

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 28 (1968)

**Artikel:** Ein neues, vollverträgliches endliches Element für Plattenbiegung  
**Autor:** Bosshard, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-22168>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ein neues, vollverträgliches endliches Element für Plattenbiegung

*A New, Fully Compatible Finite Element for Plate Bending*

*Un nouvel élément fini purement compatible pour le calcul des plaques fléchies*

W. BOSSHARD

Zürich

## Bezeichnungen

Matrizen, Zeilen, Spalten: Fettdruck

$t$  Transponierte Matrix

Spalte { }

Zeile [ ]

$e$  Elementnummer

$F_e$  Fläche des Elementes

$t$  Elementdicke

$i, j, k$  laufende Indices

$x, y$  in Plattensymmetrieebene. Kartesische Koordinaten

$w$  Verschiebung in Richtung  $z$

$\epsilon = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}$  Dehnungen

$\kappa = \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}$  Krümmungen

$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$

$E$  allgemein symmetrischer  $(3 \times 3)$ -Elastizitätsmodul

$\mu = \{m_x, m_y, -m_{xy}\}$  Plattenmomente

$f = [1, x, y, \dots, xy^4, y^5] (1 \times 21)$

$$f_{\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f \end{bmatrix} (3 \times 21)$$

$b_e$  Polynomkoeffizienten (verallgemeinerte Lagekoordinaten)

$U_e$  elastische Formänderungsenergie eines Elementes

$A_e$	Arbeit der äußeren Lasten an einem Element
$U$	elastische Formänderungsenergie der Struktur
$A$	Arbeit der äußeren Lasten der Struktur
$q(x, y)$	Belastung in vertikaler Richtung $z$
$r$	Verallgemeinerte Knotenverschiebungen der Struktur
$q_e$	Verallgemeinerte Knotenverschiebungen des Elementes
$\pi_e$	Verallgemeinerte Belastung am Element
$p_e$	Verallgemeinerte Knotenbelastung am Element
$P$	Verallgemeinerte Belastung der Struktur

Bei der Beurteilung von Plattenelementen für die Finite-Element-Technik sind zwei Gesichtspunkte maßgebend: Erstens die Reinheit des Ansatzes. Reine Verschiebungsansätze erfüllen die Verträglichkeitsbedingungen überall, die Gleichgewichtsbedingungen nur an der diskretisierten Struktur. Es kann gezeigt werden [1, 2], daß in diesem Falle die elastische Formänderungsenergie zu hoch, die Arbeit der äußeren Belastung zu klein eingeschätzt wird. Grob gesagt werden also die Verschiebungen unter den Lasten zu klein ausfallen. Werden umgekehrt die Gleichgewichtsbedingungen überall erfüllt, die Verträglichkeitsbedingungen dagegen nur an der diskretisierten Struktur, so werden — wieder grob formuliert — die Verschiebungen unter den Lasten zu groß errechnet. Diese obere oder untere Schranken-Eigenschaft eines Ansatzes ist für den Ingenieur von erheblicher Bedeutung. Zweitens wird man nach den Konvergenzeigenschaften bei fortgesetzter Feinerteilung der Struktur fragen. Beweise für Konvergenz der Verschiebungen zu den exakten elastizitätstheoretischen Werten sind bisher nur für sehr einfache Verschiebungsansätze geführt worden [3].

Ein allgemeines hinreichendes Kriterium für monotone Konvergenz der minimalen potentiellen Energie hat MELOSH [4] angegeben: es muß möglich sein, durch geeignete Wahl der verallgemeinerten Verschiebungen der feiner geteilten Struktur exakt den Verschiebungszustand minimaler potentieller Energie der gröber geteilten Struktur zu geben. Damit kann die minimale potentielle Energie der feiner geteilten Struktur nur kleiner oder gleich jener der gröber geteilten sein. Von den heute bekannten reinen Verschiebungsansätzen für allgemeine Plattenelemente [5, 6, 7, 8] genügt keiner dem Kriterium von MELOSH. Zudem weisen alle mehr oder weniger starke Unstetigkeiten der Plattenmomente in den Elementecken auf. Es erstaunt nicht, daß die Resultate, insbesondere die berechneten Plattenmomente, dem Vergleich mit älteren Näherungsverfahren (endliche Differenzen) nicht standhalten.

Ein reiner Gleichgewichtsansatz für dreieckige Elemente ist von MORLEY angegeben worden [12].

Im folgenden wird ein Verschiebungsansatz angegeben, der dem Kriterium von MELOSH genügt und zudem die Plattenmomente in den Elementecken

stetig überträgt. Die Untersuchung erstreckt sich auf Plattenelemente von allgemeiner Dreiecksform und beliebiger, stetiger, schwachveränderlicher Dickenverteilung (siehe Fig. 1). Symmetrie zu einer Mittelebene wird voraus-

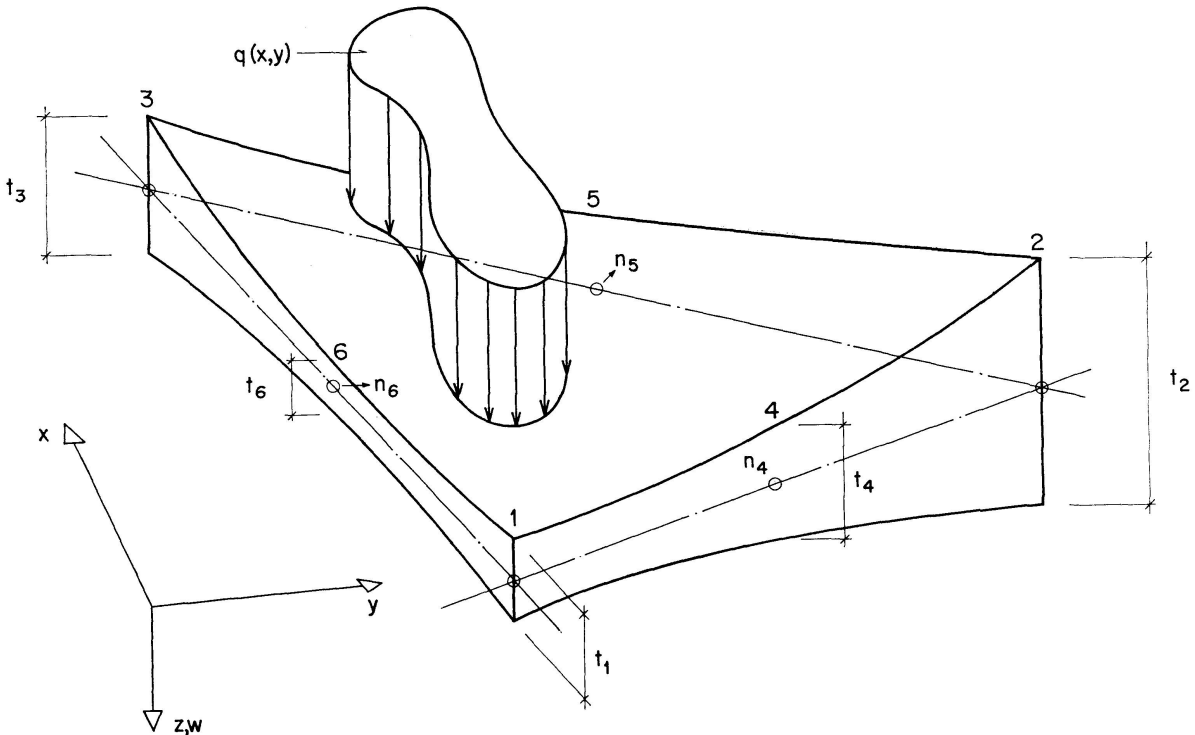


Fig. 1. Allgemeines dreieckiges Plattenelement mit veränderlicher Dicke und beliebiger Belastung.

gesetzt. Die einschränkenden Voraussetzungen sind jene der technischen Plattentheorie. Insbesondere wird die Mittelebene dehnungslos vorausgesetzt, und die Schubverzerrungen werden vernachlässigt. Dann gelten die Beziehungen

$$\varepsilon = -z\kappa \quad (1)$$

für die Verzerrungen. Das Elastizitätsgesetz in der Plattenebene  $x, y$  für beliebige Anisotropie kann in der Form

$$\sigma = \mathbf{E}\varepsilon \quad (2)$$

angeschrieben werden. Die Plattenmomente sind in der üblichen Weise definiert als

$$m_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x z dz, \quad m_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y z dz, \quad m_{xy} = - \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} z dz \quad (3)$$

oder, mit (1) und (2)

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ -m_{xy} \end{bmatrix} = - \int_{-t/2}^{+t/2} \mathbf{E}\kappa z^2 dz = - \frac{t^3}{12} \mathbf{E}\kappa. \quad (4)$$

Als Ansatz für die Durchbiegungen  $w$  eines Elementes wählen wir das vollständige Polygon 5. Grades

$$\begin{aligned} w = & b_{00} 1 + b_{10} x + b_{01} y + b_{20} x^2 + b_{11} xy + b_{02} y^2 + b_{30} x^3 + b_{21} x^2 y + b_{12} xy^2 \\ & + b_{03} y^3 + b_{40} x^4 + b_{31} x^3 y + b_{22} x^2 y^2 + b_{13} xy^2 + b_{04} y^4 + b_{50} x^5 + b_{41} x^4 y \\ & + b_{32} x^3 y^2 + b_{23} x^2 y^3 + b_{14} xy^4 + b_{05} y^5 \end{aligned} \quad (5)$$

mit 21 Koeffizienten  $b_{ik}$ . Wir bilden aus den Teilfunktionen — in obenstehender Reihenfolge — die Zeile

$$\mathbf{f} = [1, x, y, \dots, xy^4, y^5] \quad (6)$$

und damit die Matrix ( $3 \times 21$ ).

$$\mathbf{f}_\Delta = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \dots i(i-1)x^{i-2}y^k \dots \\ \dots k(k-1)x^i y^{k-2} \dots \\ \dots 2ikx^{i-1}y^{k-1} \dots \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Die Koeffizienten  $b_{ik}$  ordnen wir genauso zur Spalte

$$\mathbf{b}_e = \{b_{00}, b_{10}, b_{01}, \dots, b_{05}\}. \quad (8)$$

Sie bilden einen Satz von Lagekoordinaten [11] für das Element. Mit der Wahl der Funktionen  $\mathbf{f}$  haben wir somit eine Diskretisierung des Problems vorgenommen. An dieser Stelle wird die Verwandtschaft zwischen Finite-Element-Technik und dem Verfahren von Raleigh-Ritz augenfällig. Mit der Matrix (7) ist

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{f}_\Delta \mathbf{b}_e \quad (9)$$

und damit schreiben wir die Formänderungsenergie des Elementes

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \mathbf{b}_e^t \left[ \int_{F_e} \left( \frac{t^3}{12} \right) \mathbf{f}_\Delta^t \mathbf{E} \mathbf{f}_\Delta dF \right] \mathbf{b}_e. \quad (10)$$

Die Matrix in den eckigen Klammern ist die Steifigkeitsmatrix des Elementes in den Lagekoordinaten  $\mathbf{b}_e$ :

$$\mathbf{k}_{be} = \int_{F_e} \left( \frac{t^3}{12} \right) \mathbf{f}_\Delta^t \mathbf{E} \mathbf{f}_\Delta dF. \quad (10a)$$

Die Arbeit der äußeren Belastung  $q(x, y)$  am Element ist

$$A_e = \int_{F_e} q w dF = \mathbf{b}_e^t \int_{F_e} q \mathbf{f}^t dF. \quad (11)$$

Die Größen

$$\pi_e = \int_{F_e} q f^t dF \quad (12)$$

sind die verallgemeinerten äußeren Lasten am Element.

Um die totale potentielle Energie einer aus Elementen zusammengesetzt gedachten Platte geschlossen anschreiben zu können, müssen wir die Lagekoordinaten  $\mathbf{b}_e$  der Elemente aus einem geeigneten Satz von Lagekoordinaten  $\mathbf{r}$  der Platte ausrechnen. In die Spalte  $\mathbf{r}$  lassen wir eingehen (siehe Fig. 2):

- Die vertikalen Verschiebungen  $w$  und deren Ableitungen  $\partial w/\partial x$ ,  $\partial w/\partial y$  in den Knoten.
- Die Ableitungen  $\partial w/\partial n$  in den Mittelpunkten zwischen den Knoten. Die Normalen  $n$  werden konventionell gerichtet in den 1. oder 2. Quadranten der  $x, y$ -Ebene ( $+x$ -Achse eingeschlossen,  $-x$ -Achse ausgeschlossen).
- Die Plattenmomente  $\mu$  in den Knoten. Diese Wahl mag auf den ersten Blick überraschen. Formal sind die Momente jedoch nichts weiter als Linearkombinationen von Verschiebungsgrößen.

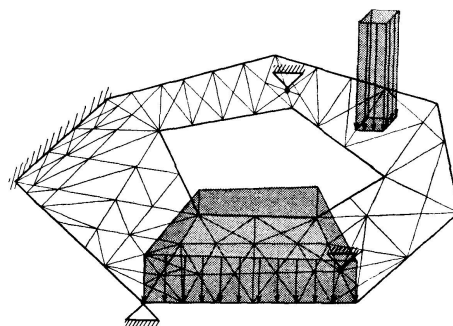
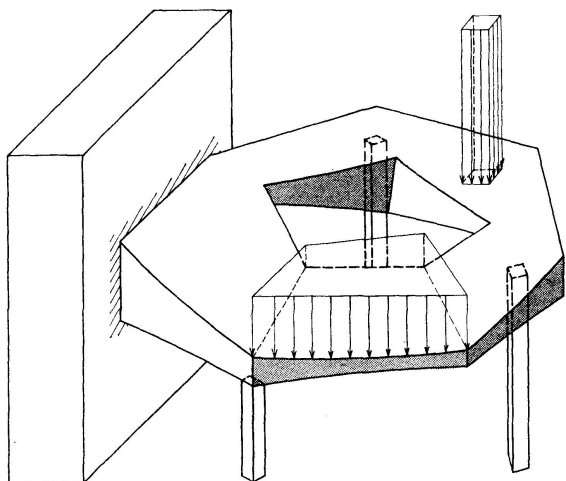


Fig. 2b. Idealisierte Struktur.

Fig. 2a. Allgemeine Plattenstruktur.

Es ist leicht zu sehen, daß die so definierten verallgemeinerten Verschiebungen zusammen mit dem Verschiebungsansatz für die Elemente ein voll verträgliches Verschiebungsfeld über die ganze Platte bestimmen. So sind die Normalableitungen  $\partial w/\partial n$  längs der Verbindung zweier Knoten  $i, k$  in beiden angeschlossenen Elementverschiebungsfeldern Polynome 4. Grades von  $s$ . Diese beiden Funktionen haben die 5 Stützwerte  $(\partial w/\partial n)_i$ ,  $(\partial^2 w/\partial n \partial s)_i$ ,  $\partial w/\partial n$  in der Mitte,  $(\partial w/\partial n)_k$  und  $(\partial^2 w/\partial n \partial s)_k$  gemeinsam. Sie sind identisch. Ebenso läßt sich die Gleichheit der Verschiebungen  $w$  auf zusammenstoßenden Elementrändern nachweisen. Störungen der Verträglichkeit können bei sprunghaften Änderungen von Querschnittswerten oder elastischen Eigenschaften auftreten. Solche Fälle müssen ausgeschlossen werden, wenn die Lösung eine untere Schranke der Verschiebungen sein soll. Ein möglicher, aber unpraktischer Ausweg wäre, die Unstetigkeiten ins Innere der Elemente zu verlegen.

Das Integral in (10) könnte dann nur noch sehr mühsam automatisch ausgewertet werden.

Fassen wir die 21 Komponenten von  $\mathbf{r}$ , die an ein bestimmtes Element  $e$  (1, 2, 3, 4, 5, 6) angeschlossen sind, zur Spalte

$$\mathbf{q}_e = \{w_1, w_2, w_3, \partial w_1/\partial x, \partial w_2/\partial x, \partial w_3/\partial x, \partial w_1/\partial y, \partial w_2/\partial y, \partial w_3/\partial y, \partial w_4/\partial n, \partial w_5/\partial n, \partial w_6/\partial n, \mu_1^t, \mu_2^t, \mu_3^t\} \quad (13)$$

zusammen, so ist die Bestimmung der 21 Polynomkoeffizienten  $b_{ik}$  aus den 21 Stützwerten in  $\mathbf{q}_e$  ein allgemeines Interpolationsproblem in 2 Dimensionen. Die notwendigen Gleichungen sind

$$w_i = \mathbf{f}(x_i, y_i) \mathbf{b}_e, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}\right)_{x_i, y_i} \mathbf{b}_e, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i = \left(\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{f}\right)_{x_i, y_i} \mathbf{b}_e, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_j = \left[ \cos(n_j x) \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}\right)_{x_j, y_j} + \cos(n_j y) \left(\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{f}\right)_{x_j, y_j} \right] \mathbf{b}_e \quad (j = 4, 5, 6)$$

und 
$$\mu_i = -\frac{t_i^3}{12} \mathbf{E} \mathbf{f}_\Delta(x_i, y_i) \mathbf{b}_e, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (14)$$

Sie lassen sich zusammenfassen zu der linearen Relation

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{T}_e \mathbf{b}_e. \quad (15)$$

Da diese Gleichung in der Form

$$\mathbf{b}_e = \mathbf{T}_e^{-1} \mathbf{q}_e \quad (16)$$

benötigt wird, muß die Regularität von  $\mathbf{T}$  nachgeprüft werden. Zu diesem Zweck wurden die kleinsten Pivotelemente bei der Inversion von  $\mathbf{T}$  für den ganzen Bereich der möglichen Dreiecksformen mit  $D=1$ ,  $\nu=0$  tabelliert. Fig. 3a zeigt einen Schichtlinienplan dieser Tabelle. Singularität kann offensichtlich nur bei ausgearteten Dreiecksformen eintreten.

Die Formänderungsenergie (10) transformiert sich mit (10a) und (16) zu

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{b}_e^t \mathbf{k}_{be} \mathbf{b}_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^t \mathbf{k}_e \mathbf{q}_e, \quad (18)$$

wo

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{T}_e^{t-1} \mathbf{k}_{be} \mathbf{T}_e^{-1} \quad (19)$$

die Elementsteifigkeit in den Lagekoordinaten der Platte ist. Ebenso erhält man für die Arbeit der äußeren Lasten

$$A_e = \mathbf{b}_e^t \boldsymbol{\pi}_e = \mathbf{q}_e^t \mathbf{p}_e \quad (20)$$

wo

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{T}_e^{t-1} \boldsymbol{\pi}_e \quad (21)$$

die verallgemeinerten Elementbelastungen in den Lagekoordinaten der ganzen Platte sind.

Führt man schließlich die Zuordnung zwischen der Spalte  $\mathbf{q}_e$  und den Verschiebungen  $\mathbf{r}$  der ganzen Platte in der Schreibweise von ARGYRIS [10] mit

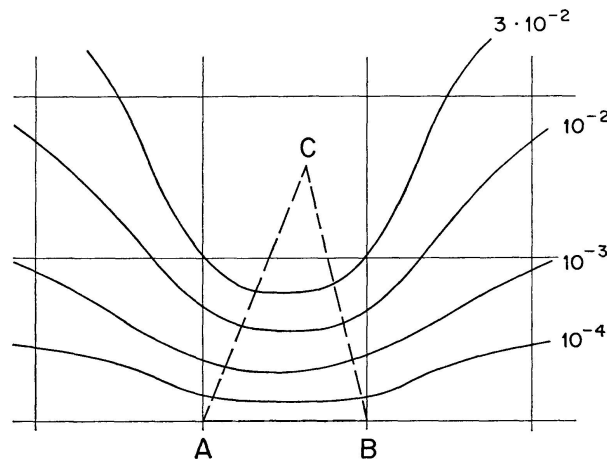


Fig. 3a. Betrag des kleinsten Pivots bei der Inversion der Matrix  $T$  in Abhängigkeit von der Elementform.

Basis des Dreiecks A—B. Der Pivotbetrag wird über der Spitze C des Dreiecks (variabel) aufgetragen. Gezeichnet sind die Schichtlinien dieser Funktion.

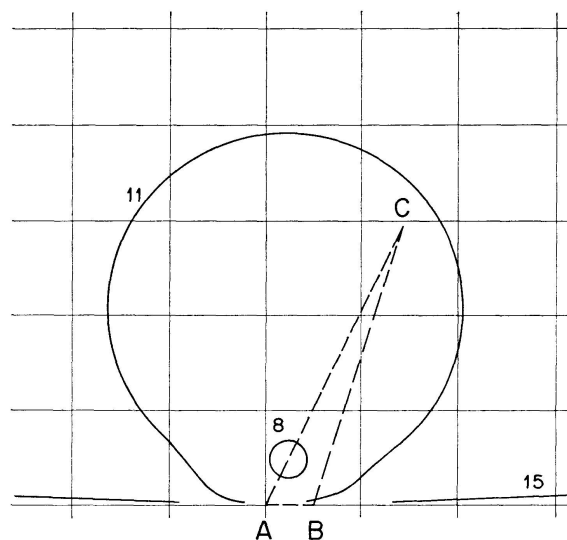


Fig. 3b. Grenzl意思ien der unbedingten Konvergenz der iterativen Nachverbesserung der Inversen von  $T$  in Abhängigkeit von der Elementform bei Rechnung mit 8, 11 und 15 Dezimalen.

$$q_e = a_e r \tag{22}$$

ein, wo  $a_e$  eine Umordnungsmatrix ist, so erhält man für die elastische Formänderungsenergie der Platte

$$U = \frac{1}{2} r^t \left( \sum_e a_e^t k_e a_e \right) r = \frac{1}{2} r^t K r \tag{23}$$

und für die Arbeit der äußeren Lasten

$$A = r^t \left( \sum_e a_e^t p_e \right) = r^t P. \tag{24}$$

Nimmt man als Nullpunkt des Potentials der (konservativen) Belastung den unverzerrten Zustand der Platte, so ist die totale potentielle Energie

$$\Phi U = -A.$$

Aus der Forderung, daß dieser Ausdruck ein Minimum sein muß, folgen die bekannten Gleichungen der Deformationsmethode

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{P}. \quad (25)$$

Ein Teil der Komponenten von  $\mathbf{r}$  wird durch Randbedingungen vorgegeben sein; da  $\mathbf{r}$  auch die Plattenmomente enthält, gehen nicht nur gegebene Verschiebungen oder Verdrehungen, sondern auch freie Ränder u. a. in diese ein, wobei die Kirchhoffschen Randbedingungen des freien Randes allerdings nicht erfüllt werden. Bezeichnet der Index  $U$  Unbekannte,  $G$  gegebene Größen  $\mathbf{r}$ , so geht (25) über in

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{UU} & \mathbf{K}_{UG} \\ \mathbf{K}_{GU} & \mathbf{K}_{GG} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_U \\ \mathbf{r}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_U \\ \mathbf{P}_G \end{bmatrix}. \quad (26)$$

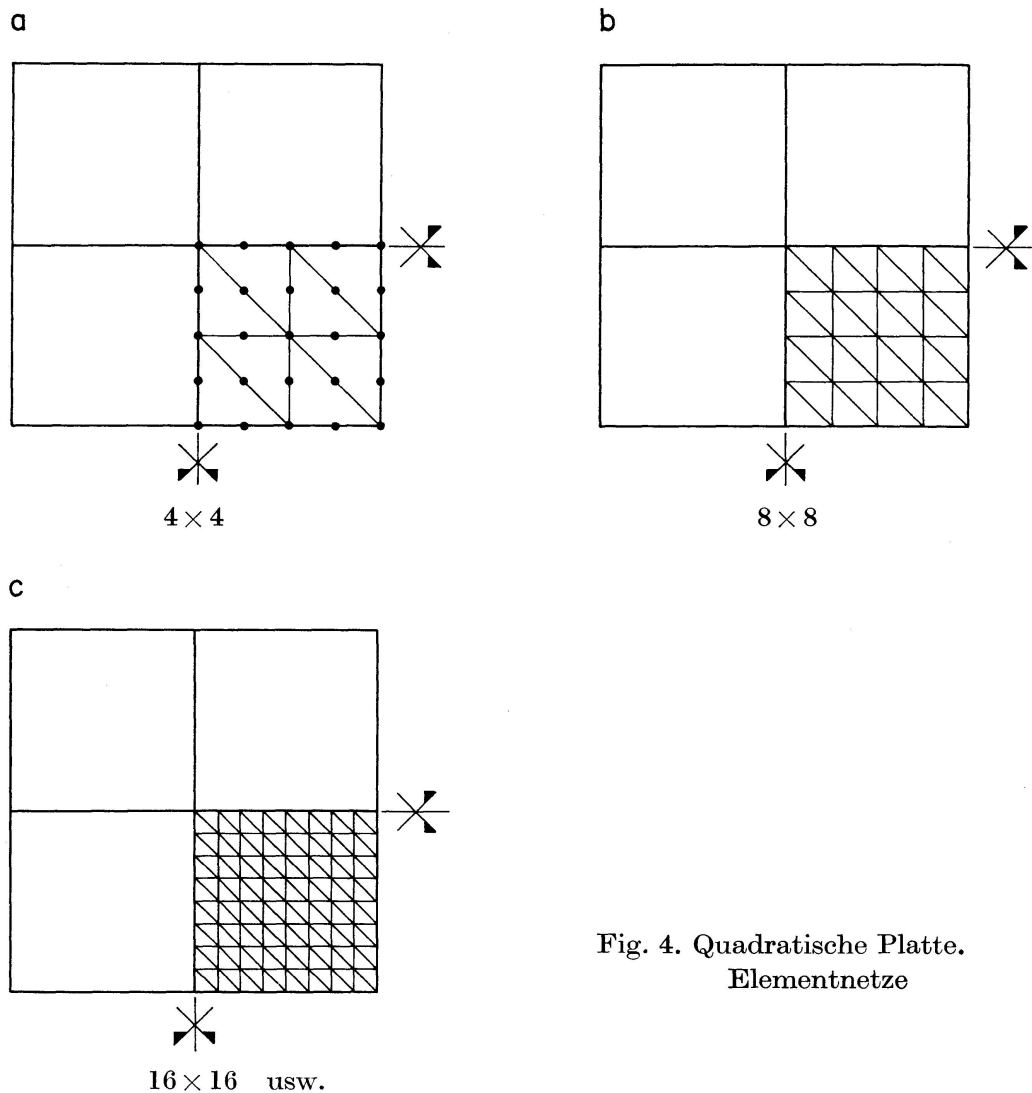


Fig. 4. Quadratische Platte.  
Elementnetze

Die Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten sind jetzt

$$\mathbf{K}_{UU} \mathbf{r}_U = (\mathbf{P}_U - \mathbf{K}_{UG} \mathbf{r}_G) \tag{27}$$

während die Reaktionen in den Richtungen vorgegebener Verschiebungen durch

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}_{GU} \mathbf{r}_U + \mathbf{K}_{GG} \mathbf{r}_G - \mathbf{P}_G \tag{28}$$

gegeben sind.

Um mit anderen voll verträglichen dreieckigen Elementen und mit analytischen Werten vergleichen zu können, wurde als Zahlenbeispiel die einfach gelagerte Quadratplatte unter mittiger Einzellast und unter gleichmäßig verteilter Flächenlast gewählt. Die analytischen Werte finden sich in [13]. Es wurden 3 verschieden feine Netze verwendet (Fig. 4), wobei aus Symmetriegründen nur ein Viertel der Platte in die Rechnung einging. Selbstverständlich wäre es um den Preis eines etwas komplizierteren Rechenprogramms möglich gewesen, auch die Symmetrie zur Diagonalen auszunützen und mit einem Achtel der Platte zu rechnen. Ein Vergleich der Genauigkeit ist nur in bezug auf die Größe des Gleichungssystems (27) sinnvoll, die in Fig. 5 zusammen mit den Ergebnissen für die Durchbiegung in Plattenmitte angegeben ist. Es

Exakter Wert: 0,01160	4 × 4	8 × 8	16 × 16	
Neues Element Unbekannte	0,01134 33	0,01153 139	0,01158 567	$\times \frac{Pa^2}{D}$
BAZELEY [6] <sup>1)</sup>	0,01057	—	—	
CLOUGH [5] <sup>1)</sup>	0,01039	0,0113	0,0115	$\times \frac{Pa^2}{D}$
Unbekannte	12	47	182	

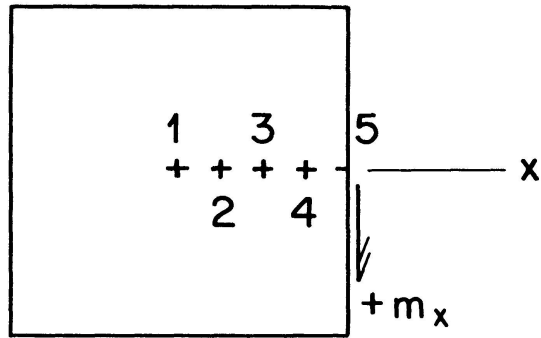
Fig. 5a. Maximale Durchbiegung einer frei aufliegenden, isotropen Quadratplatte unter Einzellast in Plattenmitte.  $\nu = 0,3$ .

Exakter Wert 0,00406	4 × 4	8 × 8	16 × 16
Neues Element Unbekannte	0,00393 33	0,00403 139	0,00405 567
BAZELEY [6] <sup>1)</sup>	0,00376	—	—
CLOUGH [5] <sup>1)</sup>	0,00371	0,00392	0,00401
Unbekannte	12	47	182

Fig. 5b. Maximale Durchbiegungen einer frei aufliegenden, isotropen Quadratplatte unter gleichmäßig verteilter Flächenlast.  $\nu = 0,3$ .

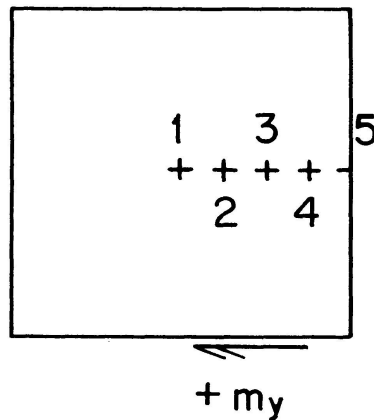
<sup>1)</sup> Zitiert nach [14].

bestätigt sich die Erfahrungsregel, daß die Verwendung von Elementen mit mehr Freiheitsgraden im ganzen gesehen die Rechenzeit abkürzt. Mit Ausnahme sehr kleiner Probleme trifft dies auch mit Berücksichtigung der Zeit für die Elementsteifigkeiten zu.



Punkt	1	2	3	4	5
Exakt	0,0479	0,0458	0,0390	0,0250	0
4 × 4	0,0520	—	0,0370	—	0
8 × 8	0,0477	0,0455	0,0385	0,0246	0
16 × 16	0,0478	0,0457	0,0388	0,0248	0

Fig. 6a. Plattenmomente  $m_x$  einer frei aufliegenden, isotropen Quadratplatte unter gleichmäßig verteilter Flächenlast.  $\nu = 0,3$ .



Punkt	1	2	3	4	5
Exakt	0,0479	0,0448	0,0356	0,0204	0
4 × 4	0,0520	—	0,0351	—	0
8 × 8	0,0477	0,0446	0,0355	0,0205	0
16 × 16	0,0478	0,0447	0,0356	0,0205	0

Fig. 6b. Plattenmomente  $m_y$  einer frei aufliegenden, isotropen Quadratplatte unter gleichmäßig verteilter Flächenlast.  $\nu = 0,3$ .

Ein weiterer Vorteil des vorliegenden Elements ist darin zu erblicken, daß in den verallgemeinerten Verschiebungen die Plattenmomente in den Knoten inbegriffen sind. Eine nachträgliche Berechnung von Spannungsgrößen aus Knotenverschiebungen ist überflüssig, sofern nicht Spannungswerte im Elementinnern verlangt werden. Fig. 6 zeigt den Verlauf der Plattenmomente in der Plattenmittellinie. Die Vergleichswerte sind aus TIMOSHENKO quadratisch interpoliert. Die erzielte Genauigkeit ist für Finite-Element-Technik außerordentlich, ebenso wie die Tatsache, daß die Konvergenz schon beim  $8 \times 8$ -Netz für praktische Zwecke abgeschlossen ist.

Die Programmierung des beschriebenen Rechnungsganges für eine digitale Rechenanlage ist nicht Gegenstand dieses Aufsatzes. In den letzten Jahren sind mehrere Lehrbücher über Finite-Element-Technik erschienen, die zum Teil auch Programmbeispiele enthalten ([14], [15], [16]). Dagegen sollen noch zwei numerische Fragen gestreift werden. Es ist zweckmäßig, die Dicke  $t$  der Platte als Polynom 2. Grades in  $x$  und  $y$  anzunehmen. Die sechs Werte  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$  an den Ecken und Seitenmitten genügen zur Bestimmung der sechs Koeffizienten  $c_{ik}$  von

$$t(x, y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2. \tag{29}$$

Wie bei (14) liegt ein Interpolationsproblem in zwei Dimensionen vor. Setzt man ferner

$$E = \text{const} \tag{30}$$

für das ganze Element, so wird eine formelmäßige Integration von (10a) möglich. Diese ist für Polynome schneller und genauer als die numerische Integration nach Gauß, die ZIENKIEWICZ [14] vorgeschlagen hat. Bei großen Platten mit sehr vielen Elementen kann diese Genauigkeit durchaus erforderlich sein, um einer numerisch bedingten Divergenz des Verfahrens zu entgehen. Die einzelnen Integrale in (10a) haben die Form

$$I = \int_{F_e} x^i y^k dx dy. \tag{31}$$

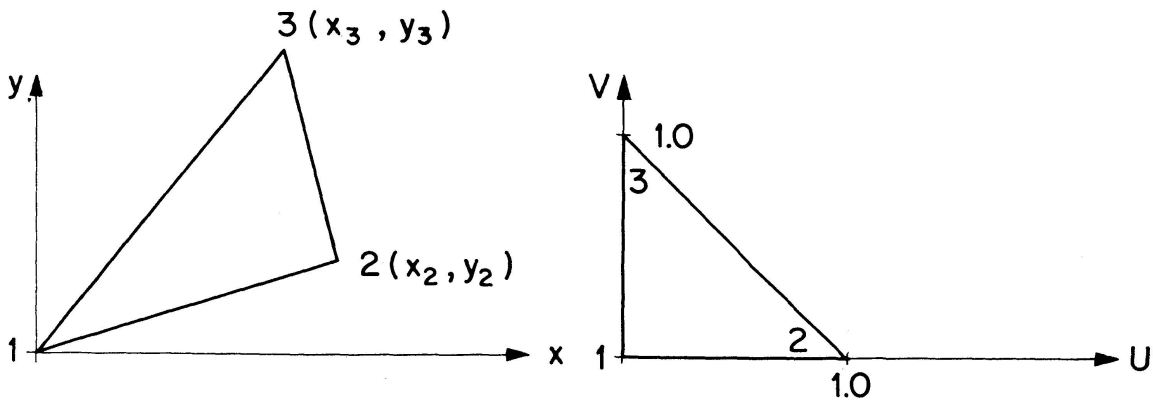


Fig. 7. Integration von Polynomen über allgemeine Dreiecksbereiche.

$$x = x_2 u + x_3 v, \quad y = y_2 u + y_3 v.$$

Durch eine Transformation

$$x = x_2 u + x_3 v, \quad y = y_2 u + y_3 v \quad (32)$$

mit der Determinante

$$D = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} = 2 F_e \quad (33)$$

geht das allgemeine Dreieck des  $x, y$ -Systems in das spezielle des  $u, v$ -Systems über (siehe Fig. 7). Dann folgt

$$I = 2 F_e \int_{F_e} (x_2 u + x_3 v)^i (y_2 u + y_3 v)^k du dv \quad (34)$$

und durch Ausmultiplizieren erhält man Terme der Form

$$J = \int_0^1 v^m dv \int_0^{1-v} u^n du = \frac{1}{n+1} \int_0^1 v^m (1-v)^{n-1} dv. \quad (35)$$

Das letzte Integral ist die Definitionsgleichung der Eulerschen Betafunktion,

$$B(m+1, n+2)$$

wofür bei ganzen Zahlen  $m$  und  $n$  gilt:

$$B(m+1, n+2)^{-1} = (n+2) \binom{m+n+2}{m}, \quad (36)$$

also

$$J = \int_{F_e} u^n v^m = \frac{m! n!}{(m+n+2)!}. \quad (37)$$

Selbstverständlich müssen alle angedeuteten algebraischen Zwischenschritte als Manipulation mit Koeffizienten und Exponenten programmiert werden.

Die hohe erforderliche Genauigkeit in den Elementsteifigkeitsmatrizen stellt große Anforderungen an die Inversion der Matrix in (16). Außer singulären Fällen müssen auch solche ausgeschlossen werden, die zu einem hohen Stellenverlust führen. Als Kriterium für solche numerische Fastsingularität wird nach FORSYTHE und MOLER [9] das Konvergenzverhalten der iterativen Nachverbesserung verwendet. Die Konvergenz dieses Verfahrens ist auch bei ungünstiger Verteilung der Rundungsfehler gesichert, wenn die Ungleichung

$$1,01 (n^3 + 3n^2) p u \|T\|_\infty \|T^{-1}\|_\infty < \frac{1}{2} \quad (38)$$

erfüllt ist. Darin bedeuten

$\|\cdot\|_\infty$  Maximale Zeilensumme (Holder  $\infty$ -Norm)

$n$  Die Ordnung der Matrix, hier 21

$p$  Größtes absolutes Pivotelement dividiert durch  $\|T\|$

$u$  Einheits-Rundungsfehler, abhängig von Stellenzahl und Rundungsverhalten der Maschine

Der Gültigkeitsbereich von (38) ist in Fig. 3b für die Präzisionsstufen 8, 11, bzw. 15 Dezimalstellen dargestellt, entsprechend den üblichen Stellenzahlen in heutigen Großrechenanlagen bei einfacher Genauigkeit. Die Tatsache, daß achtstellige Genauigkeit nicht immer ausreicht, hätte das Verfahren im Sinne der klassischen Statik zur Unbrauchbarkeit verurteilt. Wenn man aber bedenkt, daß die digitalen Rechner der heute jüngsten Generation fast ausschließlich 11 und mehr Dezimalstellen mitnehmen, so besteht kein Grund, diese Präzision nicht auszunützen. Die Bedingung (38) ist außerordentlich streng, setzt sie doch den außerordentlich unwahrscheinlichen Fall der ungünstigen Kombination aller Rundungsfehler voraus.

Es ist möglich, das Interpolationsproblem (14) in homogene Dreieckskoordinaten (siehe Ref. [14]) zu fassen. Dadurch wird  $T$  von der speziellen Dreiecksform unabhängig, und die Inversion muß nur einmal ausgeführt werden. Das numerische Problem bei gestreckten Elementen wird dadurch in die Transformation von  $k_{be}$  verlegt.

### Literatur

1. B. FRAEIJIS DE VEUBEKE: Displacement and equilibrium models in the finite element method. Kap. 9 von "Stress Analysis", ed. Zienkiewicz and Holister, Wiley, 1965.
2. W. PRAGER und J. L. SYNGE: Approximations in Elasticity based on the concept of function space. Quart. Appl. Math., 5, 1947.
3. J. L. SYNGE: The Hypercircle in Mathematical Physics. Cambridge University Press, Chap. 3, 1957.
4. R. J. MELOSH: Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method. AIAA-Journal, Vol. 1, Nr. 7, Juli 1963.
5. R. W. CLOUGH and J. L. TOCHER: Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending. Proc. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, 1966.
6. G. P. BAZELEY, Y. K. CHEUNG, B. M. IRONS and O. C. ZIENKIEWICZ: Triangular elements in plate bending — conforming and nonconforming solutions. Proceedings Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, 1966.
7. B. FRAEIJIS DE VEUBEKE: A conforming finite element for plate bending. Int. J. Solids Structures, 1968, Vol. 4, p. 95—108.
8. A. L. DEAK and T.H. H. PIAN: Application of the Smooth-Surface Interpolation to the Finite-Element Analysis. AIAA-Journal, Jan. 1967.
9. G. FORSYTHE, C. B. MOLER: Computer Solution of Linear Algebraic Systems. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
10. J. H. ARGYRIS, B. SC. KELSEY: Energy Theorems and Structural Analysis. Butterworths 1960, zuerst veröffentlicht in Aircraft Engineering, 1954, 1955.
11. H. ZIEGLER: Mechanik III, Kap. I, Systeme mit endlichem Freiheitsgrad. Birkhäuser 1956.
12. L. S. D. MORLEY: Journal of the Royal Aeronautical Society, Oktober 1967: A Triangular Equilibrium Element with Linearly Varying Bending Moments for Plate Bending Problems.
13. S. P. TIMOSHENKO, S. WOJNOWSKY-KRIEGER: Theory of Plates and Shells. 2. Aufl., McGraw-Hill, New York, 1959.

14. O. C. ZIENKIEWICZ, Y. K. CHEUNG: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. McGraw-Hill, 1967.
15. H. C. MARTIN: Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis. McGraw-Hill, 1966.

### Zusammenfassung

Es wird ein neuer, rein verträglicher Ansatz für ein Plattenelement von allgemeiner Dreiecksform mit beliebigem, symmetrischem Dickenverlauf angegeben. Die Plattenmomente in den Ecken der Elemente gehen als verallgemeinerte Verschiebungen in die Gleichungen der Deformationsmethode ein. Eine nachträgliche Berechnung von Spannungen aus Verschiebungen entfällt.

Ein Beispiel zeigt, daß bei kleinerem, numerischem Aufwand bessere Genauigkeiten als bei früheren Finite-Element-Lösungen zu erwarten sind. Bei den Spannungen ist die Verbesserung besonders deutlich.

### Summary

A new, fully compatible plate-bending element of arbitrary triangular shape and arbitrary variable symmetric cross-section for use in finite-element analysis is presented. The bending moments at the element corners are entered as generalized displacements into the equations of equilibrium, along with the usual nodal displacements and rotations.

An example compares the new approach with earlier finite-element solutions of the compatible type. Better results are obtained with fewer equations, and no a — posteriori computation of stresses from displacements is necessary.

### Résumé

On présente un élément fini triangulaire purement compatible pour le calcul des plaques à épaisseur variable.

Les moments de plaque aux coins des éléments entrent dans les équations de la méthode des déformations en tant que déplacements généralisés. Ainsi le calcul ultérieur des tensions à partir des déplacements n'est plus nécessaire.

Un exemple montre que cette méthode donne, avec moins d'équations, une exactitude meilleure que les méthodes précédentes d'éléments finis.