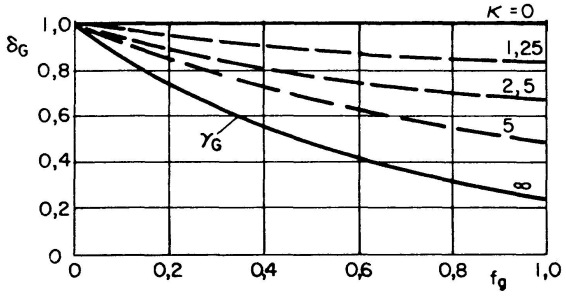


Fig. 11. Korrekturfaktoren δ_G und γ_G in Abhängigkeit der Randversteifung $f_g = f_g'$ $(a/b = 2)$.

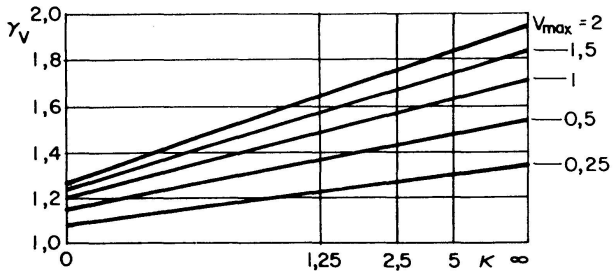


Fig. 12. Korrekturfaktor γ_V in Abhängigkeit des Normal-Schubspannungsverhältnisses κ mit $a/b = 2$.

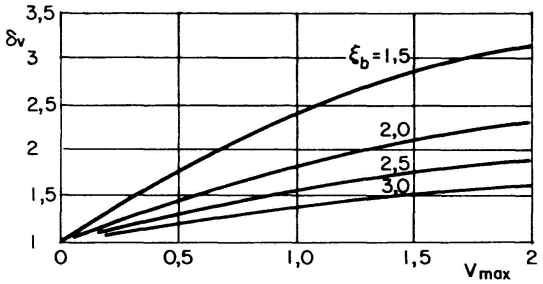


Fig. 13. Korrekturfaktor δ_V in Abhängigkeit der maximalen Vorbeulung.

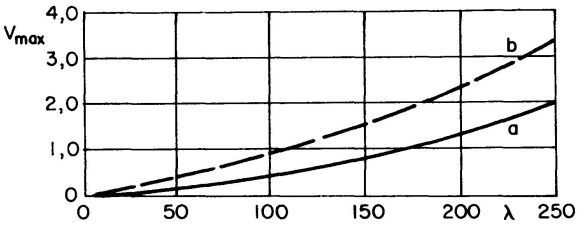


Fig. 14. Ungewollte Vorbeulung in Abhängigkeit des Plattenschlankheitsgrades $\lambda = b/t$.

a) Fall enger Toleranzbeschränkung.
b) Fall weiter Toleranzbeschränkung.

Bei Vorgabe eines Überschreitungsgrades der kombinierten beulkritischen Spannungen sind nun die Korrekturbeiwerte entsprechend den Fig. 11, 12 und 13 in die Ungleichungen

$$\sigma_{V(max)}(\xi_b) \leqq \sigma_F, \tag{23}$$

$$\sigma_g(\xi_b) \leqq \sigma_{g(Kr)}, \tag{24}$$

$$\sigma_g'(\xi_b) \leqq \sigma_{g(Kr)}' \tag{25}$$

bei Beachtung der Gl. (14) bis (18) einzusetzen. Die Grenzspannung $\sigma_{g(Kr)}$ gedrungener Randversteifungen entspricht etwa der Fließgrenze, andernfalls erfolgt eine Abminderung im Sinne des plastischen Knickens. Die Bindung an einen reduzierten «Sicherheitsgrad» kann nun derart erfolgen, daß mit zunehmender Überschreitung bis zum Erreichen der hier ausgewiesenen Pseudotraglast gesetzt wird

Pseudotraglast wird erreicht mit	ξ_b = 1,5	2,0	2,5
Reduzierte «Sicherheitszahl» der konventionellen Beulvorschriften			
Lastfall Hauptkräfte	ν_B = 1,25	1,20	1,10
Haupt- und Zusatzkräfte	ν_B = 1,17	1,10	1,00

Mit der weiteren Zuschärfung der Theorie, besonders der Erkenntnis des elastisch-plastischen Verhaltens im überkritischen Bereich, werden die so defi-

nierten «reduzierten» Sicherheitszahlen zugunsten der wirklichen Traglasten in den Hintergrund treten. Durch den Einsatz leistungsfähiger Digitalrechner dürfte es möglich sein, die zur Beschreibung der Beulfigur erforderliche Zahl von Beulkomponenten weiter zu erhöhen; für die Erkenntnis des wirklichen Grenzverhaltens gewinnen jedoch die Fließmechanismen besonders an Bedeutung.

Literatur

1. Kromm, A. und Marguerre, K.: Verhalten eines von Schub- und Druckkräften beanspruchten Plattenstreifens oberhalb der Beulgrenze. Luftfahrtforschung 1937, S. 629.
2. Kollbrunner, C. F. und Meister, M.: Ausbeulen. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958, S. 24.
3. Škaloud, M.: Berechnung der Stabilität von Wänden mit Anfangskrümmung. Acta Technica ČSSR 1959, Nr. 1.
4. Klöppel, K. und Scheer, J.: Beulwerte ausgesteifter Platten, Berlin 1960.
5. Basler, K. und Thürlimann, B.: Strength of plate girders in bending. Proc. A.S.C.E. Journ. Struct. Div. 1961, No. 6, 153.
6. Massonnet, Ch.: Kolloquium über Probleme der überkritischen Plattenbeulung an der Universität Lüttich, Mem. de la Soc. Royale d. Sciences de Liège, Cinq. Série, Tome VIII, Fasc. 5, Liège 1963.
7. Kodnar, R.: Die Äquivalenz der Methode Galerkins mit der Methode von Ritz für nichtlineare Operatoren. Z.A.M.M. 1964, Bd. 44, S. 579.
8. Standard ČSSN: Entwerfen von Stahlkonstruktionen. Navrovani ocelovych konstrukci – konecny narrh – CSN 731401.
9. Klöppel, K., Schmied, R. und Schubert, J.: Die Traglast mittig und außermittig gedrückter dünnwandiger Kastenträger unter Verwendung der nichtlinearen Beultheorie. Stahlbau 1966, S. 321.
10. Škaloud, M.: Grenzzustand gedrückter Gurtplatten dünnwandiger Träger. Acta Technica ČSAV, Nr. 6, 1965.
11. Djubek, J. und Kodnar, R.: Riesenie nelineárnych úloh teorie stihlych stien – Variacnými metódami. Vydavatel'stvo Slovenskej Akadémie Vied, Bratislava 1965.
12. Massonnet, Ch.: Dünnwandige hohe Blechträger, Vorbericht VIII. Kongreß der I.V.B.H., S. 178, Zürich 1968.

Zusammenfassung

Für frei drehbar gelagerte Platten wird der programmierte Algorithmus zur Berechnung der Vergleichsspannungen sowie der mittleren Spannungen in den geradebleibenden Randelementen mitgeteilt. Die Multiplikatoren für die Erhöhung der überkritischen Nennspannungen im Plattenfeld und den Randelementen zeigen in Abhängigkeit ungünstiger Vorbeuleneinflüsse gewisse invariante Tendenzen, die sich für eine Bemessung nutzbar machen lassen. Auch Einflüsse von Eigenspannungsverteilungen können verschiedentlich verallgemeinert werden.

Summary

The author presents the programmed algorism for the calculation of the comparative stresses together with the mean stresses in the straight components of the edge, for simply supported plates. The multipliers for the increase in the post-critical nominal stresses in the plate and in the edges show certain invariable tendencies, depending upon unfavourable pre-buckling effects. These invariants may be useful for design purposes. Even the influences of residual stress distribution can often be generalised.

Résumé

L'auteur communique l'algorithme programmé pour le calcul des tensions de comparaison ainsi que des tensions moyennes dans les éléments droits du bord, pour des plaques simplement appuyées. Les multiplicateurs pour l'augmentation des tensions nominales post-critiques dans la plaque et dans les bords montrent certaines tendances invariables, dépendant d'influences de prévoilement défavorables. Ces invariantes peuvent être utiles au dimensionnement. Même les influences de répartition des tensions résiduelles permettent souvent une généralisation.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Vibrations des grandes cheminées en acier sous l'action du vent

Schwingungen großer Stahlschornsteine unter Wind

Wind-induced Vibration of Tall Steel Chimney Stacks

A. VANDEGHEN
A.I. Lg, Directeur

M. ALEXANDRE
Docteur en Sciences, Chargée d'Etudes

S.A. Cockerill-Ougrée-Providence, Seraing, Belgique

Introduction

A notre connaissance, c'est en 1952 que la littérature technique a signalé pour la première fois des vibrations importantes d'une cheminée en acier. Les exposés publiés au cours des 16 dernières années montrent que le sujet a été abordé par de nombreux chercheurs. En fait, il fallait presque tout apprendre de ce phénomène qui ne peut être étudié que par voie expérimentale. Dans ce domaine, la progression est lente et il est certain que le phénomène est encore très incomplètement connu.

L'étude sur modèles réduits reste actuellement fort imparfaite [20]. Il est notamment impossible dans les conditions usuelles des tunnels aérodynamiques d'atteindre les nombres de Reynolds que l'on rencontre sur cheminées réelles et malheureusement la variation de ce nombre modifie l'allure du sillage responsable des oscillations. Les essais en tunnel conservent néanmoins leur importance pour les études comparatives ou pour fixer les idées sur l'allure générale de certains phénomènes.

Des résultats quantitatifs pleinement valables ne peuvent être obtenus que sur cheminées réelles au moyen de recherches qui s'avèrent difficiles et de longue durée et dont les résultats restent incertains.

Chaque année apporte des contributions nouvelles au problème; elles sont parfois contradictoires et jusqu'à présent, les résultats ne peuvent pas être considérés comme définitifs dans toute la gamme de vitesses du vent. Il est pourtant impossible d'attendre la solution parfaite pour construire les cheminées des nouvelles centrales, cheminées que la taille des centrales et la lutte

contre la pollution atmosphérique font de plus en plus grandes. On conçoit qu'il faille avancer en se basant sur les résultats acquis et dimensionner les cheminées en adoptant des méthodes et des coefficients empiriques qui pourront certainement évoluer en fonction des recherches futures.

La présente note résume les derniers résultats acquis et s'efforce de jeter les bases d'un calcul rationnel, valable au moins dans nos régions. L'amélioration de ce calcul nécessite des données expérimentales complémentaires.

Position du problème

A. L'action du vent comporte plusieurs sources différentes d'excitation périodique:

a) Les coups de vent et rafales frappent l'obstacle avec une périodicité plus ou moins régulière. Cet effet nous paraît pratiquement d'assez peu d'importance pour les cheminées d'usine comme nous l'exposons plus loin. Il doit au contraire être pris en considération dans l'étude des châteaux d'eau.

b) Même en l'absence de coups de vent, la poussée n'est pas constante; elle comporte une composante variable liée à la structure du vent incident. En outre, la direction du vent fluctue constamment autour d'une orientation moyenne. Ces effets sont nettement moins importants que le suivant.

c) L'effet essentiel est dû au sillage. Sous sa forme la plus régulière, ce dernier contient une allée de tourbillons alternés, dits de BÉNARD-KARMAN, qui se détachent des deux flancs de la structure en exerçant un effort alternatif de fréquence N perpendiculaire à la direction du vent (fig. 1).

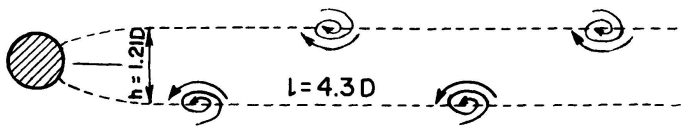


Fig. 1.

d) Il peut exister, particulièrement pour des structures de section non-circulaire, un phénomène d'instabilité élasto-aérodynamique dans lequel la vibration de la structure réagit sur l'écoulement de l'air en donnant lieu, par un mécanisme complexe, à l'entretien de la vibration. Ce phénomène est très marqué, par exemple, dans les vibrations des ponts suspendus et des fils recouverts de glace.

e) Enfin, le mouvement de l'oscillateur et de l'air entraîné n'étant pas régi, en toute rigueur, par un opérateur différentiel linéaire, il en résulte une possibilité d'excitation sous-harmonique [21]; à notre connaissance, le phénomène n'a jamais été rencontré dans les structures cylindriques et nous ne croyons pas utile de l'envisager actuellement.

B. Il y a résonance quand la fréquence de l'excitation est égale à la fréquence propre f de l'un des modes de vibration de la structure.

a) La structure effectue des vibrations de flexion d'ensemble; par exemple, la cheminée vibre comme une poutre encastrée à sa base.
b) Les tranches des cheminées cylindriques sont des anneaux qui peuvent vibrer dans leur plan avec 4 nœuds (fig. 2). Nous revenons plus loin sur la possibilité de ce phénomène qui a été rarement constaté [10].

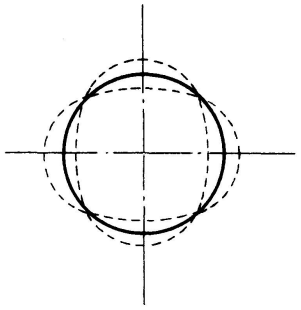


Fig. 2.

C. En conclusion, le problème se ramène principalement à la détermination des vibrations perpendiculaires à la direction du vent par résonance de la cheminée sous l'effet des tourbillons de BÉNARD-KARMAN ou, plus généralement, du sillage de constitution périodique. En toute rigueur, le plan de vibration peut n'être pas exactement perpendiculaire au vent, par couplage de vibrations ou si la raideur de la fondation de la cheminée et la distribution des masses entrainées dans la vibration varient de façon assez sensible avec l'azimut.

Remarquons que des vibrations dues à la même cause sont observées sur d'autres obstacles de section circulaire exposés à un courant fluide: fils, antennes, missiles, tubes d'échangeurs thermiques, périscopes, structures internes de réacteurs atomiques, réfrigérants atmosphériques, etc.

Fréquence de l'excitation

Dans ce qui suit, nous nous bornerons aux obstacles de section circulaire peu variable (cheminées).

Rappelons la définition du nombre de Reynolds: $Re = \frac{V D}{\nu_c}$;

V: vitesse du vent, m/sec;
D: largeur de la surface frappée, m; diamètre, dans le cas d'une cheminée;
ν_c: viscosité cinématique, m²/sec; $15 \cdot 10^{-6}$ m²/sec pour l'air à 20° C.

A. A partir d'une valeur basse de Re, il y a formation d'une allée de tourbillons alternés. Sans entrer ici dans des considérations théoriques ou expérimentales sur la stabilité d'une telle allée, nous nous bornerons à constater qu'elle existe et que la fréquence N de la poussée transversale alternative qu'elle produit est $N = \frac{S V}{D}$ c/sec; S est le nombre de Strouhal, fonction de Re. Nous appellerons vitesse critique du vent V_c la valeur à laquelle a lieu la

résonance; elle est obtenue en égalant la fréquence propre f c/sec de la structure et la fréquence N des tourbillons: $V_c = \frac{fD}{S}$ m/sec.

B. Dès que la vitesse du vent s'approche de la vitesse V_c, la vibration de la cheminée devient assez importante pour influencer de façon sensible les phénomènes aérodynamiques. C'est alors le mouvement de la cheminée qui impose la fréquence de la formation des tourbillons, ceux-ci continuant à quitter l'obstacle avec une fréquence égale à la fréquence propre de celui-ci. Cet accrochage de la constitution du sillage à la vibration de la cheminée subsiste pratiquement dans une plage assez étroite de vitesse du vent à partir de V_c. Le diagramme de l'amplitude en fonction de V présente donc, depuis une valeur un peu inférieure à V_c jusqu'à la vitesse de décrochage, un pic plus ou moins marqué, de même nature que le pic classique de résonance d'un oscillateur faiblement amorti, mais quelque peu élargi par le phénomène d'accrochage des fréquences.

C. Avant 1960, on adoptait pour S le diagramme de la fig. 3 [1] sur lequel on trouve, pour Re pas trop élevé, la valeur longtemps classique $S = 0{,}18$ à $0{,}20$.

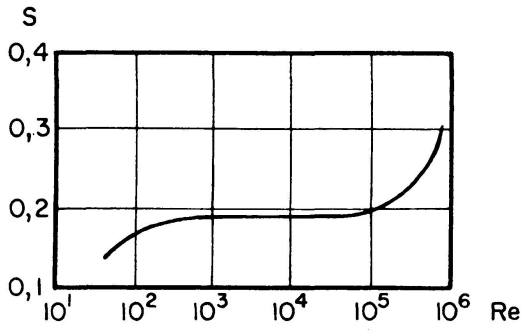


Fig. 3.

On avait pourtant constaté que, pour $Re = 2 \cdot 10^5$, le phénomène devenait différent; on croyait que le sillage était alors apériodique, mais on s'étonnait que des cheminées aient néanmoins vibré alors que Re atteignait $7 \cdot 10^6$ et même $11 \cdot 10^6$.

Grâce aux travaux de FUNG [3] notamment, on sait maintenant que, pour certains nombres de Reynolds, apparaît un phénomène nouveau: les tourbillons continuent d'exister, mais ne se présentent plus avec une fréquence unique et bien déterminée, de sorte que l'excitation ne peut plus être étudiée que par une analyse statistique.

Dans cette zone aléatoire, où l'analyse des efforts de poussée transversale révèle l'existence d'un spectre de fréquences, le terme spectral correspondant à la fréquence propre de la cheminée est toujours suffiamment intense pour entretenir une vibration notable. On peut dire que, l'amortissement étant faible et la résonance étant par conséquent très aiguë, la cheminée sélectionne dans le spectre de l'excitation le terme possédant sa fréquence propre et reste pratiquement insensible aux autres termes, pour autant que le terme sélec-

tionné ne soit pas très petit par rapport aux autres; c'est un phénomène classique dans les vibrations aléatoires.

On constate donc un mouvement de fréquence f dont l'amplitude augmente avec la vitesse du vent.

D. Il existe donc des régimes différents correspondant à des zones déterminées du nombre de Reynolds. Il est évidemment très important de connaître les nombres de Reynolds qui limitent les différentes zones. Les études publiées indiquent certaines valeurs, mais des discordances existent et il faut être prudent dans les conclusions tirées des essais.

Limites des divers régimes

A. Un vent constant produit sur un obstacle un effort dans sa direction (drag ou traînée F_D) et un effort perpendiculaire à sa direction (lift ou portance F_L). La traînée par unité de longueur de l'obstacle est donnée par

$$F_D = C_D D q \text{ kg/m};$$

q est la pression dynamique; on a $q = V^2/16$ kg/m^2.

Bien que la traînée ne provoque pas de sollicitations d'importance comparable à celles dues à la portance alternative, l'étude du coefficient C_D est instructive, car il est certain que ce coefficient dépend de la constitution du sillage. L'allure de la courbe de C_D fournit donc de précieuses indications sur les divers régimes d'écoulement. En fait, ces indications sont plus nettes que celles tirées des variations de la portance alternative.

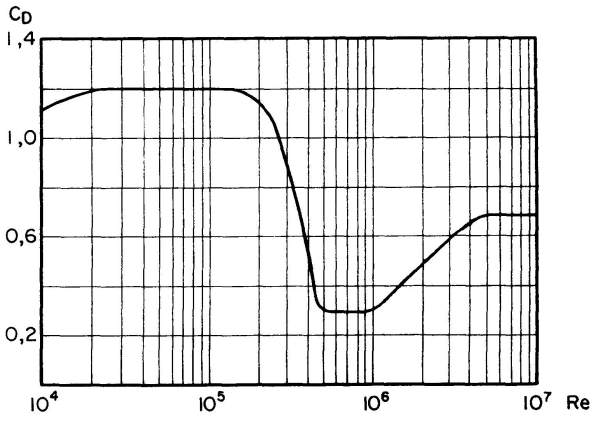


Fig. 4.

La fig. 4 représente C_D relatif aux cheminées cylindriques en fonction du nombre de Reynolds [19]:

— pour $Re < 2 \cdot 10^5$, C_D est constant; on dit que le nombre de Reynolds est sous-critique ou hypocritique (ne pas confondre la vitesse critique définissant le changement de régime et la vitesse V_c pour laquelle les tourbillons de Bénard-Karman sont en résonance avec la cheminée);

— de $2 \cdot 10^5$ à $5 \cdot 10^5$, il existe une première zone de transition dans laquelle il y a chute brusque de C_D;

— de $5 \cdot 10^5$ à $1 \cdot 10^6$, C_D est à nouveau pratiquement constant; le nombre de Reynolds est supercritique ou hypercritique;

— de $1 \cdot 10^6$ à $3{,}5 \cdot 10^6$ s'étend la deuxième zone de transition dans laquelle C_D augmente;

— enfin, pour $Re > 3{,}5 \cdot 10^6$, le nombre de Reynolds est dit transcritique et C_D est à nouveau sensiblement constant.

B. Nous avons vu précédemment que, pour les nombres de Reynolds relativement faibles qui sont atteints dans la plupart des essais en tunnel aérodynamique ($Re < 2 \cdot 10^5$), les tourbillons sont périodiques, la valeur de S étant constante et voisine de 0,2.

C. Fung [3] a déterminé expérimentalement le spectre de la poussée transversale en fonction de S pour Re allant de $3{,}3 \cdot 10^5$ à $1{,}39 \cdot 10^6$. S est proportionnel à N, puisque $S = \frac{ND}{V}$.

Le carré moyen de la poussée due à une bande étroite de S est proportionnel à la densité spectrale $F(S)$ que l'on a normalisée en posant $\int_0^\infty F(S)\,dS = 1$.

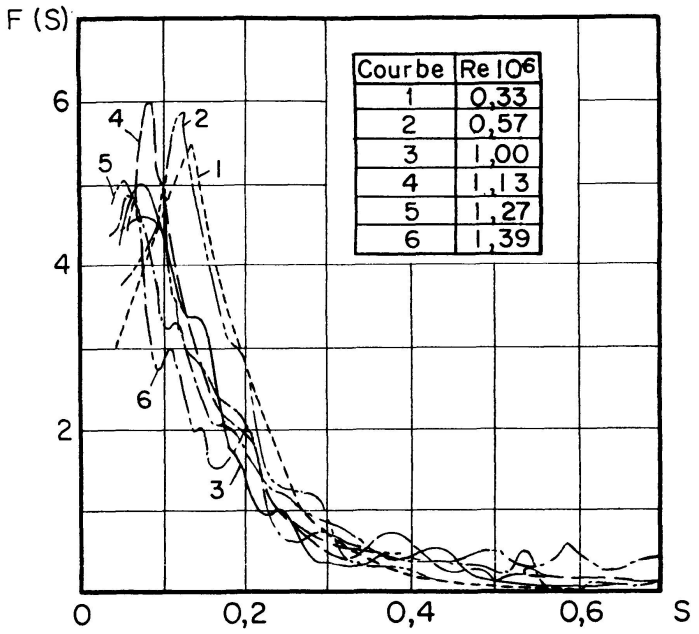


Fig. 5.

La fig. 5 contient plusieurs courbes de $F(S)$. Pour Re supérieur à $8 \cdot 10^5$, elles sont pratiquement indépendantes de Re. Entre $3{,}3 \cdot 10^5$ et $6 \cdot 10^5$, il y a un maximum net de $F(S)$ pour S voisin de 0,15. Pour tous ces nombres de Reynolds, il existe encore une forte excitation à la fréquence f.

D. Cherchons maintenant à situer la limite supérieure du domaine d'existence des phénomènes aléatoires.

Des essais en tunnel [3, 5, 20] ont été réalisés pour Re atteignant $1{,}8 \cdot 10^6$. Jusqu'à cette valeur, on a constaté que les amplitudes continuaient à augmenter considérablement avec la vitesse du vent bien que la valeur de la vitesse critique V_c ait été franchie depuis longtemps; la zone aléatoire existe donc certainement pour $1{,}8 \cdot 10^6$.

E. Que se passe-t-il pour des nombres de Reynolds encore plus grands?

Faute de disposer d'essais dépassant $1{,}8 \cdot 10^6$ sur modèles réduits, il faut recourir à des essais sur cheminées réelles.

L'étude de OZKER et SMITH [6], qui précédait celle de FUNG, et celle d'auteurs japonais [5] ont montré que pour Re allant jusqu'à $1 \cdot 10^7$, les vibrations augmentent progressivement en fonction de V. La fig. 6 reproduit le diagramme publié par OZKER et SMITH.

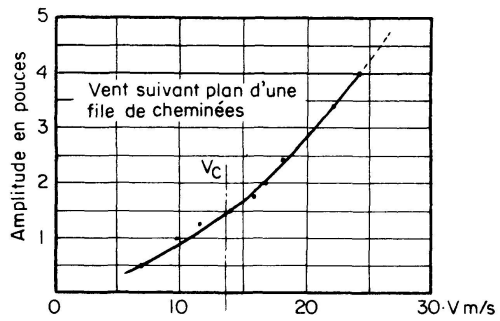


Fig. 6.

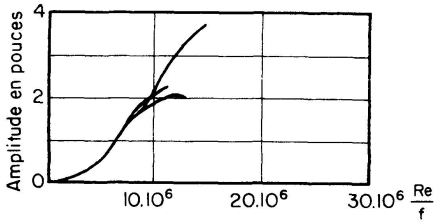


Fig. 7.

F. Dans l'état actuel de nos connaissances, on peut donc admettre les conclusions suivantes:

— le sillage régulier avec S = environ 0,2 existe jusque environ $Re = 2 \cdot 10^5$;

— le sillage de constitution aléatoire existe au-delà de $Re = 2 \cdot 10^5$ jusque $Re = 1 \cdot 10^7$;

— les fréquences d'excitation voisines de celle correspondant à la résonance sont fortement représentées dans le spectre de la force due au sillage de constitution aléatoire;

— au-delà de $Re = 1 \cdot 10^7$, il n'existe pas de valeurs expérimentales publiées à notre connaissance.

G. Une observation très importante a été faite par SMITH et MAC CARTHY [7]: quand le rapport $\frac{Re}{f}$ du nombre de Reynolds à la fréquence de la cheminée dépasse une valeur approximative de $12 \cdot 10^6$, l'amplitude tend à diminuer (fig. 7). La cause de ce phénomène est inconnue; il se peut qu'à partir d'un certain nombre de Reynolds, il y ait diminution de l'excitation due aux tourbillons.

Régime de vibration à prévoir pour le calcul des cheminées

Le tableau I ci-après donne *Re* pour 50 m/sec, vitesse de vent exceptionnelle à une hauteur voisine de 50 m, selon la norme belge NBN 460.01.

Tableau I

D, *m*	*Re*, 10^6
1	3,33
2	6,66
3	10,0
4	13,3
5	16,7
6	20,0

On voit que toutes les grandes cheminées sont soumises à une excitation aléatoire sous le vent maximum réglementaire. Le régime sous-critique dans lequel il existe une vitesse V_c bien déterminée n'a lieu, sauf pour les petits D, qu'à des vitesses de vent très basses ne produisant qu'une faible excitation.

Données expérimentales pour le calcul des amplitudes

A. Etudes sur cheminées cylindriques

a) OZKER et SMITH [6] ont longuement étudié les vibrations d'une cheminée de diamètre 3,2 m supportée par l'ossature d'un bâtiment et dépassant de 47 m le toit de la centrale. Les vibrations importantes se sont produites dans la zone aléatoire. Les auteurs expriment la force transversale par unité de longueur due aux tourbillons par la formule

$$F_L = C_L D q \text{ kg/m}; \tag{1}$$

ils supposent q constant sur toute la hauteur de la cheminée.

Cette formule a le mérite de la simplicité, mais elle cache des phénomènes complexes que nous examinerons plus loin. Nous verrons que l'emploi de la formule (1) est prudent parce qu'elle tend à surévaluer F_L quand la cheminée est encastrée au sol.

Supposant que la force est périodique, les auteurs écrivent que, à la résonance, l'amplitude au sommet est égale à

$$A = A_s \frac{\pi}{\delta}. \tag{2}$$

A_s est la flèche au sommet sous une force statique F_L uniforme, δ est le décrément logarithmique (logarithme népérien du rapport de 2 amplitudes successives y_1 et y_2 du corps en oscillation libre: $\delta = L\frac{y_1}{y_2}$).

b) On observe que, comme dit ci-dessus, la cheminée sélectionne dans le spectre une étroite bande de fréquence autour de sa fréquence propre.

c) Les formules (2) et (1) contiennent les coefficients δ et C_L qui sont déterminés successivement par les mesures faites. Les valeurs admises pour C_L sont évidemment proportionnelles à celles retenues pour δ.

Le décrément logarithmique est obtenu en observant les oscillations libres de cheminées que l'on a fléchies puis libérées. On constate que des cheminées dont les dimensions sont identiques ne se comportent pas de la même façon, par suite des différences entre leurs constructions, les terrains et les parties de bâtiment participant à la vibration.

Le diagramme de la fig. 8 se rapporte à plusieurs cheminées munies d'un revêtement [7]: il montre que δ varie avec l'amplitude de la vibration.

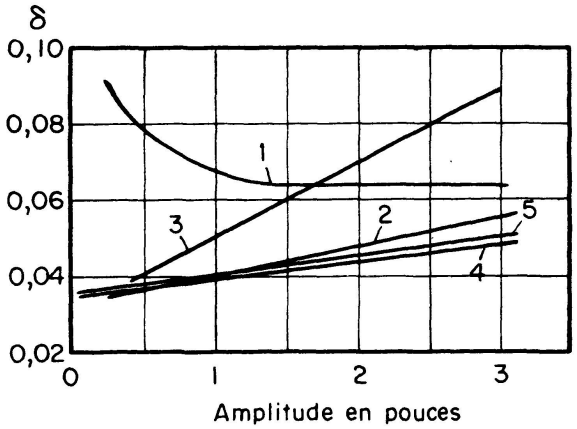


Fig. 8.

Nous donnons dans le tableau II les principales caractéristiques des cheminées étudiées:

Tableau II

N°	Fixation	Revêtement	Construction
1	encastrée au sol	gunite	soudée
2 et 3	sur poutres	brique et mortier	rivée
4 et 5	sur ossature métallique	brique et mortier	rivée

La fondation de la cheminée 3 est reliée à celle de 2 grandes chaudières et de 3 trémies. La courbe qui lui correspond montre qu'une grande partie de l'amortissement d'une cheminée provient de sa fondation (prise au sens large).

La valeur adoptée par SULZER après l'essai d'une cheminée de 100 mètres est $\delta = 0{,}025$ [8].

Pour des cheminées construites sur sol dur, de même que pour celles qui ne sont pas munies de revêtement, δ est nécessairement plus petit.

SCRUTON, dans un article déjà ancien [9], avait signalé 0,01; mais cette valeur, plus faible que celles indiquées par tous les autres auteurs, ne nous paraît pas devoir être retenue.

Par contre, DE GHETTO et LONG [10] ont publié des valeurs beaucoup plus optimistes que nous reproduisons au tableau III où p est la pression spécifique sur le sol, en kg/cm^2.

Tableau III

Cheminée	Fondation sur sol relativement élastique; $p=0,75$	Fondation sur sol de raideur moyenne; $0,75<p<1,5$	Fondation sur pieux ou sol peu élastique ou sur rocher
avec revêtement	0,63	0,105	0,063
sans revêtement	0,105	0,052	0,035

$\delta = 0,063$ correspond très bien aux valeurs données par OZKER et SMITH. Les autres valeurs paraissent élevées et comme les auteurs ne donnent pas δ en fonction de l'amplitude, nous croyons qu'il est dangereux de les appliquer.

Nous considérons que, comme une partie très importante de l'amortissement provient de la fondation, il y a lieu d'être très prudent quand l'étude ne peut s'appuyer sur une mesure de δ directement applicable au cas considéré. Par ailleurs, il est certain que les cheminées rivées ont un amortissement supérieur aux cheminées soudées, mais nous n'introduisons pas cette distinction dans les δ que nous recommandons ci-après.

d) OZKER et SMITH et différents auteurs ont examiné le cas de cheminées disposées en file dans la direction du vent. Ils ont constaté que, à partir de la 2e cheminée, la force latérale due aux tourbillons est plus importante que pour une cheminée isolée. OZKER et SMITH ainsi que SMITH et MAC CARTHY [6, 7] ont obtenu les maxima ci-après:

$C_L = 0,093$ quand le vent souffle perpendiculairement au plan des cheminées.

$C_L = 0,173$ quand le vent souffle parallèlement au plan des cheminées.

Il est évident que, en toute rigueur, ce coefficient doit dépendre du pas de la file de cheminées. L'effet du pas est bien connu pour les écoulements autour de faisceaux tubulaires d'échangeurs [15].

La période spatiale de l'allée régulière de tourbillons de BÉNARD-KARMAN est $4,3\,D$ et on constate que ce sillage organisé règne sur une distance de l'ordre de 3 périodes en aval de l'obstacle. Il est certain que la majoration de C_L va en s'amenuisant quand le pas de la file de cheminées augmente et il est raisonnable de penser que cette majoration devient négligeable lorsque ce pas atteint environ 3 fois la période spatiale du sillage organisé; à plus forte raison en est-il ainsi dans le cas d'un sillage de constitution plus ou moins aléatoire.

Nous suggérons donc de prendre la valeur maxima de C_L ($C_L = 0,2$) tant que le pas de la file de cheminées est inférieur à $7\,D$ et de faire ensuite décroître C_L linéairement pour atteindre la valeur minima ($C_L = 0,1$) lorsque le pas est égal à $14\,D$.

e) Nous ne retiendrons pas les valeurs signalées par DE GHETTO et LONG qui sont beaucoup plus élevées (de 0,2 à 1,9). Nous pensons que ces auteurs les ont obtenues en partant des valeurs trop élevées, que nous avons signalées

ci-dessus, pour le décrément logarithmique et, comme nous l'avons dit au début de ce chapitre, la valeur C_L calculée à partir des essais est proportionnelle à δ.

f) En conséquence, en concordance avec les δ choisis, nous considérons que l'on peut adopter en toute sécurité:

$C_L = 0{,}1$ pour une cheminée isolée;
$C_L = 0{,}2$ pour une file de cheminées, soit le double du précédent, sous réserve que le pas de la file n'excède pas $7\,D$.

B. Etudes en tunnel

a) Résumons les essais que FUNG a réalisés sur un cylindre fixe ou en oscillation forcée. Les forces de portance et de traînée sur le cylindre d'essai fixé rigidement et soumis à l'action du vent sont mesurées au moyen de capteurs à strain-gages dont les signaux sont enregistrés sur bande magnétique et analysés.

FUNG obtient le carré moyen de l'amplitude de la force transversale exprimée en kg au moyen de la formule

$$\overline{F}^2 = (q\,D\,h)^2\,\overline{C}_L^2 \int_0^\infty F(S)\,dS$$

dans laquelle on a posé $\int_0^\infty F(S)\,dS = 1$ pour normaliser la fonction $F(S)$; h est la hauteur du cylindre, $\overline{C}_L^2$ le carré moyen du coefficient de portance. Les mesures effectuées ont fourni $\sqrt{\overline{C}_L^2} = 0{,}14$ et les valeurs de $F(S)$ qui sont reproduites dans la fig. 5 pour diverses valeurs de Re.

La structure élastique qui reçoit la force F définie ci-dessus obéit à l'équation classique de l'oscillateur équivalent à la structure:

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + k\,y = \text{force};$$

M est la masse, c la constante d'amortissement, k la constante élastique.

L'expression

$$z(j\,\omega) = \left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\,\frac{c}{M}\,\omega\right) M = (\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,j\,\gamma\,\omega_0\,\omega)\,M$$

est l'impédance mécanique de la structure; $j = \sqrt{-1}$; γ est le rapport de l'amortissement à l'amortissement critique $2\sqrt{k\,M}$ et on a $\delta = 2\,\pi\,\gamma$; $\omega_0 = k/M$ est la pulsation propre.

La moyenne du carré de l'amplitude de l'oscillateur équivalent est donnée par la relation $\overline{y}^2 = (q\,D\,h)^2\,\overline{C}_L^2 \int_0^\infty \frac{F(S)}{|z(j\,\omega)|^2}\,dS$. Comme $S = \frac{N\,D}{V} = \frac{\omega\,D}{2\,\pi\,V}$, elle s'écrit:

$$\overline{y}^2 = (q\,D\,h)^2\,\overline{C}_L^2\,\frac{D}{2\,\pi\,V} \int_0^\infty \frac{F\left(\frac{\omega\,D}{2\,\pi\,V}\right) d\omega}{M^2\,\omega_0^4 \left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\,j\,\gamma\,\frac{\omega}{\omega_0}\right|^2}.$$

Enfin, si γ est très petit, c'est-à-dire si l'amortissement est faible, ce qui est le cas usuel, on obtient la valeur approchée

$$\overline{y}^2 = \frac{1}{8}(q\,D\,h)^2\,\overline{C}_L^2\,\frac{D}{V}\,\frac{1}{M^2\,\omega_0^3\,\gamma}\,F\left(\frac{\omega_0 D}{2\pi V}\right) = \frac{\pi}{4}(q\,D\,h)^2\,\overline{C}_L^2\,\frac{D}{V}\,\frac{1}{M^2\,\omega_0^3\,\delta}\,F\left(\frac{\omega_0 D}{2\pi V}\right).$$

b) Cette formule a été établie pour un cylindre isolé, suspendu élastiquement, recevant sur toute sa longueur une poussée transversale uniforme et dont tous les points vibrent avec la même amplitude. En toute rigueur, il faudrait introduire des corrections pour la corrélation longitudinale et l'effet d'extrémité; on peut les négliger dans le cas d'une cheminée. Par contre, l'effet d'une file de cheminées ne peut être négligé.

Reste à tenir compte de la déformée dynamique. Elle est définie par une fonction $a(x)$, x étant la distance à la base; $a(x)$ est choisi de manière à être égal à l'unité au sommet. D'après un résultat classique tiré de la théorie de l'oscillateur équivalent à la cheminée, on peut écrire la valeur de l'amplitude au sommet en réduisant la pression à l'abscisse x proportionnellement à $a(x)$ et en explicitant la masse équivalente M:

$$\overline{y}^2 = \frac{\pi}{4}\,\overline{C}_L^2\,\frac{D}{V}\,\frac{\left[\int_0^h q(x)\,D(x)\,a(x)\,dx\right]^2}{\left[\int_0^h m(x)\,a^2(x)\,dx\right]^2\,\omega_0^3\,\delta}\,F\left(\frac{\omega_0 D}{2\pi V}\right). \tag{3}$$

$D(x)$ est le diamètre en x, $m(x)$ la masse par unité de longueur.

Le carré moyen de l'amplitude en un point quelconque i est obtenu en multipliant l'expression ci-dessus par le carré de l'amplitude relative $a(i)$ de la déformée:

$$\overline{y(i)^2} = a^2(i)^2\,\overline{y}^2.$$

Nous pensons qu'il ne faut considérer que le mode fondamental de la vibration. Il est certainement très rare de rencontrer les modes supérieurs.

c) Des auteurs japonais ont essayé en tunnel un tube suspendu élastiquement et vibrant à sa fréquence propre. Pour retrouver l'allure des diagrammes

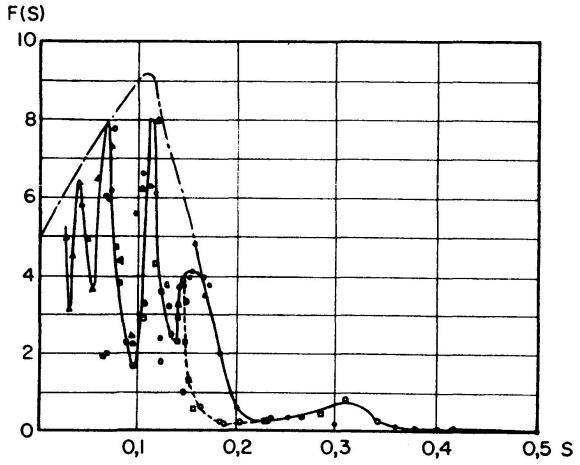


Fig. 9.

obtenus par FUNG, ils ont dû supposer un amortissement fonction de la vitesse.

Ils donnent pour le spectre le diagramme de la fig. 9. La valeur moyenne des résultats est très proche de la courbe moyenne $F(S)$, mais il apparaît des pics très importants et très localisés; pratiquement, il ne faut tenir compte dans le calcul que des sommets des pics. Nous croyons donc nécessaire d'effectuer le calcul avec la courbe enveloppe des pics que nous avons tracée en trait mixte.

d) Les essais en tunnel de CHEN [15] confirment les résultats de FUNG et fournissent une courbe de l'amplitude en fonction de V similaire à celle de OZKER et SMITH.

C. Etude sur cheminées coniques

La formule (3) et la figure 9 ont servi de base à l'étude effectuée par les auteurs japonais sur 4 cheminées coniques [5]. Le diamètre D introduit dans la formule (3) est celui qui existe à 70% de la hauteur à partir de la base. Les auteurs considèrent que l'amplitude maxima probable est égale à $3\sqrt{\overline{y^2}}$. Un calcul classique en matière de vibrations d'amplitude aléatoire et de fréquence sensiblement constante (loi de Rayleigh) indique qu'il y a une probabilité de 99% pour que cette amplitude ne soit jamais dépassée. Il faut remarquer que le choix de cette limite comporte un certain arbitraire et nous pensons qu'il eût été plus prudent, en se basant sur la distribution de Rayleigh, d'adopter 4 à 5 $\sqrt{\overline{y^2}}$ comme amplitude maxima possible au cours d'une durée assez longue.

La concordance entre les amplitudes mesurées et les amplitudes calculées est relativement bonne, ce qui est rassurant, vu l'incertitude qui subsiste dans l'application aux cheminées réelles des essais en tunnel.

D. Conclusions

Nous avons effectué plusieurs applications numériques à des cheminées de diamètres différents. Les formules (1) et (2) donnent des amplitudes plus élevées que la formule (3) et la fig. 9 combinées avec $y_{max} = 3\sqrt{\overline{y^2}}$, ce qui pourrait s'expliquer par l'insuffisance du coefficient 3; la concordance est acceptable avec le coefficient 5 ou même 4.

Dans l'état actuel de nos connaissances, nous recommandons donc par prudence les formules (1) et (2) avec les coefficients suivants:

$C_L = 0{,}1$ pour cheminée isolée,
$= 0{,}2$ pour file de cheminées (pas $\leqq 7\,D$);

décrément logarithmique pour le vent normal tel que défini dans la norme belge NBN 460.01:

cheminée avec revêtement: $\delta = 0{,}030$,
cheminée sans revêtement: $\delta = 0{,}020$.

Après avoir calculé les sollicitations dans le cas du vent normal, on les multiplie par

$$\left(\frac{V_{exceptionnel}}{V_{normal}}\right)^{1,8} = 1{,}87,$$

pour obtenir celles du cas exceptionnel de la norme belge.

Cette formule empirique tient compte de 2 faits:

— la portance alternative varie comme le carré de la vitesse du vent,
— le décrément logarithmique augmente avec l'amplitude.

Cette formule approchée est vérifiée par la courbe expérimentale publiée par OZKER et SMITH; elle n'est certainement pas rigoureuse dans toutes les applications, mais nous croyons pouvoir l'adopter avec sécurité.

Moyens utilisés pour réduire les amplitudes

Nous ne connaissons pas d'exemples d'application d'un amortisseur dynamique à une cheminée.

A. Amortisseurs à viscosité placés dans des haubans fixés à la cheminée

Ce système, qui est simple dans le cas d'un mât posé sur rotule et haubané, est rarement appliqué à une cheminée d'usine. Il a été néanmoins utilisé avec succès sur une cheminée qui avait vibré dangereusement [11].

B. Câbles mous

Ces câbles sont montés comme des haubans mais ils ne sont pas tendus [1]. On en a placé à la centrale de Schelle après avoir constaté les vibrations d'une cheminée qui venait d'être mise en service.

C. Amortisseur annulaire à viscosité placé en tête de la cheminée

Ce dispositif réalisé par SULZER [8] consiste en un anneau entourant le sommet de la cheminée et dont l'intérieur comporte une série de plaques annulaires horizontales fixées par leurs bords et percées d'un grand nombre de trous (fig. 10). L'anneau contient de l'huile qui s'écoule dans les trous pendant la vibration. SULZER dimensionne le dispositif pour qu'il soit efficace en hiver comme en été, la température modifiant la viscosité de l'huile. Ce dispositif est utilisé à la centrale des Awirs.

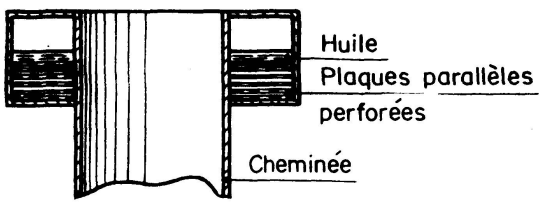


Fig. 10.

D. Ailettes hélicoïdales

Cette solution (fig. 11) a été étudiée par le National Physical Laboratory sur des modèles réduits placés en soufflerie [4, 12]. La réduction des vibrations est due à la perturbation de l'allée des tourbillons dont la poussée transversale alternative est sensiblement affaiblie.

La traînée augmente pour 2 raisons: la surface frappée est plus importante, le coefficient de traînée C_D est plus élevé.

Pour les nombres de Reynolds atteints, C_D est toujours inférieur à l'unité pour une cheminée usuelle (fig. 4). Par contre, quand la cheminée est munie d'ailettes en hélice, le coefficient C_D est voisin de 1,15 quel que soit Re, le calcul de la poussée étant effectué avec le diamètre circonscrit aux hélices [13].

Le dispositif optimum comporte 3 ailettes dont la hauteur est $0{,}09\,D$ et le pas $5\,D$. Il suffit de placer le dispositif amortisseur sur le tiers supérieur de la cheminée pour obtenir des résultats satisfaisants.

E. Câbles hélicoïdaux

La publication [5] relative aux essais entrepris pour rechercher la disposition optima des câbles montre que ce dispositif n'est efficace qu'à condition de choisir avec soin le nombre et le pas des hélices; la fig. 12 représente ce qui a été adopté.



Fig. 11.

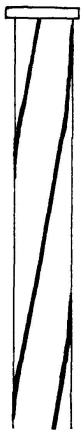


Fig. 12.

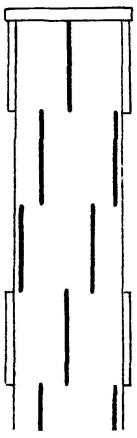


Fig. 13.

F. Ailettes verticales

Le dispositif perturbateur des tourbillons doit nécessairement agir quelle que soit la direction du vent; c'est la raison pour laquelle les deux solutions précédentes comportent des éléments disposés en hélice.

Un système plus facile à réaliser consiste en plats rectangulaires verticaux disposés comme l'indique la fig. 13. Une application a été précédemment réalisée [14].

La hauteur des plats, leur longueur, le nombre de plats par virole, le décalage entre les rangées de plats successives sont autant de paramètres qui peuvent avoir une influence sur les amplitudes de la vibration.

Pendant la biennale 1965–1967, nous avons effectué des essais à l'Institut von Karman de Dynamique des Fluides de Rhode-St-Genèse grâce à l'appui du C.R.I.F. (Centre de Recherches de l'Industrie des Fabrications Métalliques).

Après avoir essayé plusieurs dispositions de plats, nous avons choisi:

4 plats par virole,
décalage de 30° entre les rangées successives,
longueur des plats: 0,75 à 0,9 D,
hauteur: 0,09 D.

Parallèlement aux mesures de vibrations, il a été effectué des mesures de la traînée. Comme pour les ailettes en hélice, on a constaté que, quel que soit le nombre de Reynolds, le coefficient C_D est constant. On peut utiliser $C_D = 1{,}15$, le calcul étant effectué avec le diamètre circonscrit aux ailettes.

Il suffit de mettre des plats sur la moitié supérieure de la cheminée; on s'efforcera de mettre le même nombre de plats dans les diverses génératrices suivant lesquelles ils sont alignés. Les essais ont montré la nécessité de respecter avec suffisamment de soin les positions angulaires des ailettes.

G. Facteur de réduction des amplitudes

Nous ne discutons de ce facteur que pour les 3 dispositifs qui ont fait l'objet de publications et celui que nous avons expérimenté.

a) Amortisseur à viscosité. Les essais que SULZER a réalisés sur une cheminée de 100 m ont donné

$\delta = 0{,}04$ lorsque l'amortisseur est presque vide,
$\delta = 0{,}17$ pour l'amortisseur plein,

ce qui permet de conclure à une réduction de l'amplitude dans le rapport 1/4.

b) Ailettes en hélice. Les essais réalisés en tunnel et sur cheminée ont montré une très grande diminution de l'amplitude. Il semble d'après ces résultats qu'il soit prudent de compter sur un rapport de réduction de 1/4 bien que les essais en tunnel aient été beaucoup plus favorables et que le NPL admette que les vibrations sont pratiquement éteintes.

c) Câbles en hélice. La comparaison des amplitudes sur modèles réduits de tube lisse et de tube avec câbles donne le rapport 1/5.

Les auteurs de la publication [5] ont effectué des essais sur cheminées réelles, lesquels ont conduit à un rapport qui est très voisin de 1/3.

d) Ailettes verticales. Nous croyons pouvoir compter sur le rapport 1/3 en général.

e) En conclusion nous constatons que, quel que soit le dispositif adopté pour diminuer les amplitudes des vibrations, on peut compter les ramener à environ 1/3 de la valeur que l'on constaterait sur une cheminée non pourvue de ce dispositif.

H. Remarque relative à la rugosité du modèle en tunnel

Corrélativement à l'effet de câbles et d'ailettes, il est indispensable que la rugosité du modèle soit très voisine de celle de la cheminée.

Effets des coups de vent

A. Un coup de vent isolé peut se produire au moment de l'arrivée du front froid d'un grain important. La vitesse du vent varie brusquement; dans le rapport de BAES et JOUKOFF [25], un anémogramme montre une variation pratiquement instantanée de 3 à 25 m/sec.

L'effort de traînée passe quasi-instantanément à la valeur correspondant à la nouvelle vitesse du vent. Ceci entraîne des sollicitations maxima correspondant sensiblement au doublement de la variation statique de la traînée. Il est intéressant de constater que le règlement russe impose de doubler la sollicitation pour toutes les constructions en acier dont la fréquence est inférieure à 2 c/sec.

Par contre, il ne se produit rien de semblable dans les vibrations transversales; elles s'établissent à leur valeur de régime correspondant à la nouvelle amplitude de la portance alternative.

Comme ce sont ces vibrations qui conditionnent le calcul de la résistance de la cheminée, un coup de vent isolé est donc sans influence sur ce calcul.

B. Des coups de vent se succédant à intervalles plus ou moins réguliers sont susceptibles d'entraîner des vibrations importantes dans le sens du vent si leur fréquence est en résonance avec celle de la cheminée et si celle-ci est peu amortie.

Les divers auteurs qui ont relevé les fréquences des coups de vent, particulièrement dans les pays à typhons, signalent pour ces fréquences des valeurs de 0,125 à 0,25 c/sec [25].

Il est donc recommandé d'éviter pour les cheminées des fréquences propres aussi basses. IRMINGER et NOKKENTVED préconisent un minimum de 0,33 c/sec au bord de la mer, 0,25 dans l'intérieur des terres [2]. Compte tenu des principaux harmoniques de l'excitation, ces chiffres nous paraissent des minima fixés très bas mais dont, fort heureusement, les grandes cheminées sont suffisamment éloignées.

C. Les divers règlements, notamment [18, 22], contiennent des prescriptions très différentes relativement à l'effet des coups de vent.

Vibration des anneaux

La fréquence propre f_a du fondamental d'un anneau d'acier d'épaisseur e en mm et de diamètre D en m est donnée par la formule [26]

$$f_a = 2{,}53\frac{e}{D^2}\ \text{c/sec.}$$

S'il y a un revêtement, f_a doit être divisé par $\sqrt{1+\frac{\text{poids du revêtement}}{\text{poids de l'acier}}}$. S'il existe des raidisseurs annulaires suffisamment rapprochés pour être totalement efficaces, f_a doit être multiplié par $\sqrt{\frac{12}{e^3}\cdot \text{moment d'inertie par unité de longueur}}$; nous pensons que l'effet des raidisseurs est encore mal connu.

La résonance des anneaux excités par les tourbillons a évidemment lieu lorsque $f_a = 2N$, d'où $S = \frac{f_a D}{2V}$.

Dans le cas de vibrations d'anneaux observé par W. S. Swiger [6]; la vitesse du vent qui a produit la résonance était de 11 m/sec et la fréquence correspondait à $S = 0{,}225$. Un calcul des sollicitations au moment de la résonance nous paraît impossible actuellement; nous manquons notamment de données relatives à l'excitation et à l'amortissement qui est probablement élevé dans le cas d'un revêtement épais. Nous supposons en outre que la vibration ne doit pas avoir lieu sur toute la hauteur de la cheminée, les conditions nécessaires n'étant pas réunies sur une grande hauteur.

Nous croyons très recommandable d'éviter que $f_a/2$ soit voisin de f, pour ne pas faire coïncider deux résonances, compte tenu notamment de la sélection opérée par la cheminée dans le spectre de S, laquelle peut renforcer par accrochage des fréquences l'effet du terme en f.

Méthodes de calcul de la fréquence propre, de la déformée, des amplitudes, des moments de flexion alternatifs et des tensions

A. Calcul de f et de la déformée a(x) du mode fondamental de vibration

Si la cheminée en acier a un diamètre et une épaisseur uniformes et n'est pas munie de revêtement, on peut montrer que les deux premières fréquences propres sont données par les formules simplifiées

$$f_1 = 1010\frac{D}{h^2}\ \text{c/sec}, \qquad f_2 = 6{,}27\, f_1, \qquad D \text{ et } h\text{: m}.$$

S'il y a un revêtement n'intervenant que par sa masse et non par sa rigidité, il faut multiplier les valeurs précédentes par $\sqrt{\frac{P}{P+p}}$, P étant le poids de l'acier de la virole et p celui du revêtement, en kg/m.

En règle générale, l'épaisseur n'est pas constante, il arrive aussi que la partie inférieure de la cheminée soit conique. Dans ces conditions, le moyen le plus rapide pour déterminer la première fréquence propre est d'utiliser la méthode de Rayleigh, la formule étant

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g\frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i z_i^2}} \text{ c/sec}$$

avec P_i: poids total du tronçon i, kg;
z_i: ordonnée de la déformée statique sous les poids P_i appliqués perpendiculairement à l'axe de la cheminée, mm;
g: 9810 mm/sec^2.

Le calcul des fréquences propres peut être effectué sur ordinateur. Nous utilisons une méthode itérative similaire à celle que HOLZER a imaginée pour les fréquences propres de torsion; elle est rigoureuse et fournit la déformée dynamique déterminée au moyen des forces d'inertie.

Rappelons que $a(x)$ est l'ordonnée de la déformée quand l'amplitude au sommet est égale à l'unité. A défaut de la déterminer par l'emploi de l'ordinateur, on peut la calculer numériquement ou graphiquement en appliquant aux P_i des coefficients proportionnels aux z_i; au besoin, on procède à 2 approximations successives. Le procédé est semblable au calcul classique d'une vitesse critique de flexion.

B. Calcul de la flèche statique A_s au sommet de la cheminée

La vitesse du vent varie en fonction de la hauteur par rapport au sol. Il s'ensuit que q et Re varient le long de la cheminée; en régime non aléatoire, la vitesse V_c est atteinte d'abord au sommet mais la vibration qui en résulte impose la fréquence f aux tourbillons qui se détachent tout le long de la cheminée. En régime aléatoire, il faudrait aussi introduire les spectres à divers niveaux et les effets de corrélation transversale. La force transversale due aux tourbillons varie donc le long de la cheminée.

Mais l'emploi des coefficients de OZKER et SMITH entraîne évidemment l'adoption de leur méthode de calcul simplifiée. Ces auteurs ont admis que q est sensiblement constant sur toute la hauteur de la cheminée. Comme leurs recherches ont été effectuées sur des cheminées dont la base était pratiquement au niveau du toit de la centrale, l'anémomètre étant fixé au tiers de la hauteur environ, nous proposons d'utiliser les valeurs de q variables avec la hauteur données dans la norme belge NBN 460.01 qui définit une pression dynamique normale et une pression dynamique exceptionnelle. Celle-ci est relative à des pointes de vent locales de courte durée et dont la probabilité d'apparition est faible; la pression dynamique normale peut agir plusieurs fois par an.

Bien entendu, la poussée est nulle sur la partie inférieure de la cheminée si elle est enfermée dans un bâtiment.

On tiendra compte éventuellement de la déformation de la structure sur laquelle la cheminée est fixée.

C. Calcul de l'amplitude A au sommet

Elle est calculée par la formule (2) et en tenant compte éventuellement d'un coefficient réducteur si la cheminée est munie de dispositifs anti-tourbillons.

L'amplitude au niveau x est égale à $A\,a\,(x)$.

D. Calcul du moment de flexion M_L dû à la vibration

Chaque tranche de cheminée de masse $m\,(x)$ engendre un effort d'inertie $4\,\pi^2 f^2 m\,(x)\,A\,a\,(x)$. Il en résulte immédiatement les moments de flexion alternatifs M_L dans toutes les sections.

Quand on a obtenu la fréquence propre par un calcul à l'ordinateur, on connaît immédiatement les moments de flexion dans toutes les sections pour une amplitude unitaire au sommet. Les moments M_L sont obtenus en les multipliant par A.

Utiliser la déformée statique au lieu de la déformée dynamique constitue une approximation par excès.

E. Calcul du moment de flexion M_D dû à la poussée du vent

On utilise le coefficient C_D relatif au cylindre nu ou avec ailettes, la répartition réglementaire de q en fonction de x et le coefficient réducteur C_r selon la norme NBN donné au tableau IV.

Tableau IV

H en m	Coefficient C_r
10	0,85
20	0,80
50	0,74
100	0,70

Pour tenir compte des coups de vent quasi périodiques, on évitera des fréquences propres trop basses.

En règle générale, M_D est petit vis-à-vis de M_L.

Pour fixer les idées, le tableau V donne les valeurs en kg/m² de $C_r C_D q$ et de $C_L q \frac{\pi}{\delta}$ pour les cheminées de grand diamètre et pour une pression dynamique $q = 100$ kg/m². Bien entendu, comme nous l'avons vu, le moment de flexion alternatif est calculé au moyen des efforts d'inertie engendrés par la vibration et non au moyen d'un effort $C_L q \frac{\pi}{\delta}$ par unité de longueur; néanmoins le tableau fixe utilement les idées. Le coefficient réducteur C_r a été pris égal à 0,75. Le coefficient C_D a été pris égal à 0,7 pour une cheminée nue; pour une cheminée

avec ailettes, il a été dit plus haut comment variait la poussée. δ a été pris égal à 0,030 et C_L à 0,1 ou 0,2 comme dit précédemment.

Tableau V

	$C_r\, C_D\, q$	$C_L\, q\, \frac{\pi}{\delta}$ cheminée isolée	cheminée en file
cheminée nue	$0{,}75 \cdot 0{,}7 \cdot 100 = 53$	$0{,}1 \cdot 100 \cdot \frac{\pi}{0{,}030} = 1050$	2100
cheminée avec ailettes de $h = 0{,}06\, D$	$0{,}75 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}12 \cdot 100 = 89$	$\frac{1050}{3} = 350$	700

On voit que, pratiquement, ce sont les sollicitations dues aux vibrations transversales qui imposeront l'épaisseur des viroles. La poussée classique réglementaire joue un rôle si réduit qu'on pourrait la négliger.

F. Tensions longitudinales

Le moment de flexion maximum est donné par $M_f = \sqrt{M_L^2 + M_D^2}$. A la tension de flexion R_f qui lui correspond, nous ajoutons la tension de compression R_c due au poids pour obtenir la tension de compression maxi R.

G. Tensions transversales

Ces tensions sont liées à l'ovalisation de la cheminée due à la répartition azimutale des pressions et dépressions produisant la traînée. Cette répartition a été proposée par divers auteurs. Nous recommandons la répartition représentée par la fig. 14, proposée par BLANJEAN [16].

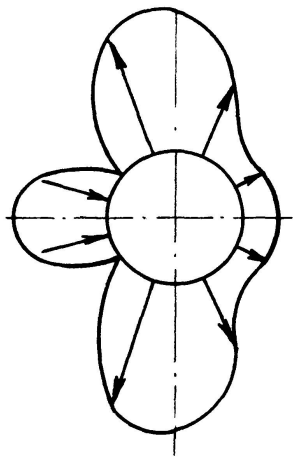


Fig. 14.

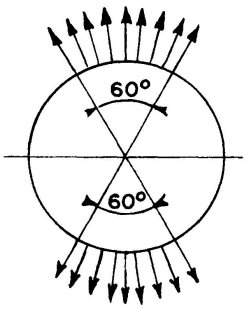


Fig. 15.

Le règlement ABS prévoit une répartition schématisée (fig. 15) qui a le mérite de simplifier les calculs; son utilité est moindre actuellement, l'emploi d'un ordinateur permettant aisément de calculer un anneau soumis à des forces quelconques agissant dans son plan.

Quand les cheminées sont munies d'ailettes, les dépressions deviennent moins importantes et les tensions dues à l'ovalisation diminuent certainement.

Nous proposons dans tous les cas d'appliquer les résultats obtenus à partir de la fig. 14 qui conduit, au point le plus sollicité par la vibration d'ensemble, à un moment de flexion $79\,q\,D^2$ kgmm par m de longueur; D en m et q en kg/m^2. Dans le plan perpendiculaire, le moment de flexion atteint $84\,q\,D^2$.

H. Tensions combinées

Par sécurité, on peut supposer que la tension de compression R résultant de la flexion et du poids propre existe dans la section la plus sollicitée transversalement et on la combine avec la tension de traction R_0 due à l'ovalisation, de telle sorte que la tension maxi équivalente est d'après le critère de HENCKY-VON MISES

$$R_e = \sqrt{R^2 + R_0^2 + R\,R_0},$$

R et R_0 étant pris en valeur absolue.

Nous négligeons les tensions de cisaillement qui sont très faibles.

Tensions admissibles

A. Introduction

Etant donné le caractère extrêmement exceptionnel du vent maximum [25], nous admettrons que soit atteinte dans ce cas la limite élastique ou la tension de flambage local. La tension à prendre en considération est R_e calculée comme dit ci-dessus; il n'y a pas lieu d'introduire ici un coefficient de concentration de tension.

Sous le vent normal, nous considérons la résistance à la fatigue et nous admettrons un coefficient de sécurité voisin de 1,33. Pour les tôles en acier 42, on peut compter sur une limite d'endurance de 24 kg/mm^2; le taux de fatigue admissible est donc de 18 kg/mm^2.

La sollicitation par fatigue fera l'objet d'un chapitre final où l'on s'efforcera d'indiquer ce que devrait être un calcul rationnel.

B. Flambage d'ensemble

Le calcul est classique. Il peut être traité par les formules du NBN 1 combinées avec celles de la note technique B. 10.51 du C.E.C.M. [17].

Nous avons pu vérifier que dans les grandes cheminées d'usine actuellement construites en Belgique, il n'y a aucun risque de flambage d'ensemble; la vérification de la sécurité au flambage est pratiquement superflue pour ces cheminées.

C. Flambage local par voilement de la virole

Nous retiendrons deux points importants signalés par TIMOSHENKO [23]:

— quand il y a compression R_c et flexion R_f combinées, on obtient une approximation suffisante de la tension de voilement en supposant que la contrainte combinée de compression devient égale à la tension critique du cylindre soumis à compression pure;

— la tension de voilement dans le cas de flexion pure est supérieure à la tension critique de compression pure.

Afin de tenir compte de ces 2 caractéristiques, la Esso Research and Engineering Company a adopté une formule générale [29] que nous avons retrouvée à partir de la formule donnée par TIMOSHENKO en faisant les hypothèses suivantes: la tension admise est basée sur un coefficient de sécurité 2, le rapport entre les charges critiques de flambage d'une virole fléchie et d'une virole comprimée est 1,4. Cette formule est

$$R_{cr} = 2\,E\,\frac{e}{D}\,\frac{0{,}56 - 0{,}16\,\dfrac{R_c}{R_c + R_f}}{1 + 0{,}004\,\dfrac{E}{\text{limite élastique}}}.$$

E est le module d'élasticité. R_c étant négligeable vis-à-vis de R_f dans le cas d'une construction élancée, on peut adopter au numérateur la valeur 0,56; e et D sont exprimés dans les mêmes unités.

Dans le cas d'une construction en acier A 42, on a $E = 20\,500$ kg/mm², limite élastique = 26 kg/mm²; l'introduction des caractéristiques à chaud modifie légèrement ces valeurs, par ex. à 225° on a respectivement 19 500 et 19,5 kg/mm² environ.

On obtient donc le tableau VI.

Tableau VI

$\frac{e}{D}$	R_{cr} kg/mm²
0,0025	13,8
0,0030	16,6
0,0035	19,3
0,0040	22,1
0,0045	24,9
0,0050	>26,0

Il est certain que le danger de flambage local est moindre lorsque le taux de compression comporte une composante variant à une fréquence suffisamment élevée; en quelque sorte, on peut dire que le flambage n'a pas le temps de se produire. Ce phénomène étant encore mal connu et les fréquences des cheminées étant basses, nous supposerons par sécurité que la compression a un caractère statique et appliquerons la formule précitée.

D. Fatigue

a) La résistance à la fatigue ne fait intervenir pratiquement que l'amplitude de la tension R_L résultant du moment M_L de flexion alternative. Bien entendu, il faut multiplier R_L par le coefficient de concentration de tension K; il faut à la fois un tracé et une exécution extrêmement soignés pour l'abaisser à 2 environ, sauf à la jonction de viroles par soudures bout à bout où K est plus voisin de 1.

Il est important de remarquer à ce propos que:

— une bride boulonnée trop peu rigide fait naître, tant dans la virole que dans la bride elle-même, des tensions locales élevées du côté tendu;

— les raidisseurs verticaux, qui peuvent être recommandables pour les structures où prédomine l'effet du poids propre, entraînent à leur jonction supérieure avec la virole l'existence de pointes de tension.

On préfèrera à ces systèmes, par exemple: une bride rigide et symétrique par rapport à la tôle de la virole, deux brides écartées et entretoisées, un caisson circulaire dont la virole forme une paroi.

Chaque cas est à examiner en fonction du mode d'attache à la base. Il en est de même de la liaison entre viroles.

b) Nous ébauchons en fin de la présente note une méthode rationnelle de calcul à la fatigue. Nous verrons que les données statistiques nécessaires à pousser le calcul jusqu'à sa conclusion ne sont pas disponibles actuellement.

Force nous est donc de nous contenter, provisoirement, de limiter à 18,0 kg/mm² la tension de fatigue sous le vent normal. Il en résulte que la tension de fatigue sous le vent exceptionnel est de $18{,}0 \cdot 1{,}87 = 33{,}7$ kg/mm², ce qui permet à l'acier de supporter un nombre de cycles que nous considérons comme largement suffisant.

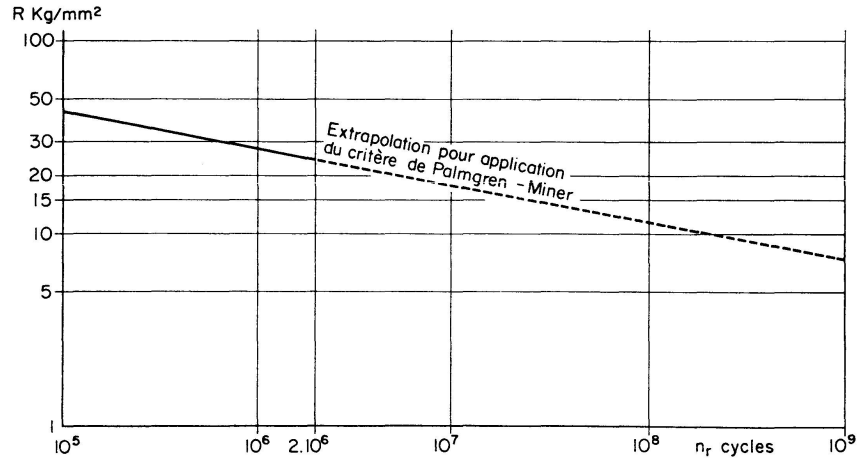


Fig. 16.

Pour l'acier A 42, on peut admettre notamment que le nombre de cycles n_r et la tension alternative R sont reliés par la droite de la fig. 16 que nous avons obtenue à partir d'essais de fatigue exécutés au CNRM pour le CECM [24]; par sécurité, nous avons abaissé quelque peu la valeur de la limite d'endurance et accru légèrement la pente de la droite. Considérant que n_r augmente très rapidement quand la tension décroît et que les pointes de vent maximum sont extraordinairement rares et brèves [25], nous estimons que la sécurité choisie est suffisante.

Pour une température de l'ordre de 250°, nous diminuons la limite d'endurance de 2 à 3 kg/mm².

Exemple numérique

A. Données

Soit la cheminée de 4,22 m de diamètre représentée à la fig. 17; elle est calculée dans le cas d'une file de cheminées. Il est prévu un revêtement en gunite de 50 mm d'épaisseur. Le toit de la centrale étant au niveau 20 m, le vent n'agit que de 20 m à 58 m. Des ailettes verticales de 250 mm de hauteur sont prévues entre le niveau 40 m et le sommet.

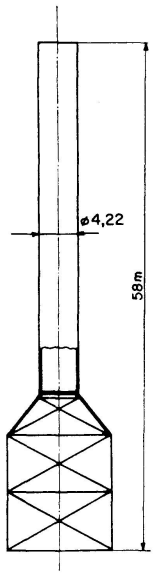


Fig. 17.

B. Calcul des tensions

a) Fréquence propre et déformée dynamique. Le calcul effectué à l'ordinateur a donné la fréquence propre $f = 1{,}615$ c/sec.

Le tableau VII donne les distances des sections considérées par rapport à la base, les efforts tranchants, les moments fléchissants et les amplitudes de la déformée.

Tableau VII

x m	S kg	M kgm	a mm
58	0	0	1,000
52	84	507	0,808
46	211	1833	0,620
40	325	3788	0,443
34	400	6188	0,290
28	450	8890	0,170
22	483	11788	0,090
20	495	12778	0,074
15,2	504	15194	0,044
5,2	504	20247	0,005
0	505	22867	0,000

b) Flèche statique A_S. Elle est déterminée dans le cas du vent normal en appliquant les efforts repris au tableau VIII, calculés à partir des pressions dynamiques q de la norme NBN 460.01.

Tableau VIII

x m	q kg/m²	Δx m	$q D \Delta x$ au niveau x	e mm	I mm⁴ de x_i à x_{i+1}
58	81,4	3	1030	10	$292{,}9 \cdot 10^9$
52	80,4	6	2030	10	$292{,}9 \cdot 10^9$
46	79,2	6	2000	10	$292{,}9 \cdot 10^9$
40	78,0	6	1970	10	$292{,}9 \cdot 10^9$
34	76,8	6	1940	12	$351{,}9 \cdot 10^9$
28	75,6	6	1910	15	$440{,}9 \cdot 10^9$
22	71,0	4	1200	15	$440{,}9 \cdot 10^9$
20	66,0	1	278	15*)	$2025{,}0 \cdot 10^9$
15,2	0				$2610{,}0 \cdot 10^9$
5,2	0				$2610{,}0 \cdot 10^9$
0	0				—

*) A la cote 20, pour des motifs de soudage, on a augmenté l'épaisseur sur une hauteur de 350 mm. Cette augmentation d'épaisseur n'a pas été considérée dans les calculs.

On a obtenu $A_S = 18{,}1$ mm.

c) Amplitude A. $\delta = 0{,}030$; coefficient réducteur dû aux ailettes: $\frac{1}{3}$.

$$F_L = C_L D q = 0{,}2 D q.$$

Vent normal:

$$A_N = 0{,}2 A_S \frac{\pi}{\delta} \frac{1}{3} = 0{,}2 \cdot 18{,}1 \frac{\pi}{0{,}030} \frac{1}{3} = 126 \text{ mm}.$$

Vent exceptionnel:

$$A_E = 126 \cdot 1{,}87 = 235 \text{ mm}.$$

d) Moments M_L. Ils seront déterminés à chaque changement d'épaisseur en utilisant le tableau VII. Le niveau est indiqué en indice.

Vent normal:
$$M_{37} = 5150 \cdot 126 = 650\,000 \text{ kgm},$$
$$M_{31} = 7800 \cdot 126 = 982\,000 \text{ kgm},$$
$$M_{20} = 12778 \cdot 126 = 1\,610\,000 \text{ kgm}.$$

Vent exceptionnel:
$$M_{37} = 5150 \cdot 235 = 1\,210\,000 \text{ kgm},$$
$$M_{31} = 7800 \cdot 235 = 1\,830\,000 \text{ kgm},$$
$$M_{20} = 12778 \cdot 235 = 3\,003\,000 \text{ kgm}.$$

e) Moments M_D. Nous avons appliqué à la partie de la cheminée munie d'ailettes

$$F_D = 0{,}73 \cdot 1{,}15\,(4{,}22 + 0{,}50)\,q \text{ kg/m}$$

et à la partie non munie d'ailettes

$$F_D = 0{,}73 \cdot 0{,}7 \cdot 4{,}22\,q \text{ kg/m}$$

q étant extrait du tableau VIII et 0,73 du tableau IV; nous avons obtenu le tableau IX.

Tableau IX

	Moments en kgm		
Vent	M_{37}	M_{31}	M_{20}
normal	72 000	115 000	209 000
exceptionnel	144 000	230 000	418 000

f) Tensions longitudinales. On a calculé une tension de compression

$$R_c = 0{,}80 \text{ kg/mm}^2 \text{ à la base.}$$

Pour simplifier, on prendra la même tension dans les autres sections calculées.

Les moments de flexion combinés sont donnés au tableau X, en kgm.

Tableau X

Vent	M_{37}	M_{31}	M_{20}
normal	654 000	988 000	1 624 000
exceptionnel	1 219 000	1 844 000	3 032 000

Tensions longitudinales combinées R, kg/mm².

Tableau XI

Vent	x_{37}	x_{31}	x_{20}
normal	5,81	6,72	8,57
exceptionnel	9,58	11,85	15,31
e/D	0,00237	0,00285	0,00357

Les tensions alternatives maxima dues à M_L sont 7,77 pour le vent normal et 14,51 pour le vent exceptionnel.

g) Tensions transversales. Le moment fléchissant $M_0 = 79\,q\,D^2$ est calculé aux différents niveaux.

Tableau XII

Vent	x m	q kg/m²	M_0 kgm	I/v mm³	R_0 kg/mm²
normal	37	77	108 000	16 700	6,47
	31	76	107 000	24 100	4,44
	20	65	91 500	37 600	2,43
exceptionnel	37	154	217 000	16 700	13,00
	31	152	214 000	24 100	8,88
	20	130	183 000	37 600	4,88

Le raccordement des viroles entre elles est effectué par soudure bout à bout. Des brides destinées à maintenir en place les viroles pendant le montage renforcent localement; il en résulte que, dans la soudure, les tensions R_0 sont négligeables.

Notons qu'au milieu des viroles de hauteur 6 mètres, un raidisseur circulaire plat a été prévu; il n'en a pas été tenu compte par sécurité.

h) Tensions combinées $R_e = \sqrt{R^2 + R_0^2 + R\,R_0}$.

Tableau XIII

Vent	x m	R_e kg/mm²
normal	37	10,64
	31	9,73
	20	10,00
exceptionnel	37	19,63
	31	18,02
	20	18,25

C. Tensions admissibles

a) Tensions sous le vent exceptionnel. Le tableau XIII montre que, sous le vent exceptionnel, les tensions R_e sont inférieures à la limite élastique 26 kg/mm².

Les tensions R sont comparées aux tensions de voilement des viroles; les rapports e/D figurent dans le tableau XI et les tensions admissibles dans le tableau VI.

b) Flambage d'ensemble. Nous n'indiquerons pas la vérification qui a été faite. Comme nous l'avons dit précédemment, il n'y a aucun risque de flambage d'ensemble.

c) Tensions alternatives. Nous considérons un coefficient de concentration de tension K égal à 1,5 dans les joints de viroles soudées bout à bout. A 350 mm de la base, comme il y a un changement d'épaisseur plus

important, nous prenons $K = 2$. Nous ne faisons pas le calcul au raccordement avec le caisson de fixation, l'augmentation de l'épaisseur de la virole compensant l'augmentation du coefficient de concentration.

Les tensions alternatives maxima valent donc:

— vent normal: $7{,}77 \cdot 2 = 15{,}54$ kg/mm²;
— vent exceptionnel: $14{,}51 \cdot 2 = 29{,}02$ kg/mm².

Les tensions maxi atteintes dans le cas du vent normal sont inférieures aux limites choisies au chapitre *D* précédent, à savoir 18,0 et 33,7 kg/mm².

Sous le vent exceptionnel, le nombre de cycles qui pourrait être supporté avant fissure, en supposant qu'il n'y ait pas d'autres moments de vibrations, serait 320 000 cycles, c'est-à-dire:

$$T = \frac{320000}{1{,}615 \cdot 3600} = 55 \text{ heures.}$$

D. Note sur les vibrations des anneaux

Nous avons obtenu sans tenir compte des raidisseurs:

e mm	f_a c/sec
10	0,94
12	1,18
15	1,55

La fréquence propre de la cheminée étant $f = 1{,}615$ c/sec, $2f$ est très différent de f_a, ce qui est satisfaisant.

E. Conclusions à tirer de l'exemple numérique

S'il n'avait pas été prévu d'ailettes anti-tourbillons, les tensions alternatives auraient été sensiblement triplées.

Sous le vent exceptionnel, la tension serait d'environ 100 kg/mm².

Indépendamment des phénomènes de fatigue – qui font intervenir pour une tension aussi élevée et purement théorique la notion de low cycle fatigue – il est évident qu'une sollicitation aussi élevée est inadmissible.

Il en résulte que l'utilisation d'un système capable de réduire à un niveau acceptable les vibrations dues au vent est la condition indispensable de résistance d'une cheminée économique.

Esquisse d'une méthode rationnelle de calcul de la résistance aux tensions alternatives

A. Introduction

Il ressort de ce qui précède que le véritable danger de ruine d'une cheminée provient des vibrations qu'elle exécute perpendiculairement au vent et que,

par conséquent, il est indispensable de vérifier que les dégâts dus à la fatigue n'excèdent pas la limite admissible.

Dans ce qui précède, nous n'avons pu évaluer la résistance de la cheminée à la fatigue que d'une manière sommaire et ne serrant pas de près la réalité physique. Les données actuellement disponibles ne permettent pas de faire mieux; néanmoins, nous nous efforçons ci-après de montrer ce que serait une méthode rationnelle de calcul. Nous avons basé cette tentative de calcul sur les notions de dégâts cumulés par fatigue et de probabilité des divers niveaux de sollicitations.

B. Critère de ruine par fatigue

Nous utiliserons pour calculer les dégâts cumulés le critère de PALMGREN-MINER dont il est largement fait usage dans d'autres domaines (missiles, réservoirs sous pression, etc. . . .) et qui a l'avantage de posséder une expression mathématique simple et maniable.

L'expérience montre que, sous une tension alternative R, la ruine est atteinte après $n_r(R)$ cycles. Considérons la composante alternative de la sollicitation de la cheminée en un point. La composante statique est faible et ne joue pratiquement aucun rôle dans le dommage par fatigue. Le calcul ci-après ne fait donc intervenir que la sollicitation de $+R$ à $-R$ due à la vibration. Si la tension R existe pendant n cycles ($n < n_r$), le dommage qui lui est dû est mesuré, par hypothèse, par le rapport n/n_r. La rupture par fatigue est atteinte lorsque le dommage cumulé est égal à l'unité: $\sum n/n_r = 1$, la somme étant étendue à tous les régimes de vibration auxquels est soumise la cheminée au cours de son existence.

C. Calcul du dommage par fatigue pour une vitesse de vent V constante

Nous avons vu que, en pratique, la cheminée vibrait toujours à sa fréquence propre; son amplitude varie de façon aléatoire et on peut calculer le carré moyen du déplacement au sommet pour une vitesse déterminée V du vent, de préférence par la méthode de FUNG, sinon à partir de l'amplitude maxima selon OZKER et SMITH que nous considérons égale à $4\sqrt{\text{carré moyen}}$.

On peut en déduire le carré moyen de la sollicitation, auquel il faut appliquer un coefficient de concentration de tension, ce qui donne finalement la valeur de σ_R, racine carrée du carré moyen de la sollicitation alternative au point le plus sollicité. A partir de cette valeur quadratique moyenne, il est possible de calculer le dommage produit par n cycles sous l'action du vent de vitesse V.

En effet, un résultat classique, dû à RICE, de la théorie générale des vibrations aléatoires de fréquence approximativement constante s'énonce comme suit [27]: la probabilité $p(R)dR$ d'une amplitude comprise entre R et $R+dR$ obéit à une loi de RAYLEIGH (fig. 18).

$$p(R) = \frac{R}{\sigma_R^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma_R^2}\right).$$

Si $T(V)$ est la durée totale du vent de vitesse V, le nombre de cycles est $T(V)f$, f étant la fréquence propre de la cheminée. La tension est R (à dR près) pendant $T(V)f\,p(R)\,dR$ cycles. Le dommage par fatigue qui en résulte est donné par l'expression

$$D(V) = T(V)f \int_0^\infty \frac{p(R)\,dR}{n_r(R)}.$$

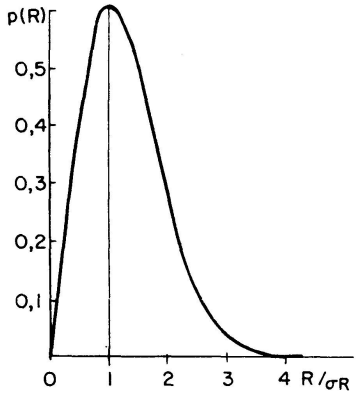


Fig. 18.

En toute rigueur, la limite supérieure de l'intégrale ne devrait pas être infinie; mais l'erreur est minime et dans le sens de la sécurité.

Le diagramme bilogarithmique reliant R et $n_r(R)$ est pratiquement une droite dans une zone assez étendue de variation de R; d'où $n_r R^b = K$, K étant une constante. Pour les aciers usuels dans la région autour de 10^6 cycles, il semble qu'on puisse prendre $b = 5$. Le nombre de cycles supportable varie donc dans une mesure extrêmement considérable avec la tension (fig. 16); rien ne peut être négligé pour que le calcul tienne compte le mieux possible de cette variation. Il est évident que la grandeur du dommage par fatigue est très sensible à la valeur de l'exposant b.

Lorsque la sollicitation n'excède pas la limite d'endurance, n_r est infini (ou, du moins, très grand). Néanmoins, il a été constaté une meilleure concordance du critère de PALMGREN-MINER et des résultats expérimentaux lorsque l'on continue à appliquer la loi $n_r R^b = K$ pour les sollicitations inférieures à la limite d'endurance.

D'où
$$D(V) = \frac{T(V)f}{K\sigma_R^2} \int_0^\infty R^{b+1} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma_R^2}\right) dR$$

$$= \frac{T(V)f}{K} [\sqrt{2}\,\sigma_R(V)]^5\, 3{,}32.$$

On peut faire usage, pour le calcul de l'intégrale, de tables telles que celles de JAHNKE et EMDE [28].

D. Effet de la direction variable du vent

La direction du vent étant variable, la tension R due à un vent de vitesse V n'existe pas toujours au même endroit; d'où une première distribution de cette tension en fonction de l'azimut. La publication de BAES et JOUKOFF [25] donne le diagramme polaire de la répartition de la direction du vent à Uccle (moyenne de 50 années); on constate la forte prédominance de l'axe SW-NE; la probabilité d'un azimut compris dans les demi-quadrants centrés sur cet axe est de près de 50%.

On peut raisonnablement admettre que la probabilité des vents les plus violents est accrue dans les directions prédominantes, ce qui accentue encore l'inégalité de leur répartition azimutale.

Faute de mieux, nous ferons donc l'hypothèse que le vent V est contenu avec une probabilité $\frac{2}{3}$ dans 2 demi-quadrants opposés et $\frac{1}{3}$ dans les autres azimuts; pour simplifier, nous supposerons ces probabilités distribuées uniformément dans chacun de ces 2 domaines (fig. 19).

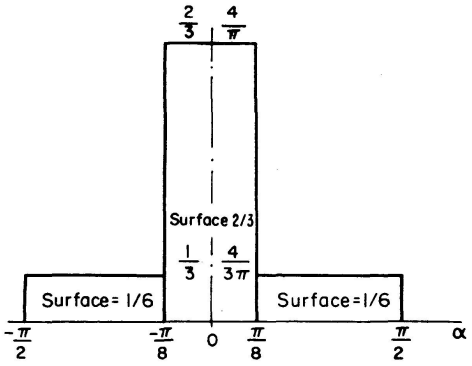


Fig. 19.

L'effet de fatigue maximum de la cheminée se produit dans le plan P perpendiculaire au vent dominant; quand le vent fait un angle α avec ce plan P, la tension dans le plan P est égale au maximum multiplié par $\cos\alpha$; $D(V)$ est donc une fonction $D(\alpha)$ de α par l'intermédiaire de $\sigma_R \cos\alpha$. Il en résulte que la valeur de $D(V)$ devient:

$$\frac{2}{3}\frac{4}{\pi}2\int_0^{\pi/8} D(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{3}\frac{4}{3\pi}2\int_{\pi/8}^{\pi/2} D(\alpha)\,d\alpha = [0{,}86\cdot 2\int_0^{\pi/8} + 0{,}14\cdot 2\int_{\pi/8}^{\pi/2}] D(\alpha)\,d\alpha.$$

E. Répartition temporelle de la vitesse V

Pour achever le calcul du dommage total D, il faut enfin tenir compte du temps pendant lequel règne le vent de vitesse V. Au cours d'une durée totale T, le vent de vitesse comprise entre V et $V+dV$ existe pendant $T(V) = T\,s(V)\,dV$. Reste à connaître la distribution $s(V)$.

Comme nous l'avons dit précédemment avec insistance, il ressort avec évidence du rapport de BAES et JOUKOFF [25] que le vent de vitesse maxima a un caractère très exceptionnel: c'est une occurrence rarissime et de durée

extrêmement brève. Il faut néanmoins prévoir l'éventualité de circonstances particulièrement défavorables, étant donné l'effet prédominant des sollicitations élevées sur le nombre de cycles supportable.

Nous n'avons pu tirer des données de la météorologie aucune détermination de la distribution $s(V)$. Les informations dont nous avons eu connaissance portent principalement sur le vent moyen mesuré pendant des intervalles consécutifs de 2 heures ainsi que sur le rapport des vitesses maxima aux vitesses moyennes pendant ces intervalles. Il ressort néanmoins de ces données (voir les fig. 25 à 29 et 36 de BAES et JOUKOFF) que les vitesses V les plus courantes obéissent probablement à une répartition analogue à celle de RAYLEIGH. Nous proposons donc d'adopter

$$s(V) = \frac{V}{\sigma_V^2} \exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma_V^2}\right)$$

et d'admettre que, pendant une vie industrielle de 40 ans, les vents de 40 à 45 m/sec règneront probablement pendant une durée cumulée de 6 heures, ceux de 45 à 50 m/sec pendant 20 minutes, ceux de plus de 50 m/sec pendant une minute, en nombres arrondis. Il en résulte $\sigma_V = 8{,}60$ m/sec.

Il est clair que les choix de $s(V)$ et de σ_V ne sont que des hypothèses de travail permettant de fixer les idées et qui n'ont de valeur que si des relevés météorologiques adéquats les confirment, au moins dans le domaine des vitesses assez élevées.

En utilisant l'expression ci-dessus de $s(V)$ et en remarquant que $\sigma_R(V) = \sigma_R(V_{max})\left(\frac{V}{V_{max}}\right)^{1,8}$, on trouve enfin l'expression du dommage total au cours de la durée T.

$$D_{tot} = \frac{T f}{K} 12{,}2 \frac{\sigma_R^5(V_{max})}{V_{max}^9} \frac{1}{\sigma_V^2} \int_0^\infty V^{10} \exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma_V^2}\right) dV.$$

Compte tenu des valeurs précitées $V_{max} = 50$ m/sec et $\sigma_V = 8{,}60$ m/sec, on aboutit à la formule

$$D_{tot} = T f \frac{\sigma_R^5(V_{max})}{K} \frac{1}{530} = \frac{T f}{530\, n_r [\sigma_R(V_{max})]}.$$

F. Coefficient de sécurité. Formule finale

Nous avons formulé ci-dessus la valeur moyenne du dommage; pour employer la terminologie du calcul des probabilités, nous avons calculé l'espérance mathématique de D. Les valeurs possibles de D se répartissent autour de la moyenne suivant une loi très proche de la distribution gaussienne, par application du théorème fondamental de la limite centrale. L'écart quadratique moyen de cette distribution dépend des écarts propres aux différentes

étapes du calcul. On peut montrer que celui qui provient de l'application de la loi de RAYLEIGH est très petit par suite de la valeur élevée de l'exposant b.

Pour la répartition de l'orientation du vent ainsi que pour l'exposant b, nous avons admis les hypothèses incluant, croyons-nous, des marges de sécurité.

Le critère de PALMGREN-MINER n'est pas à l'abri de la critique et demande un coefficient de sécurité important; toutefois, on ne perdra pas de vue que la naissance d'une fissure pendant une tempête exceptionnelle n'entraînera pas ipso facto la ruine de la cheminée.

L'incertitude majeure provient de la durée d'existence des vents de vitesse élevée, faute de données expérimentales.

Nous proposons donc que D soit affecté d'un facteur de sécurité très élevé, de l'ordre de 10.

D'où provisoirement le critère ci-après: le nombre de vibrations qu'accomplirait la cheminée en oscillant continuellement à sa fréquence propre pendant 40 ans doit être inférieur à 53 fois le nombre de cycles lu sur la fig. 16 pour la sollicitation $\sigma_R(V_{max})$. On fera usage de la droite extrapolée au-delà de la limite d'endurance.

Ou encore: $f\, 2{,}5 \cdot 10^7 <$ nombre de cycles pour $\sigma_R(V_{max})$.

G. Application numérique à la cheminée calculée dans la présente note

La tension maxima due à la fatigue étant 29,02 kg/mm², σ_R vaut $\frac{1}{4}$ de cette valeur, soit 7,25 kg/mm². Sur la fig. 16, il correspond à cette valeur un nombre de cycles $n_r = 7{,}25 \cdot 10^8$.

La fréquence propre f étant de 1,615, le critère de sécurité est largement satisfait.

En l'absence d'ailettes anti-tourbillons, la tension serait environ triplée, soit 22 kg/mm². Le nombre de cycles n_r étant alors $3{,}3 \cdot 10^6$, la sécurité serait largement déficiente.

H. Correction pour les files de cheminées

C_L est doublé, sauf pour la première cheminée, lorsque le vent souffle parallèlement à la file. Nous supposerons, pour fixer les idées et ne pas compliquer

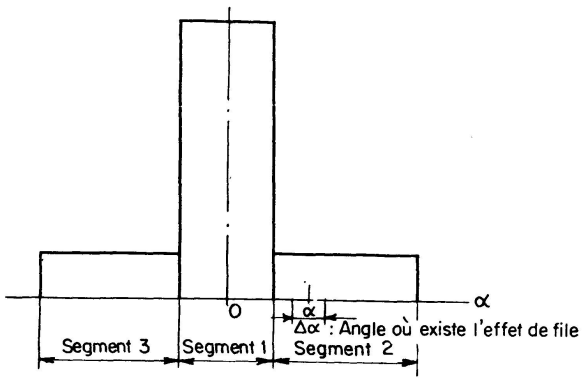


Fig. 20.

davantage la question, que ce doublement subsiste dans un angle $\Delta\alpha$ de la direction du vent, avec $\Delta\alpha = 1{,}5\frac{D}{L}$ radians, D étant le diamètre, en m et L l'entracte des cheminées, en m.

Si α est l'angle de la file avec la direction de l'axe des vents dominants, la fig. 20 montre qu'il faut ajouter à $D(V)$ un terme correctif $[D(2\sigma_R \cos\alpha) - D(\sigma_R \cos\alpha)]\Delta\alpha$, multiplié par 0,86 si α tombe dans le segment 1, par 0,14 s'il tombe dans les segments 2 ou 3.

On trouve aisément que le dommage D_{tot} calculé précédemment doit être multiplié par $1 + \frac{D}{L}\cos^5\alpha \times$ (62 ou 10, selon l'angle α).

Conclusions

A. Nous pensons avoir montré qu'il est nécessaire d'introduire dans les règlements relatifs à l'effet du vent sur les cheminées des prescriptions tenant compte de la sollicitation la plus dangereuse, provenant de la vibration perpendiculaire à la direction du vent.

Faute de mieux, nous recommandons le calcul utilisant la méthode et les coefficients tirés principalement des travaux de Ozker et Smith.

Il serait cependant préférable que des recherches sur le spectre de la sollicitation, le coefficient d'amortissement et la distribution des vitesses du vent permettent d'appliquer une méthode de calcul plus rationnelle. Sans doute l'esquisse que nous en avons proposée est-elle très imparfaite; sans doute faut-il aussi admettre que les circonstances météorologiques locales ne seraient généralement pas connues avec une bonne précision; en particulier, il est certain qu'un vent soutenu (ce qui est le cas en tunnel, près de la mer, dans une vaste plaine) est plus nuisible qu'un vent d'allure irrégulière (ce qui est le cas dans l'intérieur du pays, particulièrement en site tourmenté).

Mais il nous a paru néanmoins que la méthode esquissée méritait, malgré toutes ses imperfections, d'être présentée aux lecteurs, parce que c'est dans de telles voies, croyons-nous, que l'on devra rechercher le calcul du danger de ruine des constructions sous l'effet de la fatigue.

B. Le danger de ruine d'une construction possède toujours, dans une mesure variable avec la construction, un caractère aléatoire. Il nous paraît évident que, dès que ce caractère s'accentue, la notion de la garantie donnée par le constructeur doit évoluer. La garantie ne peut alors signifier que l'engagement du constructeur de se conformer soit à un règlement national ou imposé par le maître de l'œuvre, soit à une méthode proposée par le constructeur et admise par le client. Cette garantie est accomplie lorsque le calcul, le dessin et la construction ont été faits en conformité avec cet engagement.

C. Il nous paraît superflu d'insister sur la nécessité de recherches permettant de combler, si c'est possible, les lacunes de la connaissance des phénomènes

de vibration des grandes cheminées. Il est extrêmement souhaitable que, sur un sujet important mais de coût relativement modeste, une collaboration internationale puisse s'établir.

* * *

Avant de terminer, nous exprimons nos remerciements aux Directions du C.R.I.F. et de l'I.R.S.I.A. pour leur aide financière, aux professeurs de l'Institut Von-Karman de Rhode-St-Genèse et du Laboratoire aérodynamique de l'Université de Liège pour les facilités qui nous ont été données pendant les essais ainsi qu'à toute l'équipe de chercheurs du C.R.I.F. avec qui nous avons collaboré pendant plusieurs années.

Bibliographie

1. M. Alexandre. Les vibrations des cheminées en tôle. C.E.R.E.S. Tome X, 1959.
2. Notes techniques du C.E.C.M., C. 30, Calcul des pylônes haubanés. 15. 5. 54.
3. Y. C. Fung. Fluctuating lift and drag acting on a cylinder in a flow at super-critical Reynolds numbers. Journal of Aerospace Sciences, 1960.
4. C. Scruton. On the wind-excited oscillations of stacks, towers and masts. International Conference on the wind effects on buildings and structures, juin 1963.
5. K. Nakagawa, T. Fujino, Y. Arita et T. Shima. An experimental study of aerodynamic devices for reducing wind-induced oscillatory tendencies of stacks. International Conference on the wind effects on buildings and structures, juin 1963.
6. M. S. Ozker et J. O. Smith. Factors influencing the dynamic behavior of tall stacks under the action of wind. Transactions of the ASME, août 1956.
7. J. O. Smith et J. H. McCarthy. Wind versus tall stacks. Mechanical Engineering, janvier 1965.
8. A. Brunner. Amortisseur d'oscillations hydrauliques pour cheminée. VIIIe Journée de l'hydraulique, Lille, juin 1964.
9. C. Scruton. Wind-excited oscillations of tall stacks. The Engineer, 10. 6. 55.
10. K. De Ghetto et W. Long. Dynamic stability design of stacks and towers. Transactions of the ASME, nov. 1966.
11. J. Smith. Devising a test for plant stack stability. Combustion, oct. 1956.
12. C. Scruton. Note on a device for the suppression of the vortex-excited oscillations of flexible structures of circular or near-circular section, with special reference to its application to tall stacks. NPL Aero note 1012, avril 1963.
13. C. F. Cowdrey et J. A. Lawes. Drag measurements at high Reynolds numbers of a circular cylinder fitted with three helical strakes. NPL Aero 384, juillet 1959.
14. R. A. Briggs. Will wind-spoilers solve stack vibration problem. Power Engineering, août 1962.
15. Y. Chen. Oscillations d'un cylindre provoquées par l'écoulement aval à des nombres de Reynolds hypercritiques. Revue Technique Sulzer, 1966.
16. L. Blanjean. L'action du vent sur les constructions. Ossature métallique, n° 2, 1949.
17. Notes techniques du C.E.C.M., B. 10. 51. Problèmes d'instabilité des éléments de construction.
18. Règles et annexes NV 45 définissant les effets de la neige et du vent sur les constructions. Juillet 1967. Documentation technique du Bâtiment et des Travaux Publics, Paris.

19. A. Roshko. Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number. Journal of Fluid Mechanics, 1961.
20. M. Alexandre. Les modèles réduits dans l'étude des vibrations de structures soumises au vent. Application aux cheminées d'usine. Revue M, n° 2, 1965.
21. Y. C. Fung. An introduction to the theory of aeroelasticity. John Wiley & Sons.
22. URSS. Calcul organique des constructions. Charges du vent. Standard GOST 1664-42, traduction de Mme Tavastvjerna.
23. S. Timoshenko et J. Gere. Theory of Elastic Stability. MacGraw-Hill Book Company, 1961.
24. P. E. Lagasse et F. Marquet. Etude comparative du comportement à la fatigue d'aciers de construction métallique. CECM, mars 1960.
25. L. Baes et A. Joukoff. Rapport sur la vitesse du vent en Belgique considéré au point de vue du calcul des constructions. Institut Belge de Normalisation, sept. 1949.
26. S. Timoshenko. Théorie des vibrations. Librairie polytechnique Béranger.
27. S. Crandall et W. Mark. Random vibrations in mechanical systems. Academic Press.
28. E. Jahnke et F. Emde. Tables of functions. Dover Publications.
29. Basic Practice BP 12-1-2. Pressure Vessels Design and Construction. ESSO Engineering.

Résumé

Après avoir fait le rappel des connaissances actuelles en matière de vibrations des grandes cheminées soumises à l'action du vent, les auteurs proposent une méthode de calcul pratique qui tient compte du spectre des sollicitations par le vent et des tensions admissibles au voilement et à la fatigue.

Ils suggèrent également une méthode de calcul à base probabiliste dont l'application requiert une meilleure connaissance statistique du vent.

Etant donné l'importance du sujet, il est souhaitable que des recherches se poursuivent tant météorologiques que relatives aux coefficients de portance et d'amortissement à introduire dans les formules.

Zusammenfassung

Die Autoren bringen die derzeitigen Erkenntnisse auf dem Gebiet der Schwingungen großer Schornsteine unter Windeinfluß in Erinnerung. Sie schlagen ein praktisches Berechnungsverfahren vor, bei welchem das Spektrum der Beanspruchungen durch Wind und die gegen Einbeulen und Ermüdung zulässigen Spannungen berücksichtigt werden.

Sie schlagen ebenfalls ein auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruhendes Verfahren vor, dessen Anwendung jedoch eine bessere statistische Kenntnis der Winde erfordert.

Wegen der großen Bedeutung dieses Gebietes ist es wünschenswert, daß

weitere Untersuchungen angestellt werden und zwar sowohl auf meteorologischem Gebiet als auch im Hinblick auf die in die Formeln einzusetzenden Auftriebs- und Dämpfungsbeiwerte.

Summary

After summarising the present state of knowledge relating to wind-induced vibration of tall chimney stacks, the authors put forward a practical method of calculation which takes into account the spectrum of the oscillatory wind lift and the allowable buckling and fatigue stresses.

They further suggest a probabilistic method, the application of which requires a better knowledge of wind statistics. In view of the importance of the subject, it is to be hoped that research work will continue, both on its meteorological aspects and in regard to the lift and damping coefficients to be introduced into the formulae.

Long Reinforced Concrete Columns in Biaxial Bending

Flexion biaxiale de colonnes élancées en béton armé

Lange Stahlbetonsäulen unter zweiaxialer Biegung

R. F. WARNER
Senior lecturer in Civil Engineering, University of New South Wales, Australia

1. Introduction

Various methods are available for computing the ultimate strength in combined compression and biaxial bending of rectangular [1, 2, 3] and irregularly shaped [4] reinforced concrete sections. The strength of long reinforced concrete compression members has also been studied to some extent for the specific case of bending about one principal axis [5, 6, 7]. The general case of long reinforced concrete column behaviour in biaxial bending has not, to the knowledge of the author, been considered in the literature, despite the fact that columns in many structures are subjected to significant biaxial bending action.

A method for determining the load-deformation characteristics of reinforced concrete column sections in biaxial bending is briefly described in this paper. The method is then used in a study of the behaviour of pin-ended columns subjected to loads with biaxial end eccentricities.

Notation

a depth of section
b width of section
e_r eccentricity of load measured from centroid of section
e_x eccentricity of load in x–y axis system; see Fig. 1 a
e_y eccentricity of load in x–y axis system; see Fig. 1 a
e_α e_x/a

e_β e_y/b
e_{r0} eccentricity of load on long column; see Fig. 3
f_c concrete stress
f'_c concrete control cylinder strength
f_s steel stress
f_{sy} steel yield stress
k_1 ratio of strength of concrete in column to control cylinder strength
l column length
p A_s/A_c; proportion of steel reinforcement
q $\frac{p f_{sy}}{k_1 f'_c}$; reinforcement ratio
A_c concrete area in section
A_s steel area in section
E_c ϵ_c/ϵ'_c; concrete strain ratio
E_{ij} value of E_c in the (i,j)th concrete elemental area
E_k value of E_s in the k-th steel elemental area
E_s ϵ_s/ϵ_{sy}; steel strain ratio
E_0 ϵ_0/ϵ'_c
E_1 ϵ_1/ϵ'_c
N_a number of rows of elemental concrete areas
N_b number of columns of elemental concrete areas
N_c total number of elemental concrete areas
N_s number of elemental steel areas
P compressive force in section
P_{max} strength of long column; see Eq. (33)
P_0 strength of column of zero length
P_u ultimate strength of section for zero eccentricity
S_c $f_c/k_1 f'_c$; concrete stress ratio
S_{ij} value of S_c in the (i,j)th concrete element
S_k value of S_s in the k-th steel element
S'_k equivalent concrete stress ratio in the k-th steel element
S_s f_s/f_{sy}; steel stress ratio
α x/a; non-dimensional co-ordinate
β y/b; non-dimensional co-ordinate
γ_1 parameter affecting the shape of the loading portion of the concrete stress-strain relation
γ_2 parameter affecting the shape of the unloading portion of the concrete stress-strain relation
ϵ_c concrete strain
ϵ'_c concrete strain when stress is $k_1 f'_c$
ϵ_s steel strain
ϵ_{sy} steel yield strain
ϵ_0 strain at corner 0; maximum compressive strain in section

ϵ_1 strain at corner 1; minimum strain in section
η a/b; depth to width ratio of section
θ inclination of neutral axis of strain to y axis. Also inclination of plane of assumed deflected shape to the x axis
ϕ curvature
ψ angle defining biaxial eccentricity of force P acting on a section
ψ_0 angle defining biaxial eccentricity of load on a long pin ended column

2. Load Deformation Characteristics of Cross-Section

A symmetrically reinforced rectangular cross-section is considered and an x–y axis system is taken with origin at the corner 0, as shown in Fig. 1a.

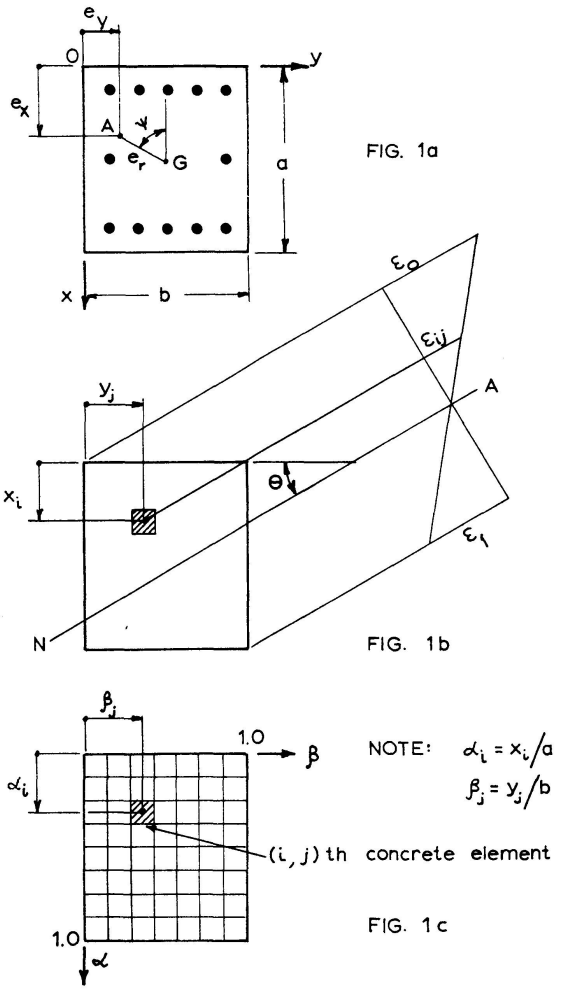


Fig. 1. Cross section details.

A force P is assumed to act at point A, defined in the x–y axes by the eccentricities e_x and e_y. The eccentricity of the load with respect to the centroid G of the section is defined by the distance e_r and the angle ψ, where

$$e_r = \sqrt{(b/2 - e_y)^2 + (a/2 - e_x)^2}, \tag{1}$$

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{b/2 - e_y}{a/2 - e_x}\right). \tag{2}$$

If the usual assumptions of perfect bonding and plane distribution of strains are made, the strain distribution in the section can be defined by the three quantities ϵ_0, ϵ_1 and θ. The strain ϵ_0 occurs in corner 0. For convenience it is assumed that e_0 is the maximum positive (i.e. compressive) strain in the section. The strain ϵ_1, which may be positive or negative, occurs in the corner diagonally opposite 0 and is the minimum strain in the section. The angle θ, which lies in the range $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$, defines the inclination of the neutral axis of strain to the y axis, as indicated in Fig. 1b.

For various particular cases, e.g. uniaxial bending ($\theta = 0$) and diagonal bending of square sections ($a = b$, $\theta = 45°$), it is possible to derive simple analytic expressions for the compressive force and moments which exist in a section with a given strain distribution. However, an analytic approach is not feasible in the general case of biaxial bending. In the present study, an approximate method is adopted in which the steel and concrete in the cross-section are partitioned into many small elemental areas. The total force in the section is thus evaluated by summation of the elemental forces acting on the elemental areas, while the moments are found by summation of the moments of the elemental forces. This method is essentially an extension of a previous study of the ultimate strength of reinforced concrete sections in combined compression and biaxial bending [4].

The rectangular concrete section is thus considered to be made up of N_c rectangular elements, each of width Δb and depth Δa and area $\Delta A_c = \Delta b \Delta a$.

The numbers of rows and colums of elements are $N_a = a/\Delta a$ and $N_b = b/\Delta b$, respectively. The position of the (i,j)th element is defined by the co-ordinates of its centroid, x_i and y_j, as shown in Fig. 1c. The strain at this point is given by the following expression

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_1 + (\epsilon_0 - \epsilon_1)\left(1 - \frac{x_i \cos\theta + y_j \sin\theta}{a\cos\theta + b\sin\theta}\right). \tag{3}$$

The concrete stress-strain relation is assumed to be of the shape indicated by Fig. 2a, and is expressed non-dimensionally in terms of stress ratios and strain ratios as

$E_c \leqq 0$: $\qquad S_c = 0,$ (4a)

$0 \leqq E_c \leqq 1.0$: $\qquad S_c = \gamma_1 E_c + (3 - 2\gamma_1) E_c^2 + (\gamma_1 - 2) E_c^3,$ (4b)

$1.0 \leqq E_c \leqq \gamma_2$: $\qquad S_c = 1 - \dfrac{1 - 2E_c + E_c^2}{1 - 2\gamma_2 + \gamma_2^2},$ (4c)

$E_c \geqq \gamma_2$: $\qquad S_c = 0,$ (4d)

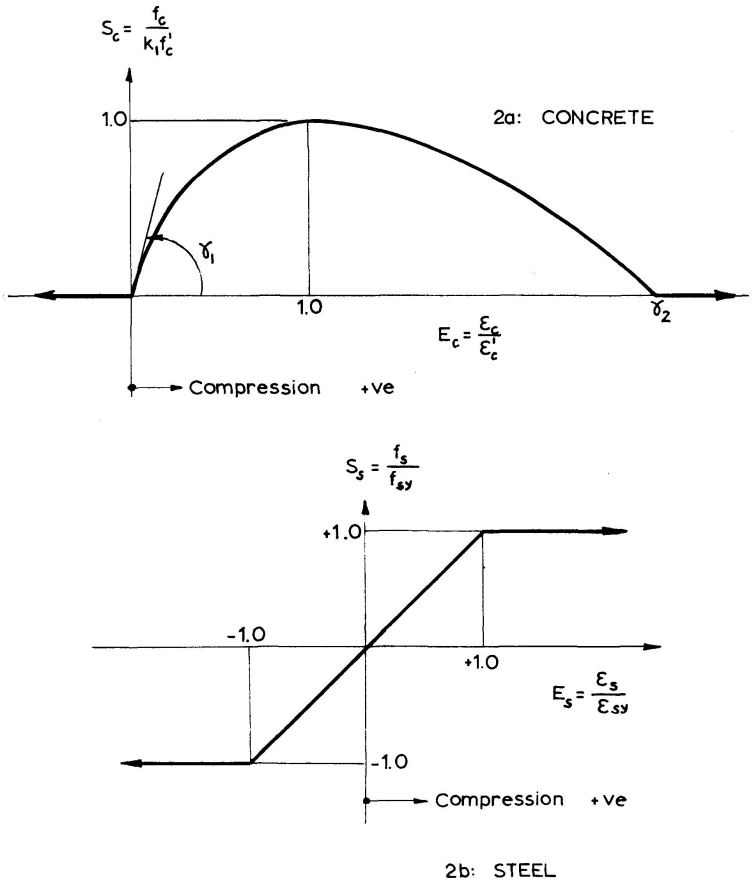


Fig. 2. Stress strain relations.

where the quantity S_c is stress, non-dimensionalised by dividing by the concrete compressive strength,

$$S_c = \frac{f_c}{k_1 f_c'}, \tag{5}$$

and E_c is strain, normalised by dividing by the strain ϵ_c' which occurs at the stress $k_1 f_c'$,

$$E_c = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c'}. \tag{6}$$

The open parameter γ_1 allows the shape of the loading portion of the curve to be adjusted to suit concretes of various stiffness E_m,

$$\gamma_1 = \frac{E_m \epsilon_c'}{k_1 f_c'}, \tag{7}$$

while the parameter γ_2 allows the shape of the descending portion of the curve to be varied. It will be noted also that the unloading region, $E_c > 1.0$, extends indefinitely and so caters for large compressive strains which can occur in restrained members under certain conditions [8].

It is convenient to rewrite Eq. (3) in terms of strain ratios,

$$E_{ij} = E_1 + (E_0 - E_1)\left(1 - \frac{\eta\,\alpha_i \cos\theta + \beta_j \sin\theta}{\eta \cos\theta + \sin\theta}\right), \tag{8}$$

in which α_i and β_j are non-dimensionalised coordinates,

$$\alpha_i = \frac{x_i}{a}, \qquad \beta_j = \frac{y_j}{b},$$

and η is the depth-to-width ratio of the section,

$$\eta = \frac{a}{b}.$$

Eqs. (4) and (8) together allow the stress ratio S_{ij} and hence the elemental force in the (i,j)th concrete element,

$$\Delta P = k_1 f'_c \Delta A_c S_{ij}, \tag{9}$$

to be determined for any assumed strain distribution. The moments of this elemental force about the x and y axes are

$$\Delta M_x = b\,k_1 f'_c \Delta A_c \beta_j S_{ij}, \tag{10}$$

$$\Delta M_y = a\,k_1 f'_c \Delta A_c \alpha_i S_{ij}. \tag{11}$$

The steel reinforcement in the cross-section is assumed to be distributed in N_s elements, each of area ΔA_s. The position of the k-th steel element is defined by its co-ordinates $\alpha_k = x_k/a$ and $\beta_k = y_k/b$, so that the strain ϵ_k in this element can be expressed, using a strain ratio $E_k = \epsilon_k/\epsilon_{sy}$, as

$$E_k = \left\{E_1 + (E_0 - E_1)\left(1 - \frac{\eta\,\alpha_k \cos\theta + \beta_k \sin\theta}{\eta \cos\theta + \sin\theta}\right)\right\}\frac{\epsilon'_c}{\epsilon_{sy}}. \tag{12}$$

The elasto-plastic stress-strain relation represented in Fig. 26 is taken to apply to all steel elements;

$$E_s \leqq -1.0 : S_s = -1.0, \tag{13a}$$

$$-1.0 \leqq E_s \leqq +1.0 : S_s = E_s, \tag{13b}$$

$$E_s \geqq +1.0 : S_s = +1.0. \tag{13c}$$

In Eqs. (13) the stress and strain ratios are obtained by dividing by yield stress and yield strain, respectively. Eqs. (12) and (13) define the stress ratio S_k for the k-th steel element, and hence the elemental force,

$$\Delta P = f_{sy} \Delta A_s S_k, \tag{14}$$

can be determined together with the elemental moments,

$$\Delta M_x = b\,f_{sy} \Delta A_s \beta_k S_k, \tag{15}$$

$$\Delta M_y = a\,f_{sy} \Delta A_s \alpha_k S_k. \tag{16}$$

Since each elemental steel area excludes an equal area of concrete from the section, the above expressions are modified as follows:

$$\Delta P = \Delta A_s (f_{sy} S_k - k_1 f'_c S'_k), \tag{14a}$$

$$\Delta M_x = b \Delta A_s \beta_k (f_{sy} S_k - k_1 f'_c S'_k), \tag{15a}$$

$$\Delta M_y = a \Delta A_s \alpha_k (f_{sy} S_k - k_1 f'_c S'_k). \tag{16a}$$

In the above equations, the double subscript ij is used for concrete stresses and strains, while the single subscript k applies to steel stresses and strains. The only term which does not follow this pattern is S'_k, which is an "equivalent" concrete stress ratio in the k-th steel element. This quantity is the concrete stress ratio obtained from Eqs. (13) for the strain in the k-th steel element.

The total force P and the total moments M_x and M_y are now obtained by summation over the cross-section. This yields the expressions

$$P = k_1 f'_c \Delta A_c \{\sum_{i=1}^{N_a} \sum_{j=1}^{N_b} S_{ij} + q' \sum_{k=1}^{N_s} S_k - p' \sum_{k=1}^{N_s} S'_k\}, \tag{17}$$

$$M_x = P e_y = b k_1 f'_c \Delta A_c \{\sum_{i=1}^{N_a} \sum_{j=1}^{N_b} \alpha_i S_{ij} + q' \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_k S_k - p' \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_k S'_k\}, \tag{18}$$

$$M_y = P e_x = a k_1 f'_c \Delta A_c \{\sum_{i=1}^{N_a} \sum_{j=1}^{N_b} \beta_j S_{ij} + q' \sum_{k=0}^{N_s} \beta_k S_k - p' \sum_{k=0}^{N_s} \beta_k S'_k\}, \tag{19}$$

in which the following terms are introduced,

$$p' = \frac{N_c}{N_s} p, \qquad q' = \frac{N_c}{N_s} q, \qquad p = \frac{A_s}{A_c}, \qquad q = \frac{p f_{sy}}{k_1 f'_c}.$$

In the special case of zero eccentricity, i.e. for constant strain over the cross-section, the ultimate strength is given by

$$P_u = k_1 f'_c \Delta A_c N_c (1 - p + q S_0), \tag{20}$$

where S_0 is the steel stress ratio corresponding to the strain ratio $\epsilon'_c / \epsilon_{sy}$. Eq. (17) may be non-dimensionalised by dividing by Eq. (20);

$$\frac{P}{P_u} = \frac{\sum_{i=1}^{N_a} \sum_{j=1}^{N_b} S_{ij} + q' \sum_{k=1}^{N_s} S_k - p' \sum_{k=1}^{N_s} S'_k}{N_c (1 - p + q S_0)}. \tag{21}$$

The equations for moments M_x and M_y can likewise be non-dimensionalised by dividing by Eq. (17). This yields expressions for the eccentricities $e_\alpha = e_x / a$ and $e_\beta = e_y / b$;

$$e_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{N_a} \sum_{j=1}^{N_b} \alpha_i S_{ij} + q' \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_k S_k - p' \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_k S'_k}{\sum_{i=1}^{N_a} \sum_{j=1}^{N_b} S_{ij} + q' \sum_{k=1}^{N_s} S_k - p' \sum_{k=1}^{N_s} S'_k}, \tag{22}$$

$$e_\beta = \frac{\sum_{i=1}^{N_a}\sum_{j=1}^{N_b}\beta_j S_{ij} + q'\sum_{k=1}^{N_s}\beta_k S_k - p'\sum_{k=1}^{N_s}\beta_k S'_k}{\sum_{i=1}^{N_a}\sum_{j=1}^{N_b} S_{ij} + q'\sum_{k=1}^{N_s} S_k - p'\sum_{k=1}^{N_s} S'_k}. \tag{23}$$

Finally, Eqs. (1) and (2) can be rewritten in terms of e_α and e_β;

$$\frac{\epsilon_r}{b} = \sqrt{(0.5-e_\beta)^2 + \eta^2 (0.5-e_\alpha)^2}, \tag{24}$$

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\eta}\frac{0.5-e_\beta}{0.5-e_\alpha}\right). \tag{25}$$

The above equations allow the force and moments to be calculated in a rectangular section with a known strain distribution. The large number of arithmetic calculations required can be readily and speedily executed with a digital computer. Indeed, this analysis has been developed specifically for computer use, and the equations have been incorporated in several programs. These programs use iterative type techniques which search out and find the deformation condition in a section for a given loading condition. One such program has been used in a study of the general moment curvature relation for column sections in biaxial bending [9].

For the study of long column behaviour described in the following section of this paper a simple non-iterative subroutine was written in FORTRAN IV language which evaluates the force P/P_u together with the biaxial eccentricity (i.e. e_r/b and ψ) for any given set of input values E_0, E_1 and θ. Other input data for this sub-program include partitioning details (N_a, N_b, N_s) and section properties (η, p, q). The co-ordinates of the steel elements, α_k and β_k, are generated in the subroutine, but details such as reinforcement cover, number of bars (elemental areas) in top, bottom and side faces, are read in as data.

Although computations carried out using the method described in this section are necessarily approximate, any desired accuracy can be obtained by a suitable choice of the fineness of the partitioning of the section. Furthermore, several important advantages are associated with this finite approach and have been discussed in some detail in References [4, 9]. Briefly, sections with irregular shape and non-uniform distribution of reinforcement can be treated in a simple manner, while effects such as strain hardening in the steel reinforcement and finite concrete tensile strength can be taken into account with only minimal changes to the computer programs and very slight increases in required computer computation times.

3. Long Column Behaviour

If the equations derived in the previous section of this paper are used to evaluate the actions in a section for various assumed strain distributions it

becomes clear that the neutral axis of strain is not usually perpendicular to the line $A\,G$ (Fig. 1a) joining the point of load application A to the centroid G of the section. For a square, symmetrically reinforced cross-section the difference between the angles θ and ψ can be as large as ten degrees. For a constant load P, the angle difference $\delta = \theta - \psi$ tends to increase with increasing moment [9]. For rectangular sections, the difference δ can of course become much larger than ten degrees.

It therefore follows that the deflected longitudinal axis of a reinforced concrete column in biaxial bending would be non-planar, following a complicated path in three dimensions. It further follows that a typical cross-section in such a column would be subjected to small torsions and shears, in addition to the axial force and bending moments. Nevertheless, at least in the case of members with solid sections, it is doubtful if these secondary actions would be large enough to affect significantly the deflected shape and strength of the column. In this present preliminary study the section is assumed to be torsionally rigid and the torsions and shears are ignored. Furthermore, the non-planar deflected shape of the column is approximated by a planar curve.

The behaviour of a pin ended reinforced concrete column is considered for the special case of longitudinal loads applied with equal biaxial eccentricities at each end. This load condition is shown in Fig. 3, with a force P acting at an eccentricity defined by the distance e_{r0} from the geometric centre and the angle ψ_0.

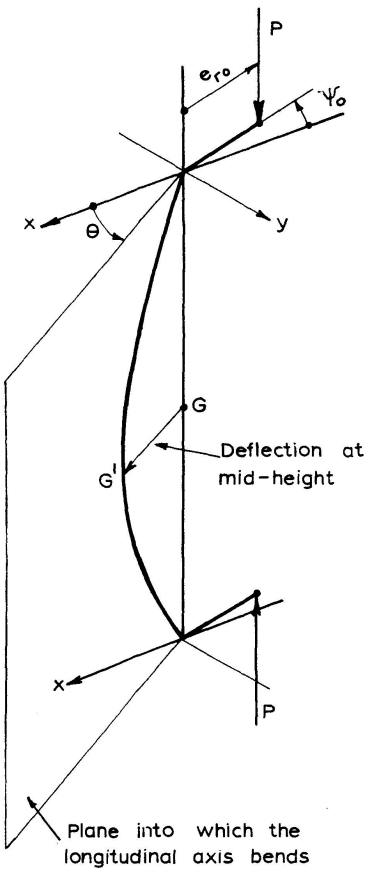


Fig. 3. Assumed deflected shape.

The deflected shape is approximated by a cosine curve. The two parameters defining the assumed curve are w, the maximum deflection in the column at mid-height, and θ, the angle between the x axis and the plane into which the centre line is assumed to have deflected. Note that the angle θ is not equal to the angle ψ_0. The deflection is therefore represented by θ and the equation

$$s = w \cos \frac{\pi z}{l}.$$

The curvature in the section at mid-height is therefore

$$\phi = w\left(\frac{\pi}{l}\right)^2.$$

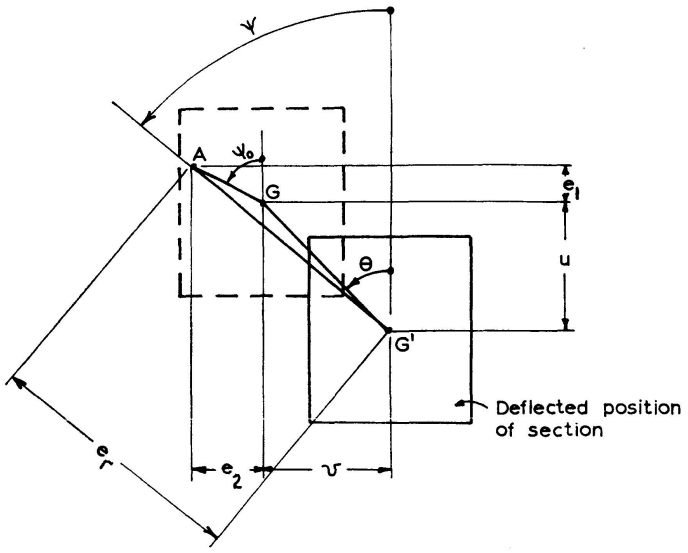
A second equation for this curvature can be written in terms of the strains in the section,

$$\phi = (\epsilon_0 - \epsilon_1)(a \cos\theta + b \sin\theta)^{-1},$$

hence the following expression for the deflection w is obtained,

$$\frac{w}{b} = \frac{\epsilon_c'}{\pi^2} \frac{E_0 - E_1}{(\eta \cos\theta + \sin\theta)} \left(\frac{l}{b}\right)^2. \tag{26}$$

Consideration of the deformations in the section at mid-height shows that the neutral axis of strain for this section is perpendicular to the deflection plane. Thus, the neutral axis is inclined at the angle θ to the y axis. In Fig. 4 the original and the deflected positions of the section are represented. The eccentricity of the force P relative to the geometric centre in its deflected position, G', is made up of the initial eccentricity e_{r0} at inclination ψ_0, plus



A: Point of application of load.
G: Geometric Centre of mid-height section in undeflected position.
G': Deflected position of G.

Fig. 4. Deflection of section at mid-height.

the deflection w at inclination θ. The components of w in the x and y directions are

$$u = w\cos\theta, \tag{27}$$

$$v = w\sin\theta, \tag{28}$$

respectively, and those of e_{r0} are

$$e_1 = e_{r0}\cos\psi_0, \tag{29}$$

$$e_2 = e_{r0}\sin\psi_0. \tag{30}$$

The total eccentricity of P is thus given by

$$\frac{e_r}{b} = \sqrt{\left(\frac{e_1}{b}+\frac{u}{b}\right)^2 + \left(\frac{e_2}{b}+\frac{v}{b}\right)^2}, \tag{31}$$

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{e_2/b + v/b}{e_1/b + u/b}\right). \tag{32}$$

Eqs. (26) through (32) allow the eccentricity of P to be calculated for any given set of values E_0, E_1 and θ in the mid-height cross-section. An independent calculation of e_r/b and ψ for this same strain distribution can also be made by considering equilibrium of internal moments in this section, i.e. by using the equations derived in Section 2 of this paper.

In general, the two sets of values of e_r/b and ψ will not agree if computed for an arbitrarily chosen set of input values E_0, E_1 and θ. This non-agreement indicates that the assumed strain distribution cannot occur at any stage of loading of the particular column under consideration. Conversely, only when the separate calculations give the same values for e_r/b and ψ does the strain distribution represent a possible stage in the loading of the column.

It is also clear that the maximum compressive strain E_0 increases monotonically from zero as the column deflects. This is not true, necessarily, for either E_1 or θ. Nevertheless, for a chosen E_0 value, a search technique can be employed to determine a set of values of E_1 and θ which equates, within a specified allowable error, the two sets of values of e_r/b and ψ as calculated on the one hand from the deflection requirement (Eqs. (31) and (32)), and on the other hand from the equilibrium requirement (Eqs. (24) and (25)).

Furthermore, by choosing successive, increasing values of E_0 and searching each time to obtain the corresponding E_1 and θ, a sequence of points on the load deflection curve of the column can be obtained. The strength of the column can then be found as the load at which the deflection curve becomes horizontal, i.e. when

$$\frac{dP}{dw} = 0. \tag{33}$$

A general computer program has been written which can be used to determine the load-deflection curve (P/P_u versus w/b and θ) for a wide range of

possible column shapes and sizes. Computations based on the equilibrium requirement in this program are made using the subroutine described in Section 2 of this paper.

Development of the necessary search technique was simplified to some extent by the fact that the values of ψ and θ change only slowly as E_0 increases, while changes in E_1 are usually of the same order of magnitude as the changes in E_0. Thus, for the n-th E_0 value, the initial trial values of both θ and E_1 can be taken equal to their final values for the previous, $(n-1)$-st, step. However, an exhaustive and time consuming computer "search" is sometimes required to find the values of θ and E_1 which correspond to the first (smallest) E_0 value.

Additional input data required in the main program include the errors in e_r/b and ψ which will be tolerated in the search procedure, and magnitude of the increment of E_0. To maintain maximum generality, all input and output data are non-dimensionalised while all stresses and strains used in the computations are evaluated in the ratio forms of Eqs. (5) and (6). The program has been written in FORTRAN IV language and has been tested and run on an IBM System 360/50 computer. The computation time required to obtain one complete load deflection curve is somewhat less than one minute.

In Fig. 5 typical load deflection curves are plotted from computations made

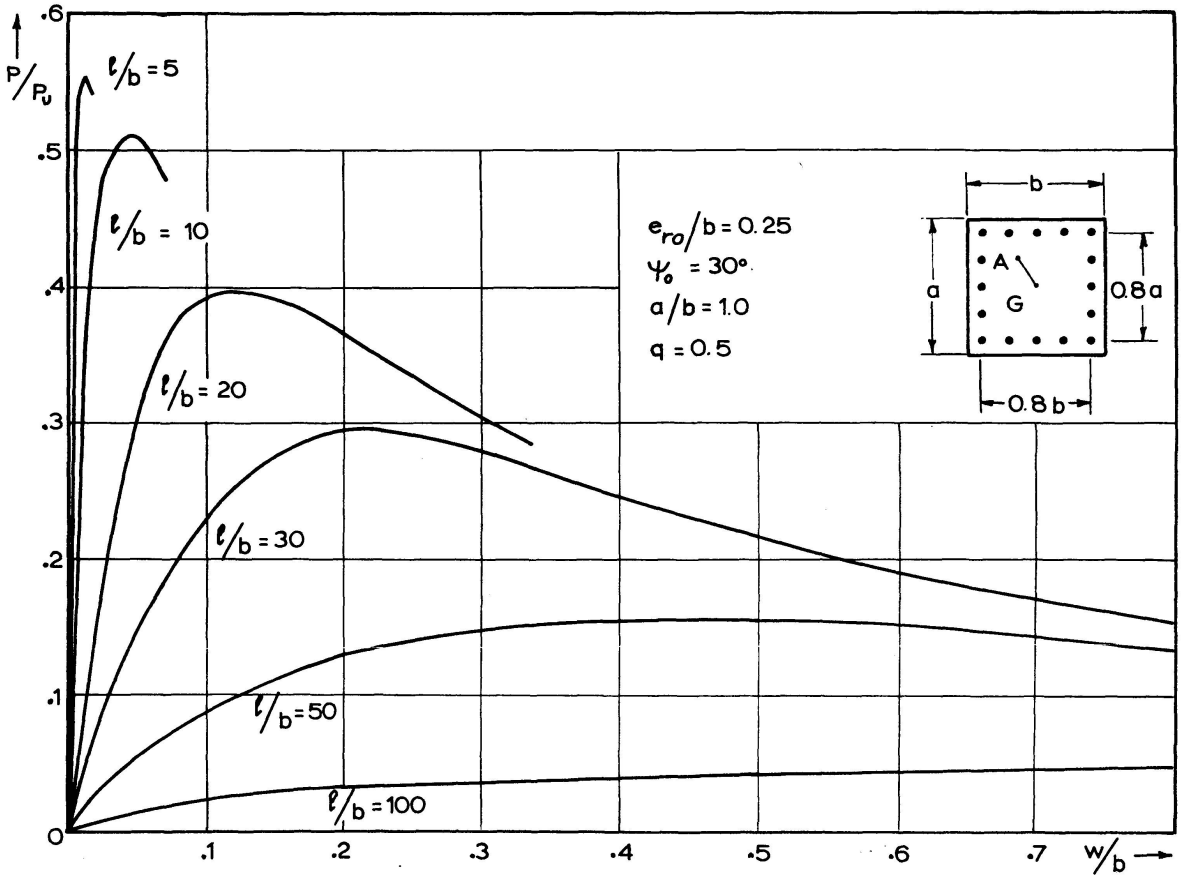


Fig. 5. Load deflection curves; various column lengths.

for a column section with the length-to-width ratio varying between zero and 100. The computations were carried out for the following data:

Material Properties

$\gamma_1 = 2.2$; $\gamma_2 = 4.0$; $\epsilon_{sy}/\epsilon'_c = 0.5$;

Column Details

$a/b = 1.0$; $q = 0.5$; $e_{r0}/b = 0.25$; $\psi_0 = 30°$;
Reinforcing bars distributed as shown in Fig. 5.

Partitioning Details

$N_a = N_b = 10$; $N_s = 16$;

Computation Details

Allowable error in $e_r/b = 0.005$;
Allowable error in $\psi = 0.01$ radians;
Increment in $E_0 : \Delta E_0 = 0.05$.

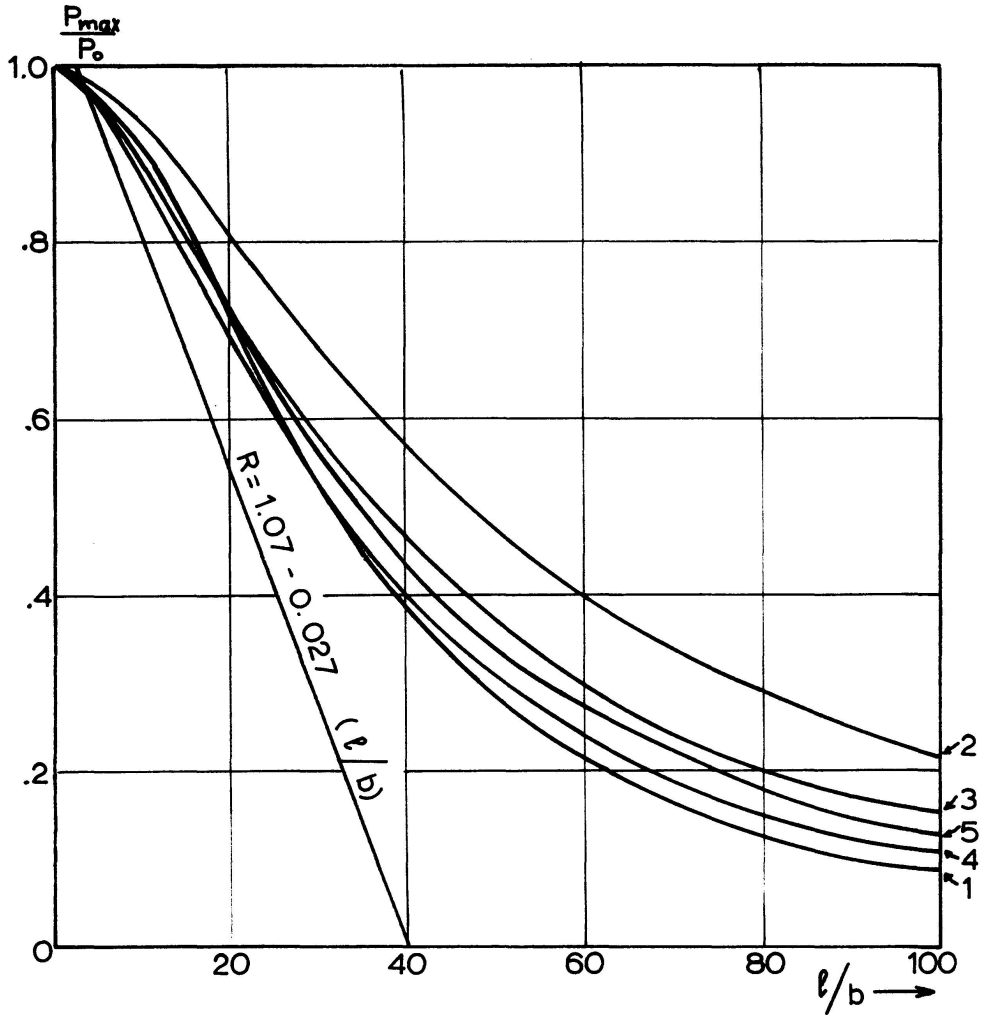
The unloading portions of the curves in Fig. 5 were obtained by incrementing the strain ratio E_0 until it reached a value of 3.0, when computations were arbitrarily discontinued. No physical significance should therefore be associated with the points of termination of the plotted curves.

The variation in column strength is plotted against length-to-width ratio in Fig. 6 for several sections and load eccentricities. To obtain uniformity in the load scale, column strengths have been divided by the strength of a similar column of zero length, P_0. For purposes of comparison the ACI strength reduction factor, R, for use in the design of long columns in single curvature uniaxial bending, is also plotted in Fig. 6 against l/b. The value of R is given [10] as

$$R = 1.07 - 0.008\,(l/r) \leqq 1.0, \tag{34}$$

where r is the radius of gyration of the section, which is here taken as $0.3\,b$. Although the line representing Eq. (34) lies on the safe side of all of the column curves plotted in Fig. 6, it must be remembered that a considerable additional safety margin is required in the design interaction equation to account for the effects of creep deflection in columns under sustained loading. Indeed, the closeness of several of the curves to this interaction line for relatively small length-to-width ratios might well indicate that a design equation more conservative than Eq. (34) would be appropriate for columns in biaxial bending under sustained loading.

The computer program described in this paper is at present (1968) being run for a wide range of input data to obtain further information for the development of simple interaction equations for the design of columns in biaxial bending.



Curve	q	e_{r0}	ψ_0	P_0/P_u
1	0.50	0.25	30°	0.562
2	0.50	1.00	30°	0.159
3	0.25	0.75	15°	0.177
4	0.25	0.50	45°	0.281
5	0.50	0.50	15°	0.349

Fig. 6. Typical curves of strength vs. slenderness for columns with square sections.

4. Concluding Remarks

Various simplifying assumptions have been made in this study of reinforced concrete column behaviour in biaxial bending. In order to emphasise the preliminary nature of the work, the more important of these assumptions are discussed briefly.

In the analysis of the load-deformation characteristics of the cross-section, the two basic assumptions of perfect bonding and plane distribution of strains

are made. These assumptions are probably accurate provided compressive stress exists over the entire section preventing the formation of cracks. When the section is cracked the assumption of perfect bonding is highly idealised and may well lead to significant error in computed curvatures. Nevertheless, most previous studies of the uniaxial bending of reinforced concrete columns have also been based on this simplification.

A two parameter cosine curve has been used to approximate the deflected column shape. It has been indicated that the actual shape must be non planar. Although an over-estimation of column strength will result from this approximation, the magnitude of the error is unknown and can be determined only when a more accurate analysis has been undertaken. However, in the special case of uniaxial bending it has been determined that column strength is relatively insensitive to variations in the assumed column shape. This may well be true also in the general case of biaxial bending.

Long column behaviour has been studied in this paper only for short-time loadings. Significant reductions in the strength of actual in-service columns will occur as a result of time dependent effects such as concrete creep.

Despite the limitations implied by the simplifying assumptions, the analysis presented should prove to be a useful tool in the study of reinforced concrete column behaviour. In particular, the method of determining the load-deformation characteristics of a section is convenient when programmed for computer computation. It represents the only feasible method of analysing sections of non-symmetric or irregular shape,

References

1. Pannell, F. N.: Design Charts for Members Subjected to Biaxial Bending and Thrust. Concrete Publications Ltd., London, 1966.
2. Bresler, B.: Design Criteria for Reinforced Concrete Columns under Axial Load and Biaxial Bending. Journal, American Concrete Institute, Proceedings, Vol. 57, November, 1960.
3. Fleming, J. F., Werner, S. D.: Design of Columns subjected to Biaxial Bending. Journal, American Concrete Institute, Proceedings, Vol. 63, March, 1965.
4. Warner, R. F., Brettle, H. J.: Strength of Reinforced Concrete in Biaxial Bending and Compression. UNICIV Report No. R 24, Department of Structural Engineering, University of N. S. W., Sydney, November, 1967.
5. Pfrang, E. O., Siess, C. P., Sozen, M. A.: Load-Moment Curvature Characteristics of Reinforced Concrete Cross-Sections. Journal, American Concrete Institute, Proceedings, Vol. 61, July, 1964.
6. Breen, J. E.: Computer Use in Studies of Frames with Long Columns. Proceedings, International Symposium on Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, Miami, ASCE Publication, 1964.
7. Kabaila, A. P., Hall, A. S.: Analysis of Instability of Unrestrained Prestressed Concrete Columns with End Eccentricities. Paper No. 7, Symposium on Reinforced Concrete Columns, ACI Publication S.P.-13, 1966.

8. Bachmann, H., Thürlimann, B.: Versuche über das plastische Verhalten von zweifeldrigen Stahlbetonbalken. Report No. 6203-1, Institut für Baustatik, ETH, Zürich, July, 1965.
9. Warner, R. F.: Moment Curvature Relations for Reinforced Concrete Columns in Biaxial Bending. UNICIV Report No. R 28, Department of Structural Engineering, University of New South Wales, Sydney, January, 1968.
10. ACI Committee 318: Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-63). ACI Publication, 1963.

Summary

A study is made of the behaviour of long reinforced concrete columns in biaxial bending. A method is first developed for determining the deformations in a rectangular reinforced concrete section subjected to a biaxially eccentric force. The method involves a large number of elementary arithmetical calculations and has been developed for computer computation. On the basis of several simplifying assumptions, notably concerning deflected shape, a study is made of the behaviour and strength under short-time loadings of pin-ended columns under biaxially eccentric loading.

Résumé

L'auteur développe une méthode pour déterminer les déformations d'une section rectangulaire de béton armé soumise à une force excentrique par rapport aux deux axes. La méthode, qui comprend un grand nombre d'opérations arithmétiques élémentaires, à été développée pour le calcul électronique. Sur la base de certaines hypothèses de simplification, notamment pour la forme de la section déformée, on étudie le comportement et les contraintes de colonnes articulées soumises à une force biaxialement excentrique de courte durée.

Zusammenfassung

Untersucht worden ist das Verhalten langer Stahlbetonsäulen bei Biegung um beide Hauptachsen. Zuerst wird ein Verfahren zur Bestimmung der Verformungen in einem rechteckigen Stahlbetonquerschnitt unter zweiaxial ausmittiger Last entwickelt. Dieses Verfahren zieht eine große Anzahl einfacher Rechenoperationen nach sich, so daß der Elektronenrechner zu Hilfe gezogen wurde. Auf Grund verschiedener vereinfachender Annahmen, unter anderem bezüglich der Biegelinie, wurde das Verhalten und die Beanspruchung unter Kurzzeitlasten für gelenkig gelagerte Stützen untersucht.

Effets dynamiques sur les tabliers des ponts

Dynamische Einflüsse auf Brückenplatten

Dynamic Effects on Bridge Decks

ANDRÉ WINAND
Ingénieur à la Société Nationale des Chemins de fer belges
Assistant à l'Université Libre de Bruxelles

1. Introduction

Dans ces dernières années, les efforts de modernisation de nombreuses Administrations de Chemins de fer se sont, entre autres, portés sur l'augmentation des vitesses. D'ores et déjà des tronçons de ligne sont équipées pour des vitesses de plus de 200 km/h à la S.N.C.F. (France) et à la D.B. (Allemagne fédérale de l'Ouest) et nos confrères japonais ont réalisé la liaison désormais célèbre du Tokaïdo où des vitesses de pointe de 250 km/h sont atteintes.

Cette évolution ne va certes pas sans poser aux ingénieurs des chemins de fer une grande diversité de problèmes. Parmi ceux-ci, il y a le comportement des ouvrages d'art sous les charges roulantes animées de grandes vitesses, supérieures à celles jamais atteintes jusqu'à présent.

Consciente de ce problème, l'Union Internationale des Chemins de fer (U.I.C.) a chargé un Comité d'Experts de son Office de Recherches et d'Essais (O.R.E.) de l'étude de ce problème. Ce Comité, placé sous la Présidence de Monsieur A. Soete, Ingénieur en Chef à la S.N.C.B., exécute actuellement de nombreux mesurages à la fois sur modèle réduit et sur ponts existants, ainsi qu'à diverses études, notamment statistiques, qui doivent aboutir à de précieux enseignements pratiques.

Nous avons pensé qu'il n'était peut être pas sans intérêt que nous nous livrions à la présente étude théorique du problème en tenant compte autant que possible des divers paramètres en jeu. C'est ce travail que nous présentons à la méditation et à la critique du lecteur.

Il faut encore noter que les formules avancées ci-dessous, bien qu'établies dans l'esprit de l'examen des effets dynamiques des charges roulantes sur ponts-rails, sont en fait également valables pour les ponts-route.

2. Les charges roulantes

De par les ressorts des véhicules, les vibrations des engins-moteurs, les irrégularités du chemin de roulement, les charges roulantes ne sont pas constantes et sont, au contraire, constituées de *forces pulsantes*.

On considérera (voir fig. 1) que chaque essieu donne lieu à un effet qui est la superposition

— d'une charge constante mobile P_c

— et d'une charge alternée mobile $Q \cos \omega t$.

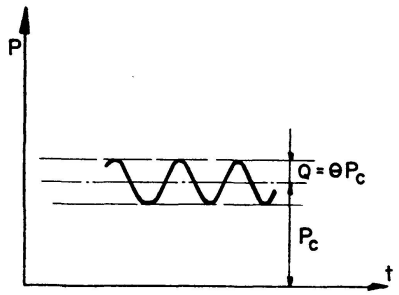


Fig. 1.

L'amplitude de la force alternée Q est ainsi une fraction θ de P_c. La force pulsante mobile peut donc s'écrire

$$P_c(1 + \theta \cos \omega t) \equiv P.$$

Il faut attirer l'attention ici sur le fait que:

ω est bien la pulsation de la force transmise par les roues au pont (et non de la caisse de la locomotive par exemple). Elle dépend de la constante élastique des ressorts du matériel roulant notamment, et est caractéristique pour un véhicule donné.

θ doit également être caractéristique d'un véhicule donné. Dans certains cas toutefois, θ dépend de la vitesse. C'est le cas pour le déséquilibre dû aux balourds des roues des locomotives à vapeur.

3. Cas d'une force mobile P d'intensité constante

Soit une poutre de section constante Ω de densité γ et de longueur l simplement appuyée et parcourue par la force d'intensité constante P_c animée d'une vitesse v (voir fig. 2).

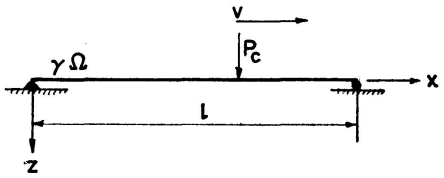


Fig. 2.

L'expression générale des vibrations produites, exprimée en flèches est, d'après TIMOSHENKO[1]).

$$(z_{P_c})_d = \frac{2\,g\,P_c\,l^3}{\gamma\Omega\,\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\,\pi\,x}{l}}{n^2\,(n^2\,\pi^2\,a^2-v^2\,l^2)}\sin\frac{n\,\pi\,v\,t}{l} \qquad (1)$$

$$-\frac{2\,g\,P_c\,l^4\,v}{\gamma\Omega\,\pi^3\,a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\,\pi\,x}{l}}{n^3\,(n^2\,\pi^2\,a^2-v^2\,l^2)}\sin\frac{n^2\,\pi^2\,a\,t}{l^2},$$

où

$$a = \sqrt{\frac{E\,I\,g}{\gamma\Omega}}.$$

En étudiant la flèche de la section médiane, et en exprimant le temps t correspondant à la position de la force sur le pont en fraction i de l/v, soit $t = i\,\frac{l}{v}$, l'expression ci-dessus se transforme aisément en:

$$(z_{P_c})_d = \frac{2\,P_c\,l^3}{E\,I\,\pi^4}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2\,(n^2-\pi^2\,K^2)}\left(\sin n\,i\,\pi - \frac{\pi K}{n}\sin n^2\frac{i}{K}\right) \qquad (2)$$

pour laquelle on a posé

$$K = \frac{v}{l\,\omega_0}$$

où ω_0 est la pulsation propre de la poutre, qui a pour valeur:

$$\omega_0 = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{E\,I\,g}{\gamma\Omega}}.$$

En fait, il faut tenir compte de ce que la charge P_c modifie la pulsation propre du pont.

Dès lors, si $G = \gamma\Omega\,l$ est le poids propre du pont, la *pulsation propre du pont chargé* vaut:

$$\omega_0' = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{E\,I\,g\,l}{G+P_c}}. \qquad (3)$$

Dans l'expression (2) il y aura donc lieu de remplacer

$$K = \frac{v}{l\,\omega_0} \quad \text{par} \quad \boxed{K' = \frac{v}{l\,\omega_0'}}. \qquad (4)$$

Comme nous le verrons, ce paramètre K' revêtera une grande importance.

---

[1]) S. TIMOSHENKO: Théorie des vibrations. Paris et Liège, Librairie Polytechnique Ch. Béranger.

On sait que la flèche statique maximum due à P vaut:

$$(z_P)_{s_{max}} = \frac{P\,l^3}{48\,E\,I}. \tag{5}$$

Dès lors le coefficient de majoration dynamique pour la charge roulante d'intensité constante P_c vaut:

$$\Phi_{P_c} = \frac{(z_{P_c})_d}{(z_P)_{s_{max}}} = \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2\,(n^2-\pi^2\,K^2)} \left(\sin n\,i\,\pi - \frac{n\,K'}{n} \sin n^2 \frac{i}{K'}\right). \tag{6}$$

Il arrive fréquemment, dans ce genre de travail que, pour donner une orientation à l'étude, on se limite au premier harmonique. Nous verrons plus loin ce qu'il en est exactement. Si celà était admissible, il serait logique de rapporter entre eux, d'une part la valeur (2) de $(z_{P_c})_d$ pour $n=1$, et d'autre part, le premier terme de l'expression sous forme de série de Fourier de la flèche statique, soit:

$$(z_P)_{s_{max}} = \frac{2\,P\,l^3}{E\,I\,\pi^4}.$$

Dès lors, le coefficient dynamique Φ_{P_c} aurait pour expression

$$\Phi_{P_c} = \frac{1}{1-\pi^2\,K'^2} \left(\sin i\,\pi - \pi\,K' \sin \frac{i}{K'}\right). \tag{7}$$

Cette expression simple nous permettait de nous livrer au calcul manuel des valeurs de Φ_{P_c} en fonction de i pour différentes valeurs de K' dont la mise en graphique donne l'allure de principe de la fig. 3.

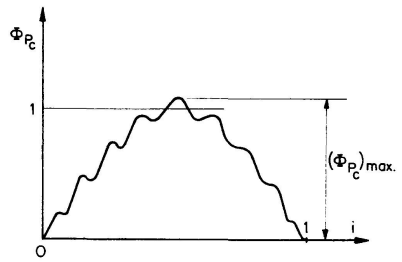


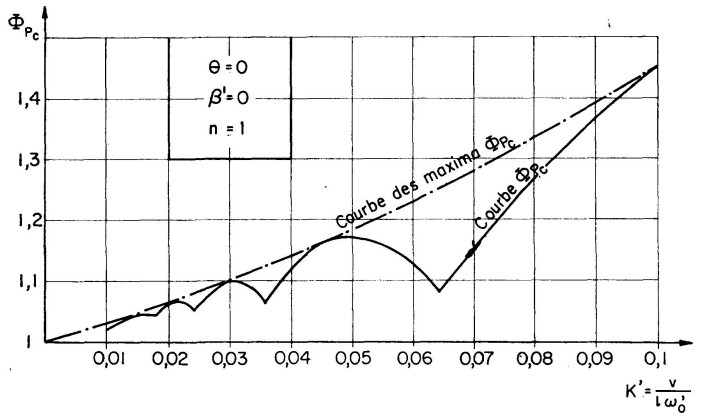
Fig. 3.

Pour chacun de ces diagrammes, nous avons relevé la valeur de $(\Phi_{P_c})_{max}$, ce qui nous a permis de dresser le graphique de $(\Phi_{P_c})_{max}$ en fonction de K' reproduit à la Planche I. Comme on peut le voir, la courbe se présente sous forme d'ondes.

De cette courbe, on peut encore chercher à déduire une courbe des maxima de $(\Phi_{P_c})_{max}$. Celle-ci a pour expression:

$$(\Phi_{P_c})_{max\,max} = \frac{1}{1-\pi\,K'}.$$

PLANCHE I. Variation du coefficient dynamique Φ_{P_c} en fonction du coefficient $K'=\frac{v}{l\omega_0'}$ dans le cas d'une force mobile d'intensité constante P_c. Limitation au premier harmonique



Celle-ci n'a bien sûr qu'un intérêt purement théorique. Il est toutefois intéressant de calculer la valeur de $(\Phi_{P_c})_{max}$ lorsque $K'=\frac{1}{\pi}$, c'est-à-dire lorsque $(\Phi_{P_c})_{max\,max}=\infty$.

Calculons la vraie valeur de la fonction $(\Phi_P)_{max}$ pour $K'=\frac{1}{\pi}$ par la Règle de l'Hospital.

On a successivement

$$\frac{\partial}{\partial K}\left[\sin i\pi-\pi K\sin\frac{i}{K}\right]=-\pi K\cos\frac{i}{K}\left(\frac{-i}{K^2}\right)-\pi\sin\frac{i}{K},$$

$$\frac{\partial}{\partial K}(1-\pi^2K^2)=-2\pi^2K,$$

$$(\Phi_{P_c})_{max}=\left[\frac{\pi\frac{i}{K}\cos\frac{i}{K}-\pi\sin\frac{i}{K}}{-2\pi^2K}\right]_{K=\frac{1}{\pi}}=\frac{\sin i\pi-i\pi\cos i\pi}{2}.$$

La valeur de i donnant le maximum de $(\Phi_{P_c})_{max}$ est telle que:

$$\frac{\partial(\Phi_{P_c})_{max}}{\partial i}=\frac{1}{2}[\pi\cos i\pi+i\pi^2\sin i\pi-\pi\cos i\pi]=0,$$

soit:
$$i\sin i\pi=0.$$

Cette équation transcendante est vérifiée pour toute valeur entière de i

$$\text{Pour } i=0 \quad (\Phi_{P_c})_{max}=0.$$

$$\text{Pour } i=1 \quad (\Phi_{P_c})_{max}=\frac{\pi}{2}.$$

Les valeurs de i supérieures à l'unité n'ont pas de sens physique. Donc, pour $K'=\frac{1}{\pi}$, le maximum de la fonction $(\Phi_{P_c})_{max}$ vaut $\frac{\pi}{2}$.

4. Cas d'une force alternée mobile $\Theta P \cos \omega t$

La loi générale de déformation du pont est alors

$$z_{\theta P \cos \omega t} = \frac{\theta P l^3}{E I \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n \pi x}{l} \left[\frac{\sin \left(\frac{n \pi v}{l} + \omega \right) t}{n^4 - (\beta + n \alpha)^2} + \frac{\sin \left(\frac{n \pi v}{l} - \omega \right) t}{n^4 - (\beta - n \alpha)^2} \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha}{n} \left(\frac{\sin \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2}}{-n^2 \alpha^2 + (n^2 - \beta)^2} + \frac{\sin \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2}}{-n^2 \alpha^2 + (n^2 + \beta)^2} \right) \right], \tag{8}$$

où $$\alpha = \frac{v l}{\pi a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\frac{2 l^2}{\pi a}}{\frac{2 \pi}{\omega}}.$$

Or, $$\omega_0 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E I g}{\gamma \Omega}} = \frac{\pi^2 a}{l^2}, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{l^2}{\pi^2} \omega_0.$$

Dès lors, $$\alpha = \frac{\pi v}{l \omega_0}, \qquad \text{soit} \quad \alpha = \pi K,$$

$$\beta = \frac{l^2 \omega}{\pi^2 a}, \qquad \text{soit} \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Ce paramètre β revêtera également une grande importance, ou mieux encore le paramètre

$$\boxed{\beta' = \frac{\omega}{\omega_0'}}. \tag{9}$$

qui représente le rapport entre la pulsation forcée de la charge mobile et la pulsation propre du pont chargé.

En conséquence, pour la section médiane, on aura:

$$z_{\theta P \cos \omega t} = \frac{\theta P l^3}{E I \pi^4} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left[\frac{\sin \left(n \pi + \frac{\beta'}{K'} \right) i}{n^4 - (\beta' + n \pi K')^2} + \frac{\sin \left(n \pi - \frac{\beta'}{K'} \right) i}{n^4 - (\beta' - n \pi K')^2} \right.$$
$$\left. - \frac{\pi K'}{n} \left(\frac{\sin \frac{n^2 i}{K'}}{-(n \pi K')^2 + (n^2 - \beta')^2} + \frac{\sin \frac{n^2 i}{K'}}{-(n \pi K')^2 + (n^2 + \beta')^2} \right) \right]. \tag{10}$$

Remarquons que si nous faisons $\beta = 0$ dans l'expression ci-dessus, on retrouve en toute logique, au coefficient θ près, l'expression (2) établie dans le cas de la charge d'intensité constante.

5. Expression générale du coefficient de majoration dynamique dans le cas d'une force pulsante mobile

Examen de l'influence des divers paramètres

Par la superposition des effets, nous aurons d'une manière générale:

$$z_P = z_{P_c} + z_{\theta P} \cos \omega t = \Phi_P (z_P)_{s_{max}}.$$

D'où:

$$\Phi_P = \frac{48}{\pi^4} \left\{ \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{2}{n^2 (n^2 - \pi^2 K'^2)} \left(\sin n i \pi - \frac{\pi K'}{n} \sin n^2 \frac{i}{K'} \right) \right.$$

$$+ \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \theta \left[\frac{\sin \left(n\pi + \frac{\beta'}{K'} \right) i}{n^4 - (\beta' + n\pi K')^2} + \frac{\sin \left(n\pi - \frac{\beta'}{K'} \right) i}{n^4 - (\beta' - n\pi K')^2} \right. \tag{11}$$

$$\left. \left. - \frac{\pi K'}{n} \left(\frac{\sin \frac{n^2 i}{K'}}{-(n\pi K')^2 + (n^2 - \beta')^2} + \frac{\sin \frac{n^2 i}{K'}}{-(n\pi K')^2 + (n^2 + \beta')^2} \right) \right] \right\}.$$

L'exploitation numérique de cette formule exigeait l'intervention d'un ordinateur électronique. C'est grâce au Laboratoire de Calcul de l'Université Libre de Bruxelles que ceci fut possible. Il fallait en effet calculer pour différentes valeurs de θ, β' et K' les valeurs de Φ_P en fonction de i, puis relever les valeurs maxima de Φ_P pour chacune de ces courbes afin de pouvoir dresser les diagrammes de $(\Phi_P)_{max}$ en fonction de K'.

Dans le temps de calcul-machine qui nous était imparti, nous nous sommes limités aux valeurs suivantes:

Pour θ: 0; (force d'intensité constante),
0,15; (cas le plus courant en pratique),
0,30; (cas de locomotives mal équilibrées ou de plats dans les bandages des roues).

Pour $\beta' = \frac{\omega}{\omega_0'}$: 0; 0,5; 1; 2; 5; 10.

Pour $K' = \frac{v}{l \omega_0'}$:

0,0100	0,0125	0,0150	0,0175	0,0200
0,0225	0,0250	0,0275	0,0300	0,0325
0,0350	0,0400	0,0450	0,0500	0,0500
0,0700	0,0800	0,0900	0,1000	0,1100
0,1200	0,1300	0,1400	0,1500	0,1600
0,1700	0,1800	0,1900	0,2000	0,2500

et $1/\pi$. (Les valeurs de K' de 0,01 à 0,2 constituent la gamme des valeurs susceptibles d'être rencontrées en pratique, les valeurs plus élevées ne présentent qu'un intérêt théorique.)

Enfin, nous avons fait varier i de 1/50 à 50/50 par bonds de 1/50.

De plus, les calculs à l'ordinateur nous ont montré qu'on ne pouvait se limiter à l'harmonique $n=1$. En fait, en s'imposant une précision de $\pm 5 \cdot 10^{-4}$ sur le coefficient dynamique Φ, il a fallu parfois monter jusqu'à des harmoniques d'ordre $n=19$, les harmoniques d'ordre 3, 5 et 7 jouant généralement un rôle important.

Nous avons représenté à la Planche II, à titre d'exemple les diagrammes

PLANCHE II. Exemples de variation du coefficient dynamique Φ_P lors du parcours du pont par la force mobile P pour les valeurs particulières 0,025 et 0,05 du coefficient $K'=\frac{v}{l\,\omega_0'}$.

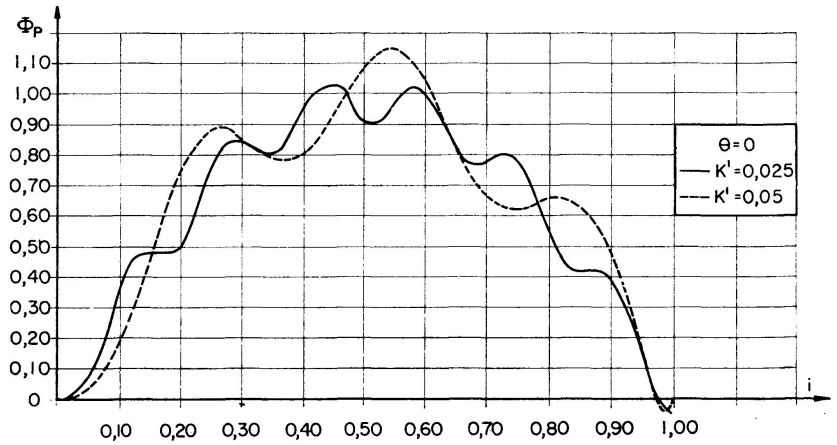
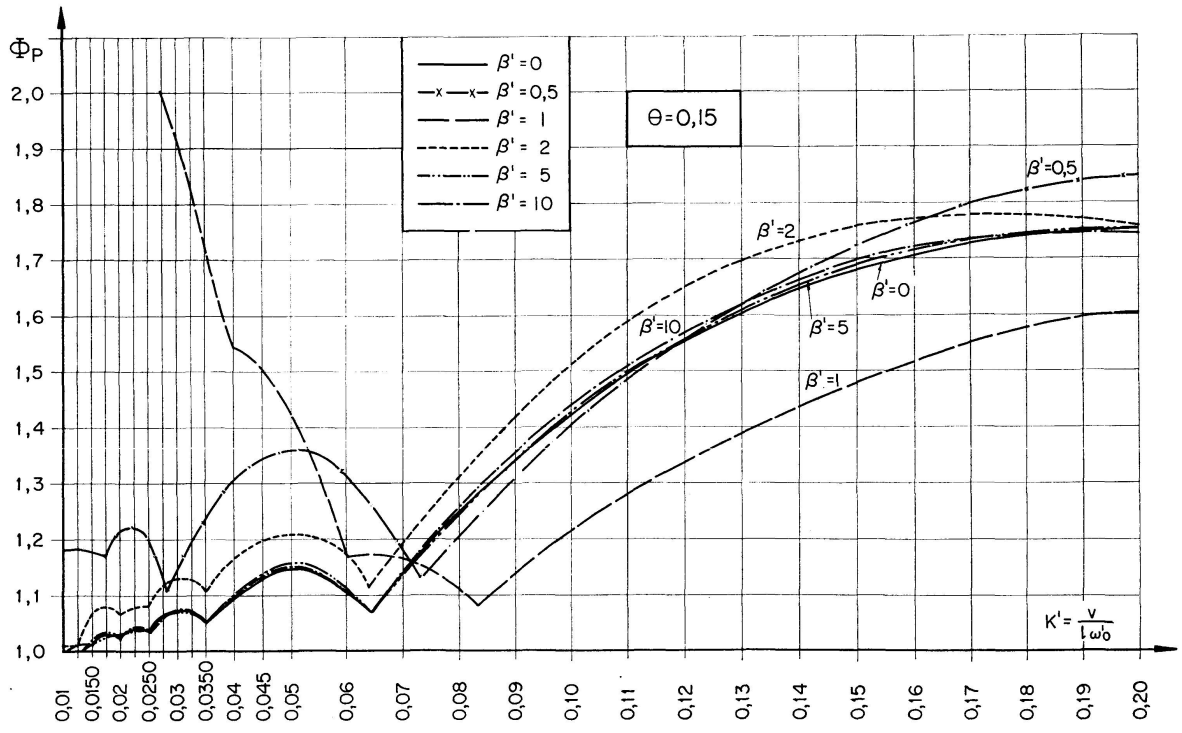


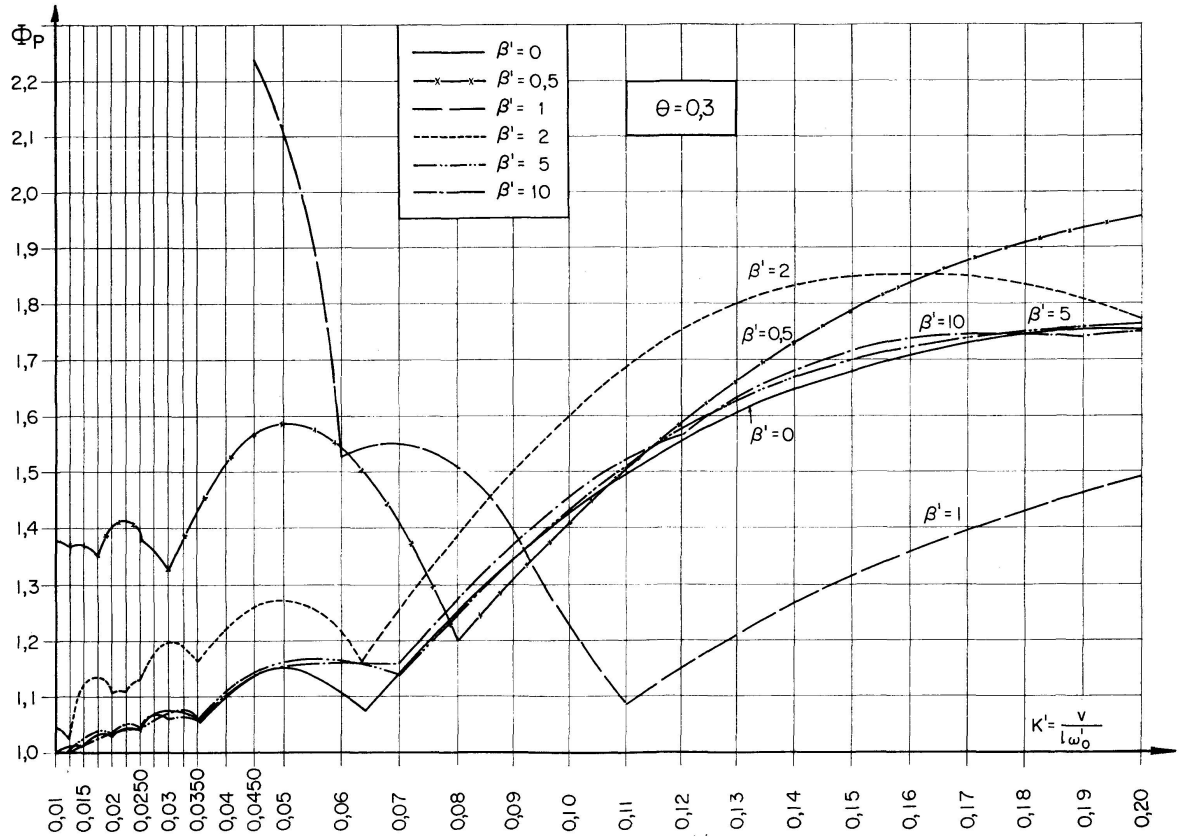
PLANCHE III. Diagramme des maxima du coefficient dynamique Φ_P en fonction du coefficient $K'=\frac{v}{l\,\omega_0'}$ pour différentes valeurs du paramètre $\beta'=\frac{\omega}{\omega_0'}$ dans le cas d'une force mobile $P_c(1+\theta \cos \omega t)$ avec $\theta=0,15$.



de Φ_P en fonction de i, c'est-à-dire du coefficient dynamique en fonction de la position de la force sur le pont, dans le cas d'une force non pulsante ($\theta = 0$) et celà pour deux valeurs du coefficient K', soit $K' = 0{,}025$ et $K' = 0{,}05$. On reconnaît l'allure des diagrammes d'enregistrement de la flèche d'un tablier de pont sous l'action d'un mobile se déplaçant sur celui-ci. On remarquera que le maximum n'a pas lieu à mi-portée, ce qui serait tout à fait fortuit.

Si, pour chaque courbe de Φ_P en fonction de i, on retient la valeur maximale de Φ_P, on peut dresser les diagrammes de $(\Phi_P)_{max}$ en fonction de K', pour $\theta = 0{,}15$ (Planche III) et pour $\theta = 0{,}3$ (Planche IV) avec chaque fois les

PLANCHE IV. Diagramme des maxima du coefficient dynamique Φ_P en fonction du coefficient $K' = \frac{v}{l\,\omega_0'}$ pour différentes valeurs du paramètre $\beta' = \frac{\omega}{\omega_0'}$ dans le cas d'une force mobile $P_c(1 + \theta \cos \omega t)$ avec $\theta = 0{,}3$.



différentes courbes correspondant aux valeurs envisagées pour le paramètre β'. On remarquera que ces courbes présentent toujours l'allure en forme d'ondes que nous avons déjà pu voir à la Planche I dans le cas particulier d'une force d'intensité constante et où nous nous étions limités volontairement au premier harmonique.

L'enveloppe de ces ondes augmentent avec les valeurs de K' sauf pour les valeurs de β' voisinnes ou égales à l'unité.

En fait, grâce à l'abandon de la traction vapeur, les valeurs pratiques de

β' sont nettement au-dessus de l'unité et atteignent couramment les valeurs envisagées 5 et 10. Or, on s'aperçoit que les courbes de $\Phi_{P\,max}$ en fonction de K' pour $\beta'=5$ et $\beta'=10$ sont en fait très voisinnes et presque confondues pour des valeurs normales de θ. Cette constatation doit avoir, à nos yeux, un intérêt pratique certain.

Afin de mieux illustrer ce que nous venons de dire nous avons établi des diagrammes de $(\Phi_P)_{max}$ en fonction de $\beta'=\frac{\omega}{\omega_0'}$, et celà pour $\theta=0{,}15$ et $K'=0{,}05$ à la Planche V, ainsi que pour $\theta=0{,}15$ et $K'=0{,}10$ à la Planche VI. On voit

PLANCHE V. Exemple de variation du coefficient dynamique Φ_P en fonction du rapport β' entre la pulsation forcée due à la charge mobile $P_c(1+\theta\cos\omega t)$ et la pulsation propre du pont chargé. Cas particulier où $\theta=0{,}15$ et $K'=0{,}05$.

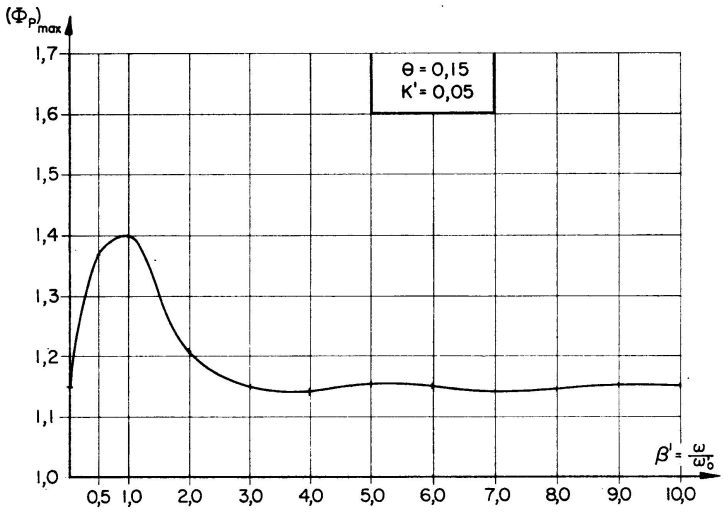
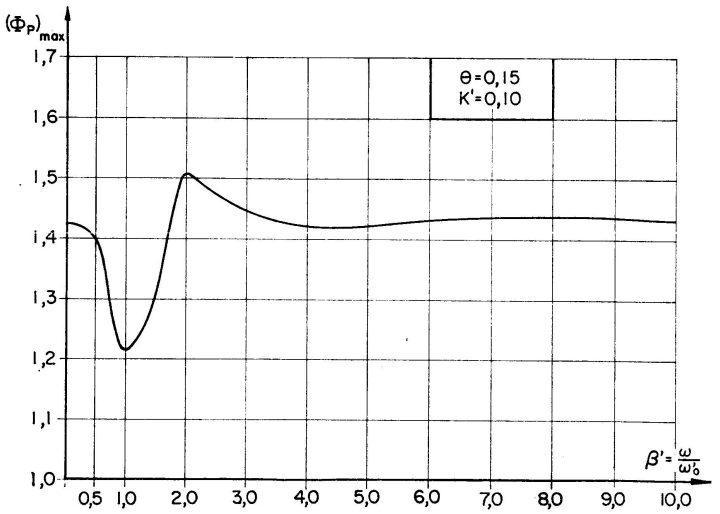


PLANCHE VI. Exemple de variation du coefficient dynamique Φ_P en fonction du rapport β' entre la pulsation forcée due à la charge mobile $P_c(1+\theta\cos\omega t)$ et la pulsation propre du pont chargé. Cas particulier où $\theta=0{,}15$ et $K'=0{,}10$.



que les valeurs de $(\Phi_P)_{max}$ ne sont plus guère influencées par β' lorsque $\beta' \geqq 4$, alors que les perturbations sont grandes au voisinnage de $\beta' = 1$.

En ce qui concerne ce cas particulier où $\beta' = 1$ (c'est-à-dire lorsqu'il y a égalité entre la fréquence forcée de la charge pulsante et la fréquence propre du pont chargé, donc résonnance), on aura certainement remarqué aux Planches III et IV, combien les valeurs calculées de $(\Phi_P)_{max}$ sont élevées pour les faibles valeurs de K', c'est-à-dire notamment lorsque le mobile se déplace à petite vitesse, ou lorsque la portée du pont est grande. En fait, les valeurs réelles qui seraient mesurées n'atteindraient pas celles aussi élevées obtenues par le calcul grâce au jeu de l'amortissement interne due à ce que d'aucuns appellent, la viscosité du tablier. Nous croyons cependant devoir présentement émettre l'avis que, plus les valeurs de K' sont élevées, c'est-à-dire notamment dans le cas où les mobiles sont animés de grande vitesse (or c'est bien là l'objet de notre étude), moins les phénomènes d'amortissement interne, ou de viscosité du tablier, ont le temps de se manifester. Les valeurs calculées se rapprocheraient alors des valeurs réelles et plus particulièrement, nous le verrons ci-dessous, lorsque, au lieu de considérer une, et une seule, charge concentrée, on envisage le cas plus pratique où on a deux, ou éventuellement plusieurs essieux.

6. Expression du coefficient de majoration dynamique dans le cas de deux forces pulsantes mobiles identiques

Conclusions pratiques des calculs effectués

Si les expressions données plus haut permettent, à notre avis, une orientation dans l'étude qui nous occupe, nous nous devons de rechercher à nous approcher le plus possible des conditions réelles.

C'est ainsi que nous envisageons le cas de deux forces pulsantes mobiles identiques $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$ distantes de λl (voir fig. 4), lequel correspond, par

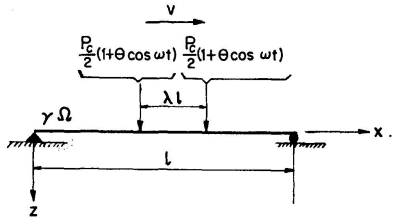


Fig. 4.

exemple, à une locomotive à deux bogies, chaque bogie, bien qu'étant muni de deux ou trois essieux, pouvant généralement être assimilé à une seule charge (sauf pour les éléments courts tels que les longrines) par la répartition des pressions due aux traverses et au ballast, ou, dans le cas d'une «pose directe» de la voie (c'est-à-dire sans ballast), par le jeu des semelles en maté-

riau amortisseur (liège – néoprène) qui sont posées entre le rail et les selles d'appui d'une part, et entre les selles d'appui et le tablier proprement dit d'autre part.

Dans ces conditions, par simple superposition des effet, des deux forces $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$ et en tenant compte du décalage λl, on obtient à partir de l'expression (11):

$$\begin{aligned}\Phi'_{2(P/2)} = \frac{48}{\pi^4}\Bigg\{ & \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2-\pi^2K'^2)}\left(\sin n i\pi - \frac{\pi K'}{n}\sin n^2\frac{i}{K}\right.\\ & \left.+\sin n(i-\lambda)\pi - \frac{\pi K'}{n}\sin\frac{n^2(i-\lambda)}{K'}\right)\\ & + \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\theta}{2}\left[\frac{\sin\left(n\pi+\frac{\beta'}{K'}\right)i}{n^4-(\beta'+n\pi K')^2} + \frac{\sin\left(n\pi-\frac{\beta'}{K'}\right)i}{n^4-(\beta'-n\pi K')^2}\right.\\ & + \frac{\sin\left(n\pi+\frac{\beta'}{K'}\right)(i-\lambda)}{n^4-(\beta'+n\pi K')^2} + \frac{\sin\left(n\pi-\frac{\beta'}{K'}\right)(i-\lambda)}{n^4-(\beta'-n\pi K')^2}\\ & - \frac{\pi K'}{n}\left(\frac{\sin\frac{n^2-i}{K'}}{-(n\pi K')^2+(n^2-\beta')^2} + \frac{\sin\frac{n^2-i}{K'}}{-(n\pi K')^2+(n^2+\beta')^2}\right.\\ & \left.\left.\left.+\frac{\sin\frac{n^2(i-\lambda)}{K'}}{-(n\pi K')^2+(n^2-\beta')^2} + \frac{\sin\frac{n^2(i-\lambda)}{K'}}{-(n\pi K')^2+(n^2+\beta')^2}\right)\right]\right\},\end{aligned} \tag{12}$$

où i définit la position de la force de droite à la fig. 4.

En posant:

$$\begin{aligned} A &= n\pi+\frac{\beta'}{K'}, & D &= n^4-(\beta'-n\pi K')^2,\\ B &= n\pi-\frac{\beta'}{K'}, & E &= -(n\pi K')^2+(n^2-\beta')^2,\\ C &= n^4-(\beta'+n\pi K')^2, & F &= -(n\pi K')^2+(n^2+\beta')^2 \end{aligned} \tag{13}$$

et en transformant l'expression ci-dessus au moyen des formules de Simpson, il vient:

$$\begin{aligned}\Phi'_{2(P/2)} = \frac{48}{\pi^4}\Bigg\{ & \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{2}{n^2(n^2-\pi^2K'^2)}\left(\sin\frac{n\pi}{2}(2i-\lambda)\cos\frac{n\lambda\pi}{2}\right.\\ & \left.-\frac{\pi K'}{n}\sin\frac{n^2(2i-\lambda)}{2K'}\cos\frac{n^2\lambda}{2K'}\right)\\ & + \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\theta\left[\frac{\sin\frac{A}{2}(2i-\lambda)\cos\frac{A}{2}\lambda}{C} + \frac{\sin\frac{B}{2}(2i-\lambda)\cos\frac{B}{2}\lambda}{D}\right.\\ & \left.\left.-\frac{\pi K'}{n}\left(\frac{1}{E}\sin\frac{n^2(2i-\lambda)}{2K'}\cos\frac{n^2\lambda}{2K'}+\frac{1}{F}\sin\frac{n^2(2i-\lambda)}{2K'}\cos\frac{n^2\lambda}{2K'}\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{14}$$

La relation (14) ci-dessus représente en fait le rapport entre la flèche dynamique due au mobile composé des deux forces $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$ et la flèche statique maximum due à la force P_c, soit

$$\Phi'_{2(P/2)} = \frac{(w_{2(P/2)})_{dyn}}{(w_P)_{stat\,max}}.$$

Or, en fait, ce que nous devons avoir, c'est le rapport entre la flèche dynamique due au mobile composé de deux forces $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$ et la flèche statique maximum due à ce même mobile, soit:

$$\Phi_{2(P/2)} = \frac{(w_{2(P/2)})_{dyn}}{(w_{2(P/2)})_{stat\,max}}.$$

Dès lors, on a:

$$\Phi_{2(P/2)} = \Phi'_{2(P/2)} \frac{(w_P)_{stat\,max}}{(w_{2(P/2)})_{stat\,max}}.$$

Or, on sait que:

$$(w_P)_{stat\,max} = \frac{P l^3}{48 E I},$$

$$(w_{2(P/2)})_{stat\,max} = \frac{P l^3}{96 E I}(1-\lambda)[3-(1-\lambda)^2] \quad \text{lorsque } \lambda \leqq 0{,}5.$$

D'où
$$\frac{(w_P)_{stat\,max}}{(w_{2(P/2)})_{stat\,max}} = \frac{2}{(1-\lambda)[3-(1-\lambda)^2]}.$$

Et l'expression du coefficient de majoration dynamique du cas est:

$$\begin{aligned}\Phi_{2(P/2)} = \frac{96}{\pi^4(1-\lambda)[3-(1-\lambda)^2]} \Bigg\{ &\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{2}{n^2(n^2-\pi^2 K'^2)} \left(\sin\frac{n\pi}{2}(2i-\lambda)\cos\frac{n\lambda\pi}{2} \right. \\ &\left. - \frac{\pi K'}{n}\sin\frac{n^2(2i-\lambda)}{2K'}\cos\frac{n^2\lambda}{2K'} \right) \\ &+ \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \theta \left[\frac{\sin\frac{A}{2}(2i-\lambda)\cos\frac{A}{2}\lambda}{C} + \frac{\sin\frac{B}{2}(2i-\lambda)\cos\frac{B}{2}\lambda}{D} \right. \\ &\left. \left. - \frac{\pi K'}{n}\left(\frac{\sin\frac{n^2(2i-\lambda)}{2K'}\cos\frac{n^2\lambda}{2K'}}{E} + \frac{\sin\frac{n^2(2i-\lambda)}{2K'}\cos\frac{n^2\lambda}{2K'}}{F} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

A partir de cette relation, on peut dresser les diagrammes de $\Phi_{2(P/2)}$ en fonction de i. A titre d'exemple, nous représentons à la Planche VII la courbe de $\Phi_{2(P/2)}$ en fonction de i pour $\lambda = 0{,}25$ (l'entredistance des bogies est le quart de la portée du pont), $\theta = 0$, $\beta = 0$ et $K' = 0{,}025$. En comparant cette courbe avec celle obtenue pour Φ_P pour les mêmes valeurs de θ, β' et K' et représentée

PLANCHE VII. Exemple de variation du coefficient dynamique $\Phi_{2(P/2)}$ *lors du parcours du pont par deux charges mobiles* $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$ *distantes de* λl *pour les valeurs particulières suivantes:* $\lambda=0{,}25;\ \theta=0;\ \beta'=\frac{\omega}{\omega_0'}=0;\ K'=\frac{v}{l\,\omega_0'}=0{,}025.$

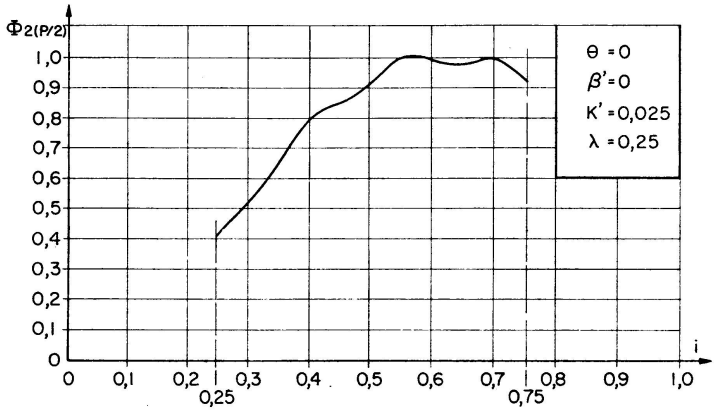
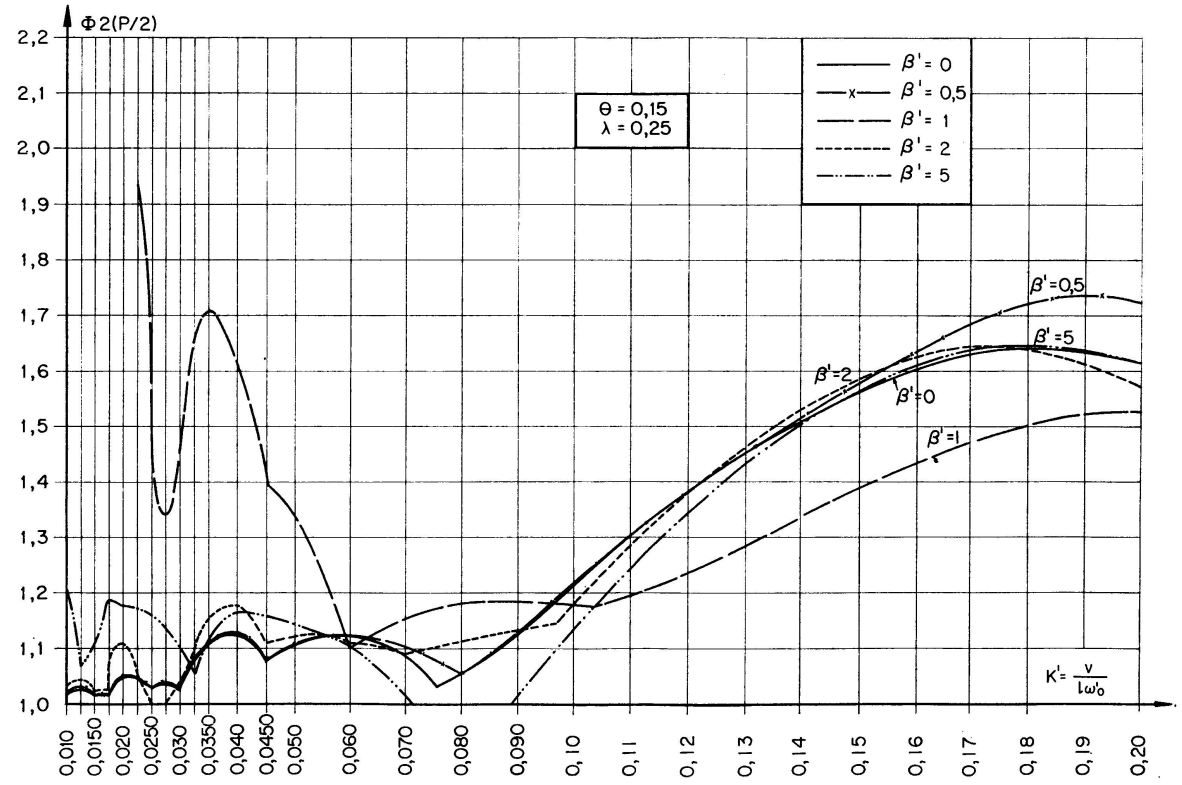


PLANCHE VIII. Diagramme des maxima du coefficient dynamique $\Phi_{2(P/2)}$ *en fonction du coefficient* $K'=\frac{v}{l\,\omega_0'}$ *pour différentes valeurs du paramètre* $\beta'=\frac{\omega}{\omega_0'}$ *dans le cas de deux forces mobiles* $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$ *distantes de* λl *avec* $\lambda=0{,}25$ *et* $\theta=0{,}15$.



à la Planche II, on remarquera que, dans le cas des deux forces $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$, les ondulations sont fortement atténuées et que la valeur de l'extremum est légèrement plus faible que dans le cas de la force concentrée unique $P_c(1+\theta\cos\omega t)$.

Si à présent, toujours pour $\lambda = 0{,}25$ (nous n'avons pas envisagé d'autres valeurs de λ afin de respecter le temps de calcul à l'ordinateur qui nous était imparti), on recherche toutes les valeurs maximales de $\Phi_{2(P/2)}$ pour chaque courbe de $\Phi_{2(P/2)}$ en fonction de i, on peut dresser le diagramme de la Planche VIII, pour lequel nous avons mené les calculs pour les valeurs pratiques suivantes des paramètres θ, β' et K':

$$\theta = 0{,}15,$$
$$\beta' = 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 2 \text{ et } 5,$$

ainsi que toutes les valeurs de K' indiquées plus haut au paragraphe 5.

Cette Planche est, à nos yeux, d'un très grand intérêt pratique. En effet, elle nous indique clairement que, pour les valeurs de θ et λ envisagées, *en dehors des phénomènes de résonnance, la valeur du coefficient de majoration dynamique reste inférieure à 1,2 jusqu'à des valeurs de K' voisinnes de 0,10. Au-delà de cette valeur de K', le coefficient dynamique subit un accroissement appréciable, mais cependant nettement moindre que dans le cas de la force concentrée unique* (voir Planche III pour la comparaison). Ce fait semble se confirmer par les essais expérimentaux en cours.

7. Exploitation pratique de la présente étude

Nous sommes d'avis que des diagrammes donnant le coefficient de majoration dynamique Φ en fonction du coefficient K', établis à partir de mesurages et extrapolés par analogie avec la théorie exposée ci-dessus, peuvent facilement être exploités par les praticiens du calcul des ponts.

En effet, la valeur du coefficient K' se calcule aisément.

On a successivement:

v = la vitesse envisagée dans le présent et dans le futur pour la ligne devant emprunter le pont à calculer.

l = la portée du pont.

ω_0' = la pulsation propre du pont chargé.

Or, celle-ci peut se calculer avec une excellente approximation par la formule de Rayleigh donnant la fréquence propre f du pont chargé (en Hz) à partir de la flèche statique maximum $(w_{stat})_{max}$ (en cm) sous la charge à considérer:

$$f \equiv \frac{\omega_0'}{2\pi} = \frac{5{,}6}{\sqrt{(w_{stat})_{max}}}.$$

Dans ces conditions, si les services du matériel roulant peuvent donner la gamme des valeurs de θ et ω relatives aux véhicules qu'ils comptent utiliser dans le présent et dans l'avenir, il suffira à l'auteur de projet de lire la valeur du coefficient dynamique sur les diagrammes précités.

Les courbes de ces diagrammes ne seraient pas nécessairement les enveloppes des mesures effectuées, mais pourraient découler par exemple avec un fractile de 5%, de l'exploitation statistique de ces mesures, pour autant que les maxima mesurés soient encore compatibles avec la sécurité.

8. Exemple numérique

Soit un pont-rails de 30 mètres de portée destiné à être parcouru par des locomotives à deux bogies distants d'environ 7,50 m et animées d'une vitesse de 150 km/h et pour lesquels la variation de charge par bogie est de $\pm 15\%$ à une fréquence de 40 Hz.

La flèche calculée sous charges du pont correspond au $\frac{1}{900}$ de la portée.

Dès lors, on a successivement:

Pulsation propre du pont chargé:

$$\omega_0' = \frac{2\pi 5{,}6}{\sqrt{\frac{3000}{900}}} = 19{,}22 \quad \text{(fréquence} = 3{,}07\,\text{Hz)}.$$

Pulsation forcée: $\omega = 2\pi 40 = 251{,}5.$

Coefficient $\beta' = \frac{\omega}{\omega_0'} = \frac{251{,}5}{19{,}22} = 13{,}05 > 4.$

Coefficient $K' = \frac{v}{l\,\omega_0'} = \frac{150 \cdot 10^2}{3{,}6 \cdot 30 \cdot 10^2 \cdot 19{,}22} = 0{,}0722.$

En se référant à la Planche VIII, on voit que pour $K' = 0{,}0722$ et $\beta' = 5$ (on a vu plus haut que pour des valeurs de β' supérieures à 4 les fluctuations du coefficient dynamique sont faibles) la valeur du coefficient dynamique est inférieure à 1,2.

Ce n'est que pour des vitesses supérieures à 200 km/h que celui-ci prend des valeurs plus élevées.

On se rend compte de la simplicité du présent calcul. Cette façon de faire nous apparaît particulièrement commode pour les auteurs de projet.

9. Remerciements

Nous tenons à exprimer ici notre reconnaissance à Monsieur le Professeur P. HONTOY, Président de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université Libre de Bruxelles, qui nous a autorisé à faire appel aux ordinateurs électroniques de l'Université pour nos calculs.

Nous remercions vivement Monsieur le Professeur A. PADUART qui a bien voulu patronner la présente étude.

Nos remerciements vont également à Messieurs A. DEHAEN et A. SOETE, Ingénieurs en Chef à la S.N.C.B., qui nous ont autorisé à la publier, ainsi qu'à Monsieur P. DEDIEU, Assistant au Laboratoire de Calcul de l'Université de Bruxelles, qui a bien voulu se charger du traitement à l'ordinateur électronique de nos formulations.

Les principales notations utilisées

P force concentrée mobile.
G poids propre du pont.
i fraction du temps de parcours du pont définissant la position de la force P.
l portée du pont.
n ordre d'un harmonique.
v vitesse de la force P sur le pont.
w flèche du pont à mi-portée.
z flèche du pont en un point quelconque.
ω pulsation de la force mobile $P_c(1+\theta\cos\omega t)$.
ω_0 pulsation propre du pont.
ω_0' pulsation propre du pont chargé.
$\beta=\frac{\omega}{\omega_0}$; $\beta'=\frac{\omega}{\omega_0'}$; $K=\frac{v}{l\,\omega_0}$; $K'=\frac{v}{l\,\omega_0'}$.
Φ_P coefficient dynamique dans le cas d'une force mobile $P_c(1+\theta\cos\omega t)$.
$\Phi_{2\,(P/2)}$ coefficient dynamique dans le cas de deux forces mobiles $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$.
λ fraction de l définissant la distance séparant les deux forces mobiles $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$.
Φ_{P_c} coefficient dynamique dans le cas d'une force mobile d'intensité constante.
E module de Young.
I moment d'inertie.
Ω aire d'une section transversale droite.
γ poids spécifique.

Résumé

L'augmentation des vitesses des convois ferroviaires pose aux ingénieurs des chemins de fer une grande diversité de problèmes parmi lesquels il y a le comportement des tabliers de pont. L'auteur aborde le problème sur le plan théorique et examine l'influence des principaux paramètres en jeu. Le traitement à l'ordinateur électronique des formules élaborées a permis l'établissement de diagrammes donnant le coefficient dynamique en fonction de ces paramètres. Sur cette base, l'auteur propose une méthode pratique pour le calcul du coefficient dynamique.

Zusammenfassung

Die Geschwindigkeitserhöhung der Züge stellt den Eisenbahningenieur vor ein breites Feld von Problemen, unter denen das Verhalten der Brückenplatte zu erwähnen ist. Der Verfasser nimmt das Problem theoretisch in Angriff und prüft den Einfluß der Hauptparameter. Die Behandlung der hergeleiteten Formeln mittels des Elektronenrechners hat eine graphische Auswertung, die den Stoßzuschlag (dynamischer Beiwert) in Funktion der Parameter angibt, möglich gemacht. Auf dieser Grundlage schlägt der Verfasser ein praktisches Verfahren zur Berechnung des Stoßzuschlages vor.

Summary

The increase in the speeds of railway trains confronts railway engineers with a wide variety of problems, among which there is the behaviour of bridge decks. The author approaches the problem from the theoretical angle and considers the effect of the principal parameters concerned. Treatment in an electronic computer of the formulae that have been worked out has made it possible to prepare diagrams giving the dynamic coefficient in relation to these parameters. On this basis, the author suggests a practical method for calculating the dynamic coefficient.