Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 28 (1968)

Teilband: IABSE Publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 29.03.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ASSOCIATION INTERNATIONALE DES PONTS ET CHARPENTES
INTERNATIONALE VEREINIGUNG FÜR BRÜCKENBAU UND HOCHBAU
INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR BRIDGE AND STRUCTURAL ENGINEERING

MÉMOIRES
ABHANDLUNGEN
PUBLICATIONS

28-I

1968

PUBLIÉS PAR LE SECRÉTARIAT GÉNÉRAL À ZURICH
HERAUSGEGEBEN VOM GENERALSEKRETARIAT IN ZÜRICH
PUBLISHED BY THE GENERAL SECRETARIAT IN ZURICH

Editeur - Verleger - Publisher

Association Internationale des Ponts et Charpentes
Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich

Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau
Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich

International Association for Bridge and Structural Engineering
Swiss Federal Institute of Technology, Zurich

En commission pour la vente en librairie
Kommissionsverlag für den Buchhandel - Copies for sale at

Verlag Leemann Zürich

Printed in Switzerland

Préface

Avec six communications en anglais et six en allemand, le présent volume apporte une nouvelle contribution importante à la solution de problèmes théoriques posés par les constructions modernes. Nous souhaitons qu'il trouve un acceuil favorable parmi nos membres dans le cadre des nouvelles dispositions prises pour accroître l'audience de notre Association.

A côté de personnalités scientifiques reconnues, l'AIPC comprend de nombreux praticiens réalisateurs d'ouvrages originaux. Sans perdre le côté scientifique ou de haute technicité qui est une tradition de nos «Mémoires», nous pensons qu'il serait souhaitable que des communications intéressant plus directement cette catégorie de membres nous soient proposées pour la publication. L'avantage d'une édition bi-annuelle en serait renforcé et il en résulterait une meilleure liaison entre théorie et pratique dans le domaine des ponts et charpentes.

Nous remercions très sincèrement les auteurs des travaux de ce volume. Nous espérons que leurs recherches susciteront de nouveaux progrès et de nouvelles initiatives.

Zurich, en août 1968.

Le Président de l'AIPC:

Prof. MAURICE COSANDEY
Directeur de l'Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne

Les Secrétaires Généraux:

Dr sc. techn. HANS VON GUNTEN
Professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich

Dr sc. techn. PIERRE DUBAS
Professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich

Dr sc. techn. CHRISTIAN MENN
Coire — Zurich

Vorwort

Mit sechs Abhandlungen in englischer und sechs in deutscher Sprache erbringt dieser Band einen neuen, wichtigen Beitrag zur Lösung theoretischer Probleme, die durch die neuen Bauweisen gegeben sind. Wir wünschen, daß derselbe unter den Mitgliedern großen Anklang finde und zu Anregungen Anlaß gebe, damit sich unsere Vereinigung vermehrt Gehör verschaffe.

Neben anerkannten Persönlichkeiten der Wissenschaft, zählt die IVBH auch viele Entwerfer neuartiger Bauwerke. Ohne an Wissenschaftlichkeit oder an technischem Gehalt zu verlieren, was zur Gepflogenheit der „Abhandlungen" gehört, scheint es wünschenswert, daß Mitteilungen, welche direkt diese Art von Mitgliedern angeht, uns zur Veröffentlichung vorgeschlagen werden. Der Vorteil der halbjährlichen Ausgabe wäre dadurch verstärkt und es entstünde eine bessere Verbindung zwischen Theorie und Praxis im Bereich des Brücken- und Hochbaues.

Wir danken aufrichtig den Verfassern dieses Bandes und hoffen, daß deren Untersuchungen neuen Fortschritt und neuen Anreiz hervorbringen.

Zürich, im August 1968.

Der Präsident der IVBH:

Prof. MAURICE COSANDEY
Direktor der Technischen Hochschule der Universität von Lausanne

Die Generalsekretäre:

Dr. sc. techn. HANS VON GUNTEN
Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

Dr. sc. techn. PIERRE DUBAS
Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

Dr. sc. techn. CHRISTIAN MENN
Chur — Zürich

Preface

This volume containing six papers in English and six in German represents an important contribution to the solution of theoretical problems raised by modern structures. We hope it will meet with the approval of our members as far as the new arrangements are concerned which have been introduced to increase the interest in our Association.

Apart from renowned scientists, the IABSE gathers numerous designers of original structures. Without wanting to neglect the scientific character or high technical standard which is traditional for the "Publications", it seems desirable to receive papers which will be of direct interest to the latter group of members. The advantage of two issues a year will thus be strengthened and would lead to a better combination of theoretical and pratical problems in the field of bridge and structural engineering.

We express our gratitude to the authors of the papers included in this volume and hope their research work will result in further progress and new initiative.

Zurich, August 1968.

The President of IABSE:

Prof. MAURICE COSANDEY
Director of the Institute of Technology of the University of Lausanne

The General Secretaries:

Dr. sc. techn. HANS VON GUNTEN
Professor at the Swiss Federal Institute of Technology, Zurich

Dr. sc. techn. PIERRE DUBAS
Professor at the Swiss Federal Institute of Technology, Zurich

Dr. sc. techn. CHRISTIAN MENN
Chur — Zurich

Leere Seite
Blank page
Page vide

Table des matières - Inhaltsverzeichnis - Table of Contents

WOLF ALTMAN, D. H. YOUNG, Brasil/USA . . . . . English 1

Tensions dans les coques minces coniques
Spannungen in dünnen Kegeln
Stresses in Thin Conical Shells

S. O. ASPLUND, Sweden . . . . . English 17

Déversement latéral des poutres sans forces axiales
Trägerkippen ohne Axialkraft
Lateral Buckling without Axial Loads

W. BOSSHARD, Schweiz . . . . . Deutsch 27

Un nouvel élément fini purement compatible pour le calcul des plaques fléchies
Ein neues, vollverträgliches endliches Element für Plattenbiegung
A New, Fully Compatible Finite Element for Plane Bending

H. J. BRETTLE, Australia . . . . . English 41

Calcul de la résistance limite des piles de ponts de section rectangulaire, multicellulaire en béton armé
Traglastverfahren für mehrzellige, rechteckige Eisenbeton-Brückenpfeiler
Ultimate Strength Design of Multi-Cell Rectangular Reinforced Concrete Bridge Piers

E. HAMPE, H. KÖPPLER, P. SCHWESINGER, DDR . . . . . Deutsch 67

Contribution au calcul de coques composées cylindriques côniques sphériques pour la construction de silos, de réservoirs et de tours
Beitrag zur Berechnung von zusammengesetzten Zylinder-, Kegel- und Kugelschalen für den Silo-, Behälter- und Turmbau
Contribution to the Design of Cylindrical and Spherical Built-up Shells for the Construction of Silos, Tanks and Towers

KAMAL HASSAN, V.A.R. . . . . Deutsch 91

De la détermination de la longueur de flambage des poteaux de cadres
Zur Bestimmung der Knicklänge von Rahmenstielen
On the Determination of the Buckling Length of Frame Columns

A. M. Mousa, Sudan; R. A. Parmelee, S. L. Lee, USA . . . . . English 103

Calcul approché des voiles prismatiques à travées multiples
Näherungsverfahren für durchlaufende, prismatische Schalen
Approximate Analysis of Continuous Prismatic Shells

Bülent Övünç, Canada . . . . . English 121

Plaque semi-infinie soumise à une charge concentrée agissant en un point intérieur
Halbebenen-Platte unter Einzellast im Innern
Semi-Infinite Plate Subjected to the Concentrated Load Acting at its Internal Point

Gerhard Spaethe, DDR . . . . . Deutsch 127

Théorie pour des séries de poutres élastiques
Theorie elastischer Balkenreihen
Theory for Series of Elastic Beams

Udo Vogel, Werner Zimmermann, Deutschland. . . . . Deutsch 163

Essais de charges limites pour des poteaux encastrés à profil en I soumis à la flexion selon les deux axes principaux
Traglastversuche an eingespannten Geschoßstützen mit I-Querschnitt bei Biegung um beide Hauptachsen
Ultimate Load Test on I-Shaped Restrained Columns in Biaxial Bending

D. S. Walkinshaw, G. E. Riley, J. N. Siddall, G. A. Oravas, Canada . English 175

Des coques minces élastiques à courbure faible, ayant une base polygonale
Über dünne, flache, elastische Schalen vieleckigen Grundrisses
On Thin Shallow Elastic Shells over Polygonal Bases

M. Yamada, H. Kawamura, Japan . . . . . Deutsch 193

Déformations élasto-plastiques de flexion de colonnes et de poutres en béton armé (Flexion uniaxiale soumise à force axiale)
Elasto-plastische Biegeformänderungen der Stahlbetonsäulen und -balken (einseitige Biegung unter Axiallast)
Elasto-plastic Bending Deflections of Reinforced Concrete Columns and Beams (One Way Bending under Axial Force)

Stresses in Thin Conical Shells

Tensions dans les coques minces coniques

Spannungen in dünnen Kegeln

WOLF ALTMAN
Professor of Structural Engineering,
I.T.A., Sao Paulo, Brasil

D. H. YOUNG
Professor of Civil Engineering, Stanford
University, California

1. Introduction

This paper deals with the problem of stresses and deformations in thin conical shells subjected to axially symmetric edge loadings.

The shell material is assumed to be isotropic and to obey Hooke's law. In addition, the following assumptions are made:

1. The displacements are small in comparison with the thickness h of the shell and $h \ll R$, where R is a representative shell radius.

2. Straight fibers normal to the middle surface before deformation remain so after deformation and do not change their lengths.

3. Normal stresses acting on planes parallel to the middle surface may be neglected in comparison with the other stresses. The last two assumptions are due to Kirchhoff and they are equivalent to reducing the problem of deformation of the shell to that of deformation of its middle surface.

4. Finally, tangential displacements u and v will be neglected in comparison with normal displacements w in the formulae for change of curvature and twist of a shell element. This last assumption is justifiable if the bending stresses are of the same order of magnitude or less than the membrane stresses [1].

2. Basic Equations

Referring to Fig. 1, the cone is defined by its angle α and any point in the middle surface is located by the coordinates θ and s, where s replaces the usual coordinate φ for a shell of revolution since, in the case of a cone, $\varphi = \alpha$, is constant. The displacement of a point on the middle surface is defined by its orthogonal components u, v and w as shown.

The relations between middle surface strains ϵ_θ, ϵ_s, $\epsilon_{s\theta}$ and corresponding displacements u, v, w are given by:

$$\epsilon_s = \frac{\partial v}{\partial s}, \tag{1a}$$

$$\epsilon_\theta s \cos\alpha = \frac{\partial u}{\partial \theta} + v\cos\alpha + w\sin\alpha, \tag{1b}$$

$$2\epsilon_{s\theta} = \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{u}{s} + \frac{1}{s\cos\alpha}\frac{\partial v}{\partial \theta}. \tag{1c}$$

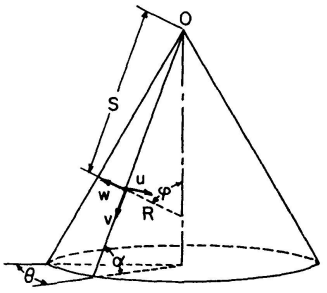


Fig. 1.

Neglecting u and v displacements in comparison with w displacements in the formulae for change in curvature κ_s, κ_θ and twist $\kappa_{s\theta}$, we can write

$$\kappa_s = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \tag{1d}$$

$$\kappa_\theta = -\frac{1}{s^2\cos^2\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}, \tag{1e}$$

$$\kappa_{s\theta} = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{s\cos\alpha}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right). \tag{1f}$$

As a result of the adoption of the Kirchhoff hypotheses and neglecting the small quantities of the same order of magnitude or less than h/R in comparison

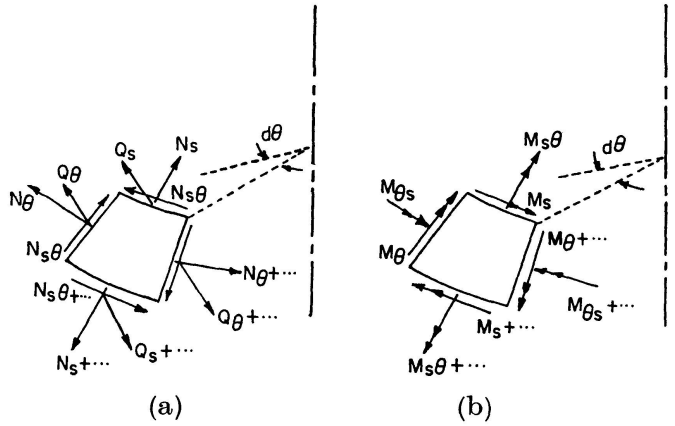


Fig. 2.

with unity, the force resultants N_s, N_θ, $N_{s\theta}$ (Fig. 2a) and moment resultants M_s, M_θ, $M_{s\theta}$ (Fig. 2b) can be written as follows:

$$N_s = \frac{E h}{1-\nu^2}(\epsilon_s + \nu \epsilon_\theta), \tag{2a}$$

$$N_\theta = \frac{E h}{1-\nu^2}(\epsilon_\theta + \nu \epsilon_s), \tag{2b}$$

$$N_{s\theta} = N_{\theta s} = \frac{E h}{1+\nu}\epsilon_{s\theta}, \tag{2c}$$

$$M_s = -D(\kappa_s + \nu \kappa_\theta), \tag{2d}$$

$$M_\theta = -D(\kappa_\theta + \nu \kappa_s), \tag{2e}$$

$$M_{s\theta} = M_{\theta s} = -D(1-\nu)\kappa_{s\theta}, \tag{2f}$$

where

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}.$$

In these expressions h is the thickness of the shell, assumed to be constant, and E and ν are the elastic constants for the material.

From static equilibrium of the forces and moments acting on a small element defined by ds and $d\theta$ (Figs. 2a and 2b), we can write:

$$\frac{\partial(N_s s)}{\partial s} + \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial N_{\theta s}}{\partial \theta} - N_\theta = 0, \tag{3a}$$

$$\frac{\partial(N_{s\theta} s)}{\partial s} + \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + N_{\theta s} - Q_\theta \tan\alpha = 0, \tag{3b}$$

$$\frac{\partial(Q_s s)}{\partial s} + \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + N_\theta \tan\alpha = 0, \tag{3c}$$

$$\frac{\partial(M_s s)}{\partial s} + \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial M_{s\theta}}{\partial \theta} - M_\theta - Q_s s = 0, \tag{3d}$$

$$\frac{\partial(M_{s\theta} s)}{\partial s} + \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + M_{s\theta} - Q_\theta s = 0, \tag{3e}$$

$$M_{s\theta} + (N_{s\theta} - N_{\theta s}) s \cot\alpha = 0. \tag{3f}$$

With regard to these equations, two comments are in order. First, from (2c), we have $N_{s\theta} = N_{\theta s}$ and this result is incompatible with (3f); therefore, (3f) will simply be ignored. Secondly, we will take into account that $Q_\theta \ll \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta}$ and thus neglect Q_θ in the tangential equilibrium Eq. (3b).

Substituting (1d–f) into (2d–f) we obtain

$$M_s = D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\frac{1}{s^2\cos^2\alpha} + \frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right], \tag{4a}$$

$$M_\theta = D\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\frac{1}{s^2\cos^2\alpha} + \frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}\right) + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right], \tag{4b}$$

$$M_{s\theta} = D(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial \theta}\frac{1}{s\cos\alpha} - \frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{1}{s^2\cos\alpha}\right]. \tag{4c}$$

Addition of (4a) and (4b) gives

$$\overline{M} = \frac{M_s + M_\theta}{1+\nu} = D\nabla^2 w, \tag{5}$$

where

$$\nabla^2(\,) = \frac{\partial^2(\,)}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial(\,)}{\partial s} + \frac{1}{s^2\cos^2\alpha}\frac{\partial^2(\,)}{\partial\theta^2}. \tag{5a}$$

Substituting (4a–c) into (3d–e), we have

$$Q_s = \frac{\partial \overline{M}}{\partial s}, \tag{6a}$$

$$Q_\theta = \frac{1}{s\cos\alpha}\frac{\partial \overline{M}}{\partial\theta} \tag{6b}$$

and when these are substituted into (3c), the result is

$$\nabla^2\overline{M} + \frac{N_\theta \tan\alpha}{s} = 0, \tag{7a}$$

or using (5)

$$D\nabla^2\nabla^2 w + N_\theta\frac{\tan\alpha}{s} = 0. \tag{7b}$$

The force resultants $N_s, N_\theta, N_{s\theta}$ can be expressed as functions of an auxiliary function Φ introduced by VLASOV [1] as follows:

$$N_s = -\frac{1}{s^2\cos^2\alpha}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} - \frac{1}{s}\frac{\partial\Phi}{\partial s}, \tag{8a}$$

$$N_\theta = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}, \tag{8b}$$

$$N_{\theta s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{s\cos\alpha}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right). \tag{8c}$$

Substituting (8a–c) into the first two equations of equilibrium (3a–b), we can see that they are identically satisfied. Now, substituting (8b) into (7b) which actually is the third equation of equilibrium in terms of w, we obtain:

$$D\nabla^2\nabla^2 w - \frac{\tan\alpha}{s}\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} = 0. \tag{9}$$

A second relation between the same functions w and Φ can be obtained by combining relations (1a–c) as follows:

$$\cos\alpha\frac{\partial}{\partial s}\left(s^2\frac{\partial\epsilon_\theta}{\partial s}\right) - 2\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial\epsilon_{s\theta}}{\partial\theta}\right) - s\cos\alpha\frac{\partial\epsilon_s}{\partial s} + \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial^2\epsilon_s}{\partial\theta^2} = s\sin\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}. \tag{10}$$

Solving (2a–c) for $\epsilon_\theta, \epsilon_s, \epsilon_{s\theta}$, substituting these into (10), and then eliminating the partial derivatives $\frac{\partial N_{s\theta}}{\partial\theta}, \frac{\partial^2 N_{s\theta}}{\partial\theta\partial s}$ from this result with the help of Eq. (3a), we have

$$s^2\nabla^2 N_s+\frac{\partial^2(s^2N_s)}{\partial s^2}(1+\nu)+s^2\frac{\partial^2 N_\theta}{\partial s^2}-\nu s\frac{\partial N_\theta}{\partial s}-\frac{\nu}{\cos^2\alpha}\frac{\partial^2 N_\theta}{\partial\theta^2}$$
$$-2(1+\nu)N_\theta=s\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\tan\alpha\,Eh. \tag{11}$$

Next, eliminating $\frac{\partial N_{\theta s}}{\partial\theta}$ and $\frac{\partial(N_{s\theta})}{\partial s}$ from (3a–b), we obtain

$$-\frac{\partial^2(s^2N_s)}{\partial s^2}+s\frac{\partial N_\theta}{\partial s}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{\partial^2 N_\theta}{\partial\theta^2}+2N_\theta=0. \tag{12}$$

Finally, multiplying (12) by $(1+\nu)$ and adding to (11), we have

$$\frac{1}{Eh}\nabla^2(N_s+N_\theta)=\frac{\tan\alpha}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \tag{13}$$

or using (8a—b)

$$\frac{1}{Eh}\nabla^2\nabla^2\Phi+\frac{\tan\alpha}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=0. \tag{14}$$

Eqs. (9) and (14) are two simultaneous partial differential equations which describe the problem of a circular conical shell of constant wall thickness subjected to edge loads. They represent an eighth order system of equations, but we can combine them so as to obtain a fourth order partial differential equation in complex form. Indeed, (9) and (14) can be rewritten as follows:

$$\sqrt{\frac{h^2}{12(1-\nu^2)}}Eh\nabla^2\nabla^2 w-\sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{h^2}}\frac{\tan\alpha}{s}\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}=0, \tag{9a}$$

$$i\nabla^2\nabla^2\Phi+i\sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{h^2}}\sqrt{\frac{h^2}{12(1-\nu^2)}}Eh\frac{\tan\alpha}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=0, \tag{14a}$$

where $i=\sqrt{-1}$. Adding, we have

$$\nabla^2\nabla^2\left(\sqrt{\frac{h^2}{12(1-\nu^2)}}Ehw+i\Phi\right)$$
$$+i\sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{h^2}}\frac{\tan\alpha}{s}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\sqrt{\frac{h^2}{12(1-\nu^2)}}Ehw+i\Phi\right)=0. \tag{15}$$

Introducing the notations

$$c=\sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{h^2}}, \tag{16a}$$

$$H=\frac{Eh}{c}, \tag{16b}$$

$$Z=Hw+i\Phi \tag{16c}$$

we have

$$\nabla^2\nabla^2 Z+ic\frac{\tan\alpha}{s}\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}=0. \tag{17}$$

Eq. (17) is the basic differential equation governing the stresses and deformations of circular conical shells of constant thickness under edge loads.

3. Solution for the Axisymmetric Case

In order to have a separation of variables in (17), we will look for solutions of the form

$$Z = Z_j \cos j\theta, \tag{18}$$

where Z_j is a function of s only and j is an integer. Substitution of (18) into (17) leads to the ordinary differential equation

$$\begin{aligned} s^4\frac{d^4Z_j}{ds^4}+2s^3\frac{d^3Z_j}{ds^3}+\left[s^2\left(-1-\frac{2j^2}{\cos^2\alpha}\right)+s^3 ic\tan\alpha\right]\frac{d^2Z_j}{ds^2} \\ +s\left(1+\frac{2j^2}{\cos^2\alpha}\right)\frac{dZ_j}{ds}+\left(-\frac{4j^2}{\cos^2\alpha}+\frac{j^4}{\cos^4\alpha}\right)Z_j=0, \end{aligned} \tag{19}$$

where

$$Z_j = H w_j + i\Phi_j.$$

For the axisymmetric case ($j=0$), Eq. (19) reduces to

$$s^4\frac{d^4Z}{ds^4}+2s^3\frac{d^3Z}{ds^3}+(-s^2+s^3 ic\tan\alpha)\frac{d^2Z}{ds^2}+s\frac{dZ}{ds}=0. \tag{19a}$$

We can see that $s=0$ is a regular singular point of the differential Eq. (19a). Using Frobenius' method, we assume a solution of the form

$$Z = s^\mu(A_0+A_1 s+A_2 s^2+\cdots), \tag{20}$$

where

$$A_n = a_n + i b_n. \tag{20a}$$

The complex coefficients A_n and the exponent μ are constants to be determined.

Substituting the assumed solution (20) into the differential Eq. (19a), and arranging the result according to ascending powers of s, we see that the coefficients of all powers of s must vanish independently in order to have the differential equation satisfied. The vanishing of the coefficient of the lowest power of s gives the indicial equation

$$\mu^2(\mu^2-4\mu+4)=0 \tag{21}$$

whose roots are

$$\mu_1=\mu_2=2; \qquad \mu_3=\mu_4=0. \tag{21a}$$

The vanishing of the coefficient of the nth power of s leads to the following recurrence relation:

$$A_n\{(\mu+n)^2[\mu+(n-2)]\} = -[\mu+(n-1)]\, ic\tan\alpha\, A_{n-1}. \tag{22}$$

The four exponents of the differential equation together with the recurrence relation will provide four independent power series solutions if the exponents are different and no pair of them differs by an integer. Since in our case

$\mu_1=\mu_2=2$ and $\mu_3=\mu_4=0$, the recurrence relation (22) will give only two independent solutions, but two other independent solutions can be obtained as follows [2]:

$$Z_3(s) = \left.\frac{\partial Z(\mu,s)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} \tag{23}$$

and

$$Z_4(s) = \left.\frac{\partial Z(\mu,s)}{\partial \mu}\right|_{\mu=2}, \tag{24}$$

where $Z(\mu,s)$ is given by (20) and the coefficients A_n are expressed in terms of A_0 and μ by the recurrence formula (22).

Following the above procedure, after separating real and imaginary parts, we can write the general solution in the form:

$$\begin{aligned} Hw = {} & c_1 \sum_{n=0,2}^{\infty} a_n(2)\, s^{n+2} - c_2 \sum_{n=1,3}^{\infty} b_n(2)\, s^{n+2} \\ & + d_1 \Big[\ln s \sum_{n=0,2}^{\infty} a_n(2)\, s^{n+2} + \sum_{n=2,4}^{\infty} a_n'(2)\, s^{n+2}\Big] \\ & - d_2 \Big[\ln s \sum_{n=1,3}^{\infty} b_n(2)\, s^{n+2} + \sum_{n=1,3}^{\infty} b_n'(2)\, s^{n+2}\Big] \\ & + e_1 \sum_{n=0,2}^{\infty} a_n(0)\, s^n - e_2 \sum_{n=1,3}^{\infty} b_n(0)\, s^n \\ & + f_1 \Big[\ln s \sum_{n=0,2}^{\infty} a_n(0)\, s^n + \sum_{n=2,4}^{\infty} a_n'(0)\, s^n\Big] \\ & - f_2 \Big[\ln s \sum_{n=1,3}^{\infty} b_n(0)\, s^n + \sum_{n=1,3}^{\infty} b_n'(0)\, s^n\Big] \end{aligned} \tag{25}$$

and

$$\begin{aligned} \Phi = {} & c_2 \sum_{n=0,2}^{\infty} a_n(2)\, s^{n+2} + c_1 \sum_{n=1,3}^{\infty} b_n(2)\, s^{n+2} \\ & + d_2 \Big[\ln s \sum_{n=0,2}^{\infty} a_n(2)\, s^{n+2} + \sum_{n=2,4}^{\infty} a_n'(2)\, s^{n+2}\Big] \\ & + d_1 \Big[\ln s \sum_{n=1,3}^{\infty} b_n(2)\, s^{n+2} + \sum_{n=1,3}^{\infty} b_n'(2)\, s^{n+2}\Big] \\ & + e_2 \sum_{n=0,2}^{\infty} a_n(0)\, s^n + e_1 \sum_{n=1,3}^{\infty} b_n(0)\, s^n \\ & + f_2 \Big[\ln s \sum_{n=0,2}^{\infty} a_n(0)\, s^n + \sum_{n=2,4}^{\infty} a_n'(0)\, s_n\Big] \\ & + f_1 \Big[\ln s \sum_{n=1,3}^{\infty} b_n(0)\, s^n + \sum_{n=1,3}^{\infty} b_n'(0)\, s^n\Big], \end{aligned} \tag{26}$$

where c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2 are arbitrary constants and the coefficients of the powers of s are given in Table 1.

We can observe that for $\alpha=0$, we have $a_0(0)=a_0(2)=1$, and all the other coefficients are zero. Therefore, Eq. (25) takes the form

$$Hw = c_1 s^2 + d_1 s^2 \ln s + e_1 + f_1 \ln s, \tag{27}$$

Table 1

$\mu = 2$	$\mu = 0$
$a_0(2) = 1$	$a_0(0) = 1$
$a_2(2) = -\dfrac{3c^2\tan^2\alpha}{4^2\cdot 3^2}$	$a_2(0) = \dfrac{c^2\tan^2\alpha}{2^2\cdot 1^2}$
$a_4(2) = \dfrac{5c^4\tan^4\alpha}{6^2\cdot 5^2\cdot 4^2\cdot 3^2}$	$a_4(0) = -\dfrac{3c^4\tan^4\alpha}{4^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 1^2}$
$\vdots$ $\quad$ $\vdots$	$\vdots$ $\quad$ $\vdots$
$a_n(2) = (-1)^{n/2}\dfrac{[(n-1)+2]c^n\tan^n\alpha}{[(n+2)(n+1)\ldots 4\cdot 3]^2\cdot 1}$	$a_n(0) = (-1)^{n/2}\dfrac{(n-1)c^n\tan^n\alpha}{[n(n-1)\ldots 2\cdot 1]^2(-1)}$
$b_1(2) = -\dfrac{2c\tan\alpha}{3^2}$	$b_1(0) = 0$
$b_3(2) = \dfrac{4c^3\tan^3\alpha}{5^2\cdot 4^2\cdot 3^2}$	$b_3(0) = -\dfrac{2c^3\tan^3\alpha}{3^2\cdot 2^2\cdot 1^2}$
$b_5(2) = -\dfrac{6c^5\tan^5\alpha}{7^2\cdot 6^2\cdot 5^2\cdot 4^2\cdot 3^2}$	$b_5(0) = \dfrac{4c^5\tan^5\alpha}{5^2\cdot 4^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 1^2}$
$\vdots$ $\quad$ $\vdots$	$\vdots$ $\quad$ $\vdots$
$b_n(2) = (-1)^{(n+1)/2}$ $\times\dfrac{[(n-1)+2]c^n\tan^n\alpha}{[(n+2)(n+1)\ldots 4\cdot 3]^2\cdot 1}$	$b_n(0) = (-1)^{(n+1)/2}$ $\times\dfrac{(n-1)c^n\tan^n\alpha}{[n(n-1)\ldots 2\cdot 1]^2(-1)}$
$a_0'(2) = 0$	$a_0'(0) = 0$
$a_2'(2) = a_2(2)\left[\dfrac{1}{3} - 2\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right) - 1\right]$	$a_2'(0) = a_2(0)\left[1 - 2\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+1\right]$
$a_4'(2) = a_4(2)\left[\dfrac{1}{5} - 2\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}\right) - 1\right]$	$a_4'(0) = a_4(0)\left[\dfrac{1}{3} - 2\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)+1\right]$
$\vdots$ $\quad$ $\vdots$	$\vdots$ $\quad$ $\vdots$
$a_n'(2) = a_n(2)$ $\times\left[\dfrac{1}{(n-1)+2} - 2\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k+2} - 1\right]$	$a_n'(0) = a_n(0)$ $\times\left[\dfrac{1}{n-1} - 2\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}+1\right]$
$b_1'(2) = b_1(2)\left[\dfrac{1}{2} - 2\left(\dfrac{1}{3}\right) - 1\right]$	$b_1'(0) = c\tan\alpha$
$b_3'(2) = b_3(2)\left[\dfrac{1}{4} - 2\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right) - 1\right]$	$b_3'(0) = b_3(0)\left[\dfrac{1}{2} - 2\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+1\right]$
$b_5'(2) = b_5(2)$ $\times\left[\dfrac{1}{6} - 2\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}\right) - 1\right]$	$b_5'(0) = b_5(0)$ $\times\left[\dfrac{1}{4} - 2\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right)+1\right]$
$\vdots$ $\quad$ $\vdots$	$\vdots$ $\quad$ $\vdots$
$b_n'(2) = b_n(2)$ $\times\left[\dfrac{1}{(n-1)+2} - 2\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k+2} - 1\right]$	$b_n'(0) = b_n(0)$ $\times\left[\dfrac{1}{n-1} - 2\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}+1\right]$

which is the known plate solution.

The series solutions (25) and (26) can be written in terms of Thomson functions as follows [3]:

$$\begin{aligned} H w = {} & A_1\left(\operatorname{ber} x - \frac{x}{2}\operatorname{ber}' x\right) + A_2\left(\operatorname{bei} x - \frac{x}{2}\operatorname{bei}' x\right) \\ & + B_1\left(\operatorname{ker} x - \frac{x}{2}\operatorname{ker}' x\right) + B_2\left(\operatorname{kei} x - \frac{x}{2}\operatorname{kei}' x\right) + E_1 \\ & + \bar{d}_1[\ln s] - \bar{d}_2[b_1'(0)\, s] \end{aligned} \tag{28}$$

and

$$\begin{aligned} \Phi = {} & A_2\left(\operatorname{ber} x - \frac{x}{2}\operatorname{ber}' x\right) - A_1\left(\operatorname{bei} x - \frac{x}{2}\operatorname{bei}' x\right) \\ & + B_2\left(\operatorname{ker} x - \frac{x}{2}\operatorname{ker}' x\right) - B_1\left(\operatorname{kei} x - \frac{x}{2}\operatorname{kei}' x\right) + E_2 \\ & + \bar{d}_2[\ln s] + \bar{d}_1[b_1'(0)\, s], \end{aligned} \tag{29}$$

where $x = 2\sqrt{s\, c \tan\alpha}$.

Before proceeding with any applications of these equations, it can be shown that the constant $\bar{d}_2 = 0$. For this purpose, we rederive Eq. (14) specifically for the axisymmetric case.

Eqs. (1a–b) can be written as

$$\epsilon_s = \frac{dv}{ds}, \qquad \epsilon_\theta s = v + w\tan\alpha,$$

which combine to give

$$\frac{d(\epsilon_\theta s)}{ds} - \epsilon_s = \tan\alpha \frac{dw}{ds}, \tag{30}$$

wherein

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E\,h}(N_\theta - \nu N_s); \qquad \epsilon_s = \frac{1}{E\,h}(N_s - \nu N_\theta). \tag{31}$$

After substitution of (31) into (30), we have

$$\frac{1}{E\,h}\left(\frac{d(s N_\theta)}{ds} - N_s\right) = \tan\alpha \frac{dw}{ds}. \tag{32}$$

Eq. (32) can also be written in terms of Φ as follows:

$$\frac{1}{E\,h}\left(s\frac{d^3\Phi}{ds^3} + \frac{d^2\Phi}{ds^2} - \frac{1}{s}\frac{d\Phi}{ds}\right) = -\tan\alpha\frac{dw}{ds}$$

or

$$s\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(s\frac{d\Phi}{ds}\right)\right] = -E\,h\tan\alpha\frac{dw}{ds}. \tag{33}$$

Eq. (33) (axisymmetric case) corresponds to Eq. (14) (general case).

Alternatively, we can particularize Eq. (14) to the axisymmetric case by dropping all derivatives with respect to θ. In this way it can be written as

$$\frac{d}{ds}\left\{s\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(s\frac{d\Phi}{ds}\right)\right]\right\} = -E\,h\tan\alpha\frac{d^2 w}{ds^2}. \tag{34}$$

Integrating (34), we obtain

$$s\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(s\frac{d\Phi}{ds}\right)\right] = -Eh\tan\alpha\frac{dw}{ds}+c. \tag{35}$$

Since expressions (35) and (33) have to be identical, it follows that the constant c must be zero. Then substituting the solutions (28) and (29) into Eq. (33) and performing the indicated differentiations, it will be found that $\bar{d}_2$ must be zero in order to have the equation satisfied.

4. Stress Resultants

For the axisymmetric case, the stress resultants (8), (4), (6) can be written in the form

$$N_s = -\frac{1}{s}\frac{d\Phi}{ds}, \tag{36a}$$

$$N_\theta = -\frac{d^2\Phi}{ds^2}, \tag{36b}$$

$$M_s = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{d^2w}{ds^2}+\frac{\nu}{s}\frac{dw}{ds}\right], \tag{36c}$$

$$M_\theta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{1}{s}\frac{dw}{ds}+\nu\frac{d^2w}{ds^2}\right], \tag{36d}$$

$$Q_s = \frac{d\bar{M}}{ds}, \tag{36e}$$

where $\bar{M}$ is given by (5).

Also, the rotation of an element of a meridian, during deformation, will be

$$\chi = \frac{dw}{ds}. \tag{36f}$$

We can show that part of the solutions corresponding to (28) and (29) or more precisely, the A- and B-terms of these solutions, when substituted into (36a–f) will give exactly the same stress resultants and rotation as shown in ([4], p. 373). In fact, carrying out the above substitution, we have

$$\begin{aligned} N_s = -\frac{\cot\alpha}{s}\Big[&\bar{A}_1\left(\mathrm{ber}\,x-\frac{2}{x}\mathrm{bei}'\,x\right)+\bar{A}_2\left(\mathrm{bei}\,x+\frac{2}{x}\mathrm{ber}'\,x\right)\\ &+\bar{B}_1\left(\mathrm{ker}\,x-\frac{2}{x}\mathrm{kei}'\,x\right)+\bar{B}_2\left(\mathrm{kei}\,x+\frac{2}{x}\mathrm{ker}'\,x\right)\Big], \end{aligned} \tag{37a}$$

$$N_\theta = -\frac{\cot\alpha}{2s}\left[\bar{A}_1\left(x\,\mathrm{ber}'\,x - 2\,\mathrm{ber}\,x + \frac{4}{x}\,\mathrm{bei}'\,x\right)\right.$$
$$+\bar{A}_2\left(x\,\mathrm{bei}'\,x - 2\,\mathrm{bei}\,x - \frac{4}{x}\,\mathrm{ber}'\,x\right)$$
$$+\bar{B}_1\left(x\,\mathrm{ker}'\,x - 2\,\mathrm{ker}\,x + \frac{4}{x}\,\mathrm{kei}'\,x\right)$$
$$\left.+\bar{B}_2\left(x\,\mathrm{kei}'\,x - 2\,\mathrm{kei}\,x - \frac{4}{x}\,\mathrm{ker}'\,x\right)\right], \tag{37b}$$

$$M_s = \frac{2}{x^2}\left\{\bar{A}_1\left[x\,\mathrm{bei}'\,x - 2(1-\nu)\left(\mathrm{bei}\,x + \frac{2}{x}\,\mathrm{ber}'\,x\right)\right]\right.$$
$$-\bar{A}_2\left[x\,\mathrm{ber}'\,x - 2(1-\nu)\left(\mathrm{ber}\,x - \frac{2}{x}\,\mathrm{bei}'\,x\right)\right]$$
$$+\bar{B}_1\left[x\,\mathrm{kei}'\,x - 2(1-\nu)\left(\mathrm{kei}\,x + \frac{2}{x}\,\mathrm{ker}'\,x\right)\right]$$
$$\left.-\bar{B}_2\left[x\,\mathrm{ker}'\,x - 2(1-\nu)\left(\mathrm{ker}\,x - \frac{2}{x}\,\mathrm{kei}'\,x\right)\right]\right\}, \tag{37c}$$

$$M_\theta = \frac{2}{x^2}\left\{\bar{A}_1\left[\nu x\,\mathrm{bei}'\,x + 2(1-\nu)\left(\mathrm{bei}\,x + \frac{2}{x}\,\mathrm{ber}'\,x\right)\right]\right.$$
$$-\bar{A}_2\left[\nu x\,\mathrm{ber}'\,x + 2(1-\nu)\left(\mathrm{ber}\,x - \frac{2}{x}\,\mathrm{bei}'\,x\right)\right]$$
$$+\bar{B}_1\left[\nu x\,\mathrm{kei}'\,x + 2(1-\nu)\left(\mathrm{kei}\,x + \frac{2}{x}\,\mathrm{ker}'\,x\right)\right]$$
$$\left.-\bar{B}_2\left[\nu x\,\mathrm{ker}'\,x + 2(1-\nu)\left(\mathrm{ker}\,x - \frac{2}{x}\,\mathrm{kei}'\,x\right)\right]\right\}, \tag{37d}$$

$$Q_s = -N_s\tan\alpha, \tag{37e}$$

$$\chi = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2}\cot\alpha\left[\bar{A}_1\left(\mathrm{bei}\,x + \frac{2}{x}\,\mathrm{ber}'\,x\right)\right.$$
$$-\bar{A}_2\left(\mathrm{ber}\,x - \frac{2}{x}\,\mathrm{bei}'\,x\right)$$
$$+\bar{B}_1\left(\mathrm{kei}\,x + \frac{2}{x}\,\mathrm{ker}'\,x\right)$$
$$\left.-\bar{B}_2\left(\mathrm{ker}\,x - \frac{2}{x}\,\mathrm{kei}'\,x\right)\right], \tag{37f}$$

where $\bar{A}_1 = c\tan^2\alpha A_1$; $\bar{A}_2 = c\tan^2\alpha A_2$;
$\bar{B}_1 = c\tan^2\alpha B_1$; $\bar{B}_2 = c\tan^2\alpha B_2$.

In these expressions the $\bar{A}$-terms are regular functions, and describe stresses produced by edge loads in a complete cone (Fig. 3a). The $\bar{B}$-terms have a singularity at $x = 0$ and describe stresses caused by loads applied to the upper edge of a truncated cone (Fig. 3b).

Eq. (37e) can be interpreted as a condition of equilibrium for the part of the shell above any parallel circle. Indeed, multiplying (37e) by $2\pi s\cos^2\alpha$, we obtain

$$(N_s\sin\alpha+Q_s\cos\alpha)\,2\pi s\cos\alpha=0. \tag{38}$$

This equation expresses the fact that the vertical resultant of all forces transmitted through a parallel circle must be zero. In summary, we can see that Eq. (38) is a consequence of neglecting the $\bar{d}$-terms in Eqs. (28) and (29) and therefore characterizes conical shells with edge loading as shown in Figs. 3a, b. The remainig part of solutions (28) and (29), i. e., the $\bar{d}$-terms, have a singularity at $x=0$ and do not descibe the same kind of stress resultants as those due to the above edge loadings.

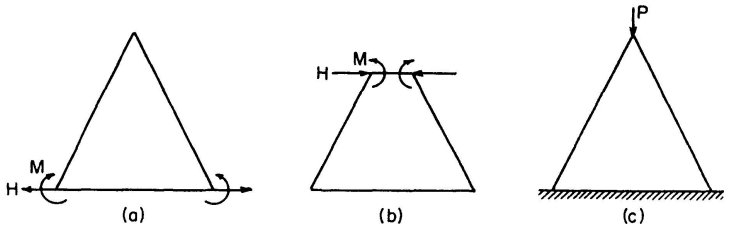


Fig. 3.

5. Solution for a Finite Conical Shell with a Concentrated Load at the Apex

For this case (Fig. 3c), the following conditions can be used in order to determine the constants*) B_1, B_2, $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$ in Eqs. (28) and (29):

a) At $s=0$; $\chi=0$,

b) $\lim\limits_{s\to 0}(N_s\sin\alpha+Q_s\cos\alpha)\,2\pi s\cos\alpha=-P.$

Eqs. (28) and (29) can be written in the form

$$\begin{aligned} c\tan^2\alpha\,H w &= \bar{A}_1\left(\operatorname{ber}x-\frac{x}{2}\operatorname{ber}'x\right)+\bar{A}_2\left(\operatorname{bei}x-\frac{x}{2}\operatorname{bei}'x\right)\\ &\quad+\bar{B}_1\left(\operatorname{ker}x-\frac{x}{2}\operatorname{ker}'x\right)+\bar{B}_2\left(\operatorname{kei}x-\frac{x}{2}\operatorname{kei}'x\right)\\ &\quad+\bar{D}_1[2\ln x-\ln(4c\tan\alpha)] \end{aligned} \tag{39}$$

and

$$\begin{aligned} c\tan^2\alpha\,\Phi &= \bar{A}_2\left(\operatorname{ber}x-\frac{x}{2}\operatorname{ber}'x\right)-\bar{A}_1\left(\operatorname{bei}x-\frac{x}{2}\operatorname{bei}'x\right)\\ &\quad+\bar{B}_2\left(\operatorname{ker}x-\frac{x}{2}\operatorname{ker}'x\right)-\bar{B}_1\left(\operatorname{kei}x-\frac{x}{2}\operatorname{kei}'x\right)+\bar{D}_1\left(\frac{x^2}{4}\right). \end{aligned} \tag{40}$$

In these expressions we have omitted the E_1 and E_2 solutions. For χ and N_s, we have

*) It has already been shown that $\bar{d}_2=0$, see p. 10.

$$\chi = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{E h^2}\cot\alpha\left\{\bar{A}_1\left(\operatorname{bei} x+\frac{2}{x}\operatorname{ber}' x\right)-\bar{A}_2\left(\operatorname{ber} x-\frac{2}{x}\operatorname{bei}' x\right)\right.$$
$$\left.+\bar{B}_1\left(\operatorname{kei} x+\frac{2}{x}\operatorname{ker}' x\right)-\bar{B}_2\left(\operatorname{ker} x-\frac{2}{x}\operatorname{kei}' x\right)+\bar{D}_1\left(\frac{4}{x^2}\right)\right\}, \tag{41}$$

$$N_s = -\frac{\cot\alpha}{s}\left\{\bar{A}_1\left(\operatorname{ber} x-\frac{2}{x}\operatorname{bei}' x\right)+\bar{A}_2\left(\operatorname{bei} x+\frac{2}{x}\operatorname{ber}' x\right)\right.$$
$$\left.+\bar{B}_1\left(\operatorname{ker} x-\frac{2}{x}\operatorname{kei}' x\right)+\bar{B}_2\left(\operatorname{kei} x+\frac{2}{x}\operatorname{ker}' x\right)+\bar{D}_1\right\}. \tag{42}$$

Now, substituting the series expansion of Thomson functions [5] into condition a), we find

$$\bar{B}_1 = 2\bar{D}_1 \quad \text{and} \quad \bar{B}_2 = 0. \tag{43}$$

Before we will make use of condition b), we want to show that $\lim_{s\to 0} N_s s = 0$. In fact,

$$\lim_{s\to 0} N_s s = -\lim\left[\bar{A}_1\left(\operatorname{ber} x-\frac{2}{x}\operatorname{bei}' x\right)+\bar{A}_2\left(\operatorname{bei} x+\frac{2}{x}\operatorname{ber}' x\right)\right.$$
$$\left.+\bar{B}_1\left(\operatorname{ker} x-\frac{2}{x}\operatorname{kei}' x\right)+\bar{D}_1\right]\cot\alpha, \tag{44}$$
$$= -[\bar{B}_1(-\tfrac{1}{2})+\bar{D}_1]\cot\alpha = 0.$$

Condition b) can now be written in the form

$$\lim_{s\to 0}(Q_s s)\,2\pi\cos^2\alpha = -P, \tag{45}$$

where

$$Q_s = \frac{1}{s}\left[\bar{A}_1\left(\operatorname{ber} x-\frac{2}{x}\operatorname{bei}' x\right)+\bar{A}_2\left(\operatorname{bei} x+\frac{2}{x}\operatorname{ber}' x\right)+\bar{B}_1\left(\operatorname{ker} x-\frac{2}{x}\operatorname{kei}' x\right)\right]. \tag{46}$$

Therefore,

$$\lim_{s\to 0}\left[\bar{A}_1\left(\operatorname{ber} x-\frac{2}{x}\operatorname{bei}' x\right)+\bar{A}_2\left(\operatorname{bei} x+\frac{2}{x}\operatorname{ber}' x\right)\right.$$
$$\left.+\bar{B}_1\left(\operatorname{ker} x-\frac{2}{x}\operatorname{kei}' x\right)\right]2\pi\cos^2\alpha \tag{47}$$
$$= \bar{B}_1(-\tfrac{1}{2})\,2\pi\cos^2\alpha = -P,$$

or

$$\bar{B}_1 = \frac{P}{\pi\cos^2\alpha} \tag{48}$$

and then from (43) we have

$$\bar{D}_1 = \frac{P}{2\pi\cos^2\alpha}. \tag{49}$$

The final results of the bending analysis for this case can now be written as follows:

$$w = \frac{P}{E h \pi \sin^2 \alpha}\left[\ker x - \frac{x}{2}\ker' x + \frac{1}{2}\ln s\right] + \frac{1}{\tan^2 \alpha\, E h}\left[\bar{A}_1\left(\operatorname{ber} x - \frac{x}{2}\operatorname{ber}' x\right) + \bar{A}_2\left(\operatorname{bei} x - \frac{x}{2}\operatorname{bei}' x\right)\right], \tag{50a}$$

$$\chi = \frac{\sqrt{12\,(1-\nu^2)}}{E h^2}\cot \alpha\left\{\frac{P}{\pi \cos^2 \alpha}\left(\operatorname{kei} x + \frac{2}{x}\ker' x + \frac{2}{x^2}\right) + \bar{A}_1\left(\operatorname{bei} x + \frac{2}{x}\operatorname{ber}' x\right) - \bar{A}_2\left(\operatorname{ber} x - \frac{2}{x}\operatorname{bei}' x\right)\right\}, \tag{50b}$$

$$N_s = -\frac{\cot \alpha}{s}\left\{\frac{P}{\pi \cos^2 \alpha}\left(\ker x - \frac{2}{x}\operatorname{kei}' x + \frac{1}{2}\right) + \bar{A}_1\left(\operatorname{ber} x - \frac{2}{x}\operatorname{bei}' x\right) + \bar{A}_2\left(\operatorname{bei} x + \frac{2}{x}\operatorname{ber}' x\right)\right\}, \tag{50c}$$

$$N_\theta = -\frac{\cot \alpha}{2 s}\left\{\frac{P}{\pi \cos^2 \alpha}\left(x \ker' x - 2 \ker x + \frac{4}{x}\operatorname{kei}' x\right) + \bar{A}_1\left(x \operatorname{ber}' x - 2 \operatorname{ber} x + \frac{4}{x}\operatorname{bei}' x\right) + \bar{A}_2\left(x \operatorname{bei}' x - 2 \operatorname{bei} x - \frac{4}{x}\operatorname{ber}' x\right)\right\}, \tag{50d}$$

$$M_s = \frac{2}{x^2}\left\{\frac{P}{\pi \cos^2 \alpha}\left[x \operatorname{kei}' x - 2\,(1-\nu)\left(\operatorname{kei} x + \frac{2}{x}\ker' x\right) - \frac{4}{x^2}(1-\nu)\right] + \bar{A}_1\left[x \operatorname{bei}' x - 2\,(1-\nu)\left(\operatorname{bei} x + \frac{2}{x}\operatorname{ber}' x\right)\right] - \bar{A}_2\left[x \operatorname{ber}' x - 2\,(1-\nu)\left(\operatorname{ber} x - \frac{2}{x}\operatorname{bei}' x\right)\right]\right\}, \tag{50e}$$

$$M_\theta = \frac{2}{x^2}\left\{\frac{P}{\pi \cos^2 \alpha}\left[\nu x \operatorname{kei}' x + 2\,(1-\nu)\left(\operatorname{kei} x + \frac{2}{x}\ker' x\right) + \frac{4}{x^2}(1-\nu)\right] + \bar{A}_1\left[\nu x \operatorname{bei}' x + 2\,(1-\nu)\left(\operatorname{bei} x + \frac{2}{x}\operatorname{ber}' x\right)\right] - \bar{A}_2\left[\nu x \operatorname{ber}' x + 2\,(1-\nu)\left(\operatorname{ber} x - \frac{2}{x}\operatorname{bei}' x\right)\right]\right\}, \tag{50f}$$

$$Q_s = \frac{1}{s}\left\{\frac{P}{\pi \cos^2 \alpha}\left(\ker x - \frac{2}{x}\operatorname{kei}' x\right) + \bar{A}_1\left(\operatorname{ber} x - \frac{2}{x}\operatorname{bei}' x\right) + \bar{A}_2\left(\operatorname{bei} x + \frac{2}{x}\operatorname{ber}' x\right)\right\}. \tag{50g}$$

The constants $\bar{A}_1$ and $\bar{A}_2$ are determined from given edge conditions for each particular problem.

We want to observe that the membrane solution for a concentrated load at the apex, namely

$$N_s = -\frac{P}{2\pi s \sin\alpha \cos\alpha}, \qquad N_\theta = 0,$$

is contained in solutions (50c, d).

Some of the stress resultants represented by Eqs. (50) have extremely large magnitudes in the vicinity of the apex. For example, the graphical representation of Q_s and M_s is shown in Fig. 4.

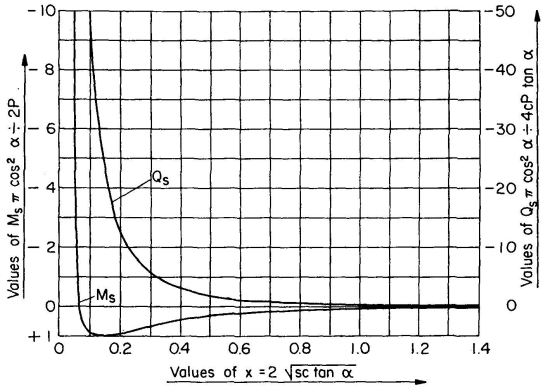


Fig. 4.

6. References

1. V. V. Novozhilov: The Theory of Thin Shells. Leningrad, 1958. English Translation by P. G. Lowe, P. Noordhoff, Ltd., Groningen, The Netherlands, 1959.
2. F. B. Hildebrand: Advanced Calculus for Applications. Prentice-Hall, 1963.
3. W. Altman: Stresses in Conical Shells. Ph.D. Dissertation, Stanford University, 1966.
4. W. Flugge: Stresses in Shells. Berlin, Springer, 1960.
5. W. Flugge: Four-Place Tables of Transcendental Functions. New York, Pergamon Press, 1954.

Summary

The differential equations governing the bending behavior of a thin conical shell subjected to edge loading represent an eighth order system. By the introduction of a complex variable, this system of equations is reduced to a fourth order differential equation in complex form. For axisymmetric loading, this fourth order equation is solved by using the method of Frobenius. Subsequently, the series solution, so obtained, is transformed into a closed form solution in terms of Thompson functions. As an example, a complete set of expressions for all stress resultants is given for the case of a cone subjected to a concentrated load at the apex. It is believed that this solution, including both bending and membrane stresses in the cone, has not previously been shown.

Résumé

Les équations différentielles régissant la flexion d'une coque mince conique soumise à une force agissant sur son bord représentent un système du huitième ordre. En introduisant une variable complexe, ce système est réduit en une équation différentielle complexe du quatrième ordre. Pour des charges symmétriques par rapport à un axe, cette équation du quatrième ordre est résolue par la méthode de Frobenius. Ensuite, la solution en séries ainsi obtenue est transformée en une solution de forme fermée en termes de fonction de Thompson. Comme exemple, on a donné l'ensemble des expressions pour toutes les tensions dans le cas du cône soumis à une force concentrée en son sommet. Nous croyons que cette solution englobant à la fois les tensions de flexion et les tensions de membrane n'a pas encore été trouvée dans le cas du cône.

Zusammenfassung

Die Differentialgleichungen, welche das Biegeverhalten dünner Kegel unter Randlasten wiedergeben, führen zu solchen achter Ordnung. Wenn man eine komplexe Unabhängige einführt, läßt sich dieses System auf eine komplexe Form vierter Ordnung abmindern. Sind die Lasten achsialsymmetrisch, führt das Verfahren Frobenius' zur Lösung der Differentialgleichung vierter Ordnung. Hernach kann die so erhaltene Reihenlösung in eine geschlossene Form mit Gliedern der Thompson-Funktion übergeführt werden. Als Beispiel wird ein vollständiger Satz für alle Spannungen angegeben, falls auf der Spitze des Kegels eine Einzellast wirkt. Wir glauben, daß diese Lösung, einschließend Biege- und Membranspannungen im Kegel, bis jetzt noch nie gezeigt ward.

Lateral Buckling of Beams without Axial Loads

Déversement latéral des poutres sans forces axiales

Trägerkippen ohne Axialkraft

S. O. ASPLUND
Sweden

Axial Buckling

Lateral buckling can be analyzed by extending the same argumentation as was used for simple beams in S. O. ASPLUND, Structural Mechanics: Classical and Matrix Methods, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966. Letters N and F below refer to chapters in that book.

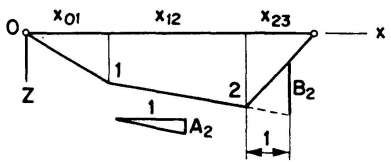


Fig. 1. Polygon angle breaks.

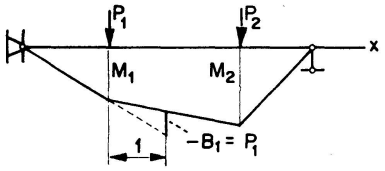


Fig. 2. Moment polygon.

Shortly, a polygon 0123, Fig. 1, is defined by abscissa intervals $\Delta x = [x_{01}\, x_{12}\, x_{23}]^D$ (diagonal matrix) between its end-points, and by its corner ordinates $[z_1\, z_2]^*$ (a column vector, * denotes transposition). The slopes A of the polygon sides and their corner angle breaks $-B$, see Fig. 1, are given by

$$d = \begin{bmatrix} 1 & \\ -1 & 1 \\ & -1 \end{bmatrix}, \quad A = (\Delta x)^{-1} dz, \quad -B = d^* (\Delta x^{-1})\, dz = -X z. \tag{1}$$

X is the second order difference operator corresponding to the differential operator d^2/dx^2. When a simple beam is loaded by transverse loads P, Fig. 2, the angle-breaks $-XM$ of its moment polygon equal the beam loads P. By inversion of $-X$ we find M and the moment influence coefficients M^i

$$-X M = P, \; M = -X^{-1} P = C P, \; C = -X^{-1} = M^i \text{ because } M = M^i P, \tag{2}$$

The force transformation C transforms structure loads P into member forces M. Its transpose C^* is the displacement transformation that transforms member deformations m into structure displacements p, or

$$p = C^* m. \tag{3}$$

In this case the flexibility matrix f, transforming member forces M into member deformations, is a three diagonal matrix. The influence of both bending and shear deformations may be included in f. In a dense member subdivision f can be approximated by a one-diagonal matrix.

$$m = fM, \quad p = C^* m = C^* f M = C^* f C P. \tag{4}$$

Thus a beam with deflections p will carry in bending the loads

$$P^B = (C^* f C)^{-1} p = X F X p, F = f^{-1}. \tag{5}$$

Whenever a one-diagonal approximation for f is satisfactory, F also will be one-diagonal and $X F X$ a five diagonal band matrix that can be rapidly inverted.

We assume that the *segments* of the beam are subjected to axial forces H (a diagonal matrix). These, acting against the corners of the deflection polygon p, will carry a "bar-chain load" of

$$P^H = X^H p, \quad X^H = -d^* (H/\Delta x) d. \tag{6}$$

X^H being a three-diagonal band matrix. For a continuously variable compression that has the values H (a diagonal) at the bar-chain *joints* we write

$$X^H = H X. \tag{7}$$

In case of a constant compressure force, H in (7) should denote its scalar magnitude.

Finally, side springs of spring constants S connected to the joints between the beam segments, will carry the "side-spring load" of

$$P^S = Sp. \tag{8}$$

For separate springs S is a one-diagonal matrix, but by making S a three- or five-diagonal matrix representing a connected spring action, an elastic body side support can be closely approximated.

To sum up, the beam carries altogether the transverse load $P = P^B + P^H + P^S$, that is,

$$(X F X + X^H + S) p = P. \tag{9}$$

In our present study concerning buckling we can omit the transverse loads P. The homogeneous equations in p

$$(A - \lambda' B) p = 0, \quad A = X F X + S, \quad B = -X^H \tag{10}$$

for $\lambda' = 1$ generally have no solution $p \neq 0$, but when the axial forces are varied by a factor λ', (10) may have non-trivial solutions p for discrete "eigenvalues"

of λ'. When A is invertible we premultiply (10) by $A^{-1}\lambda$

$$(C-\lambda I)p = 0, \quad C = A^{-1}B, \quad \lambda = 1/\lambda'.$$

We call λ' or $1/\lambda$ the (elastic) buckling safety.

The numerical computation of eigenvalues and eigenvectors by an iterated vector method will be explained in the treatment of lateral buckling below.

On p. 67 in S. P. TIMOSHENKO and J. M. GERE, Theory of Elastic Stability, 2nd Ed., McGraw-Hill, New York, 1961, a continuous column is exemplified with a buckling force of $14.9\,EI/l_2^2$. Treating that case by subdividing the column into 12 segments and applying the present beam theory, results in a buckling load of $H = 15.2\,EI/l_2^2$. This value was obtained by introducing a very stiff spring at joint 5.

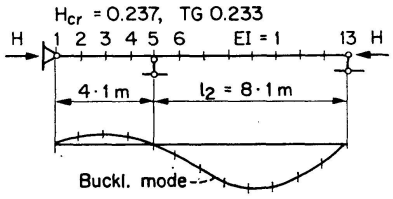


Fig. 3. Continuous column.

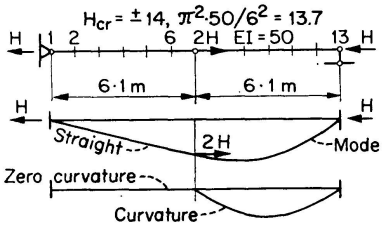


Fig. 4. Column, half in tension.

Testing the problem of Fig. 4 with an axial load at the middle, 7, of the column 1 to 13, creating equal tensions and compressions in both column halves, revealed that the tensioned half of the column remains straight. This result is singular, compare Fig. 5. We further observe that the eigenvalue problem of Fig. 4 has two equal and opposite dominant roots.

The problem of Fig. 5 also has two nearby dominant buckling loads and modes. One is indicated in the figure. The part in tension, 1 to 6, is also bent.

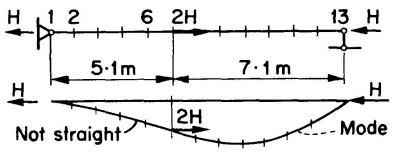


Fig. 5. Column partly in tension.

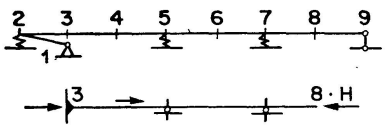


Fig. 6. Boundary conditions.

Various Boundary Conditions

In our treatment of plane beams, both beam ends are fundamentally considered as hinged, but other end conditions can be imitated in several ways. An elastic left end clamping can be obtained by adding as in Fig. 6, two perfectly rigid beam segments 12 and 23 and by installing a side spring of proper stiffness at 2. Making this spring perfectly rigid produces full clamping of the beam at 3.

A continuous beam in serveral spans can be reproduced by installing very rigid springs at the supports, for instance at 5 and 7, Fig. 6. A free end at 8 can be obtained by inserting zero flexibility in an added beam segment 89.

In the following treatment of lateral buckling other boundary conditions than hinged ends can be treated by similar devices to those just explained. Therefore what is just said needs not to be repeated in the subsequent discussion of lateral buckling.

Bending and Twist of a Beam in Space

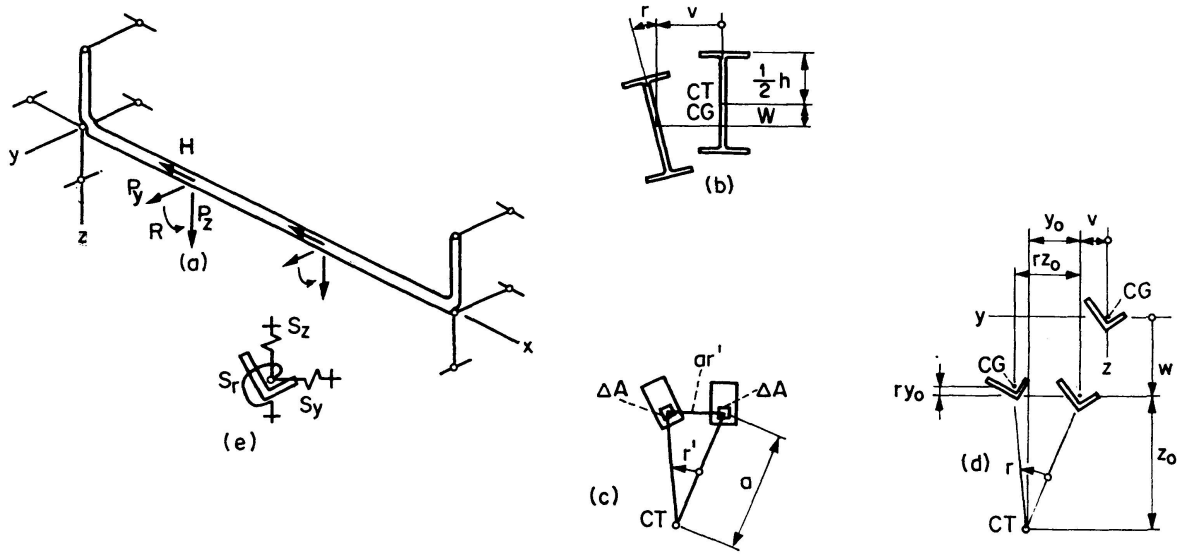


Fig. 7. Beam in space, general case.

Consider an unloaded beam, Fig. 7, whose centroid CG, Fig. b or d, is along the x-axis. A principal axis of inertia of the cross sections is directed along the vertical z-axis. We subdivide the beam into members as in Nc. Transverse horizontal loads P_y at the member joints cause moments $M_z = CP_y$, $C = -X^{-1}$, and deflect the centroid by $v = Cf_z CP_y$. Hence, bending carries the horizontal loads XF_zXv with $F_z = f_z^{-1}$. Vertical bending carries the vertical loads XF_yXw.

In a doubly symmetric beam, Fig. b, joint rotations of r about the centroid will deflect the beam flanges by $v = \pm \frac{1}{2}hr$. These deflections cause the beam flanges to carry loads $P_{yr} = \pm XF_wX \cdot \frac{1}{2}hr$ that combine into a couple $R_w = hP_{yr} = X\,2F_wX\,(1/4)h^2r = XF_rXr$. The bending stiffness $F_w = f_w^{-1}$ is calculated for one flange, using the bending stiffness $\frac{1}{2}EI_z$. We denote $(1/4)h^2EI_z$ by $EC_w = F_r$ of dimension tm^4, see (Fx 3), l. c.

Saint-Venant's torque is by (Fu 11): $M = GJr'$ thus $R = M' = (GJr')'$. For variable GJ we write $R = -X^{GJ}r$ with $X^{GJ} = -d^* GJ \Delta x^{-1} d$, where GJ is Saint-Venant's torsional stiffness. Constant GJ makes $R = -GJXr$.

A cross section element of area ΔA at the distance a from the center of

twist will be stressed by $\sigma = H/A$, Fig. c, H being the compressive force, Fig. a. This stress on the element will form an angle of ar' with its normal and have a shear component of $\sigma a r' \Delta A$. All such shears will carry a torque of

$$M = -\int_A \sigma a^2 r' \, dA = -H i_0^2 r', \quad i_0^2 = \int a^2 \, dA/A \tag{11}$$

and torque loads of $M' = -i_0^2 (H r')'$. For this we shall add $i_0^2 X^H r$ to the left hand side of (12).

After the beam is displaced by r, v, w, the y- and z-coordinates of the centroid will be $v + r z_0$ and $w - r y_0$ by Fig. d. When axial loads H_k are applied to the beam joints we find by (Ni 3) that further loads of $P_y^H = X^H (v + r z_0)$ and $P_z^H = X^H (w - r y_0)$ can be carried by bar-chain action, see *Ni*.

Spring supports, Fig. e, connected to the centroid at the member joints have stiffnesses S_r, S_y, S_z. They carry the loads $S_r r$, $S_y (v + r z_0)$, $S_z (w - r y_0)$.

We collect all beam loads found into the following matrix equation $K p = P$

$$\begin{bmatrix} X F_r X + X^H i_0^2 - X^{GJ} + S_r & (X^H + S_y) z_0 & -(X^H + S_z) y_0 \\ (X^H + S_y) z_0 & X F_z X + X^H + S_y & 0 \\ -(X^H + S_z) y_0 & 0 & X F_y X + X^H + S_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}. \tag{12}$$

The elements in the second and third columns of the first row are added by symmetry or by Maxwell's theorem.

Eq. (12) can be readily used for analyzing a beam for buckling in bending and twist, but that will be here bypassed because the purpose of the present paper is the lateral buckling of beams.

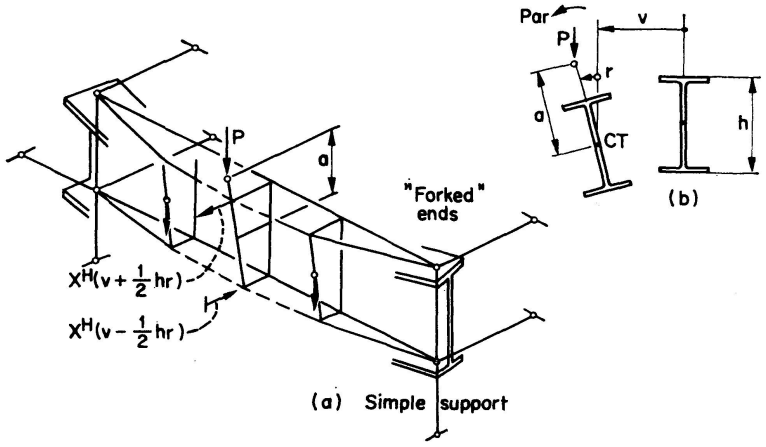


Fig. 8. Lateral buckling.

Lateral Buckling of Beams

A beam can buckle under vertical loads, also in the absence of axial loads on the beam, Fig. 8. A transversely loaded beam failing by twist and lateral deflection will be analyzed. We shall assume that the beam is simply supported and held vertical by forks or equivalent devices at the supports.

We subdivide the beam into segments of non-uniform lengths Δx in such a manner that the vertical loads P act at the segment joints. When the beam deflects by v the loads P will move along laterally by v, so no moment load will be added to the beam when it deflects. In case the load is applied on a seat fixed to the beam at a height of a above its center of gravity, torque loads Par caused by the rotation r of the cross section are to be added to the right-hand side of the governing Eq. (12). The vertical loads P induce bending moments $M=CP=-X^{-1}P$ in the beam if it is simply supported or other expressions if it is statically indeterminate. Many complicated support conditions can be simulated by $M=CP$.

The moments M induce compressive forces of $H=M/h$ in the top flange of a beam of depth h, and equal tensions in the bottom flange. The flange forces $\pm H$ act on the deflection polygon corners having ordinates $v+\frac{1}{2}hr$ and $v-\frac{1}{2}hr$ and angle breaks of $-Xv-\frac{1}{2}hXr$ and $-Xv+\frac{1}{2}hXr$. For balancing transverse loads of $-HXv-\frac{1}{2}HhXr$ and $HXv-\frac{1}{2}HXr$ are required which are equivalent to an applied external torque of $R=-HXv\cdot h=-MXv$ and a side force of $V=-\frac{1}{2}HhXr\cdot 2=-MXr$.

For a doubly symmetric cross-section when all terms for axial loads and spring supports vanish (12) thus reads

$$\begin{bmatrix} XF_rX-X^{GJ} & & \\ & XF_zX & \\ & & XF_yX \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ v \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} aP & -X^M \\ -X^M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix}, \tag{13}$$

where a and P are diagonal matrices. For a continuously variable M we replace $-X^M$ by $-MX$. For constant GJ we can write $X^{GJ}=GJX$ where GJ is a scalar. By the last row of (1) we definitely solve the vertical deflections $w=(XF_yX)^{-1}P$.

We assume that all loads P and moments M increase in the same proportions λ while the structure is loaded. The first two Eqs. (13) are homogeneous in $r=[r^*\,v^*]^*$. Non-zero solutions r exist only for discrete values of the multiplier λ' called the eigenvalues of the problem

$$(A-\lambda' B)r=0, \tag{14}$$

$$A=\begin{bmatrix} XF_rX-X^{GJ} & \\ & XF_zX \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} aP & -X^M \\ -X^M & 0 \end{bmatrix},\quad r=\begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix},$$

When the load is smaller than that given by $\lambda' P$ and $\lambda' M$ where λ' is the lowest eigenvalue, the beam remains at $r=v=0$. At that load the beam buckles proportionally to a set of deflections r, v, called the buckling mode.

In order to find instead a highest eigenvalue we transform (14) by premultiplication by A^{-1}/λ'

$$(C-\lambda I)r=0,\qquad C=A^{-1}B,\qquad \lambda=1/\lambda'. \tag{15}$$

This is of course possible only if A is invertible.

Our problem is now reduced to finding the highest (dominant) eigenvalue of $(C-\lambda I)r$. The buckling load of the structure will then be P/λ, M/λ. We shall proceed to find λ by applying the iterated vector procedure. In our lateral buckling applications we often shall encounter the case that the dominant and subdominant eigenvalues are equal or nearly equal and of opposite signs. In such a case the usual iteration process must be modified to finding each of these two eigenvalues.

As usual we begin iteration with a column vector $r^{(0)}$ of ones. After a sufficient number of iterations the iterated vector r_0 will contain only negligible traces of the eigenvectors x_3 and higher. Therefore we can write $r_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2$ where x_1 and x_2 are normalized eigenvectors belonging to the dominant and subdominant eigenvalues λ_1 and λ_2, and a_1 and a_2 are proper multipliers forming r_0. The succeeding iterated vectors are $r_1 = \lambda_1 a_1 x_1 + \lambda_2 a_2 x_2$ etc. To take advantage of Rayleigh's quotient we form the scalar products $r_0^* r_0 = l_0$, $r_0^* r_1 = l_1$, etc. We can further assume that r_0 has been normalized so that $l_0 = 1$. Observing that $x_1^* x_1 = x_2^* x_2 = 1$ while $x_1^* x_2 = 0$ we can summarize

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 x_1 \\ a_2 x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0^* r_0 \\ r_0^* r_1 \\ r_0^* r_2 \\ r_0^* r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

and construct the following products and differences

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_1^2+\lambda_2^2 \\ 0 & 0 & (\lambda_1-\lambda_2)^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2) \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_1^3+\lambda_2^3 \\ 0 & 0 & (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^4 \\ a_2^4 \\ a_1^2 a_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^2 \\ l_0 l_2 \\ l_0 l_2 - l_1^2 \\ l_1 l_2 \\ l_0 l_3 \\ l_0 l_3 - l_1 l_2 \end{bmatrix}, \text{ thus}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (l_3 - l_1 l_2)/(l_2 - l_1^2) = 2S. \tag{16}$$

Using $a_1^2 + a_2^2 = l_0 = 1$ we also transform

$$\begin{aligned} l_1 &= \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2(1-a_1^2), & l_1 - \lambda_2 &= (\lambda_1-\lambda_2)a_1^2, \\ l_2 &= \lambda_1^2 a_1^2 + \lambda_2^2(1-a_1^2), & l_2 - \lambda_2^2 &= (\lambda_1^2-\lambda_2^2)a_1^2 = 2S(l_1-\lambda_2). \\ \lambda_2^2 - 2S\lambda_2 &= l_2 - 2Sl_1 & & \text{with the solution (for both roots),} \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = S \pm \sqrt{S^2 + l_2 - 2Sl_1}. \tag{17}$$

By retrograde substitution it is easily seen that the expression under the square-root sign, $(S-\lambda_2)^2$, cannot become negative.

The dominant and subdominant buckling modes are

$$x_1 = r_1 - \lambda_2 r_0, \text{ normalized}, \qquad (18)$$
$$x_2 = r_1 - \lambda_1 r_0, \text{ normalized}.$$

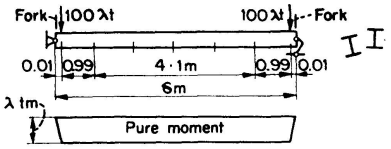
The following flow chart was used in the computations:

In, vectors of Δx, EI_z, GJ, and h. Form matrices X, C, f_z, F_z, F_r, XF_rX, X^{GJ}, $XF_rX - X^{GJ}$, XF_zX, A. In, diag. a, col. P. Form matrices aP, $M = CP$, $-MX$, B, $C = A^{-1}B$. In, delimiter ϵ. Make $l = 0$. Make start vector r_0. Label 10. Normalize r_0. Form $r_1 = Cr_0$, $r_2 = Cr_1$, $l_2 = r_0^* r_2$, $(l/l_2 - 1)^2 > \epsilon^2$? Yes, $r_0 = r_1$, $l = l_2$, go to label 10. No, form $r_3 = Cr_2$, $l_1 = r_0^* r_1$, $l_3 = r_0^* r_3$, $2S = (l_3 - l_1 l_2)/(l_2 - l_1^2)$, $\lambda_{1,2} = S \pm \text{Sqrt}(S^2 + l_2 - 2Sl_1)$, $x_1 = r_1 - \lambda_2 r_0$ normalized, $x_2 = r_1 - \lambda_1 r_0$ normalized.

Out, Δx, EI_z, GJ, h, P, a, ϵ, λ_1, λ_2, x_1, x_2.

This method can be applied to beams with variable bending, warping, and torsional stiffnesses, quite arbitrary loadings and diverse support conditions. Its exactness can be verified on cases already calculated by way of differential equations for constant stiffness and simple cases, see TIMOSHENKO and GERE, l. c., p. 253, p. 262, and p. 264.

$EI_z = 450\,\text{tm}^2$
GJ = (a) $7{,}5\,\text{tm}^2$
(b) $109\,\text{tm}^2$
$h/2 = 0{,}242\,\text{m}$



Value λ	(a)	(b)
6 segm:	±43	±122
Cont. TG;	±43	±118

Fig. 9. Pure moment.

For that purpose a beam of span 6 m, depth 0,5 m, constant stiffnesses $EI_z = 450\,\text{tm}^2$, and $GJ = 7{,}5\,\text{tm}^2$ (a), or $109\,\text{tm}^2$ (b) was subdivided into members, and loaded as in Fig. 9 by loads causing an almost pure moment of λ tm, or, Fig. 10, by a center load applied at midheight of the beam, or, Fig. 11, on its top flange.

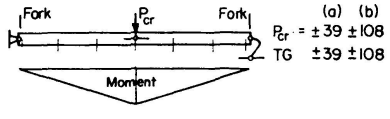


Fig. 10. Load at mid-depth.

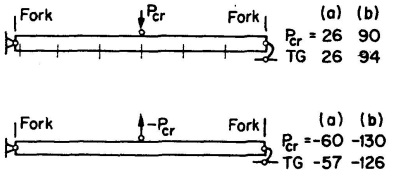


Fig. 11. Beam loaded on top flange.

Comparative results are indicated in the figures. TG denotes values in TIMOSHENKO and GERE, l. c. In spite of a rather rough subdivision into segments, Fig. 9 to 11 show that all results by the presented theory agree well with TIMOSHENKO and GERE's.

We also consider a continuous beam of two spans, Fig. 12. The beam may have the same properties as (b) in Fig. 9. Loads of 1 t applied on the top flange at intervals of 1 m produce a continuity moment above the center

support of $-4{,}375$ tm. The case can be treated using one of the spans only with one end moment produced by an additional load of $-437{,}5$ t at a distance of 0,01 m from the support, Fig. 13. The computations disclose two eigenvalues, one for all loads multiplied by 50 and the other for the multiplier -73. The buckling deflections of top and bottom flanges are drawn in the figure. The negative eigenvalue obviously can be used for a positive buckling load that is applied to the bottom flange.

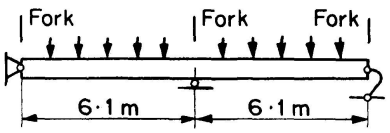


Fig. 12. Cont. beam, load on top flange.

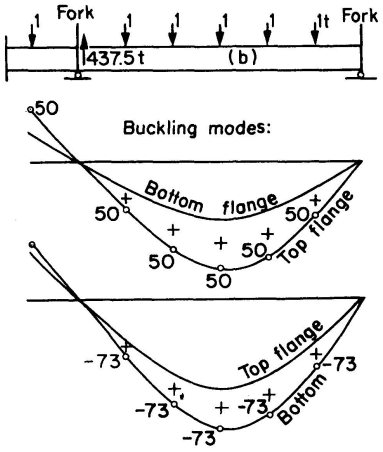


Fig. 13. Buckling modes.

Summary

Finite beam theory in the plane is concisely outlined and applied to the axial buckling of beams under various boundary conditions. Finite beam theory in space is briefly stated, also in order to prepare for lateral buckling theory which is the main subject of the paper. An iterated vector method for finding the dominant and subdominant eigenvalues is explained. The deduced theory is verified on eight lateral buckling cases with known solutions. An application to a uniformly loaded continuous beam concludes the paper.

Résumé

La théorie de la poutre finie dans le plan est esquissée brièvement et appliquée au flambement des conditions aux limites variées. La théorie de la poutre finie dans l'espace est rapidement exposée, aussi pour l'introduction à la théorie du déversement latéral qui est le sujet de ce mémoire. On y explique une méthode vectorielle itérative pour trouver les valeurs caractéristiques dominants et sous-dominants. La théorie démontrée est verifiée par 8 cas connus de déversement latéral. Pour conclure, le mémoire contient une application de la poutre continue uniformément chargée.

Zusammenfassung

Knapp umrissen und aufs axiale Knicken bei Trägern mit verschiedenen Lagerungsbedingungen angewandt wird die endliche Trägertheorie in der Ebene. Diese wird auch für den Raum als Vorbereitung fürs Kippen kurz angetönt, was das Hauptanliegen dieser Abhandlung ist. Zur Auffindung der Haupt- und Nebeneigenwerte wird ein iteratives Vektorverfahren angegeben. Die abgeleitete Theorie wird an acht schon bekannten Kippfällen geprüft. Die Abhandlung schließt mit einer Anwendung auf einen gleichmäßig belasteten Durchlaufträger.

Ein neues, vollverträgliches endliches Element für Plattenbiegung

A New, Fully Compatible Finite Element for Plate Bending

Un nouvel élément fini purement compatible pour le calcul des plaques fléchies

W. BOSSHARD
Zürich

Bezeichnungen

Matrizen, Zeilen, Spalten: Fettdruck

^{t}	Transponierte Matrix
Spalte	$\{\ \}$
Zeile	$[\ ]$
e	Elementnummer
F_e	Fläche des Elementes
t	Elementdicke
i, j, k	laufende Indices
x, y	in Plattensymmetrieebene. Kartesische Koordinaten
w	Verschiebung in Richtung z
$\boldsymbol{\varepsilon} =$	$\{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}$ Dehnungen
$\boldsymbol{\varkappa} =$	$\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right\}$ Krümmungen
$\boldsymbol{\sigma} =$	$\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$
$\boldsymbol{E}$	allgemein symmetrischer (3×3)-Elastizitätsmodul
$\boldsymbol{\mu} =$	$\{m_x, m_y, -m_{xy}\}$ Plattenmomente
$\boldsymbol{f} =$	$[1, x, y, \ldots x y^4, y^5]$ (1×21)
$\boldsymbol{f}_\Delta =$	$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{f} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\boldsymbol{f} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\boldsymbol{f} \end{bmatrix}$ (3×21)
$\boldsymbol{b}_e$	Polynomkoeffizienten (verallgemeinerte Lagekoordinaten)
U_e	elastische Formänderungsenergie eines Elementes

A_e	Arbeit der äußeren Lasten an einem Element
U	elastische Formänderungsenergie der Struktur
A	Arbeit der äußeren Lasten der Struktur
$q(x, y)$	Belastung in vertikaler Richtung z
$\boldsymbol{r}$	Verallgemeinerte Knotenverschiebungen der Struktur
$\boldsymbol{\varrho}_e$	Verallgemeinerte Knotenverschiebungen des Elementes
$\boldsymbol{\pi}_e$	Verallgemeinerte Belastung am Element
$\boldsymbol{p}_e$	Verallgemeinerte Knotenbelastung am Element
$\boldsymbol{P}$	Verallgemeinerte Belastung der Struktur

Bei der Beurteilung von Plattenelementen für die Finite-Element-Technik sind zwei Gesichtspunkte maßgebend: Erstens die Reinheit des Ansatzes. Reine Verschiebungsansätze erfüllen die Verträglichkeitsbedingungen überall, die Gleichgewichtsbedingungen nur an der diskretisierten Struktur. Es kann gezeigt werden [1, 2], daß in diesem Falle die elastische Formänderungsenergie zu hoch, die Arbeit der äußeren Belastung zu klein eingeschätzt wird. Grob gesagt werden also die Verschiebungen unter den Lasten zu klein ausfallen. Werden umgekehrt die Gleichgewichtsbedingungen überall erfüllt, die Verträglichkeitsbedingungen dagegen nur an der diskretisierten Struktur, so werden — wieder grob formuliert — die Verschiebungen unter den Lasten zu groß errechnet. Diese obere oder untere Schranken-Eigenschaft eines Ansatzes ist für den Ingenieur von erheblicher Bedeutung. Zweitens wird man nach den Konvergenzeigenschaften bei fortgesetzter Feinerteilung der Struktur fragen. Beweise für Konvergenz der Verschiebungen zu den exakten elastizitätstheoretischen Werten sind bisher nur für sehr einfache Verschiebungsansätze geführt worden [3].

Ein allgemeines hinreichendes Kriterium für monotone Konvergenz der minimalen potentiellen Energie hat MELOSH [4] angegeben: es muß möglich sein, durch geeignete Wahl der verallgemeinerten Verschiebungen der feiner geteilten Struktur exakt den Verschiebungszustand minimaler potentieller Energie der gröber geteilten Struktur zu geben. Damit kann die minimale potentielle Energie der feiner geteilten Struktur nur kleiner oder gleich jener der gröber geteilten sein. Von den heute bekannten reinen Verschiebungsansätzen für allgemeine Plattenelemente [5, 6, 7, 8] genügt keiner dem Kriterium von MELOSH. Zudem weisen alle mehr oder weniger starke Unstetigkeiten der Plattenmomente in den Elementecken auf. Es erstaunt nicht, daß die Resultate, insbesondere die berechneten Plattenmomente, dem Vergleich mit älteren Näherungsverfahren (endliche Differenzen) nicht standhalten.

Ein reiner Gleichgewichtsansatz für dreieckige Elemente ist von MORLEY angegeben worden [12].

Im folgenden wird ein Verschiebungsansatz angegeben, der dem Kriterium von MELOSH genügt und zudem die Plattenmomente in den Elementecken

stetig überträgt. Die Untersuchung erstreckt sich auf Plattenelemente von allgemeiner Dreiecksform und beliebiger, stetiger, schwachveränderlicher Dickenverteilung (siehe Fig. 1). Symmetrie zu einer Mittelebene wird voraus-

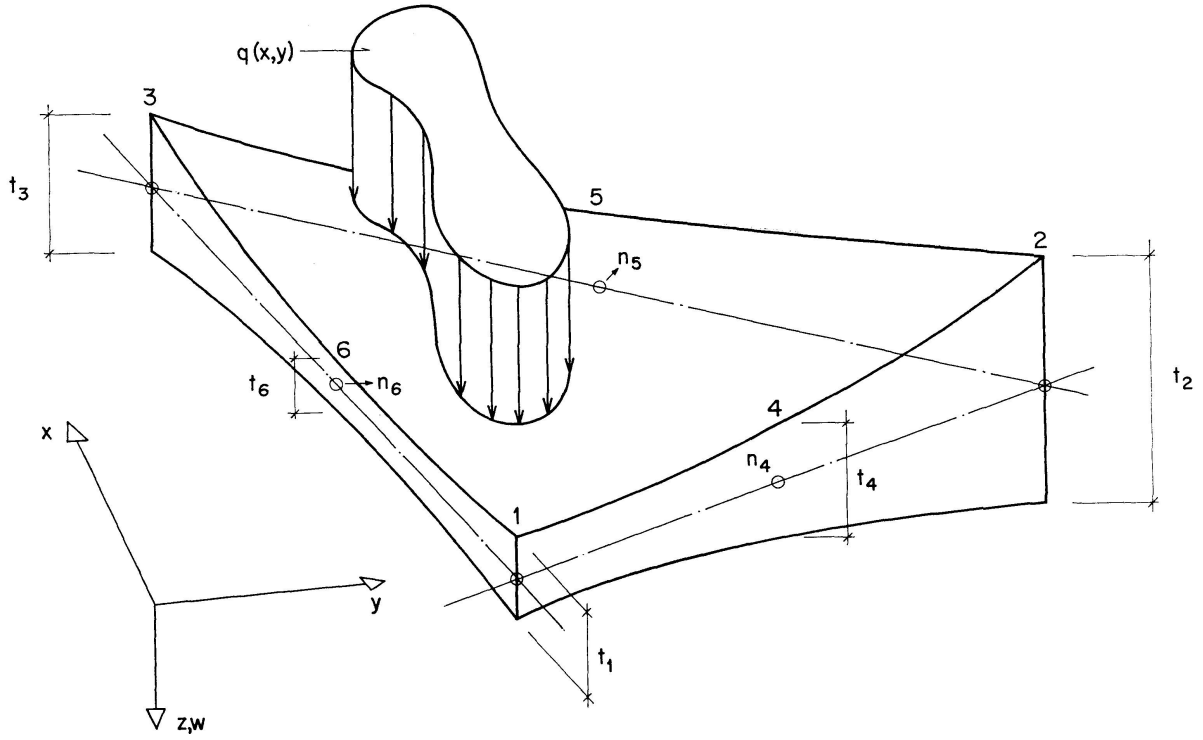


Fig. 1. Allgemeines dreieckiges Plattenelement mit veränderlicher Dicke und beliebiger Belastung.

gesetzt. Die einschränkenden Voraussetzungen sind jene der technischen Plattentheorie. Insbesondere wird die Mittelebene dehnungslos vorausgesetzt, und die Schubverzerrungen werden vernachlässigt. Dann gelten die Beziehungen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -z\boldsymbol{\varkappa} \tag{1}$$

für die Verzerrungen. Das Elastizitätsgesetz in der Plattenebene x, y für beliebige Anisotropie kann in der Form

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2}$$

angeschrieben werden. Die Plattenmomente sind in der üblichen Weise definiert als

$$m_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x z\, dz, \qquad m_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y z\, dz, \qquad m_{xy} = -\int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} z\, dz \tag{3}$$

oder, mit (1) und (2)

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ -m_{xy} \end{bmatrix} = -\int_{-t/2}^{+t/2} \boldsymbol{E}\boldsymbol{\varkappa} z^2\, dz = -\frac{t^3}{12}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\varkappa}. \tag{4}$$

Als Ansatz für die Durchbiegungen w eines Elementes wählen wir das vollständige Polygon 5. Grades

$$\begin{aligned} w = {} & b_{00}\,1 + b_{10}\,x + b_{01}\,y + b_{20}\,x^2 + b_{11}\,xy + b_{02}\,y^2 + b_{30}\,x^3 + b_{21}\,x^2 y + b_{12}\,xy^2 \\ & + b_{03}\,y^3 + b_{40}\,x^4 + b_{31}\,x^3 y + b_{22}\,x^2 y^2 + b_{13}\,xy^2 + b_{04}\,y^4 + b_{50}\,x^5 + b_{41}\,x^4 y \\ & + b_{32}\,x^3 y^2 + b_{23}\,x^2 y^3 + b_{14}\,xy^4 + b_{05}\,y^5 \end{aligned} \tag{5}$$

mit 21 Koeffizienten b_{ik}. Wir bilden aus den Teilfunktionen — in obenstehender Reihenfolge — die Zeile

$$\boldsymbol{f} = [1, x, y, \ldots x y^4, y^5] \tag{6}$$

und damit die Matrix (3×21).

$$\boldsymbol{f}_\Delta = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \ldots\, i\,(i-1)\,x^{i-2} y^k \ldots \\ \ldots k\,(k-1)\,x^i y^{k-2} \ldots \\ \ldots\; 2\,i\,k\,x^{i-1} y^{k-1} \;\ldots \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Die Koeffizienten $\boldsymbol{b}_{ik}$ ordnen wir genauso zur Spalte

$$\boldsymbol{b}_e = \{b_{00}, b_{10}, b_{01}, \ldots b_{05}\}. \tag{8}$$

Sie bilden einen Satz von Lagekoordinaten [11] für das Element. Mit der Wahl der Funktionen $\boldsymbol{f}$ haben wir somit eine Diskretisierung des Problems vorgenommen. An dieser Stelle wird die Verwandtschaft zwischen Finite-Element-Technik und dem Verfahren von Raleigh-Ritz augenfällig. Mit der Matrix (7) ist

$$\boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{f}_\Delta\, \boldsymbol{b}_e \tag{9}$$

und damit schreiben wir die Formänderungsenergie des Elementes

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{V_e} \boldsymbol{\sigma}^t\, \boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_e^t \left[\int_{F_e} \left(\frac{t^3}{12}\right) \boldsymbol{f}_\Delta^t\, \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{f}_\Delta\, dF\right] \boldsymbol{b}_e. \tag{10}$$

Die Matrix in den eckigen Klammern ist die Steifigkeitsmatrix des Elementes in den Lagekoordinaten $\boldsymbol{b}_e$:

$$\boldsymbol{k}_{be} = \int_{F_e} \left(\frac{t^3}{12}\right) \boldsymbol{f}_\Delta^t\, \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{f}_\Delta\, dF. \tag{10a}$$

Die Arbeit der äußeren Belastung $q\,(x, y)$ am Element ist

$$A_e = \int_{F_e} q\, w\, dF = \boldsymbol{b}_e^t \int_{F_e} q\, \boldsymbol{f}^t\, dF. \tag{11}$$

Die Größen

$$\pi_e = \int_{F_e} q f^t dF \tag{12}$$

sind die verallgemeinerten äußeren Lasten am Element.

Um die totale potentielle Energie einer aus Elementen zusammengesetzt gedachten Platte geschlossen anschreiben zu können, müssen wir die Lagekoordinaten b_e der Elemente aus einem geeigneten Satz von Lagekoordinaten r der Platte ausrechnen. In die Spalte r lassen wir eingehen (siehe Fig. 2):

— Die vertikalen Verschiebungen w und deren Ableitungen $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ in den Knoten.

— Die Ableitungen $\partial w/\partial n$ in den Mittelpunkten zwischen den Knoten. Die Normalen n werden konventionell gerichtet in den 1. oder 2. Quadranten der x, y-Ebene ($+x$-Achse eingeschlossen, $-x$-Achse ausgeschlossen).

— Die Plattenmomente μ in den Knoten. Diese Wahl mag auf den ersten Blick überraschen. Formal sind die Momente jedoch nichts weiter als Linearkombinationen von Verschiebungsgrößen.

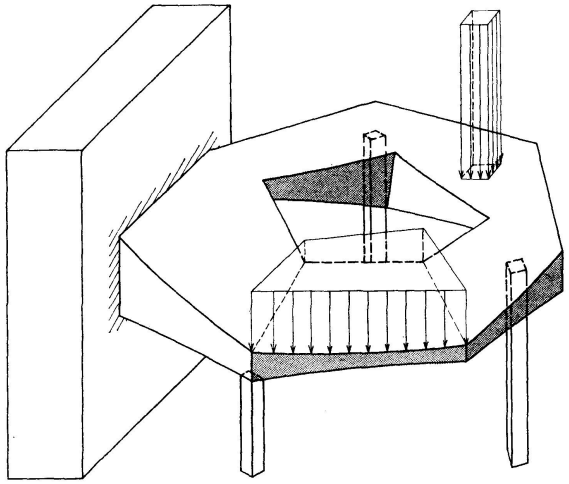


Fig. 2a. Allgemeine Plattenstruktur.

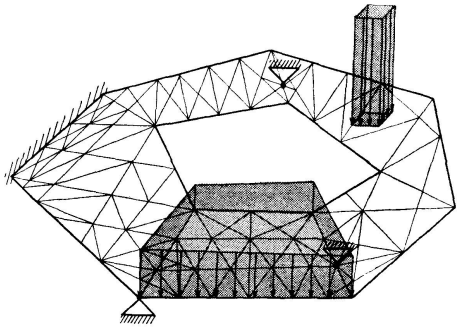


Fig. 2b. Idealisierte Struktur.

Es ist leicht zu sehen, daß die so definierten verallgemeinerten Verschiebungen zusammen mit dem Verschiebungsansatz für die Elemente ein voll verträgliches Verschiebungsfeld über die ganze Platte bestimmen. So sind die Normalableitungen $\partial w/\partial n$ längs der Verbindung zweier Knoten i, k in beiden angeschlossenen Elementverschiebungsfeldern Polynome 4. Grades von s. Diese beiden Funktionen haben die 5 Stützwerte $(\partial w/\partial n)_i$, $(\partial^2 w/\partial n\,\partial s)_i$, $\partial w/\partial n$ in der Mitte, $(\partial w/\partial n)_k$ und $(\partial^2 w/\partial n\,\partial s)_k$ gemeinsam. Sie sind identisch. Ebenso läßt sich die Gleichheit der Verschiebungen w auf zusammenstoßenden Elementrändern nachweisen. Störungen der Verträglichkeit können bei sprunghaften Änderungen von Querschnittswerten oder elastischen Eigenschaften auftreten. Solche Fälle müssen ausgeschlossen werden, wenn die Lösung eine untere Schranke der Verschiebungen sein soll. Ein möglicher, aber unpraktischer Ausweg wäre, die Unstetigkeiten ins Innere der Elemente zu verlegen.

Das Integral in (10) könnte dann nur noch sehr mühsam automatisch ausgewertet werden.

Fassen wir die 21 Komponenten von $\boldsymbol{r}$, die an ein bestimmtes Element e $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ angeschlossen sind, zur Spalte

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varrho}_e = \{&w_1, w_2, w_3, \partial w_1/\partial x, \partial w_2/\partial x, \partial w_3/\partial x, \partial w_1/\partial y, \partial w_2/\partial y, \partial w_3/\partial y,\\ &\partial w_4/\partial n, \partial w_5/\partial n, \partial w_6/\partial n, \boldsymbol{\mu}_1^t, \boldsymbol{\mu}_2^t, \boldsymbol{\mu}_3^t\}\end{aligned} \tag{13}$$

zusammen, so ist die Bestimmung der 21 Polynomkoeffizienten b_{ik} aus den 21 Stützwerten in $\boldsymbol{\varrho}_e$ ein allgemeines Interpolationsproblem in 2 Dimensionen. Die notwendigen Gleichungen sind

$$w_i = \boldsymbol{f}(x_i, y_i)\,\boldsymbol{b}_e, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{f}\right)_{x_i, y_i} \boldsymbol{b}_e, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i = \left(\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{f}\right)_{x_i, y_i} \boldsymbol{b}_e,$$

$$i = 1, 2, 3,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_j = \left[\cos(n_j x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{f}\right)_{x_j, y_j} + \cos(n_j, y)\left(\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{f}\right)_{x_j, y_j}\right] \boldsymbol{b}_e \quad (j = 4, 5, 6)$$

und

$$\boldsymbol{\mu}_i = -\frac{t_i^3}{12}\boldsymbol{E}\boldsymbol{f}_{\Delta}(x_i, y_i)\,\boldsymbol{b}_e, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{14}$$

Sie lassen sich zusammenfassen zu der linearen Relation

$$\boldsymbol{\varrho}_e = \boldsymbol{T}_e \boldsymbol{b}_e. \tag{15}$$

Da diese Gleichung in der Form

$$\boldsymbol{b}_e = \boldsymbol{T}_e^{-1} \boldsymbol{\varrho}_e \tag{16}$$

benötigt wird, muß die Regularität von $\boldsymbol{T}$ nachgeprüft werden. Zu diesem Zweck wurden die kleinsten Pivotelemente bei der Inversion von $\boldsymbol{T}$ für den ganzen Bereich der möglichen Dreiecksformen mit $D = 1$, $\nu = 0$ tabelliert. Fig. 3a zeigt einen Schichtlinienplan dieser Tabelle. Singularität kann offensichtlich nur bei ausgearteten Dreiecksformen eintreten.

Die Formänderungsenergie (10) transformiert sich mit (10a) und (16) zu

$$U_e = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{b}_e^t \boldsymbol{k}_{be} \boldsymbol{b}_e = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\varrho}_e^t \boldsymbol{k}_e \boldsymbol{\varrho}_e, \tag{18}$$

wo

$$\boldsymbol{k}_e = \boldsymbol{T}_e^{t-1} \boldsymbol{k}_{be} \boldsymbol{T}_e^{-1} \tag{19}$$

die Elementsteifigkeit in den Lagekoordinaten der Platte ist. Ebenso erhält man für die Arbeit der äußeren Lasten

$$A_e = \boldsymbol{b}_e^t \boldsymbol{\pi}_e = \boldsymbol{\varrho}_e^t \boldsymbol{p}_e \tag{20}$$

wo

$$\boldsymbol{p}_e = \boldsymbol{T}_e^{t-1} \boldsymbol{\pi}_e \tag{21}$$

die verallgemeinerten Elementbelastungen in den Lagekoordinaten der ganzen Platte sind.

Führt man schließlich die Zuordnung zwischen der Spalte $\boldsymbol{\varrho}_e$ und den Verschiebungen $\boldsymbol{r}$ der ganzen Platte in der Schreibweise von ARGYRIS [10] mit

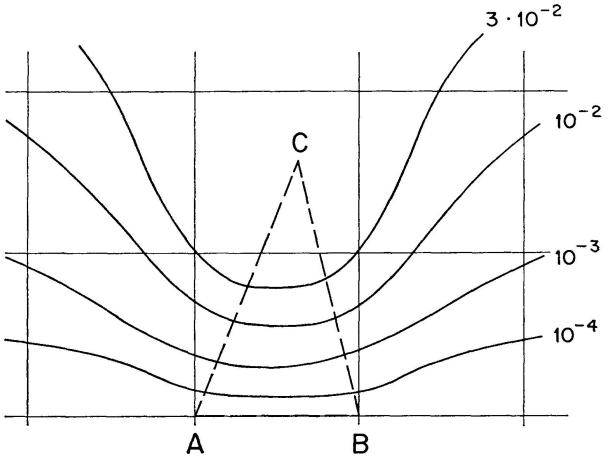


Fig. 3a. Betrag des kleinsten Pivots bei der Inversion der Matrix T in Abhängigkeit von der Elementform.

Basis des Dreiecks A—B. Der Pivotbetrag wird über der Spitze C des Dreiecks (variabel) aufgetragen. Gezeichnet sind die Schichtlinien dieser Funktion.

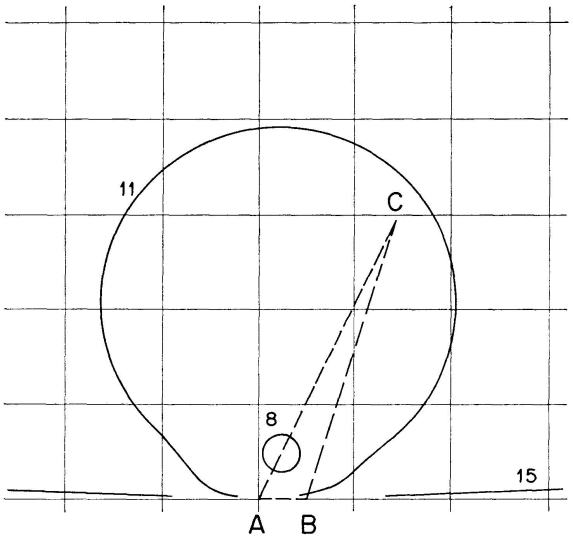


Fig. 3b. Grenzlinien der unbedingten Konvergenz der iterativen Nachverbesserung der Inversen von T in Abhängigkeit von der Elementform bei Rechnung mit 8, 11 und 15 Dezimalen.

$$\boldsymbol{\varrho}_e = \boldsymbol{a}_e \boldsymbol{r} \tag{22}$$

ein, wo $\boldsymbol{a}_e$ eine Umordnungsmatrix ist, so erhält man für die elastische Formänderungsenergie der Platte

$$U = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}^t (\sum_e \boldsymbol{a}_e^t \boldsymbol{k}_e \boldsymbol{a}_e)\, \boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}^t \boldsymbol{K} \boldsymbol{r} \tag{23}$$

und für die Arbeit der äußeren Lasten

$$A = \boldsymbol{r}^t (\sum_e \boldsymbol{a}_e^t \boldsymbol{p}_e) = \boldsymbol{r}^t \boldsymbol{P}. \tag{24}$$

Nimmt man als Nullpunkt des Potentials der (konservativen) Belastung den unverzerrten Zustand der Platte, so ist die totale potentielle Energie

$$\Phi\, U = -A\,.$$

Aus der Forderung, daß dieser Ausdruck ein Minimum sein muß, folgen die bekannten Gleichungen der Deformationsmethode

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{P}. \tag{25}$$

Ein Teil der Komponenten von $\boldsymbol{r}$ wird durch Randbedingungen vorgegeben sein; da $\boldsymbol{r}$ auch die Plattenmomente enthält, gehen nicht nur gegebene Verschiebungen oder Verdrehungen, sondern auch freie Ränder u. a. in diese ein, wobei die Kirchhoffschen Randbedingungen des freien Randes allerdings nicht erfüllt werden. Bezeichnet der Index U Unbekannte, G gegebene Größen $\boldsymbol{r}$, so geht (25) über in

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{K}_{UU} & \boldsymbol{K}_{UG} \\ \hline \boldsymbol{K}_{GU} & \boldsymbol{K}_{GG} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{r}_U \\ \hline \boldsymbol{r}_G \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{P}_U \\ \hline \boldsymbol{P}_G \end{array}\right]. \tag{26}$$

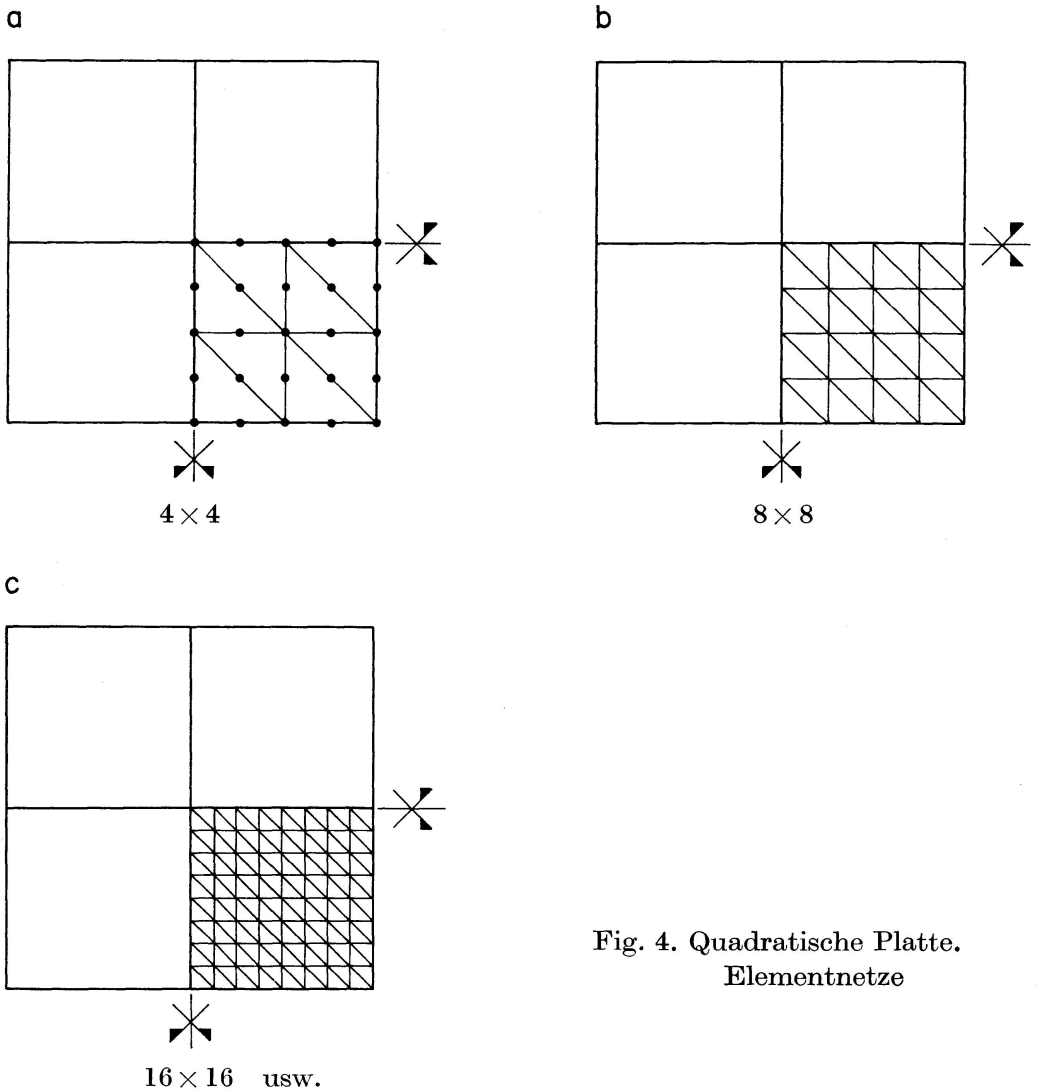


Fig. 4. Quadratische Platte. Elementnetze

Die Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten sind jetzt

$$\boldsymbol{K}_{UU}\,\boldsymbol{r}_U = (\boldsymbol{P}_U - \boldsymbol{K}_{UG}\,\boldsymbol{r}_G) \tag{27}$$

während die Reaktionen in den Richtungen vorgegebener Verschiebungen durch

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{K}_{GU}\,\boldsymbol{r}_U + \boldsymbol{K}_{GG}\,\boldsymbol{r}_G - \boldsymbol{P}_G \tag{28}$$

gegeben sind.

Um mit anderen voll verträglichen dreieckigen Elementen und mit analytischen Werten vergleichen zu können, wurde als Zahlenbeispiel die einfach gelagerte Quadratplatte unter mittiger Einzellast und unter gleichmäßig verteilter Flächenlast gewählt. Die analytischen Werte finden sich in [13]. Es wurden 3 verschieden feine Netze verwendet (Fig. 4), wobei aus Symmetriegründen nur ein Viertel der Platte in die Rechnung einging. Selbstverständlich wäre es um den Preis eines etwas komplizierteren Rechenprogramms möglich gewesen, auch die Symmetrie zur Diagonalen auszunützen und mit einem Achtel der Platte zu rechnen. Ein Vergleich der Genauigkeit ist nur in bezug auf die Größe des Gleichungssystems (27) sinnvoll, die in Fig. 5 zusammen mit den Ergebnissen für die Durchbiegung in Plattenmitte angegeben ist. Es

Exakter Wert: 0,01160	4×4	8×8	16×16	
Neues Element	0,01134	0,01153	0,01158	$\times \frac{P a^2}{D}$
Unbekannte	33	139	567	
Bazeley [6][1])	0,01057	—	—	
Clough [5][1])	0,01039	0,0113	0,0115	$\times \frac{P a^2}{D}$
Unbekannte	12	47	182	

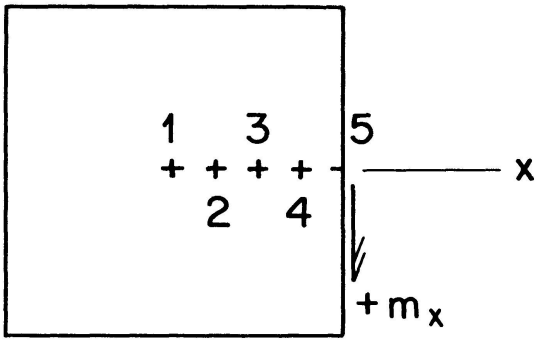
Fig. 5a. Maximale Durchbiegung einer frei aufliegenden, isotropen Quadratplatte unter Einzellast in Plattenmitte. $\nu = 0{,}3$.

Exakter Wert 0,00406	4×4	8×8	16×16
Neues Element	0,00393	0,00403	0,00405
Unbekannte	33	139	567
Bazeley [6][1])	0,00376	—	—
Clough [5][1])	0,00371	0,00392	0,00401
Unbekannte	12	47	182

Fig. 5b. Maximale Durchbiegungen einer frei aufliegenden, isotropen Quadratplatte unter gleichmäßig verteilter Flächenlast. $\nu = 0{,}3$.

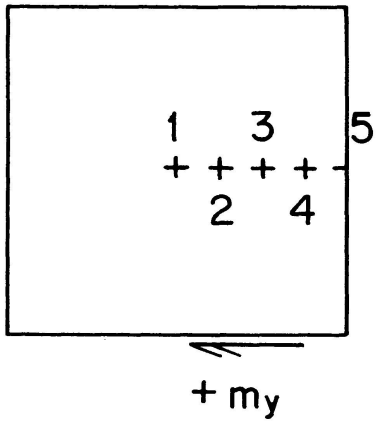
[1]) Zitiert nach [14].

bestätigt sich die Erfahrungsregel, daß die Verwendung von Elementen mit mehr Freiheitsgraden im ganzen gesehen die Rechenzeit abkürzt. Mit Ausnahme sehr kleiner Probleme trifft dies auch mit Berücksichtigung der Zeit für die Elementsteifigkeiten zu.



Punkt	1	2	3	4	5
Exakt	0,0479	0,0458	0,0390	0,0250	0
4×4	0,0520	—	0,0370	—	0
8×8	0,0477	0,0455	0,0385	0,0246	0
16×16	0,0478	0,0457	0,0388	0,0248	0

Fig. 6a. Plattenmomente m_x einer frei aufliegenden, isotropen Quadratplatte unter gleichmäßig verteilter Flächenlast. $\nu = 0{,}3$.



Punkt	1	2	3	4	5
Exakt	0,0479	0,0448	0,0356	0,0204	0
4×4	0,0520	—	0,0351	—	0
8×8	0,0477	0,0446	0,0355	0,0205	0
16×16	0,0478	0,0447	0,0356	0,0205	0

Fig. 6b. Plattenmomente m_y einer frei aufliegenden, isotropen Quadratplatte unter gleichmäßig verteilter Flächenlast. $\nu = 0{,}3$.

Ein weiterer Vorteil des vorliegenden Elements ist darin zu erblicken, daß in den verallgemeinerten Verschiebungen die Plattenmomente in den Knoten inbegriffen sind. Eine nachträgliche Berechnung von Spannungsgrößen aus Knotenverschiebungen ist überflüssig, sofern nicht Spannungswerte im Elementinnern verlangt werden. Fig. 6 zeigt den Verlauf der Plattenmomente in der Plattenmittellinie. Die Vergleichswerte sind aus TIMOSHENKO quadratisch interpoliert. Die erzielte Genauigkeit ist für Finite-Element-Technik außerordentlich, ebenso wie die Tatsache, daß die Konvergenz schon beim 8×8-Netz für praktische Zwecke abgeschlossen ist.

Die Programmierung des beschriebenen Rechnungsganges für eine digitale Rechenanlage ist nicht Gegenstand dieses Aufsatzes. In den letzten Jahren sind mehrere Lehrbücher über Finite-Element-Technik erschienen, die zum Teil auch Programmbeispiele enthalten ([14], [15], [16]). Dagegen sollen noch zwei numerische Fragen gestreift werden. Es ist zweckmäßig, die Dicke t der Platte als Polynom 2. Grades in x und y anzunehmen. Die sechs Werte $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ an den Ecken und Seitenmitten genügen zur Bestimmung der sechs Koeffizienten c_{ik} von

$$t(x, y) = c_{00} + c_{10}\, x + c_{01}\, y + c_{20}\, x^2 + c_{11}\, xy + c_{02}\, y^2. \tag{29}$$

Wie bei (14) liegt ein Interpolationsproblem in zwei Dimensionen vor. Setzt man ferner

$$\boldsymbol{E} = \text{const} \tag{30}$$

für das ganze Element, so wird eine formelmäßige Integration von (10a) möglich. Diese ist für Polynome schneller und genauer als die numerische Integration nach Gauß, die ZIENKIEWICZ [14] vorgeschlagen hat. Bei großen Platten mit sehr vielen Elementen kann diese Genauigkeit durchaus erforderlich sein, um einer numerisch bedingten Divergenz des Verfahrens zu entgehen. Die einzelnen Integrale in (10a) haben die Form

$$I = \int_{F_e} x^i\, y^k\, dx\, dy. \tag{31}$$

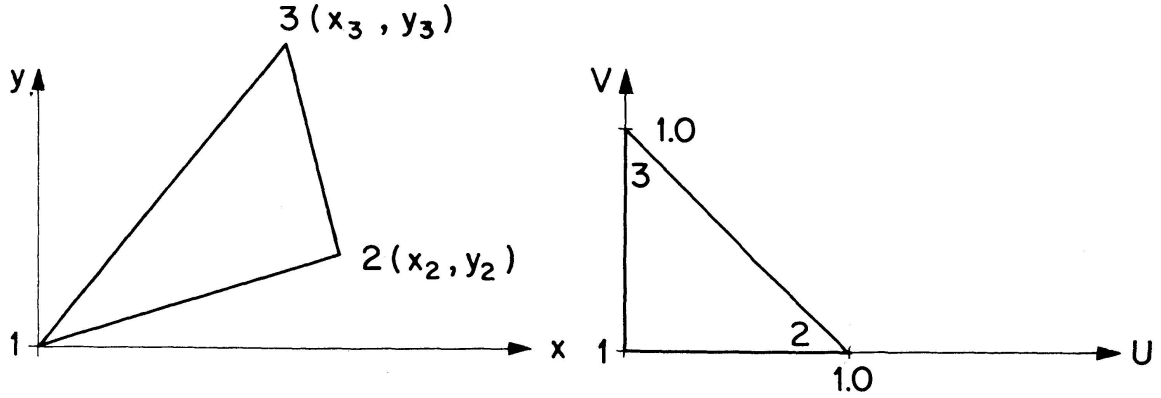


Fig. 7. Integration von Polynomen über allgemeine Dreiecksbereiche.
$x = x_2\, u + x_3\, v, \quad y = y_2\, u + y_3\, v.$

Durch eine Transformation

$$x = x_2 u + x_3 v, \qquad y = y_2 u + y_3 v \tag{32}$$

mit der Determinante

$$D = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} = 2 F_e \tag{33}$$

geht das allgemeine Dreieck des x, y-Systems in das spezielle des u, v-Systems über (siehe Fig. 7). Dann folgt

$$I = 2 F_e \int_{F_e} (x_2 u + x_3 v)^i (y_2 u + y_3 v)^k \, du \, dv \tag{34}$$

und durch Ausmultiplizieren erhält man Terme der Form

$$J = \int_0^1 v^m \, dv \int_0^{1-V} u^n \, du = \frac{1}{n+1} \int_0^1 v^m (1-v)^{n-1}. \tag{35}$$

Das letzte Integral ist die Definitionsgleichung der Eulerschen Betafunktion,

$$B(m+1, n+2)$$

wofür bei ganzen Zahlen m und n gilt:

$$B(m+1, n+1)^{-1} = (n+2) \binom{m+n+2}{m}, \tag{36}$$

also

$$J = \int_{F_e'} u^n v^m = \frac{m! \, n!}{(m+n+2)!}. \tag{37}$$

Selbstverständlich müssen alle angedeuteten algebraischen Zwischenschritte als Manipulation mit Koeffizienten und Exponenten programmiert werden.

Die hohe erforderliche Genauigkeit in den Elementsteifigkeitsmatrizen stellt große Anforderungen an die Inversion der Matrix in (16). Außer singulären Fällen müssen auch solche ausgeschlossen werden, die zu einem hohen Stellenverlust führen. Als Kriterium für solche numerische Fastsingularität wird nach FORSYTHE und MOLER [9] das Konvergenzverhalten der iterativen Nachverbesserung verwendet. Die Konvergenz dieses Verfahrens ist auch bei ungünstiger Verteilung der Rundungsfehler gesichert, wenn die Ungleichung

$$1{,}01 \, (n^3 + 3 n^2) \, p \, u \, ||\boldsymbol{T}||_\infty \, ||\boldsymbol{T}^{-1}||_\infty < \tfrac{1}{2} \tag{38}$$

erfüllt ist. Darin bedeuten

$||.||_\infty$ Maximale Zeilensumme (Holder $_\infty$-Norm)
n Die Ordnung der Matrix, hier 21
p Größtes absolutes Pivotelement dividiert durch $||\boldsymbol{T}||$
u Einheits-Rundungsfehler, abhängig von Stellenzahl und Rundungsverhalten der Maschine

Der Gültigkeitsbereich von (38) ist in Fig. 3b für die Präzisionsstufen 8, 11, bzw. 15 Dezimalstellen dargestellt, entsprechend den üblichen Stellenzahlen in heutigen Großrechenanlagen bei einfacher Genauigkeit. Die Tatsache, daß achtstellige Genauigkeit nicht immer ausreicht, hätte das Verfahren im Sinne der klassischen Statik zur Unbrauchbarkeit verurteilt. Wenn man aber bedenkt, daß die digitalen Rechner der heute jüngsten Generation fast ausschließlich 11 und mehr Dezimalstellen mitnehmen, so besteht kein Grund, diese Präzision nicht auszunützen. Die Bedingung (38) ist außerordentlich streng, setzt sie doch den außerordentlich unwahrscheinlichen Fall der ungünstigen Kombination aller Rundungsfeher voraus.

Es ist möglich, das Interpolationsproblem (14) in homogene Dreieckskoordinaten (siehe Ref. [14]) zu fassen. Dadurch wird $\boldsymbol{T}$ von der speziellen Dreiecksform unabhängig, und die Inversion muß nur einmal ausgeführt werden. Das numerische Problem bei gestreckten Elementen wird dadurch in die Transformation von $\boldsymbol{k}_{be}$ verlegt.

Literatur

1. B. Fraeijs de Veubeke: Displacement and equilibrium models in the finite element method. Kap. 9 von "Stress Analysis", ed. Zienkiewicz and Holister, Wiley, 1965.
2. W. Prager und J. L. Synge: Approximations in Elasticity based on the concept of function space. Quart. Appl. Math., 5, 1947.
3. J. L. Synge: The Hypercircle in Mathematical Physics. Cambridge University Press, Chap. 3, 1957.
4. R. J. Melosh: Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method. AIAA-Journal, Vol. 1, Nr. 7, Juli 1963.
5. R. W. Clough and J. L. Tocher: Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending. Proc. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, 1966.
6. G. P. Bazeley, Y. K. Cheung, B. M. Irons and O. C. Zienkiewicz: Triangular elements in plate bending — conforming and nonconforming solutions. Proceedings Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, 1966.
7. B. Fraeijs de Veubeke: A conforming finite element for plate bending. Int. J. Solids Structures, 1968, Vol. 4, p. 95—108.
8. A. L. Deak and T.H. H. Pian: Application of the Smooth-Surface Interpolation to the Finite-Element Analysis. AIAA-Journal, Jan. 1967.
9. G. Forsythe, C. B. Moler: Computer Solution of Linear Algebraic Systems. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
10. J. H. Argyris, B. Sc. Kelsey: Energy Theorems and Structural Analysis. Butterworths 1960, zuerst veröffentlicht in Aircraft Engineering, 1954, 1955.
11. H. Ziegler: Mechanik III, Kap. I, Systeme mit endlichem Freiheitsgrad. Birkhäuser 1956.
12. L. S. D. Morley: Journal of the Royal Aeronautical Society, Oktober 1967: A Triangular Equilibrium Element with Linearly Varying Bending Moments for Plate Bending Problems.
13. S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells. 2. Aufl., McGraw-Hill, New York, 1959.

14. O. C. ZIENKIEWICZ, Y. K. CHEUNG: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. McGraw-Hill, 1967.
15. H. C. MARTIN: Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis. McGraw-Hill, 1966.

Zusammenfassung

Es wird ein neuer, rein verträglicher Ansatz für ein Plattenelement von allgemeiner Dreiecksform mit beliebigem, symmetrischem Dickenverlauf angegeben. Die Plattenmomente in den Ecken der Elemente gehen als verallgemeinerte Verschiebungen in die Gleichungen der Deformationsmethode ein. Eine nachträgliche Berechnung von Spannungen aus Verschiebungen entfällt.

Ein Beispiel zeigt, daß bei kleinerem, numerischem Aufwand bessere Genauigkeiten als bei früheren Finite-Element-Lösungen zu erwarten sind. Bei den Spannungen ist die Verbesserung besonders deutlich.

Summary

A new, fully compatible plate-bending element of arbitrary triangular shape and arbitrary variable symmetric cross-section for use in finite-element analysis is presented. The bending moments at the element corners are entered as generalized displacements into the equations of equilibrium, along with the usual nodal displacements and rotations.

An example compares the new approach with earlier finite-element solutions of the compatible type. Better results are obtained with fewer equations, and no a — posteriori computation of stresses from displacements is necessary.

Résumé

On présente un élément fini triangulaire purement compatible pour le calcul des plaques à épaisseur variable.

Les moments de plaque aux coins des éléments entrent dans les équations de la méthode des déformations en tant que déplacements généralisés. Ainsi le calcul ultérieur des tensions à partir des déplacements n'est plus nécessaire.

Un exemple montre que cette méthode donne, avec moins d'équations, une exactitude meilleure que les méthodes précédentes d'éléments finis.

Ultimate Strength Design of Multi-Cell Rectangular Reinforced Concrete Bridge Piers

Calcul de la résistance limite des piles de ponts de section rectangulaire, multicellulaire en béton armé

Traglastverfahren für mehrzellige, rechteckige Eisenbeton-Brückenpfeiler

H. J. BRETTLE
Senior Lecturer, School of Civil Engineering, University of New South Wales.

Introduction

During the past thirty years the economical spans of both reinforced concrete and prestressed concrete bridge decks have increased dramatically due to the advent of improved materials, new construction techniques and structural sophistication. This improved technology has permitted the use of thin-wall tee and box section beams which greatly reduces material quantity and has resulted in many extremely graceful deck profiles. In the same period technological advances have not produced similar thin-wall bridge piers.

Publications in structural journals indicate far more interest with structural systems subjected to flexure than with frameworks loaded mainly in compression. This could be due to the simpler theory for solution of flexure problems and to the case of application of large bending moments to full sized flexural members to verify such theory. Although the greatest savings have occurred in deck systems, effort should be made to minimise the cost of the complete bridge including the substructure, consequently a study of bridge pier design has been commenced by the author.

Greater economy will probably result from the use of smaller quantities of material placed at more appropriate positions and sustaining higher average stresses. Ultimate strength analysis should predict the collapse load of such structural members and as the latest codes tend to include lower load factors less material will continue to be required. Such matters as crack widths, deflection, vibration, fatigue, etc., will become more important but it is

probable that the minimum material will result from using the least load factor with ultimate strength design.

Bridge piers are subjected to axial loads and to horizontal forces both along and transverse to a bridge centre line. The lateral forces are minimised by restricting pier end widths and the longitudinal forces greatly decreased by using low friction type bearings. Piers usually traverse the full width of a bridge deck consequently narrow rectangular shapes often result. Large rectangular piers of solid section are usually far too strong for the loads imposed so thin-walled members were considered. A method of analysing rectangular thin-wall reinforced concrete members subjected to compression and biaxial bending was therefore untertaken to determine a satisfactory ultimate strength design procedure.

Since ultimate strength analysis for biaxial bending presents considerable computational difficulties, unsymmetrical reinforced concrete columns are rarely proportined in design practice to carry their ultimate loads. To the author's knowledge no design procedure or method has been published for either the ultimate strength or permissible working stress design of hollow rectangular reinforced concrete members subjected to biaxial bending when tensile stress exists over portion of the cross-section. However, approximate methods [1, 2] and graphs [3, 4] are available for the design of the simplest cases of solid square or rectangular columns containing symmetrically placed reinforcement and subjected to biaxial bending.

BRETTLE and WARNER in a previous paper [12] have produced a general method of analysis of reinforced concrete members of any arbitary cross-section for both ultimate strength and working stress design when subjected to compression and biaxial bending. The method has been developed for use with a digital computer and used to prepare graphs for the ultimate strength design of solid rectangular sections [13].

In this paper the method is adapted for the analysis of hollow rectangular and hollow triple box sections of various width to depth ratios. Design charts have been included for the ultimate strength design of such sections.

Notation

P_0 axial load at failure with zero eccentricity
P_u load at failure having double eccentricities
b overall width of a rectangular cross-section
b' distance in the x direction between centre lines of steel layers adjacent to the sides of the member
b'' width of hollow rectangular areas within the cross-section
t overall depth of a rectangular cross-section
t' distance in the y direction between centre lines of steel layers adjacent to the top and bottom faces of the member

t'' total depth of hollow rectangular areas within the cross-section

C_{ij} elements of a rectangular array C used to define the shape of the concrete cross-section

x_{cj}/b non-dimensionalised x co-ordinates of centroids of regularly spaced array elements C_{ij}

y_{ci}/t non-dimensionalised y co-ordinate of centroids of regularly spaced array elements C_{ij}

X_{cj} a rectangular array whose elements are the x_{cj} co-ordinates of the elements C_{ij} when the array C has irregular column widths

Y_{ci} a rectangular array whose elements are the y_{ci} co-ordinates of the elements C_{ij} when the array C has irregular row depths

S_{ij} elements of a rectangular array S used to define the position and relative magnitude of the steel reinforcement

x_{sj}/b non-dimensionalised x co-ordinates of centroids of regularly spaced array elements S_{ij}

y_{si}/t non-dimensionalised y co-ordinates of centroids of regularly spaced array elements S_{ij}

X_{sj} a rectangular array whose elements are the x_{sj} co-ordinates of the elements S_{ij} when the array S has irregular column widths

Y_{si} a rectangular array whose elements are the y_{si} co-ordinates of the elements S_{ij} when the array S has irregular row depths

n_{cb} number of columns in arrays C, X_{cj} and Y_{ci}

n_{ct} number of rows in arrays C, X_{cj} and Y_{ci}

n_c total number of elements that replace the total concrete area

A_c total concrete area

ΔA_c area of a concrete element $= A_c/n_c$

ΔA_{cij} concrete area ΔA_c at the (i,j)th location of array C

n_{sb} number of columns in arrays S, X_{sj} and Y_{si}

n_{st} number of rows in arrays S, X_{sj} and Y_{si}

n_s total number of elements that replace the total steel area

A_s total steel area

ΔA_s area of steel element $= A_s/n_s$

ΔA_{sij} steel area ΔA_s at the (i,j)th location of array S

p steel proportion $= A_s/A_c$

e_x eccentricity of loading in the x direction measured from the plastic centroid of the cross-section

e_y eccentricity of loading in the y direction measured from the plastic centroid of the cross-section

e_r resultant eccentricity $= \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$

e'_x eccentricity of loading in the x direction measured from the point of maximum compressive strain used as the origin shown in Figs. 2 and 3

e'_y eccentricity of loading in the y direction measured from the point of maximum compressive strain used as the origin shown in Figs. 2 and 3

z distance to any fibre measured from the origin in a direction perpendicular to the neutral axis

z_m maximum value of z

z_n perpendicular distance from neutral axis to the origin

θ angle defining the inclination of the neutral axis with respect to the x axis

ψ angle defining the direction to the point of application of the eccentric load P_u with respect to the x axis

ϵ_c concrete strain

ϵ_{cij} concrete strain at centroid of the (i,j)th elemental area ΔA_{cij}

ϵ'_c maximum concrete compressive strain at failure of an axially loaded concrete section

ϵ_{cu} maximum concrete compressive strain at failure of a thin flanged hollow rectangular section subjected to uniaxial bending about a principal axis and when the neutral axis is within the section

$\epsilon_{cu\theta}$ maximum concrete compressive strain at failure of a thin webbed rectangular section when subjected to biaxial bending about any axis

ϵ_u maximum concrete compressive strain in a section at failure

f_c concrete stress

f_{cij} concrete stress at centroid of the (i,j)th element ΔA_{cij}

f'_c concrete control cylinder strength

k_1 ratio of concrete strength in a compression member to its control cylinder strength

k_2 dimensionless parameter reflecting the effect of inclination of neutral axis angle θ, on the ultimate strain.

ϵ_s steel strain

ϵ_{sij} steel strain at centroid of the (i,j)th elemental area ΔA_{sij}

ϵ_{sy} steel yield strain

f_s steel stress

f_{sy} steel yield stress

q reinforcement ratio $= \dfrac{p f_{sy}}{k_1 f'_c}$

q' $q \dfrac{n_c}{n_s}$

q'' $q \dfrac{A_c}{n_s}$

R_c non-dimensionalised concrete stress $= \dfrac{f_c}{k_1 f'_c}$

R_{cij} value of R_c at centroid of the (i,j)th elemental area ΔA_{cij}

R_s non-dimensionalised steel stress $= f_s/f_{sy}$

R_{sij} value of R_s at centroid of the (i,j)th elemental area ΔA_{sij}

R_{s0} value of R_s for all elements ΔA_s when axial load P_0 is applied

S_c normalised concrete strain $= \epsilon_c/\epsilon'_c$

S_s normalised steel strain $= \epsilon_s/\epsilon_{sy}$

Material Properties in Thin-Wall Members

To the author's knowledge no test results are yet available on the physical characteristics of hollow rectangular concrete sections. This may be due to the difficulty in application of the large longitudinal forces required to cause failure of reasonably sized members. It is, therefore, necessary to examine test results of members whose dimensions and shape are similar or equivalent to portions of hollow rectangular bridge piers to permit a reasonable approximation of the required properties.

A multi-cell rectangular cross-section consists of a set of thin walls joined together at their edges. Some experimental work has been reported on plain concrete and lightly reinforced walls without end constraint, which should provide conservative data for the prediction of the strength characteristics of continuously reinforced intersecting walls in a bridge pier. In addition various codes provide instruction for the design of thin reinforced concrete walls.

Ultimate strength tests carried out at the British Building Research Station [5] have shown that uniformly distributed axial force applied to unreinforced concrete walls of height/thickness ratio less than 30, caused material collapse rather than buckling failure when the average axial compressive stress reached 85% of the cylinder strength f'_c. When small quantities of both horizontal and vertical reinforcement were placed adjacent to both wall faces collapse occurred when the average crushing strength equalled f'_c and the steel yielded. Whereas two layers of steel appreciably increased the apparent concrete strength, a single steel layer only increased the wall carrying capacity by the steel area times its yield stress.

The ACI building code [6] includes recommendations for both working stress and ultimate strength design of reinforced walls. It suggests a minimum wall thickness of $^1/_{25}$ of the unsupported height or width which ever is the least. For walls of 10″ thickness or more, two layers of steel are required, one placed adjacent to each wall face where the minimum proportion of vertical and horizontal reinforcement is 0.0015 and 0.0025 respectively.

The Australian concrete building code [7] only permits working stress design and indicates a minimum proportion of vertical and horizontal steel of 0.002. In walls of 8″ or greater thickness two layers of steel, one layer placed adjacent to each face is required. When the distance between adjacent walls is less than the height then the length/thickness ratio becomes the slenderness ratio. If the slenderness ratio exceeds 15 the strength reduction factor for tied columns should be used.

Until such time as test results of hollow rectangular sections are available, the following design restrictions should be adopted when proportioning bridge pier walls. The minimum wall slenderness ratio to be maintained at 20. A minimum steel proportion of 0.002 to be used for both the vertical and hori-

zontal reinforcement. The steel to be placed in two layers, one adjacent to each wall face. It should be noted, however, that this paper does not deal in any way with the instability problem and the above comments are only suggested for the guidance of designers.

The above restrictions apply to walls subjected to reasonably concentric loads occurring in buildings hence the strain distribution is essentially uniform across the walls. A bridge pier can of course be subjected to large bending moments and small axial force consequently the thin-wall flanges can be subjected to linearly varying strain distribution. RÜSCH [9] experimentally examined the strain distribution across beams of various cross sections subjected to pure bending and showed that the extreme fibre strain at failure was about 0.0043 for a solid triangular section and 0.0022 for a thin top flange tee section, when loads were applied for short duration to medium strength concrete. The difference in the value of limiting strain at the extreme fibre depends on the support given to it by adjacent fibres. In thin flanged tee beam specimens the strain distribution across the flange in pure bending is essentially uniform so all fibres tend to fail at the same lower value of limiting strain of 0.0022. When failure occurs in a thin flange hollow rectangular section such that maximum strain occurs along a face of the section, the limiting value of strain ϵ_{cu} will be assumed in this study to equal 0.0022 as in the case of a thin flanged tee beam. The limiting value of strain usually adopted for solid rectangular sections is 0.0035 which increases to 0.0043 in solid triangular sections when maximum strain occurs at a corner. Collapse can also occur at the corner of a hollow rectangular section at a strain value somewhere between these two limits and the lower value was considered as the appropriate conservative value.

Concrete stress-strain curves obtained from axially loaded cylinders vary non-linearly from zero stress up to some maximum strength f'_c at a strain ϵ'_c. The stress then decreases with increasing strain. Final failure depends on the proporties of the test machine and the duration of the test. Whereas the final failure strain varies within wide limits, the value of ϵ'_c remains reasonably constant at about 0.002 [8] for a large range of f'_c values.

The actual stress-strain curve of a concrete specimen is shown in Fig. 1. In an axially loaded specimen the strain ϵ'_c at which f'_c first occurs is assumed to be 0.002. For eccentric loading of a hollow rectangular section, the limiting value of extreme fibre strain can vary from $\epsilon_{cu} = 0.0022$ for a thin-flange beam to $k_2 \epsilon_{cu} = 0.0035$ at the corner of a thin-web rectangular section where k_2 is a dimensionless parameter related to the relative orientation of the rectangular compression zone at failure. The value of k_2 is therefore taken as 1.6 in this paper. The actual concrete stress strain curve can be idealised as shown in Fig. 1 where the stress increases linearly from zero to a maximum value $k_1 f'_c$ at a strain of ϵ'_c where the dimensionless parameter k_1 is the ratio of the concrete stress in a thin-wall rectangular compression member to its control

cylinder strength f'_c. The strain can then increase to any value between ϵ'_c and $k_2 \epsilon_{cu}$ while the stress remains constant at $k_1 f'_c$.

The author has previously compared the effect on the computed ultimate strength of using three quite different stress-strain relations [12]. The ultimate capacity of solid square sections having symmetrically placed reinforcement were computed for rectangular, trapezoidal and curvilinear concrete stress-strain curves and showed a maximum variation of only 10% in the theoretical failure loads for the three cases. Since the trapezoidal or elasto-plastic shape

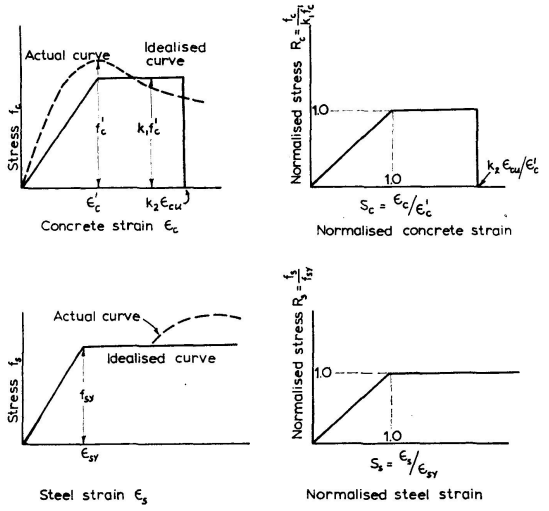


Fig. 1. Stress-strain relations of concrete and steel.

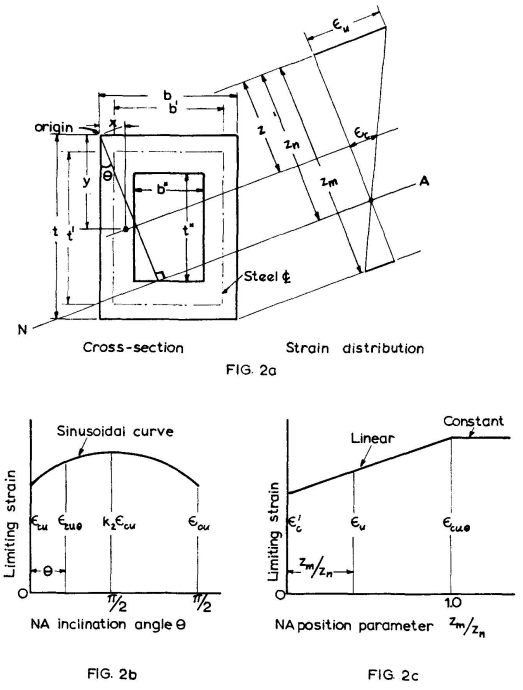


Fig. 2. Limiting values of extreme fibre strain related to inclination and position of the neutral axis.

gave results intermediate between the results of both the rectangular and the curvilinear or polynomial curves, it was adopted in the present investigation.

It was convenient to use non-dimensionalised stress-strain relations in the computational work, and the terms R_c and S_c were introduced where $R_c = f_c/k_1 f'_c$ and $S_c = \epsilon_c/\epsilon'_c$. The idealised elasto-plastic, non-dimensionalised, normalised stress-strain relation adopted for concrete is shown in Fig. 1. Similarly an idealised elasto-plastic stress-strain curve was adopted for steel with no imposed limiting value of strain. Again the ordinates were non-dimensionalised by introducing R_s and S_s where $R_s = f_s/f_{sy}$ and $S_s = \epsilon_s/\epsilon_{sy}$. The non-dimensionalised normalised stress-strain curve adopted for steel is also shown in Fig. 1.

Method of Solution by Partitioning Cross-Section

A section subjected to compression and biaxial bending fails at particular combinations of axial force P_u and bending moments about two axes. When axes through the plastic centroid are used and e_y and e_x are the eccentricities of the point of application of P_u measured perpendicular to these axes as shown in Fig. 3a, the moments at failure become $P_u e_y$ and $P_u e_x$. Solution of the problem requires the summation of stresses multiplied by the areas over which they act in the direction of the column axis and summation of the first moment of the resulting elemental forces about both axes.

Provided a member cross-section is either solid circular or hollow circular and the steel assumed uniformly distributed as a thin annulus around the section, algebraic equations can be formulated and exact solutions obtained [10, 11] even when the stress distribution is non-linear at failure. When a non-linear stress distribution is imposed on an irregular concrete cross-section having randomly placed steel, the formulation of algebraic equations becomes difficult and their solution rather tedious.

To overcome the analytical difficulties a member can be partitioned or subdivided into small discrete elemental areas. Assuming stress-strain relations for both the concrete and steel the strains and hence stresses at the centroids of the small elements can be found. The process of summing the forces acting on the small elements is ideally suited for digital computer solution which replaces the complicated integration of discontinuous functions over irregular areas. Obviously no great difficulty is imposed on computer summation when highly irregular sections are subjected to stress-strain curves of any conceivable shape.

The cross-section of a hollow rectangular multi-cell concrete member can be most simply subdivided by a rectangular grid. If the number of columns in a grid is n_{cb} and the number of rows is n_{ct} then the total number of discrete elements n_c in the hollow section shown in Fig. 3b becomes $n_c = 2\,(n_{cb} + 2\,n_{ct} - 4)$. Provided the grid lines are regularly spaced in both directions, an elemental area $\Delta A_c = \dfrac{A_c}{2\,(n_{cb} + 2\,n_{ct} - 4)}$. Denoting the elemental area at the (i, j)th position of the grid by ΔA_{cij} then the x and y co-ordinates of the centroid of the ele-

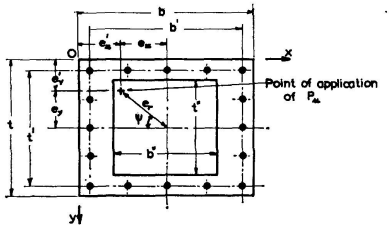


Fig. 3a. Cross-section.

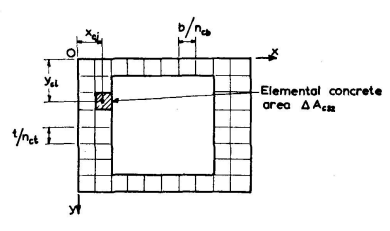


Fig. 3b. Partitioned concrete.

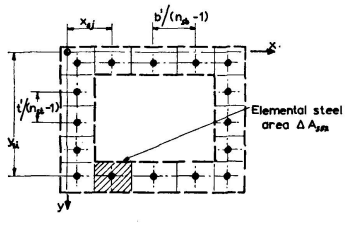


Fig. 3c. Partioned steel.

Fig. 3. Concrete and steel partitioned areas.

ment ΔA_{c32} shown in Fig. 3b measured from the origin at the top left hand corner of the section where the compressive strain is a maximum are, $x_{cj} = 1\frac{1}{2}\, b/n_{cb}$ and $y_{ci} = 2\frac{1}{2}\, t/n_{ct}$ respectively.

Similarly another rectangular grid can be used to subdivide the steel area into elemental areas ΔA_s where the element at the (i,j)th location is denoted by ΔA_{sij}. If the bars are distributed around a section as shown in Fig. 3a, such that equal quantities of steel are placed on opposite faces, then n_{sb} can represent either the number of bars or the number of steel elements assumed to represent the steel placed adjacent the top and bottom faces of a section and n_{st} can represent the steel elements adjacent the side faces. The total number of steel elements n_s in the section shown in Fig. 3c equals $2\,(n_{sb} + n_{st} - 2)$. Provided the grid lines defining the positions of the centroids of the steel elements are regularly spaced in both directions, the elemental steel area $\Delta A_s = \dfrac{A_s}{2\,(n_{sb} + n_{st} - 2)}$. The x and y co-ordinates to the centroids of the steel element ΔA_{s52} shown in Fig. 3c measured from the origin at the top left corner of the section are

$$x_{sj} = \frac{b - b'}{2} + \frac{b}{n_{sb} - 1}$$

and $y_{si} = \dfrac{t - t'}{2} + \dfrac{4\,t'}{n_{st} - 1}$ respectively. The steel elemental areas ΔA_s can be expressed in terms of steel proportion p and concrete elemental areas as:

$$\Delta A_s = \frac{A_s}{n_s} = p\,\Delta A_c \frac{n_c}{n_s}.$$

These simple relations can be used to generate the co-ordinates of the elements and the computer *DO* statement used for their incrementation.

Although a highly irregular area and its properties can be approximated by an extremely fine grid, it is preferable to use an irregularly spaced grid of coarser dimensions to exactly define the cross-section properties. An array of numbers with values equal to the relative areas of the elements can be more easily read into the computer than by *DO* statement incrementation. An array called C whose (i, j)th element is denoted by C_{ij} is included in Fig. 4 for a hollow multi-cell cross-section. In addition an array X_{cj} whose elements are the x_{cj} dimensions to the centroids of the C_{ij} elemental areas together with an array Y_{ci} whose elements fix the y_{ci} distances to the centroids of C_{ij} measured from the origin are also given in Fig. 4.

Similarly random distribution of elemental steel areas can be more easily represented by an array S whose (i,j)th element is denoted by S_{ij} and represents the relative area of the steel elements at that location. An array X_{sj} has elements which indicate the x_{sj} dimensions to the centroids of the steel elements ΔA_{sij} and an array Y_{si} gives values of y_{si} distances measured from the same origin. Since steel bars tend to be uniformly distributed around the walls in bridge pier designs, the co-ordinates of the elements are then simply incre-

mented by the *DO* statement. A typical array S for the relative areas of a regularly spaced steel grid is given in Fig. 5 together with an array C for a regularly spaced concrete grid.

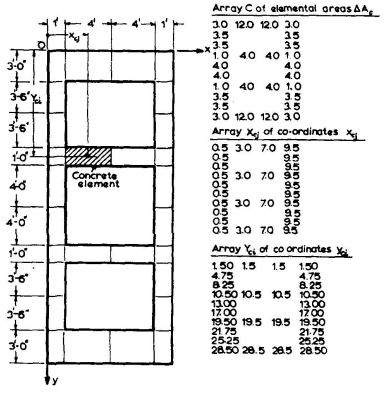


Fig. 4. Concrete section dimension arrays.

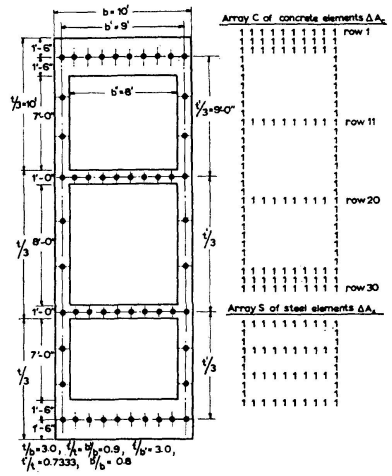


Fig. 5. Dimensions and arrays representing cross-section area.

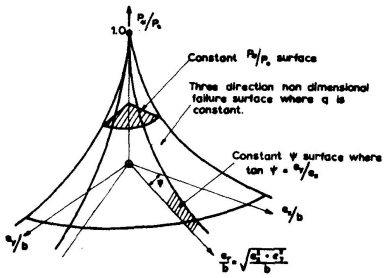


Fig. 6. Graphical representation of column failure surface.

To determine the effect of grid fineness on the ultimate capacity of solid rectangular columns in a previous paper [12], the number of concrete elements was varied from 100 to 900 with a resultant change of only 2% in the ultimate strength. In the present study a 10×10 grid size was therefore selected for the hollow rectangular sections and a 10×30 grid adopted for the triple box sections, to simplify the computation of data for multi-cell pier design charts.

Although a steel proportion of 0.08 can be used in the design of solid rectangular columns, the trend is to use fewer numbers of large diameter bars or few bundles of bars; to minimise the quantity of ligatures required to adequately support all bars in two perpendicular lateral directions. Several authors [3, 4] have published design charts for rectangular sections having 4 to 16 bars, indicating this to be an important variable affecting ultimate strength. However in bridge pier design many bars in double layers are used and a 10×10 grid was adopted to dimension the equivalent steel elemental areas in the generation of data for this paper.

It is apparent from Figs. 3 and 5 that three separate dimensions are required to fix a pier section in the x direction and three dimensions in the y direction i.e. b, b' and b'' denote the overall width, the distance between centres of steel layers adjacent the wall side faces and the inner hole width dimension and t, t' and t'' the overall depth, the distance between centres of steel layers adjacent the top and bottom faces and the total of the inner hole depth dimensions. Assuming the mean position of the steel layers in the walls is located at the mid-wall position and the wall thickness is neglegibly small compared to the pier overall dimensions, then b' can replace b and b'' and t' can replace

t and t''. This means that four variables become redundant and fewer charts need be prepared for the ultimate strength design of piers. This approximation shifts the origin shown in Figs. 2 and 3 to the mid-wall position and column collapse occurs when the concrete strain reaches some upper limiting value at the mid-wall position and not at the extreme fibre position as previously assumed. Although wall thickness has a marked effect on the ultimate force P_u it is shown in a later section that the assumption of thin-walls has little effect of the axial force ratio P_u/P_0 consequently this approximation was made in this paper. It should be noted this same approximation was made in a previous paper [10] relating to hollow circular sections and when the ratio of wall thickness to the mean wall diameter was varied from 0 to 0.2, the ultimate strength capacity changed by only 7%.

Ultimate Strength Analysis

Strain distribution

Several simplifying assumptions relating to reinforced concrete structures were adopted to assist in developing the analysis. The strain distributions remains linear up to failure, perfect bond exists between concrete and steel so that the concrete strain ϵ_c equals the steel strain ϵ_s at a particular fibre and concrete cannot sustain tensile stress.

The location of the neutral axis and its direction are fixed by the loading and section properties. Its position can be defined by some distance z_n measured perpendicular from the neutral axis direction to the position of maximum compressive strain shown as the origin in Fig. 2a and its inclination from the $0x$ axis, denoted by the angle θ. When x and y are the usual co-ordinates measured from the same origin then the distance z to an element is,

$$z = x \sin\theta + y \cos\theta. \tag{1}$$

Similarly when b is the overall width and t the overall depth of a section, the maximum value of z denoted by z_m, measured to the extreme fibre at the lower right hand corner on the section shown in Fig. 2a is,

$$z_m = b \sin\theta + t \cos\theta. \tag{2}$$

If the neutral axis is within a hollow section and parallel to a side failure is imminent in the thin rectangular compression flange when the extreme fibre strain reaches ϵ_{cu}. When the neutral axis is inclined at 45° to either wall face the resulting hollow triangular section is assumed equivalent to a thin webbed rectangular member and the extreme fibre strain increases to $k_2 \epsilon_{cu}$ at failure. Since the value of extreme fibre strain is affected by the orientation of the thin rectangular section at failure, it can be related to the angle of inclination θ of the neutral axis. Denoting the strain by ϵ_{cu} and

adopting the simple sinusoidal relation given in Fig. 2b, the value of $\epsilon_{cu\theta}$ can be obtained from the normalised equation as,

$$\frac{\epsilon_{cu\theta}}{\epsilon'_c} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon'_c}[1+(k_2-1)\sin 2\theta]. \tag{3}$$

The relative position of the neutral axis also effects the limiting value of extreme fibre strain. When pure axial stress is applied, the neutral axis is at infinity and the maximum value of strain at failure becomes ϵ'_c. When the neutral axis is inside a member section i.e. $z_m/z_n \geqq 1$, the extreme fibre strain is $\epsilon_{cu\theta}$. When the neutral axis lies between these two limits i.e. when $z_m/z_n \leqq 1$, then the final adopted value of extreme fibre strain denoted by ϵ_u is given by the simple linear relation shown in Fig. 2c, where,

$$\frac{\epsilon_u}{\epsilon'_c} = 1+\left\{\frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon'_c}[1+(k_2-1)\sin 2\theta]-1\right\}\frac{z_m}{z_n}. \tag{4}$$

From the strain distribution at failure shown in Fig. 2a the concrete strain ϵ_c at any fibre z from the origin can be expressed in terms of the limiting value ϵ_u as:

$$\epsilon_c = \epsilon_u\left(1-\frac{z}{z_n}\right). \tag{5}$$

This value can be expressed in normalised form as,

$$\frac{\epsilon_c}{\epsilon'_c} = \frac{\epsilon_u}{\epsilon'_c}\left[1-\frac{b}{z_n}\left(\frac{x}{b}\sin\theta+\frac{y}{t}\cos\theta\cdot\frac{t}{b}\right)\right]. \tag{6}$$

Similarly the normalised value of steel strain becomes,

$$\frac{\epsilon_s}{\epsilon_{sy}} = \frac{\epsilon_u}{\epsilon'_c}\frac{\epsilon'_c}{\epsilon_{sy}}\left[1-\frac{b}{z_n}\left(\frac{x}{b}\sin\theta+\frac{y}{t}\cos\theta\cdot\frac{t}{b}\right)\right]. \tag{7}$$

Expressing the strains in array notation, the concrete strain ϵ_{cij} at the centroid of an element ΔA_{cij} can be found from,

$$\frac{\epsilon_{cij}}{\epsilon'_c} = \frac{\epsilon_u}{\epsilon'_c}\left[1-\frac{b}{z_n}\left(\frac{x_{cj}}{b}\sin\theta+\frac{y_{ci}}{t}\cos\theta\cdot\frac{t}{b}\right)\right]. \tag{6a}$$

Similarly the steel strain ϵ_{sij} at the centroid of an element ΔA_{sij} can be found from,

$$\frac{\epsilon_{sij}}{\epsilon_{sy}} = \frac{\epsilon_u}{\epsilon'_c}\frac{\epsilon'_c}{\epsilon_{sy}}\left[1-\frac{b}{z_n}\left(\frac{x_{sj}}{b}\sin\theta+\frac{y_{si}}{t}\cos\theta\cdot\frac{t}{b}\right)\right]. \tag{7a}$$

Equilibrium Conditions

For equilibrium, the forces acting on elemental areas when summed over the cross-section of a member and the moments about the $0x$ and $0y$ axes; must equal P_u, $P_u e_y$ and $P_u e_x$ respectively. In all relationships a term repre-

senting the small force acting on the elemental area displaced by the steel should be included. However in a previous paper [13] it has been shown that for rectangular sections having a maximum steel ratio with $q = 1.0$, the change in the computed axial capacity caused by neglecting this small force was about 1% consequently this refinement has been ignored in the following equations.

For equilibrium, the sum of small forces acting on the steel and concrete elemental areas can be equated to P_u as,

$$P_u = \sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} f_{cij} \Delta A_{cij} + \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} f_{sij} \Delta A_{sij}.$$

For the cases where regularly spaced grids are used to partition the concrete and steel areas, the elemental areas ΔA_{cij} and ΔA_{sij} are constant over a member cross section. Then using the following expressions,

$$R_{cij} = \frac{f_{cij}}{k_1 f'_c}, \qquad R_{sij} = \frac{f_{sij}}{f_{sy}}, \qquad \Delta A_{sij} = p \Delta A_{cij} \frac{n_c}{n_s}, \qquad q' = \frac{n_c}{n_s} \frac{p f_{sy}}{k_1 f'_c}$$

one may write,

$$P_u = k_1 f'_c \Delta A_c \{ \sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} R_{cij} + q' \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} R_{sij} \}. \tag{8}$$

For the particular case when the axial force P_0 is applied the strain and stresses in the concrete and steel are uniform all over the section. Collapse occurs when the strain first reaches ϵ'_c irrespective of the steel stress and for this condition the steel stress ratio R_{sij} attains a constant value R_{s0} where,

$$R_{s0} = \frac{f_s}{f_{sy}} = \frac{\epsilon'_c}{\epsilon_{sy}} \quad \text{provided} \quad \epsilon'_c \leqq \epsilon_{sy}.$$

When $\epsilon'_c / \epsilon_{sy} \geqq 1$ the steel yields and $R_{s0} = 1.0$.

The axial force P_0 can be found from the expression,

$$P_0 = k_1 f'_c n_c \Delta A_c + f_s n_s \Delta A_s = k_1 f'_c \Delta A_c \left\{ n_c + \frac{n_s R_{s0} f_{sy} p n_c}{k_1 f'_c n_s} \right\},$$

hence

$$\frac{P_u}{P_0} = \frac{\sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} R_{cij} + q' \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} R_{sij}}{n_c + n_s R_{s0} q'} \tag{9}$$

For equilibrium, the sum of moments of the elemental forces about the $0x$ axis can be written,

$$P_u e'_y = \sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} f_{cij} \Delta A_{cij} y_{ci} + \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} f_{sij} \Delta A_{sij} y_{si}$$

$$= k_1 f'_c \Delta A_c \{ \sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} R_{cij} y_{ci} + q' \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} R_{sij} y_{si} \}.$$

Dividing by $P_u t$ one obtains

$$\frac{e'_y}{t} = \frac{\sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} R_{cij} \frac{y_{ci}}{t} + q' \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} R_{sij} \frac{y_{si}}{t}}{\sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} R_{cij} + q' \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} R_{sij}}. \tag{10}$$

Similarly for equilibrium, the sum of moments of the elemental forces about the $0y$ axis may be expressed as,

$$\begin{aligned} P_u e'_x &= \sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} f_{cij} \Delta A_{cij} x_{cj} + \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} f_{sij} \Delta A_{sij} x_{sj} \\ &= k_1 f'_c \Delta A_c \{ \sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} R_{cij} x_{cj} + q' \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} R_{sij} x_{sj} \}. \end{aligned}$$

Dividing by $P_u b$ it follows that,

$$\frac{e'_x}{b} = \frac{\sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} R_{cij} \frac{x_{cj}}{b} + q' \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} R_{sij} \frac{x_{sj}}{b}}{\sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} R_{cij} + q' \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} R_{sij}}. \tag{11}$$

Eqs. (9), (10) and (11) can now be solved by first assuming particular values for the non-dimensional material parameters $\epsilon_{sy}/\epsilon'_c$, $\epsilon_{cu}/\epsilon'_c$, and k_2 and particular cross-section parameters, t/b, t'/t, t''/t, b'/b, b''/b and q.

For the cases where irregularly spaced grids are used to partition a cross-section, the elemental areas ΔA_{cij} and ΔA_{sij} are not constant over the member area. In this case the arrays C, X_{cj}, Y_{ci}, S, X_{sj} and Y_{si} can be used to represent the cross-section dimensions and Eqs. (9), (10) and (11) can be replaced by Eqs. (9a), (10a) and (11a) where,

$$q'' = \frac{A_c}{n_s} q,$$

$$\frac{P_u}{P_0} = \frac{\sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} R_{cij} C_{ij} + q'' \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} R_{sij} S_{ij}}{\sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} C_{ij} + q'' R_{s0} \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} S_{ij}}. \tag{9a}$$

$$\frac{e'_y}{t} = \frac{\sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} R_{cij} C_{ij} \frac{Y_{ci}}{t} + q'' \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} R_{sij} S_{ij} \frac{Y_{si}}{t}}{\sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} R_{cij} C_{ij} + q'' \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} R_{sij} S_{ij}}, \tag{10a}$$

$$\frac{e'_x}{b} = \frac{\sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} R_{cij} C_{ij} \frac{X_{cj}}{b} + q'' \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} R_{sij} S_{ij} \frac{X_{sj}}{b}}{\sum_i^{n_{ct}} \sum_j^{n_{cb}} R_{cij} C_{ij} + q'' \sum_i^{n_{st}} \sum_j^{n_{sb}} R_{sij} S_{ij}}. \tag{11a}$$

It should be noted that in the above Eqs. (9a), (10a) and (11a) the elements C_{ij} are the actual concrete elemental areas whereas the elements S_{ij} are represented by numbers. When the elements S_{ij} are the actual steel elemental areas divided by p then q'' should be replaced by q in the Eqs. (9a), (10a) and (11a).

The eccentricities of loading measured from the plastic centroid are,

$$e_x = 0.5\,b - e'_x$$

and

$$e_y = 0.5\,t - e'_y,$$

and the resultant eccentricity is,

$$e_r = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$$

or in non-dimensional form becomes,

$$\frac{e_r}{b} = \sqrt{\left(0.5 - \frac{e'_x}{b}\right)^2 + \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left(0.5 - \frac{e'_y}{t}\right)^2}. \tag{12}$$

The direction of load measured from the $0x$ axis is defined by the angle ψ where,

$$\tan\psi = \frac{e_y}{e_x}$$

or

$$\psi = \tan^{-1}\left\{\frac{t}{b}\left(\frac{0.5 - \frac{e'_y}{t}}{0.5 - \frac{e'_x}{b}}\right)\right\}. \tag{13}$$

The equations derived in this section have been incorporated in a general computer program, written in Fortran IV language. The three values P_u/P_0, e_x/b and e_y/t can be determined from any chosen position and inclination of the neutral axis and a three dimensional failure surface plotted, using these values as the co-ordinate axes. Alternatively the values of P_u/P_0, ψ and e_r/b can be evaluated, from which two dimensional graphs containing failure curves can be drawn. The program has been used to study factors affecting the ultimate strength of concrete members. Often large changes in variables have little effect on the ultimate strength and approximations can be introduced, which while not unduly affecting the collapse load, lead to a great reduction in the number of charts required for a wide range of design problems.

Ultimate Strength Design

Design Charts

Owing to the large number of variables involved the theory has been presented in non-dimensional form to minimise the number of design charts required. The material properties have been expressed as ratios $\epsilon_{cu}/\epsilon'_c$, $\epsilon_{sy}/\epsilon'_c$

and as non-dimensional parameters k_1 and k_2 and in this paper, the values adopted for $\epsilon_{cu}/\epsilon'_c$, $\epsilon_{sy}/\epsilon'_c$ and k_2 are 1.1, 0.5 and 1.6 respectively. The value k_1 can be selected at will by the designer.

The variables relating to cross-section dimensions are the overall width b, hole width b'', overall depth t, total hole depth t'' and distances between side steel b' and top and bottom steel distance t'. By assuming the steel is placed along the mid-wall position and the wall thickness is small compared with the overall dimensions, the variables b, b'' and t, t'' can be replaced by b' and t' respectively, thus greatly reducing the number of variables. The design charts included in this paper only relate to the t'/b' ratio.

Two typical bridge pier sections were considered, one of rectangular hollow section and another of triple box section. The concrete cross-sections were partitioned into elemental areas by means of regularly spaced grids having n_{cb} columns and n_{ct} rows. The hollow rectangular section was partitioned by a 10×10 grid hence $n_{cb} = n_{ct} = 10$ and the triple box section partitioned by a 10×30 grid where $n_{cb} = 10$ and $n_{ct} = 30$. These grids minimised computational time while maintaining suitable accuracy and exactly subdivided the selected areas. The steel reinforcement for both cross-sections was simply partitioned by regularly spaced grids having n_{sb} columns and n_{st} rows where $n_{sb} = n_{st} = 10$. Although the axial capacity of sections subdivided by irregularly spaced grids were computed, they were only used for comparison of results obtained using regularly spaced grids and the data has not been included in the paper.

When compression and biaxial bending are applied to a multi-cell rectangular section the determination of the neutral axis position and direction is a rather tedious process. This difficulty is overcome by the reverse procedure of selecting the neutral axis position parameter z_n/b and direction angle θ and calculating the force P_u applied at eccentricities e_x and e_y, necessary to cause this particular selected position and direction of the neutral axis. By incrementing θ from 0° to 90° in 10° increments and at the same time varying z_n/b from 0.1 to 10.0 in 0.1 increments, the limiting value of extreme fibre strain ϵ_u can be found and from it the strains and stresses at the centroids of each concrete and steel element. The forces acting on elemental areas are then summed over the cross-section of the member and the moments about the $0x$ and $0y$ axes evaluated to find P_u/P_0, ψ and e_r/b. These calculations are required for particular values of steel ratio, so q was varied from 0 to 1.0 in 0.1 increments to provide sufficient data for the production of design charts.

Although these data are sufficient to produce three dimensional q constant surfaces, its accurate graphical representation is most difficult as seen from Fig. 6. This plotting difficulty can be overcome by finding the intersection lines between constant ψ vertical planes, which contain the P_u/P_0 axis and the constant q failure surfaces. These intersection lines can then be plotted on two dimension graphs for particular values of ψ. Obviously when a rectangular section is subjected to uniaxial bending about the $0x$ axis $\theta = 0°$ and $\psi = 90°$

and similarly for uniaxial bending about the $0y$ axis $\theta = 90°$ and $\psi = 0°$. For all other cases of biaxial bending, although integer values of θ are given, the computed ψ values are in general not whole numbers consequently a simple graphical interpolating procedure was adopted to obtain points for plotting the q constant lines required for integer values of ψ. In this paper two dimensional graphs are included for several cross-sections with $\psi = 0°$, 30°, 60° and 90° in Figs. 11a to 14c.

Effect of Variables on Strength

For simplicity of presentation, the effect of variables on the ultimate strength of a hollow square section having equal quantities of steel uniformly distributed around the mid-wall position will be examined. The dimension ratios of this section are $t/b = 1.0$, $t'/t = b'/b = 0.9$, $t''/t = b''/b = 0.8$ and both values of $q = 0$ and 1.0 will be compared for values of $\psi = 0°$, 45° and 90°.

Effect of Grid Size

The graphs presented in this paper for hollow square sections are based on a grid size where $n_{cb} = n_{ct} = n_{sb} = n_{st} = 10$. Another computer run was made using $n_{cb} = n_{ct} = 30$ and the comparison of varying n_{cb} and n_{ct} by 200% is shown in Fig. 7 resulting in a maximum variation of about 5% in the non-dimensionalised column capacity P_u/P_0. Obviously increasing the fineness of the concrete partitioning beyond a 10×10 grid has little effect on P_u/P_0 consequently this size was adopted for partitioning hollow rectangular sections.

In bridge piers it is usual to have equal quantities of steel adjacent to the four wall faces in hollow rectangular sections hence $n_{sb} = n_{st}$. Since many reinforcing bars are often used, these quantities of steel can be assumed uniformly distributed along their respective faces and in this paper $n_{sb} = n_{st} = 10$ has been adopted for computation of data for all pier sections examined. For comparison purposes additional data was computed with $n_{sb} = n_{st} = 30$ and plotted in Fig. 7. It can be seen that a 200% increase in steel grid fineness produced a maximum change of about 5% in the column strength ratio P_u/P_0 and 10×10 grids were considered sufficiently accurate for partitioning the steel area.

Effect of Ratio $\epsilon_{cu}/\epsilon'_c$ and k_2

Although the values adopted for ϵ_{cu} and ϵ'_c were 0.0022 and 0.002, only the ratio $\epsilon_{cu}/\epsilon'_c = 1.1$ was used in the production of data for the charts presented in this paper. The value of $\epsilon_{cu}/\epsilon'_c$ was increased by 200% to 3.3 and the case of uniaxial bending, when k_2 has no effect on column strength, was examined. The data plotted in Fig. 8a shows a maximum change in P_u/P_0 of about 10% indicating that the ratio $\epsilon_{cu}/\epsilon'_c$ has little effect on the strength capacity.

The parameter k_2 has its greatest effect on column strength when $\psi = 45°$ therefore a symmetrically reinforced hollow square section subjected to

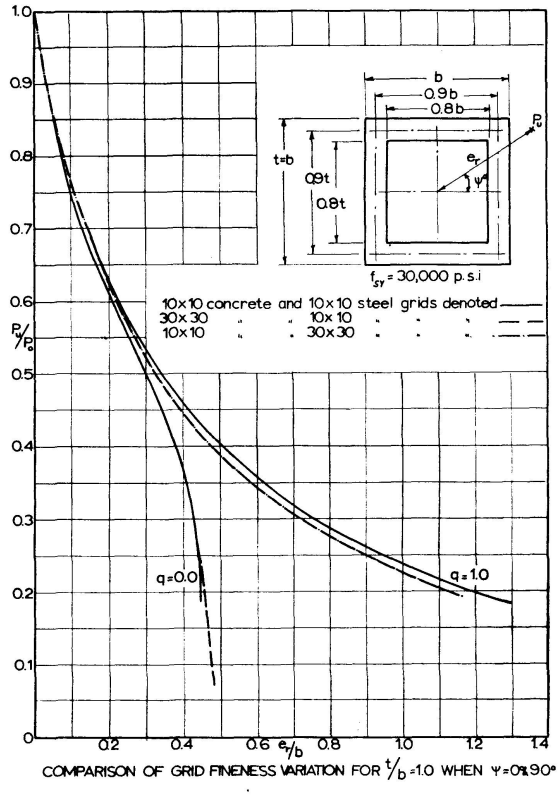


Fig. 7.

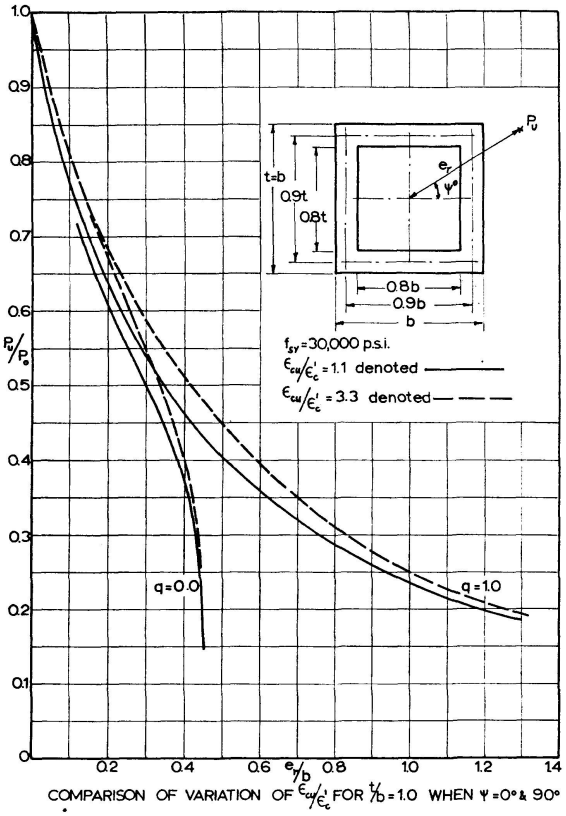


Fig. 8a.

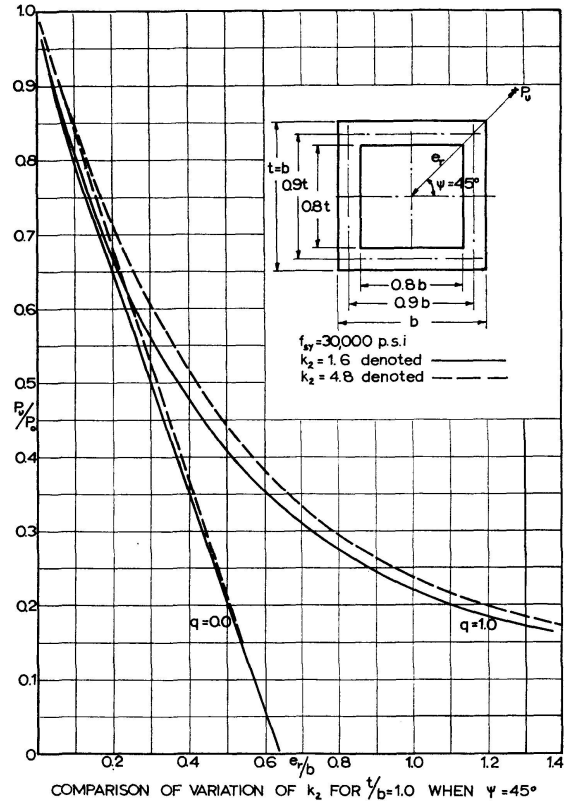


Fig. 8b.

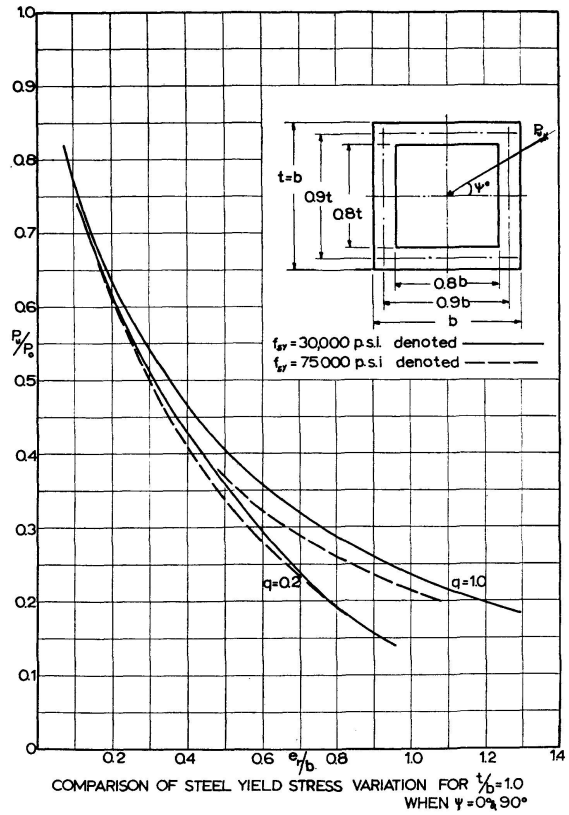


Fig. 9.

bending about a diagonal was examined. The value of k_2 was increased by 200% from its value of 1.6 adopted in this paper to 4.8 and the data plotted in Fig. 8b for comparison purposes. This variation of k_2 changed P_u/P_0 by about 9% hence a change of the parameter k_2 apparently has small effect on column strength.

Effect of Ratio $\epsilon_{sy}/\epsilon'_c$

The yield stress f_{sy} of commercially available reinforcing steels varies from about 30,000 to 75,000 psi and when the steel modulus of elasticity is 30×10^6 psi, the yield strain ϵ_{sy} changes from 0.001 to 0.0025 respectively. To determine the effect on column strength when ϵ_{sy} was varied from 0.001 to 0.0025 a symmetrical square column was examined. The effect on ultimate strength of changing $\epsilon_{sy}/\epsilon'_c$ by 150% can be seen in Fig. 9 where the results of both steels having steel ratios of $q=0.2$ and 1.0 are plotted for comparison purposes. For the high steel ratio of $q=1.0$, the maximum variation of the strength ratio P_u/P_0 was about 9% and for $q=0.2$, only 5% variation occurred in P_u/P_0. Obviously $q=0$ indicates that no reinforcement is used and variation of ϵ_{sy} cannot effect the column strength ratio. Bridge piers often contain low steel proportions where q is generally less than 0.2, and variation in the strain ratio $\epsilon_{sy}/\epsilon'_c$ has neglegible effect on P_u/P_0 for most cases. This means that the charts included in this paper for mild steel can be used without appreciable error for the ultimate strength design of columns when any strength commercially available reinforcing bars are contemplated. It should be noted that although the strength ratio P_u/P_0 is not greatly affected by change in the strain ratio $\epsilon_{sy}/\epsilon'_c$, the steel yield strain ϵ_{sy} or its related stress f_{sy} directly effects the value of P_0 since $P_0 = k_1 f'_c A_c + f_{sy} A_s$ consequently the ultimate strength P_u is directly related to the steel yield stress f_{sy}.

Effect of Wall Thickness

If the wall thickness is small compared with the cross-section dimensions and if the steel is located along the mid-wall position then it was believed possible to replace b and b'' with b' and t and t'' with t' without undue loss of accuracy of the computed axial capacity. To examine the possibility of making b, b'', t and t'' redundant and so greatly reducing the number of required design graphs, both a hollow square and a thin-wall triple box section were examined where the side wall thickness was either zero or $0.1\,b$ and the transverse wall thickness was either zero or $0.1\,t$.

The data for a square section column are plotted on Fig. 10a for values of $q=0$ and 1.0, where it can be seen that for a steel ratio $q=1$, the maximum variation of the ratio P_u/P_0 is about 12%. When no steel is used or $q=0$ and for an e_r/b value 0.4 i.e. when tensile cracking is about to commence in the column section, the variation of P_u/P_0 is about 24%. However non-reinforced concrete columns subjected to possible tensile stress should be rare, conse-

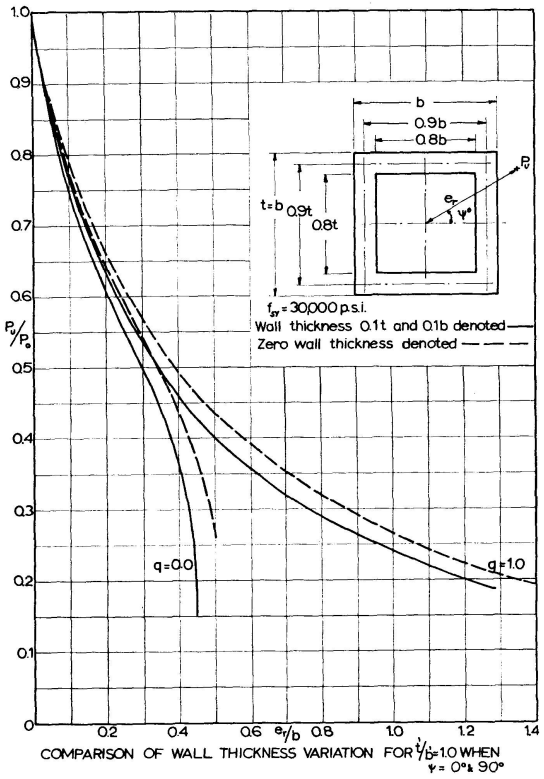


Fig. 10a.

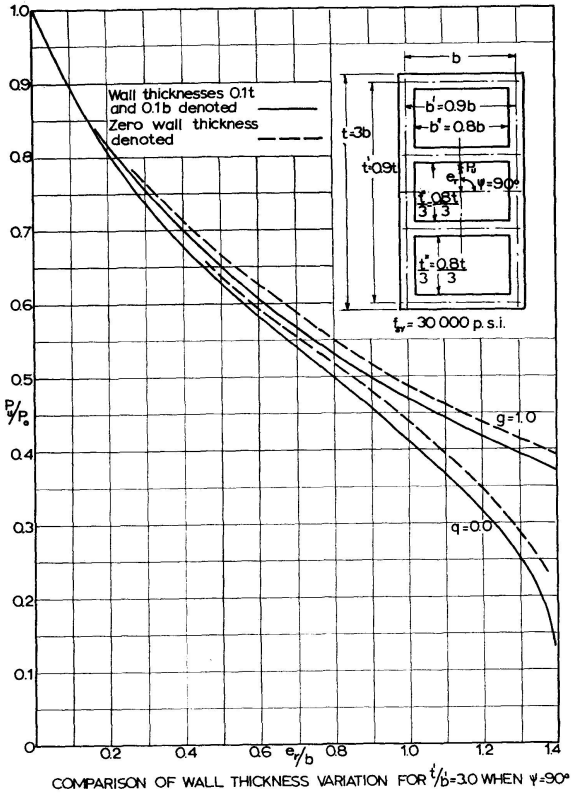


Fig. 10b.

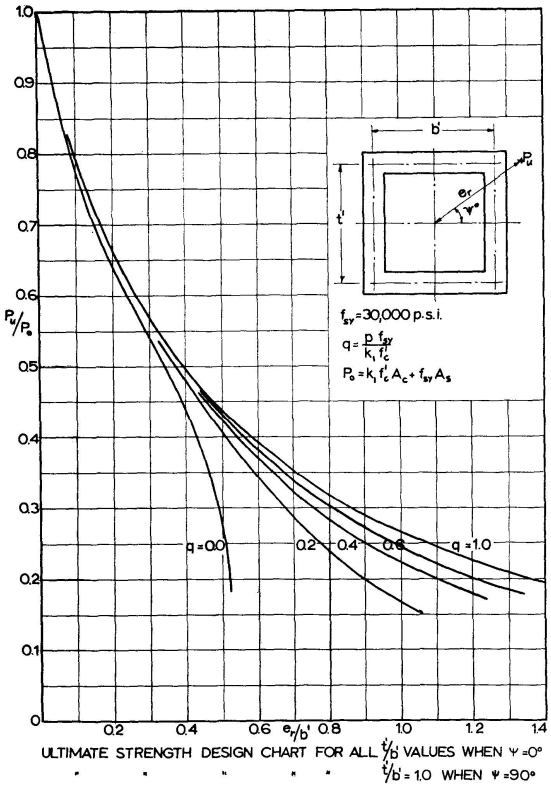


Fig. 11a.

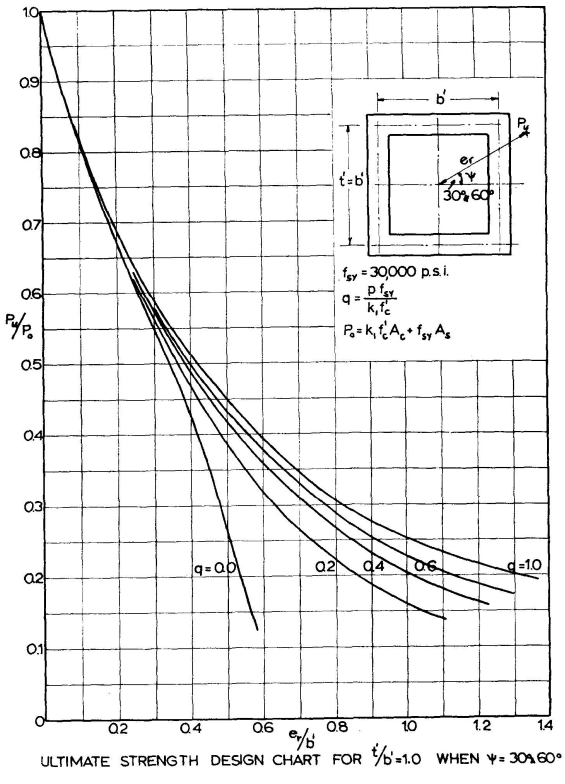


Fig. 11b.

quently the assumption of zero wall thickness will in most cases give reasonable estimation of the strength capacity ratio P_u/P_0.

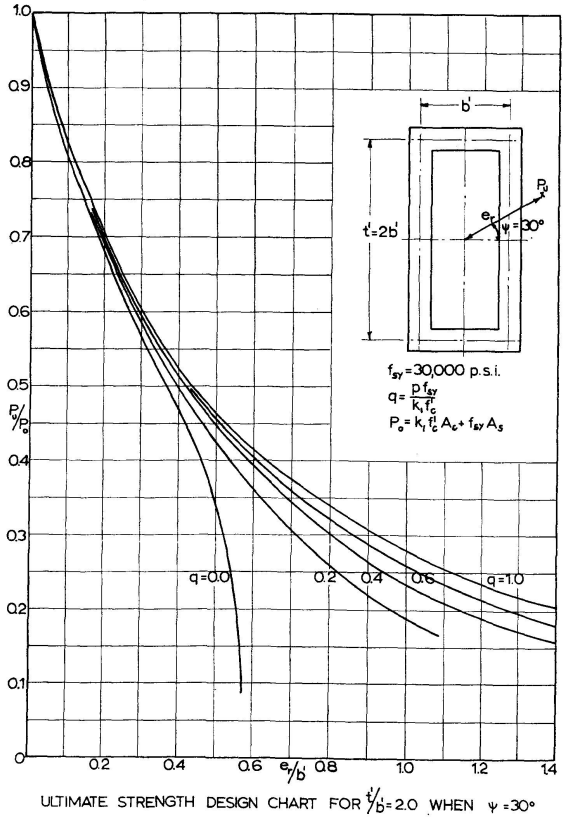
The results for the thin-wall triple box section examined are included on Fig. 10b where it can be seen that for $q=0$ and 1.0 the maximum variation in the ratio P_u/P_0 was by about 15% and 4% respectively as the wall thickness changed from $0.1t$ and $0.1b$ to zero. The author believes the accuracy of predicting the ultimate capacity ratio P_u/P_0 of thin walled sections is therefore sufficient when the walls are assumed to have zero thickness.

It should be noted, however, that although the walls are assumed to have zero thickness for the computation of the ratio P_u/P_0, the wall thickness directly effects the value of P_0 which equals $k_1 f'_c A_c + f_{sy} A_s$ since the area of concrete A_c is related to the wall thickness. Obviously the ultimate strength of a column P_u is directly related to the wall thickness.

Design Examples

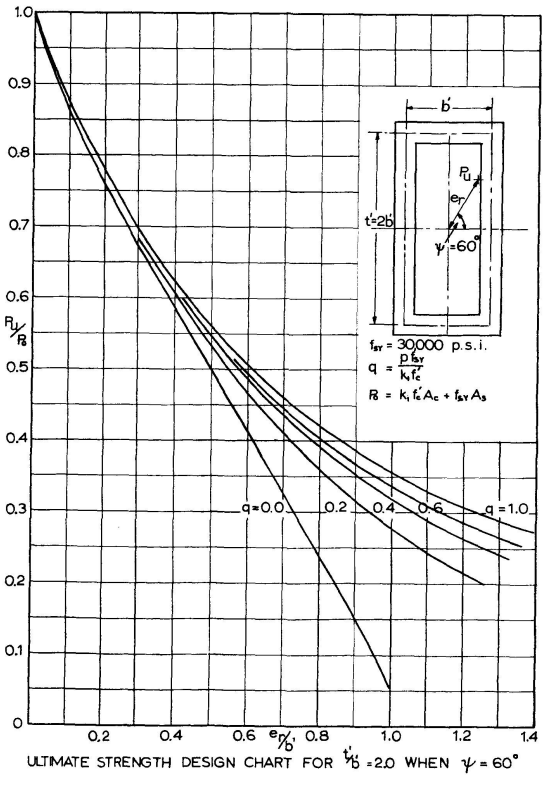
Example 1

Design a hollow rectangular symmetrically reinforced bridge pier to support a longitudinal force $P_u = 12{,}000$ kips at eccentricities of $e_x = 10\sqrt{3}$ in. and $e_y = 10$ in. when the effective concrete strength $k_1 f'_c = 3{,}000$ psi and mild steel with yield stress $f_{sy} = 30{,}000$ psi are used.



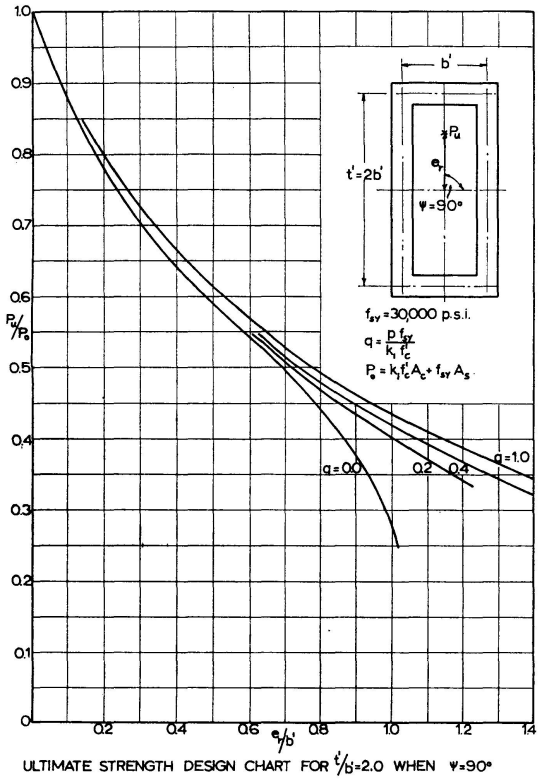
ULTIMATE STRENGTH DESIGN CHART FOR $t'/b' = 2.0$ WHEN $\psi = 30°$

Fig. 12a.



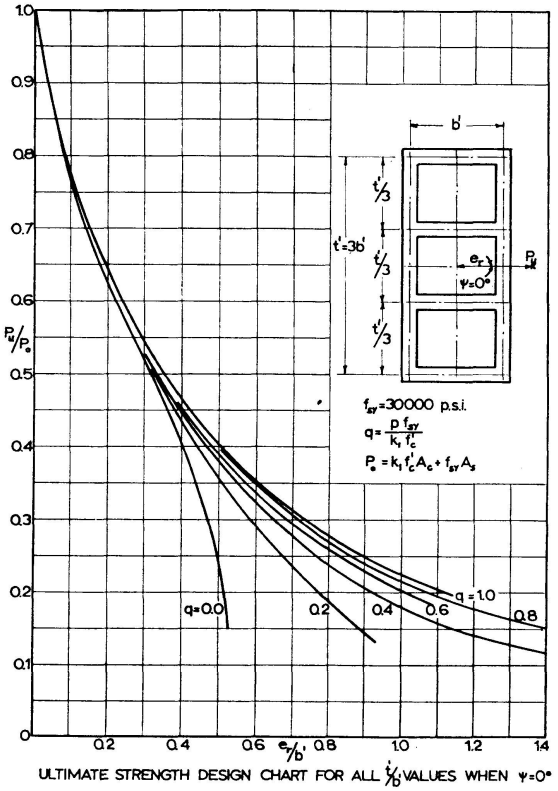
ULTIMATE STRENGTH DESIGN CHART FOR $t'/b' = 2.0$ WHEN $\psi = 60°$

Fig. 12b.



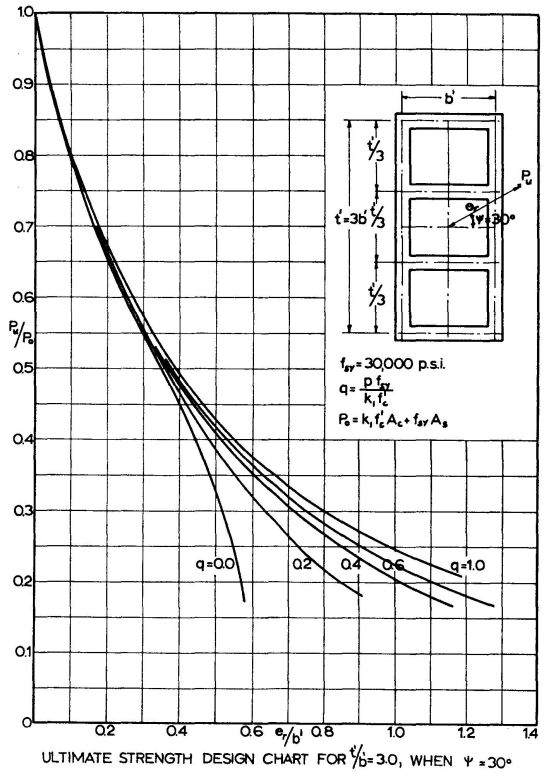
ULTIMATE STRENGTH DESIGN CHART FOR t'/b=2.0 WHEN ψ=90°

Fig. 12c.



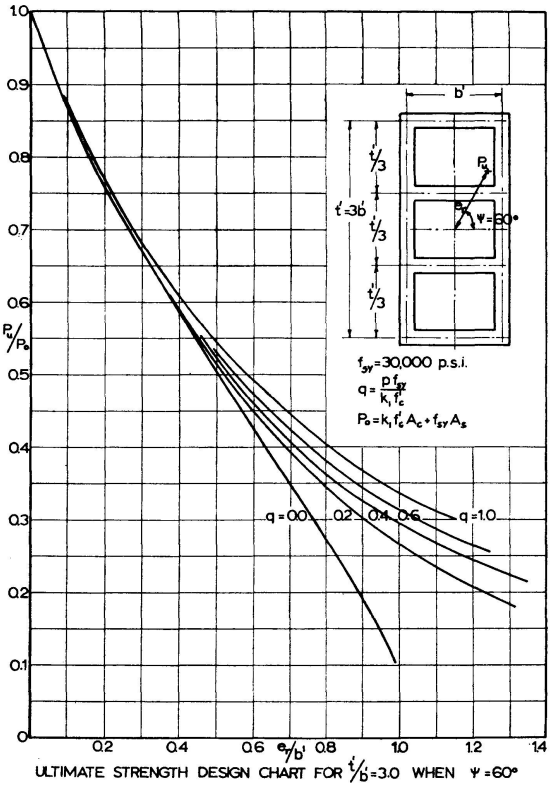
ULTIMATE STRENGTH DESIGN CHART FOR ALL t'/b VALUES WHEN ψ=0°

Fig. 13a.



ULTIMATE STRENGTH DESIGN CHART FOR t'/b=3.0, WHEN ψ=30°

Fig. 13b.



ULTIMATE STRENGTH DESIGN CHART FOR t'/b=3.0 WHEN ψ=60°

Fig. 13c.

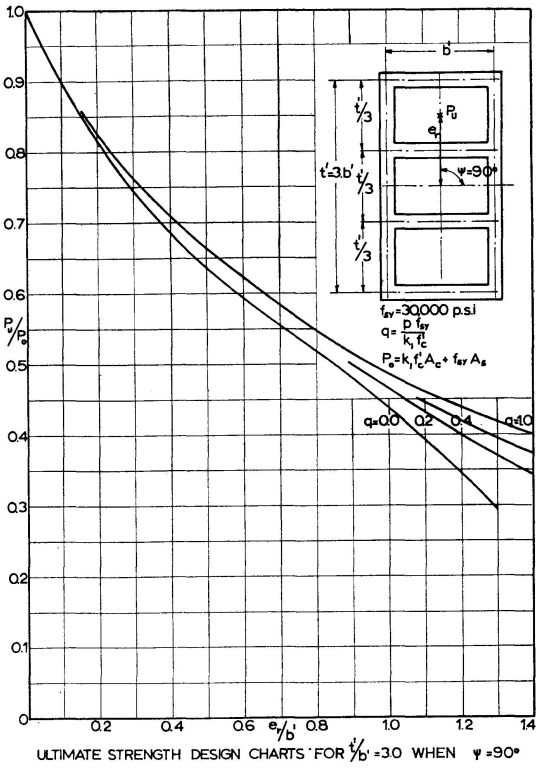


Fig. 13d.

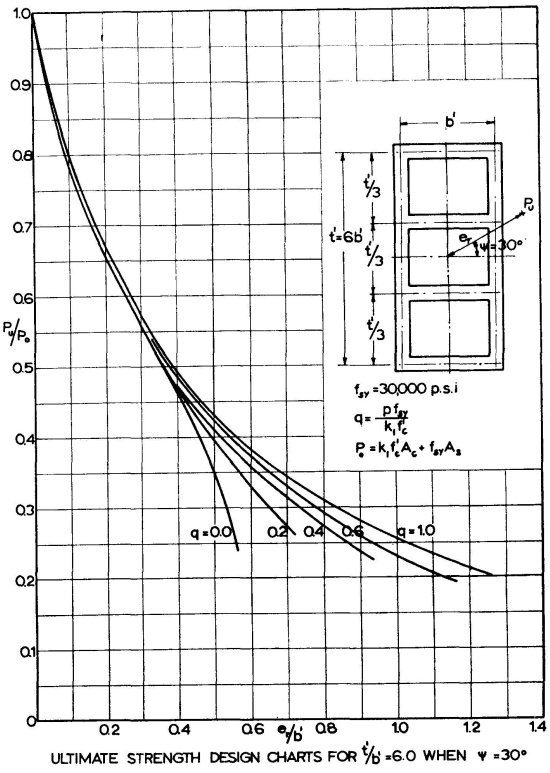


Fig. 14a.

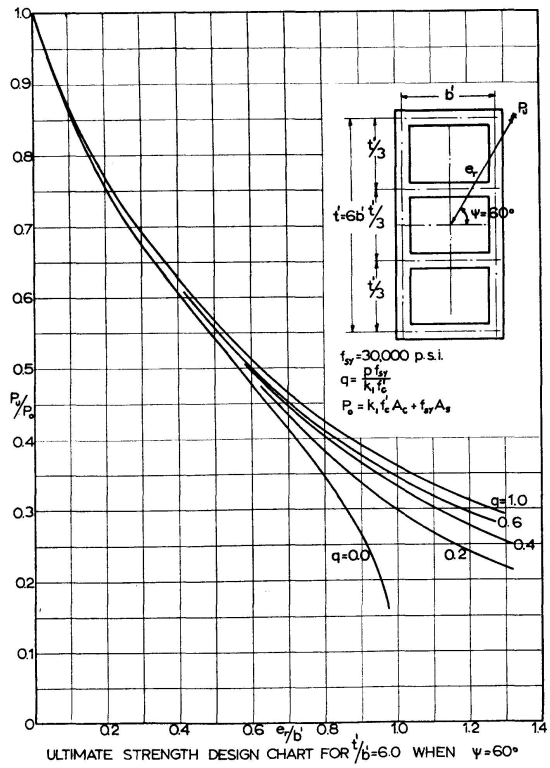


Fig. 14b.

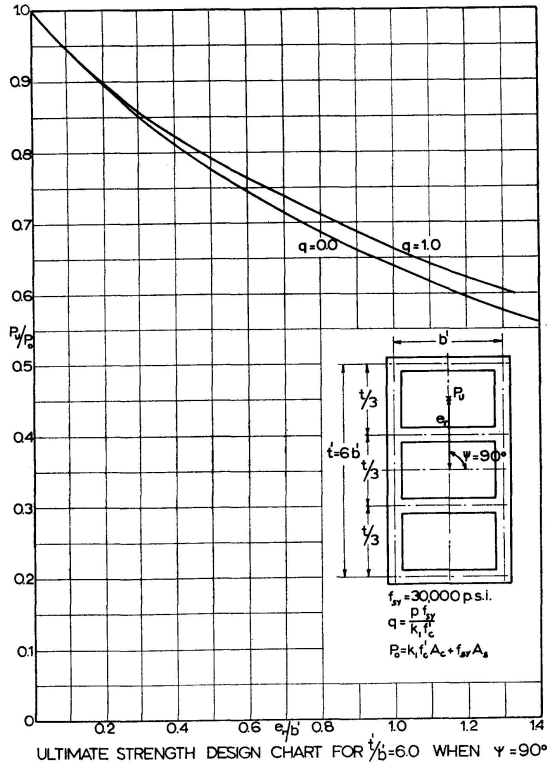


Fig. 14c.

Assuming an average concrete stress of 2,000 psi, a steel proportion of about 0.002, a wall thickness of 10″, a mid-wall position dimension ratio $t'/b' = 2$, then a pier having approximate dimensions 10 ft. × 20 ft. may suffice. When $b = 110$ in., $t = 210$ in., $b' = 100$ in., $t' = 200$ in., $b'' = 90$ in. and $t'' = 190$ in. then $A_c = 6000\,\text{in}^2$ and $A_s = 12\,\text{in}^2$. Using 2 layers of one gauge mesh at 6 in centres having $0.283\,\text{in}^2$ of steel per foot length of wall, then the total $A_s = 14.1\,\text{in}^2$. When placing one steel layer adjacent to the inner and outer faces of all walls so that the mean steel position is along the mid-wall line, then $t'/b' = 2$. Now $e_r = 20$ in., $\psi = 30°$, $e_r/b' = 0.2$ and $q = 0.02$, then from the related graph Fig. 12a, $P_u/P_0 = 0.68$.

Now $$P_0 = 3000 \times 6000 + 14.1 \times 30{,}000 = 18{,}420 \text{ kips},$$

$$\therefore\ P_u = 0.68 \times 18{,}420 \text{ kips} = 12{,}500 \approx 12{,}000 \text{ kips}.$$

Example 2

Design a multi-cell rectangular reinforced concrete bridge pier having two internal diaphrams to support a longitudinal force $P_u = 20{,}000$ kips placed at eccentricities of $e_x = 50$ in. and $e_y = 50\sqrt{3}$ in. when the effective concrete strength $k_1 f'_c$ and the steel yield stress f_{sy} are 3,000 and 30,000 psi respectively.

Assuming an average concrete stress of 1000 psi a steel proportion of about 0.002, a wall thickness of 10 in., a mid-wall dimension ratio $t'/b' = 3$, then try a pier of 10 ft. × 30 ft. mean dimensions. When $b = 130$ in., $t = 370$ in., $b' = 120$ in., $t' = 360$ in., $b'' = 110$ in., $t'' = 330$ in. then $A_c = 11{,}700\,\text{in}^2$ and $A_s = 23.4\,\text{in}^2$. Now 2 layers of 2 gauge mesh at 6 in. centres has $0.2392\,\text{in}^2$ of steel per foot run of wall, then the total $A_s = 23.9\,\text{in}^2$. Provided the mean steel position is placed along the mid wall line then $t'/b' = 3.0$. As $e_r = 100$ in., $\psi = 60°$, $e_r/b' = 0.833$ and $q = 0.02$, then from the related graph Fig. 13c, $P_u/P_0 = 0.26$.

Now $$P_0 = 11700 \times 3{,}000 + 23.9 \times 30{,}000 = 35{,}815 \text{ kips},$$

$$\therefore\ P_u = 0.26 \times 35{,}815 = 9300 \approx 9{,}000 \text{ kips}.$$

Hence the selected sections in both examples are satisfactory.

Conclusions

The method presented for the ultimate strength design of sections subjected to compression and biaxial bending is arranged for computer solution. The method is based on partitioning a member cross-section into many discrete elemental areas to simplify the complications induced by various non-linear stress distributions at failure acting over any non-symmetrical area. The tedious integrations with many discontinuities and awkward limits are thus eliminated by the partitioning process and the use of a computer to sum the actions.

Although any possible non-linear stress distribution can be accomodated, the method is also useful for elastic stress design of the most complicated cross-sections. Since ultimate strength methods are not generally permitted by the design codes, the method presented has immediate use for working stress design of multi-cell bridge piers subjected to tensile stresses over part of the cross-section. A simpler program for the generation of data has been run for the publication of working stress design curves at a later date.

The criterion for failure in this analysis is the limiting value of extreme fibre strain and once concrete reaches this value failure is assumed imminent. Other factors affecting material properties such as insufficient compaction of concrete in the finished structure, poor workmanship, lateral buckling of the longitudinal reinforcement, etc., have been ignored. Until such time as this theory is supported by test results of reasonably sized hollow test specimens it would be prudent to either increase the load factors or to reduce the computed ultimate capacity by means of a suitable strength reduction factor [6].

Acknowledgements

This work was carried out in the Department of Structures at the University of New South Wales and is part of a study undertaken by Dr. R. F. Warner and the author. Mr. M. Taylor of the Structures Laboratory assisted both with the preparation of programmes and the production of the design graphs. The computer programme was executed on the IBM system 360-50 computer in the School of Electical Engineering of this University.

References

1. Bresler, B.: Design criteria for reinforced columns under axial load and biaxial bending. J. A. C. I., Vol. 32 No. 5, Nov. 1960, pp. 481—490 (Proc. A. C. I. Vol. 57).
2. Meek, J. L.: Ultimate strength of columns with biaxial eccentric loads. J. A. C. I. No. 8, Aug. 1963, pp. 1053—1064 (Proc. A. C. I. Vol. 60).
3. Pannell, F. N.: Design charts for members subjected to biaxial bending and thrust. Concrete Publications Ltd., 1966, 51 p.
4. Weber, D. C.: Ultimate strength design charts for columns with biaxial bending. J. A. C. I. No. 11, Nov. 1966, pp. 1205—1230 (Proc. A. C. I. Vol. 63).
5. Seddon, A. E.: The strength of concrete walls under axial and eccentric loads. Symposium on the strength of concrete structures, London, May 1956, pp. 445—486.
6. American Concrete Institute: Building code requirements for reinforced concrete. A. C. I. 318—363, 1965, 144 p.
7. Standards Association of Australia. S. A. A code for concrete in buildings. CA 2—1963, 137 p.
8. American Concrete Institute and Cement and Concrete Association: Recommendations for an international code of practice for reinforced concrete. A. C. I. 1965, 156 p.
9. Rüsch, H.: Researches towards a general flexural theory for structural concrete. J. A. C. I. Vol. 32, No. 1, July 1960, pp. 1—28 (Proc. A. C. I. Vol. 57).

10. WARNER, R. F. and BRETTLE, H. J.: Ultimate strength design of thin-wall circular bridge piers. Publications of the International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 27, 1967, Zurich.
11. BRETTLE, H. J. and WARNER, R. F.: Theory for the ultimate strength design of hollow circular concrete sections. Symposium on concrete structures, Institution of Engineers Aust., Sydney, 1967, pp. 109—115.
12. WARNER, R. F. and BRETTLE, H. J.: Strength of reinforced concrete in biaxial bending and compression. University of New South Wales, Dept. of Civ. Eng. UNICIV Report No. R-24, Nov. 1967.
13. BRETTLE, H. J. and WARNER, R. F.: Ultimate strength design of rectangular reinforced concrete sections in compression and biaxial bending. Civ. Engg. Trans. I. E. Aust., Vol. CE 10, No. 1, April 1968.

Summary

Theory is presented for the ultimate strength design of thin-wall, multicell, rectangular reinforced concrete bridge piers when subjected to compression and biaxial bending. The analysis is based on sub-dividing a pier cross-section into many discrete parts and summing the forces acting on these elemental areas by means of a computer. Data were generated for the preparation of charts for the ultimate strength design of both hollow rectangular and triple box sections. Design charts for two different width to depth ratios are included for the simplification of the design procedure.

Résumé

On présente ici une théorie pour le calcul à la résistance limite de piles de ponts de section rectangulaire, multicellulaire, à parois minces en béton armé, soumises à la compression et à la flexion biaxiale. Le calcul, fait à l'aide d'un ordinateur, consiste en une sous-division de la section de la pile en nombreuses parties distinctes et en une addition des forces agissant sur ces éléments de surface. Des données ont été travaillées pour la préparation de graphiques pour le calcul de la résistance limite de sections creuses et de sections tricellulaires. On a inclus pour une simplification du dimensionnement des graphiques avec deux valeurs différentes du rapport largeur sur profandeur.

Zusammenfassung

Für den Fall «Druck mit zweiaxialer Biegung» wird das Traglastverfahren für dünnwandige, mehrzellige sowie rechteckige Eisenbeton-Brückenpfeiler angegeben. Das Verfahren unterteilt den Brückenquerschnitt in viele endliche Teile und summiert deren Kräfte mittels des Elektronenrechners. Ergebnisse wurden in Vorbereitung von Kurven für den hohlen und dreikastigen Querschnitt entwickelt. Zur Vereinfachung der Bemessung sind Kurven für zwei verschiedene Breiten- und Tiefenverhältnisse angegeben.

Beitrag zur Berechnung von zusammengesetzten Zylinder-, Kegel- und Kugelschalen für den Silo-, Behälter- und Turmbau

Contribution to the Design of Cylindrical, Conical and Spherical Built-up Shells for the Construction of Silos, Tanks and Towers

Contribution au calcul de coques composées cylindriques côniques sphériques pour la construction de silos, de réservoirs et de tours.

E. HAMPE
Prof. Dr.-Ing. habil.

H. KÖPPLER
Dr.-Ing.

P. SCHWESINGER
Dipl.-Ing.

Institut für Stahlbeton und Spannbeton
Hochschule für Architektur und Bauwesen, Weimar, DDR

1. Einleitung

Rotationssymmetrische Flächentragwerke finden auf den Gebieten des Behälterbaues, des Silobaues, des Turm- und Schornsteinbaues umfangreiche Anwendungen. Dabei werden diese Schalenformen sehr oft miteinander kombiniert verwendet. So z.B. bei Verwendung von Zylinder- und Kegelschalen für die Ausbildung von Turmfundamenten, für Wassertürme usw.

Die Berechnung des Schnittkraftzustandes solcher kombinierter Schalentragwerke ist im allgemeinen ohne grundsätzliche Schwierigkeiten durchzuführen.

Jedoch ist der Rechenaufwand vor allem für die Beurteilung hinsichtlich einer statisch oder ökonomisch optimalen Ausbildung im allgemeinen noch recht erheblich.

Die Aufgabe des vorliegenden Beitrages soll es sein, für die Berechnung einfacher Kombinationen von Zylinder-, Kegel- und Kugelschale einige Rechenhilfsmittel bereitzustellen, mit denen die Ermittlung der Übergangsschnittkräfte zwischen den einzelnen Schalenformen in einer einfachen Form möglich wird.

Dabei werden die in [1] bereitgestellten Berechnungsgrundlagen verwendet. Die untersuchten Kombinationen können auch als statisch unbestimmte

Hauptsysteme für mehrfach zusammengeschlossene rotationssymmetrische Schalen verwendet werden.

Für die nachfolgenden Untersuchungen gelten folgende Bezeichnungen:

h_Z = Wanddicke des Zylinders

h_{Ke} = Wanddicke des Kegels

h_{Ku} = Wanddicke der Kugel

$$\lambda_h = \frac{h_{Ke}}{h_Z} \text{ bzw. } \frac{h_{Ku}}{h_Z}$$

$$B_Z = \frac{E\,h_Z^3}{12\,(1-\mu^2)} \quad \text{(Biegesteifigkeit des Zylinders)}$$

$$k_Z = \frac{\sqrt[4]{3\,(1-\mu^2)}}{\sqrt{a\,h_Z}}$$

$$B_{Ke} = \frac{E\,h_{Ke}^3}{12\,(1-\mu^2)} \quad \text{(Biegesteifigkeit des Kegels)}$$

$$k_{Ke} = k_Z \sqrt{\frac{\sin \alpha_0}{\lambda_h}}$$

$$B_{Ku} = \frac{E\,h_{Ku}^3}{12\,(1-\mu^2)} \quad \text{(Biegesteifigkeit der Kugel)}$$

$$k_{Ku} = k_Z \sqrt{\frac{\sin \psi_0}{\lambda_h}}$$

F- und G-Werte werden aus [1], Band 4, entnommen.

2. Berechnung der Übergangsschnittkräfte zwischen den einzelnen Schalenformen

Zur Berechnung der Übergangsschnittkräfte von zusammengesetzten Schalentragwerken stehen mit dem Kraftgrößenverfahren, dem Formänderungsverfahren und den iterativen Methoden mehrere Möglichkeiten zur Verfügung. Ausführliche Darlegungen zu diesen Möglichkeiten finden sich z.B. in [1], Band 4.

Bei der hier vorliegenden Kombination von jeweils 2 verschiedenen Schalen ist die Anwendung der Kraftgrößenmethode im allgemeinen am sinnvollsten. Diese Methode wird demnach hier auch zur Ermittlung der Übergangsschnittkräfte verwendet.

Die Durchführung der Untersuchungen wird an der Kombination Zylinderschale — Kugelschale erläutert, für die anderen Schalenkombinationen werden nur die Ergebnisse angegeben; die Berechnung erfolgte analog.

Die Berechnungsgrundlagen sind für hohe und flache Kugelschalen verschieden. Die Lösungen für die hohe Kugelschale lassen sich in Abhängigkeit von trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen angeben, die für flache

Kugelschalen in Abhängigkeit von BESSELschen Funktionen. Der Einfachheit halber verwenden wir hier für die Ableitung der Bestimmungsgleichungen zur Berechnung der Überzähligen den Formalismus der hohen Kugelschale.

In den Zusammenstellungen werden auch die Ergebnisse für die flache Kugelschale in Abhängigkeit von den in [1] verwendeten BESSELschen Funktionen angegeben.

Für die Berechnung der Kombination aus Zylinderschale und hoher Kugelschale führen wir nach Fig. 1 ein statisch bestimmtes Hauptsystem ein, in dem die Überzählige X_1 als die Randquerkraft, die Überzählige X_2 als das Randmoment an der Zylinderschale bzw. an der Kugelschale definiert sind.

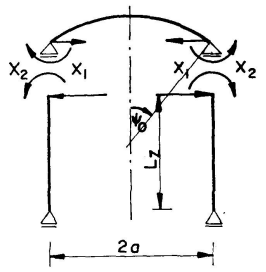


Fig. 1. Statisch bestimmtes Hauptsystem mit den Übergangsschnittkräften X_1 und X_2.

Die Bedingungsgleichungen zur Berechnung der beiden Überzähligen gewinnen wir aus der Forderung, daß die Verformungen der beiden Schalenränder im statisch bestimmten Hauptsystem unter der Wirkung der Belastungen und der beiden Überzähligen miteinander verträglich sein müssen.

Die gegenseitigen Formänderungen zwischen der Zylinderschale und der Kugelschale ergeben sich am statisch bestimmten Hauptsystem wie folgt:

Aus der Wirkung der Belastung (z.B. Eigengewicht):

Gegenseitige Verschiebung:

$$\delta_{10} = -\frac{g_{Ku}}{4 B_Z k_Z^4} \frac{1}{\lambda_h \sin\psi_0 (1+\cos\psi_0)} \left(1 - \cos\psi_0 - \cos^2\psi_0 + 2 a k_Z \cos\psi_0 \frac{\sqrt{\lambda_h \sin\psi_0}}{\lambda_h} R_1 + \mu\right) + \frac{g_{Ku}}{4 B_Z k_Z^4} \frac{\mu}{1+\cos\psi_0},$$

Gegenseitige Verdrehung:

$$\delta_{20} = \frac{g_{Ku}}{4 B_Z k_Z^4 a} \frac{2}{\lambda_h} \left[1 + \frac{a^2 k_Z^2 \cot\psi_0}{\lambda_h (1+\cos\psi_0)} R_2 + \frac{\mu}{2}\right] - \frac{g_Z}{4 B_Z k_Z^4 a}.$$

Aus der Wirkung der Überzähligen $X_1 = 1{,}0$ [Mp/m]:

Gegenseitige Verschiebung:

$$\delta_{11} = \frac{1}{2 B_Z k_Z^3} \left(\frac{F_4}{F_1} + \frac{\sqrt{\lambda_h \sin\psi_0}}{\lambda_h^2}\right).$$

Gegenseitige Verdrehung:

$$\delta_{12} = \frac{1}{2 B_Z k_Z^2} \left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{1}{\lambda_h^2}\right).$$

Aus der Wirkung der Überzähligen $X_2 = 1{,}0$ [Mpm/m]:

Gegenseitige Verschiebung:

$$\delta_{21} = \frac{1}{2 B_Z k_Z^2}\left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{1}{\lambda_h^2}\right).$$

Gegenseitige Verdrehung:

$$\delta_{22} = \frac{1}{B_Z k_Z}\left(\frac{F_3}{F_1} + \frac{1}{\lambda_h^2 \sqrt{\lambda_h \sin\psi_0}}\right).$$

Insgesamt ergeben sich die gegenseitigen Formänderungen zwischen Zylinderschale und Kugelschale zu

$$\begin{aligned} &\text{Gegenseitige Verschiebung } \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12}. \\ &\text{Gegenseitige Verdrehung } \quad \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22}. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Erfüllung der Verträglichkeitsbedingung erfordert, daß die gegenseitigen Formänderungen Null sind. Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

X_1	X_2	
δ_{11}	δ_{12}	$-\delta_{10}$
δ_{21}	δ_{22}	$-\delta_{20}$

Die Lösungen dieser Bedingungsgleichungen geben wir in nachstehender allgemeiner Form an

$$\begin{aligned} X_1 &= \beta_{11}\delta_{10} + \beta_{12}\delta_{20}, \\ X_2 &= \beta_{21}\delta_{10} + \beta_{22}\delta_{20}. \end{aligned} \tag{2}$$

Die in dieser allgemeinen Form verwendeten β-Werte sind für die einzelnen Schalenkombinationen wie folgt einheitlich anzugeben:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= -2 B_Z k_Z^3 \Phi_{11}, \\ \beta_{12} = \beta_{21} &= B^z k_Z^2 \Phi_{12}, \\ \beta_{22} &= -B_Z k_Z \Phi_{22}. \end{aligned} \tag{3}$$

Zur Berechnung der Φ-Werte sind in Tafel 1 die für die einzelnen Schalenformen anzuwendenden Formeln angegeben. Ein Auszug aus der umfangreichen numerischen Auswertung dieser Beziehungen wird in Tafel 2 angegeben.

Damit ist die Berechnung der β-Werte für alle hier angegebenen Schalenformen möglich.

Die Berechnung der Belastungsglieder δ_{10} und δ_{20} läßt sich mit den in den Tafeln 3 bis 8 zusammengestellten Formeln durchführen. In diesen Tafeln sind die Belastungszahlen in Abhängigkeit von den wichtigsten Belastungsfällen und den wichtigsten Zuordnungen zwischen Zylinderschale, Kugel-

Tafel 1. Zusammenstellung der allgemeinen Φ-Werte für die verschiedenen Schalenkombinationen.

Schalenformen	Φ_{11}	Φ_{12}	Φ_{22}
Form 1 Form 5 Form 9	$\dfrac{F_{3z}+\dfrac{F_{1z}}{\lambda_h^2\sqrt{\lambda_h \sin\alpha_0}}R_3}{N}$	$\dfrac{-F_{2z}+\dfrac{F_{1z}}{\lambda_h^2}R_2}{N}$	$\dfrac{F_{4z}+\dfrac{F_{1z}\sqrt{\lambda_h \sin\alpha_0}}{\lambda_h^2}R_1}{N}$
Form 2 Form 6 Form 10		$\dfrac{F_{2z}-\dfrac{F_{1z}}{\lambda_h^2}R_2}{N}$	
Form 3 Form 7		$\dfrac{-F_{2z}-\dfrac{F_{1z}}{\lambda_h^2}R_2}{N}$	
Form 4 Form 8		$\dfrac{F_{2z}+\dfrac{F_{1z}}{\lambda_h^2}R_2}{N}$	

$$N = 1+\frac{F_{1z}}{2}+\frac{1}{\lambda_h^2}\left[\frac{F_{4z}}{\sqrt{\lambda_h \sin\alpha_0}}R_3+F_{3z}\sqrt{\lambda_h \sin\alpha_0}\,R_1 \pm F_{2z}R_2+\frac{F_{1z}}{2\lambda_h^2}(2R_1R_3-R_2^2)\right]$$

Anmerkung: Bei den Φ-Werten der Kugelschale ist der Ausdruck $\sin\alpha_0$ durch $\sin\psi_0$ zu ersetzen.
Vorzeichenregel für Klammerausdruck von N: oberes Vorzeichen Form 1, 5, 9, 2, 6, 10; unteres Vorzeichen Form 3, 7, 4, 8.

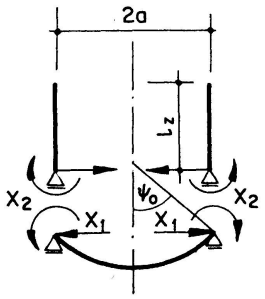
Tafel 2. Zahlentafel der Φ-Werte in Abhängigkeit von den Parametern λ_h, α_0 bzw. ψ_0 und kl

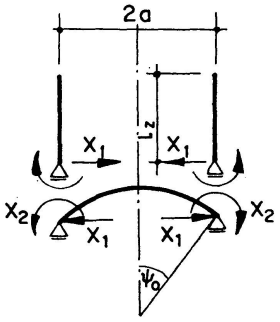
λ_h	α_0 ψ_0	kl	Schalenformen							
			Φ_{11}		Φ_{12}				Φ_{22}	
			1,2,5,6,9,10	3,4,7,8	1,5,9	3,7	2,6,10	4,8	1,2,5,6,9,10	3,4,7,8
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,6	30°	0,5	0,246788	0,562280	−0,077818	−0,284510	0,077818	0,284510	0,046479	0,106159
		0,9	0,269876	0,669693	−0,028656	−0,461884	0,028656	0,461884	0,106561	0,264320
		1,5	0,356708	0,680504	0,066631	−0,453899	−0,066631	0,453899	0,159907	0,305060
		3,0	0,440913	0,738987	0,128993	−0,459570	−0,128993	0,459570	0,183470	0,307503
		5,0	0,442662	0,742777	0,129440	−0,462192	−0,129440	0,462192	0,183644	0,308497
	45°	0,5	0,232993	0,510173	−0,075449	−0,265466	0,075449	0,265466	0,047412	0,104216
		0,9	0,250292	0,636373	−0,029088	−0,479548	0,029088	0,479548	0,116454	0,295453
		1,5	0,325807	0,644136	0,069340	−0,490462	−0,069340	0,490462	0,182832	0,362165
		3,0	0,397455	0,684396	0,134085	−0,490808	−0,134085	0,490808	0,212429	0,365800
		5,0	0,398716	0,687751	0,134527	−0,493540	−0,134527	0,493540	0,212648	0,367026
	60°	0,5	0,223400	0,476946	−0,073633	−0,251815	0,073633	0,251815	0,047807	0,102140
		0,9	0,239121	0,609041	−0,029138	−0,481678	0,029138	0,481678	0,122223	0,310925
		1,5	0,306215	0,618409	0,070534	−0,507473	−0,070534	0,507473	0,197181	0,397295
		3,0	0,372178	0,649559	0,136348	−0,505251	−0,136348	0,505251	0,230822	0,402377
		5,0	0,373248	0,652648	0,136785	−0,508018	−0,136785	0,508018	0,231073	0,403747
1,0	30°	0,5	0,428780	0,716649	−0,184464	−0,364658	0,184464	0,364658	0,078788	0,131838
		0,9	0,438687	1,012286	−0,208572	−0,826739	0,208572	0,826739	0,220160	0,508166
		1,5	0,488951	1,052003	−0,096398	−0,945959	0,096398	0,945959	0,360441	0,776232
		3,0	0,583543	1,128404	−0,000095	−0,933526	0,000095	0,933526	0,413566	0,799718
		5,0	0,585810	1,137939	−0,000081	−0,042775	0,000081	0,942775	0,414177	0,804719

	45°	0,5	0,408525	0,666762	−0,177528	−0,342282	0,177528	0,342282	0,077980	0,127264
		0,9	0,418528	0,958205	−0,207146	−0,813384	0,207146	0,813384	0,228594	0,522954
		1,5	0,459300	1,014617	−0,098457	−0,990558	0,098457	0,990558	0,391562	0,864550
		3,0	0,541842	1,069408	−0,000098	−0,975493	0,000098	0,975493	0,455999	0,900912
		5,0	0,543229	1,078268	−0,000083	−0,985147	0,000083	0,985147	0,456742	0,906777
	60°	0,5	0,395041	0,635195	−0,172769	−0,327556	0,172769	0,327556	0,077295	0,124045
		0,9	0,406301	0,916486	−0,204972	−0,794527	0,204972	0,794527	0,232790	0,525452
		1,5	0,441730	0,982150	−0,098998	−1,002655	0,098998	1,002655	0,409507	0,910212
		3,0	0,516178	1,026187	−0,000098	−0,987699	0,000098	0,987699	0,481151	0,956479
		5,0	0,517899	1,034520	−0,000083	−0,997400	0,000083	0,997400	0,481979	0,962736
1,5	30°	0,5	0,598435	0,807083	−0,280480	−0,407502	0,280480	0,407502	0,106248	0,143362
		0,9	0,669294	1,226069	−0,450993	−1,045891	0,450993	1,045891	0,353499	0,647633
		1,5	0,685643	1,338657	−0,393020	−1,378651	0,393020	1,378651	0,625937	1,223119
		3,0	0,775441	1,421678	−0,284189	−1,354074	0,284189	1,354074	0,711261	1,304048
		5,0	0,779529	1,437655	−0,286263	−1,372460	0,286263	1,372460	0,713333	1,315870
	45°	0,5	0,576501	0,768396	−0,271063	−0,389255	0,271063	0,389255	0,104385	0,139216
		0,9	0,645985	1,165182	−0,442553	−1,010582	0,442553	1,010582	0,356522	0,643156
		1,5	0,658368	1,290910	−0,394325	−1,387624	0,394325	1,387624	0,653704	1,281437
		3,0	0,737273	1,356709	−0,285515	−1,365704	0,285515	1,365704	0,752001	1,384085
		5,0	0,740753	1,371603	−0,287572	−1,384077	0,287572	1,384077	0,754268	1,396775
	60°	0,5	0,561362	0,743551	−0,264776	−0,377307	0,264776	0,377307	0,103081	0,136420
		0,9	0,630351	1,121976	−0,435395	−0,981475	0,435395	0,981475	0,357114	0,635955
		1,5	0,641402	1,251726	−0,392658	−1,376160	0,392658	1,376169	0,688092	1,304345
		3,0	0,713472	1,308553	−0,284472	−1,356546	0,284472	1,356546	0,774239	1,420651
		5,0	0,716755	1,322592	−0,286501	−1,374559	0,286501	1,374559	0,776625	1,433628

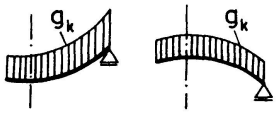
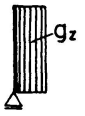
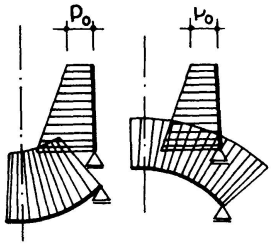
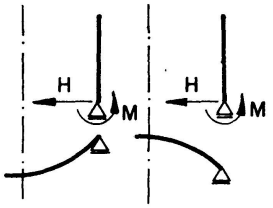
Tafel 3. Belastungszahlen für verschiedene Lastfälle der Schalenkombination Form 1 und 3

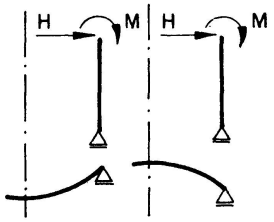
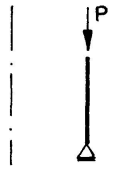
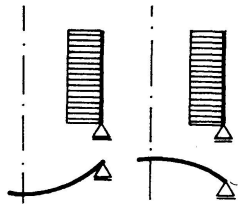
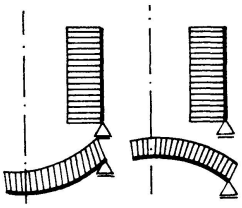
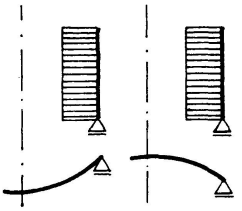
Form 1





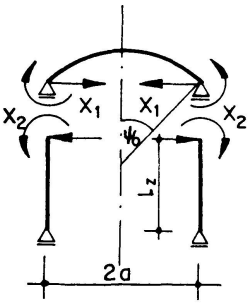
Form 3

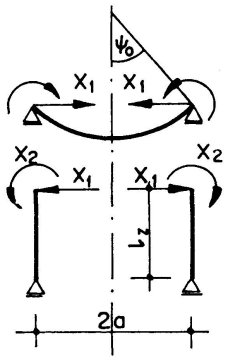
Belastung		
Eigengewicht g_k 	δ_{10}	$\pm\frac{g_k}{4 B_Z k_Z^4}\frac{1}{\lambda_h \sin\psi_0 (1+\cos\psi_0)}\left(1-\cos\psi_0-\cos^2\psi_0 + 2a\,k_Z\cos\psi_0\frac{\sqrt{\lambda_h \sin\psi_0}}{\lambda_h}R_1+\mu\right)$
	δ_{20}	$-\frac{g_k}{4 B_Z k_Z^4 a}\frac{2}{\lambda_h}\left[1+\frac{a^2 k_Z^2 \cot\psi_0}{\lambda_h (1+\cos\psi_0)}R_2+\frac{\mu}{2}\right]$
Eigengewicht g_Z 	δ_{10}	$-\frac{g_Z}{4 B_Z k_Z^4}\frac{l_Z}{a}\mu$
	δ_{20}	$\frac{g_Z}{4 B_Z k_Z^4 a}\mu$
Flüssigkeitsfüllung (γ_F) konstanter Druck (p_0) 	δ_{10}	$-\frac{l_p \gamma_F}{4 B_Z k_Z^4}\left[1\mp\frac{1}{2\lambda_h \sin\psi_0}\left(1\mp\frac{2-\cos\psi_0-\cos^2\psi_0}{3\sin\psi_0(1+\cos\psi_0)}\frac{a}{l_p}\right)\pm\left(a\,k_Z\cot\psi_0\frac{\sqrt{\lambda_h\sin\psi_0}}{\lambda_h^2}R_1 + \frac{\mu}{2\lambda_h\sin\psi_0}\right)\left(1\pm\frac{2-\cos\psi_0-\cos^2\psi_0}{3\sin\psi_0(1+\cos\psi_0)}\frac{a}{l_p}\right)\right]$
	δ_{20}	$\frac{l_p \gamma_F}{4 B_Z k_Z^4}\left[\left(1\mp\frac{1}{\lambda_h\sin\psi_0}\right)\frac{a}{l_p} - \frac{a^2 k_Z^2\cot\psi_0}{\lambda_h^2}R_2\left(1\pm\frac{2-\cos\psi_0-\cos^2\psi_0}{3\sin\psi_0(1+\cos\psi_0)}\frac{a}{l_p}\right)\right]$
Randschnittkräfte 	δ_{10}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^3}\left(H\frac{F_4}{F_1}-M\,k_Z\frac{F_2}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^2}\left(-H\frac{F_2}{F_1}+M\,k_Z\frac{2F_3}{F_1}\right)$

Randschnittkräfte 	δ_{10}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^3}\left(H \frac{F_9}{F_1} + M k_Z \frac{2 F_8}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$-\frac{1}{2 B_Z k_Z^2}\left(H \frac{2 F_8}{F_1} + M k_Z \frac{2 F_{10}}{F_1}\right)$
Auflast 	δ_{10}	$-\frac{P}{4 B_Z k_Z^4} \frac{\mu}{a}$
	δ_{20}	0
Temperatur $t = a_t$ 	δ_{10}	$-a\, a_t\, \alpha_t$
	δ_{20}	0
Temperatur $t_a - t_i = a_t$ 	δ_{10}	$\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{2 h_Z k_Z^2}\left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{2 F_8}{F_1} \mp R_2\right)$
	δ_{20}	$-\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{h_Z k_Z}\left(\frac{F_3}{F_1} - \frac{F_{10}}{F_1} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_h \sin \alpha_0}} R_3\right)$
Temperatur $t_a - t_i = a_t$ 	δ_{10}	$\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{2 h_Z k_Z^2}\left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{2 F_8}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$-\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{h_Z k_Z}\left(\frac{F_3}{F_1} - \frac{F_{10}}{F_1}\right)$

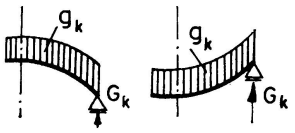
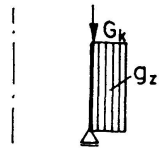
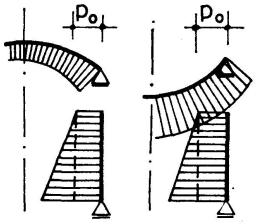
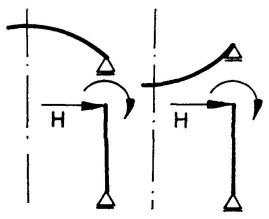
Tafel 4. Belastungszahlen für verschiedene Lastfälle der Schalenkombination Form 2 und 4

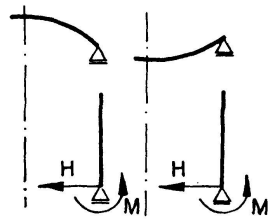
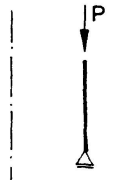
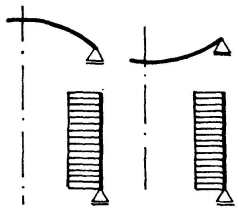
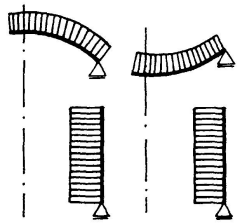
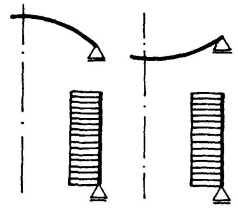
Form 2





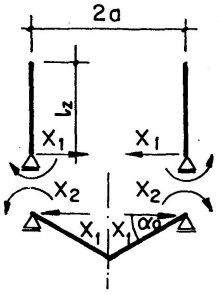
Form 4

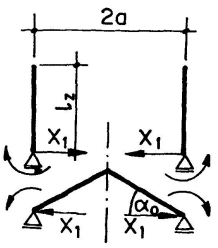
Belastung		
Eigengewicht g_k 	δ_{10}	$\mp \frac{g_k}{4 B_Z k_Z^4} \frac{1}{\lambda_h \sin\psi_0 (1+\cos\psi_0)} \left(1-\cos\psi_0 - \cos^2\psi_0 + 2 a k_Z \cos\psi_0 \frac{\sqrt{\lambda_h \sin\psi_0}}{\lambda_h} R_1 + \mu\right)$
	δ_{20}	$\frac{g_k}{4 B_Z k_Z^4} \frac{2}{\lambda_h} \left[1 + \frac{a^2 k_Z^2 \cot\psi_0}{\lambda_h (1+\cos\psi_0)} R_2 + \frac{\mu}{2}\right]$
Eigengewicht $g_Z + g_k$  $G_k = \frac{g_k a}{1+\cos\psi_0}$	δ_{10}	$\frac{g_k}{4 B_Z k_Z^4} \frac{\mu}{1+\cos\psi_0}$
	δ_{20}	$-\frac{g_Z}{4 B_Z k_Z^4 a} \mu$
Flüssigkeitsfüllung (γ_F) konstanter Druck (p_0) 	δ_{10}	$\frac{p_0}{4 B_Z k_Z^4} \left\{1 \mp \frac{1}{2\lambda_h \sin\psi_0} \left(1 \pm \frac{2-\cos\psi_0-\cos^2\psi_0}{3\sin\psi_0(1+\cos\psi_0)} \frac{a\gamma_F}{p_0}\right) \pm \left[a k_Z \cot\psi_0 \frac{\sqrt{\lambda_h \sin\psi_0}}{\lambda_h^2} R_1 + \frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{\lambda_h \sin\psi_0} \mp 1\right)\right] \left(1 \mp \frac{2-\cos\psi_0-\cos^2\psi_0}{3\sin\psi_0(1+\cos\psi_0)} \frac{a\gamma_F}{p_0}\right)\right\}$
	δ_{20}	$-\frac{p_0}{4 B_Z k_Z^4 a} \left[\left(1 \mp \frac{1}{\lambda_h \sin\psi_0}\right) \frac{a\gamma_F}{p_0} + \frac{a^2 k_Z^2 \cot\psi_0}{\lambda_h^2} R_2 \left(1 \mp \frac{2-\cos\psi_0-\cos^2\psi_0}{3\sin\psi_0(1+\cos\psi_0)} \frac{a\gamma_F}{p_0}\right)\right]$
Randschnittkräfte 	δ_{10}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^3} \left(H \frac{F_4}{F_1} + M k_Z \frac{F_2}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^2} \left(H \frac{F_2}{F_1} + M k_Z \frac{2 F_3}{F_1}\right)$

Randschnittkräfte 	δ_{10}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^3}\left(H \frac{F_9}{F_1} - M k_Z \frac{2 F_8}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^2}\left(H \frac{2 F_8}{F_1} - M k_Z \frac{2 F_{10}}{F_1}\right)$
Auflast 	δ_{10}	$\frac{P}{4 B_Z k_Z^4} \frac{\mu}{a}$
	δ_{20}	0
Temperatur $t = a_t$ 	δ_{10}	$a\, a_t\, \alpha_t$
	δ_{20}	0
Temperatur $\Delta t = t_a - t_i = a_t$ 	δ_{10}	$-\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{2 h_Z k_Z^2}\left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{2 F_8}{F_1} \mp R_2\right)$
	δ_{20}	$-\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{h_Z k_Z}\left(\frac{F_3}{F_1} - \frac{F_{10}}{F_1} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_h \sin \psi_0}} R_3\right)$
Temperatur $t_a - t_i = a_t$ 	δ_{10}	$-\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{2 h_Z k_Z^3}\left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{2 F_8}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$-\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{h_Z k_Z}\left(\frac{F_3}{F_1} - \frac{F_{10}}{F_1}\right)$

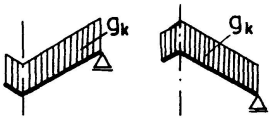
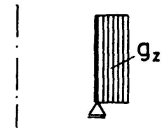
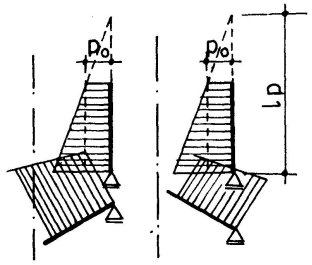
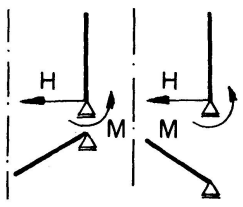
Tafel 5. Belastungszahlen für verschiedene Lastfälle der Schalenkombination Form 5 und 7

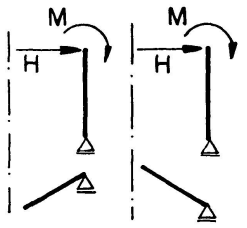
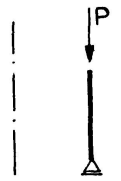
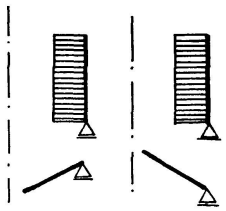
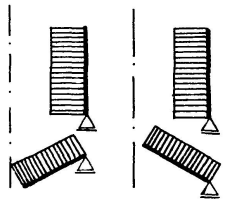
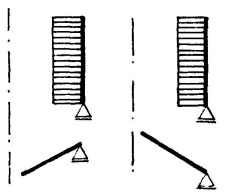
Form 5





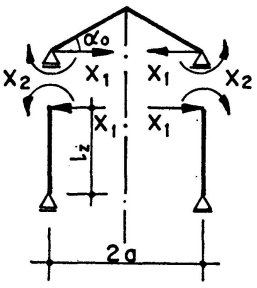
Form 7

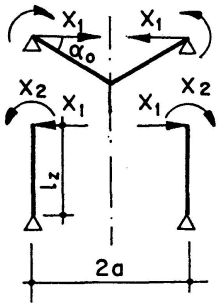
Belastung		
Eigengewicht g_k 	δ_{10}	$\pm\frac{g_k}{4B_Z k_Z^4}\frac{1}{\lambda_h \sin\alpha_0}\left(\cos\alpha_0 - a\,k_Z\frac{\sqrt{\lambda_h \sin\alpha_0}}{\lambda_h}R_1 - \frac{\mu}{2\cos\alpha_0}\right)$
	δ_{20}	$\frac{g_k}{4B_Z k_Z^4 a}\frac{1}{\lambda_h \sin^2\alpha_0}\left(2\cos^2\alpha_0 - \frac{1}{2} - a^2 k_Z^2\frac{\sin\alpha_0}{\lambda_h}R_2 - \mu\sin^2\alpha_0\right)$
Eigengewicht g_Z 	δ_{10}	$-\frac{g_Z}{4B_Z k_Z^4}\frac{l_Z}{a}\mu$
	δ_{20}	$\frac{g_Z}{4B_Z k_Z^4 a}\mu$
Flüssigkeitsfüllung (γ_F) konstanter Druck (p_0) 	δ_{10}	$-\frac{l_p \gamma_F}{4B_Z k_Z^4}\left[\left(1 \mp \frac{1}{\lambda_h \sin\alpha_0}\right) \pm \frac{1}{\lambda_h}\left(a\,k_Z\frac{\sqrt{\lambda_h \sin\alpha_0}}{\lambda_h}R_1 + \frac{\mu}{2\cos\alpha_0}\right)\left(\cot\alpha_0 \pm \frac{a}{3\,l_p}\right)\right]$
	δ_{20}	$\frac{l_p \gamma_F}{4B_Z k_Z^4 a}\left[\frac{a}{l_p} + \frac{1}{\lambda_h \sin\alpha_0}\left(\frac{3}{2}\cot\alpha_0 \mp \frac{7a}{6\,l_p}\right) - \frac{a^2 k_Z^2}{\lambda_h^2}R_2\left(\cot\alpha_0 \pm \frac{a}{3\,l_p}\right)\right]$
Randschnittkräfte 	δ_{10}	$\frac{1}{2B_Z k_Z^3}\left(H\frac{F_4}{F_1} - M\,k_Z\frac{F_2}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$\frac{1}{2B_Z k_Z^2}\left(-H\frac{F_2}{F_1} + M\,k_Z\frac{2F_3}{F_1}\right)$

Randschnittkräfte 	δ_{10}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^3}\left(H \frac{F_9}{F_1} + M\, k_Z \frac{2 F_8}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$-\frac{1}{2 B_Z k_Z^2}\left(H \frac{2 F_8}{F_1} + M\, k_Z \frac{2 F_{10}}{F_1}\right)$
Auflast 	δ_{10}	$-\frac{P}{4 B_Z k_Z^4} \frac{\mu}{a}$
	δ_{20}	0
Temperatur $t = a_t$ 	δ_{10}	$-a\, a_t\, \alpha_t$
	δ_{20}	0
Temperatur $t_a - t_i = a_t$ 	δ_{10}	$\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{2 h_Z k_Z^2}\left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{2 F_8}{F_1} \mp R_2\right)$
	δ_{20}	$-\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{h_Z k_Z}\left(\frac{F_3}{F_1} - \frac{F_{10}}{F_1} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_h \sin \alpha_0}} R_3\right)$
Temperatur $t_a - t_i = a_t$ 	δ_{10}	$\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{2 h_Z k_Z^2}\left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{2 F_8}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$-\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{h_Z k_Z}\left(\frac{F_3}{F_1} - \frac{F_{10}}{F_1}\right)$

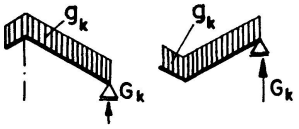
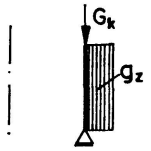
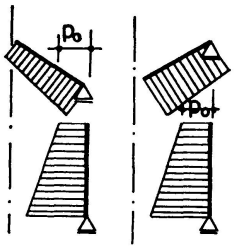
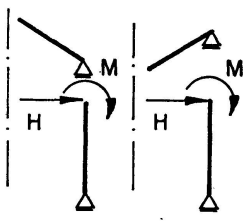
Tafel 6. Belastungszahlen für verschiedene Lastfälle der Schalenkombination Form 6 und 8

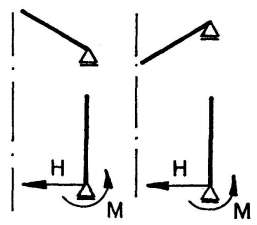
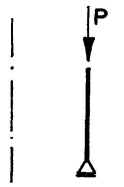
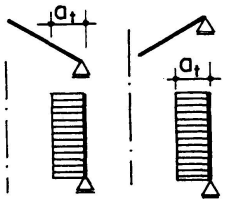
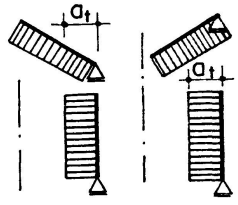
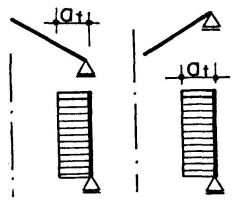
Form 6



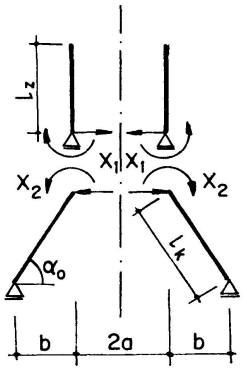


Form 8

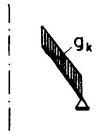
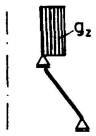
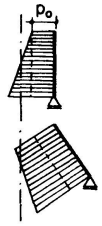
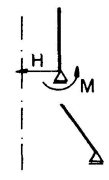
Belastung		
Eigengewicht g_k 	δ_{10}	$\pm\frac{g_k}{4B_Z k_Z^4}\frac{1}{\lambda_h \sin\alpha_0}\left(\cos\alpha_0 - a\,k_Z\frac{\sqrt{\lambda_h \sin\alpha_0}}{\lambda_h}R_1 - \frac{\mu}{2\cos\alpha_0}\right)$
	δ_{20}	$-\frac{g_k}{4B_Z k_Z^4 a}\frac{1}{\lambda_h \sin^2\alpha_0}\left(2\cos^2\alpha_0 - \frac{1}{2} - a^2 k_Z^2\frac{\sin\alpha_0}{\lambda_h}R_2 - \mu\sin^2\alpha_0\right)$
Eigengewicht $g_Z + g_k$ 	δ_{10}	$\frac{g_k}{4B_Z k_Z^4}\frac{\mu}{2\cos\alpha_0}$
	δ_{20}	$\frac{g_Z}{4B_Z k_Z^4 a}\mu$
Flüssigkeitsfüllung (γ_F) konstanter Druck (p_0) 	δ_{10}	$\frac{p_0}{4B_Z k_Z^4}\left\{\left(1 \mp \frac{1}{\lambda_h \sin\alpha_0}\right) \pm \left[a\,k_Z\frac{\sqrt{\lambda_h \sin\alpha_0}}{\lambda_h^2}R_1 + \frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{\lambda_h\cos\alpha_0} \mp \tan\alpha_0\right)\right]\left(\cot\alpha_0 \mp \frac{a\gamma_F}{3p_0}\right)\right\}$
	δ_{20}	$-\frac{p_0}{4B_Z k_Z^4 a}\left[1 - \frac{1}{\lambda_h \sin\alpha_0}\left(\frac{3}{2}\cot\alpha_0 \pm \frac{7a\gamma_F}{6p_0}\right) + \frac{a^2 k_Z^2}{\lambda_h^2}R_2\left(\cot\alpha_0 \mp \frac{a\gamma_F}{3p_0}\right)\right]$
Randschnittkräfte 	δ_{10}	$\frac{1}{2B_Z k_Z^3}\left(H\frac{F_4}{F_1} + M\,k_Z\frac{F_2}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$\frac{1}{2B_Z k_Z^2}\left(H\frac{F_2}{F_1} + M\,k_Z\frac{2F_3}{F_1}\right)$

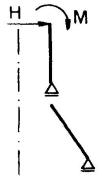
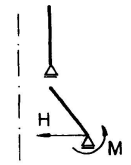
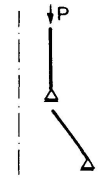
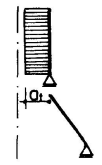
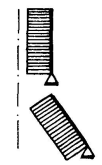
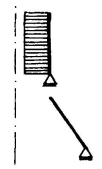
Randschnittkräfte 	δ_{10}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^3}\left(H\frac{F_9}{F_1} - M\, k_Z \frac{2F_8}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^2}\left(H\frac{2F_8}{F_1} - M\, k_Z \frac{2F_{10}}{F_1}\right)$
Auflast 	δ_{10}	$\frac{P}{4 B_Z k_Z^4}\frac{\mu}{a}$
	δ_{20}	0
Temperatur $t = a_t$ 	δ_{10}	$a\, a_t\, \alpha_t$
	δ_{20}	0
Temperatur $t_a - t_i = a_t$ 	δ_{10}	$-\frac{a_t\, \alpha_t\,(1+\mu)}{2 h_Z k_Z^2}\left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{2F_8}{F_1} \mp R_2\right)$
	δ_{20}	$-\frac{a_t\, \alpha_t\,(1+\mu)}{h_Z k_Z}\left(\frac{F_3}{F_1} - \frac{F_{10}}{F_1} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_h \sin\alpha_0}} R_3\right)$
Temperatur $t_a - t_i = a_t$ 	δ_{10}	$-\frac{a_t\, \alpha_t\,(1+\mu)}{2 h_Z k_Z^2}\left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{2F_8}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$-\frac{a_t\, \alpha_t\,(1+\mu)}{h_Z k_Z}\left(\frac{F_3}{F_1} - \frac{F_{10}}{F_1}\right)$

Tafel 7. Belastungszahlen für verschiedene Lastfälle der Schalenkombination Form 9

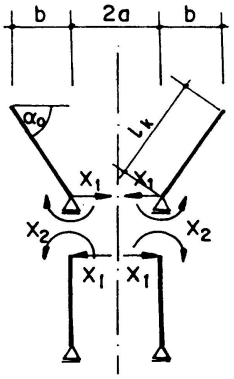


Form 9

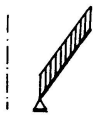
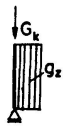
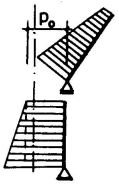
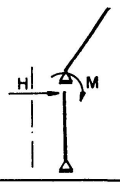
Belastung		
Eigengewicht g_k 	δ_{10}	$-\frac{g_k}{4 B_Z k_Z^4}\frac{1}{\lambda_h \sin\alpha_0}\left(\frac{\cos\alpha_0}{2} + k_Z\frac{\sqrt{\lambda_h \sin\alpha_0}}{\lambda_h}\frac{2ab+b^2}{a+b}T_1\right)$
	δ_{20}	$\frac{g_k}{4 B_Z k_Z^4 a}\frac{1}{\lambda_h \sin^2\alpha_0}\left(2\cos^2\alpha_0 - 2k_Z^2\frac{\sin\alpha_0}{\lambda_h}\frac{2a^2b+ab^2}{a+b}T_2 - \mu\sin^2\alpha_0\right)$
Eigengewicht g_Z 	δ_{10}	$-\frac{g_Z}{4 B_Z k_Z^4}\left[2 l_Z k_Z \cot\alpha_0 \frac{\sqrt{\lambda_h \sin\alpha_0}}{\lambda_h^2}\left(R_1 + \frac{a}{a+b}T_1\right) + \mu\frac{l_Z}{a}\left(1 - \frac{1}{\lambda_h \sin\alpha_0}\right)\right]$
	δ_{20}	$-\frac{g_Z}{4 B_Z k_Z^4 a}\left[\frac{l_Z \cos\alpha_0}{a\lambda_h \sin\alpha_0} + 2a l_Z k_Z^2\frac{\cot\alpha_0}{\lambda_h^2}\left(R_2 + \frac{2a}{a+b}T_2\right) - \mu\right]$
Flüssigkeitsfüllung (γ_F) konstanter Druck (p_0) 	δ_{10}	$-\frac{l_p \gamma_F}{4 B_Z k_Z^4}\left\{1 - \frac{1}{\lambda_h \sin\alpha_0} - a k_Z \frac{\sqrt{\lambda_h \sin\alpha_0}}{\lambda_h^2 a (a+b)} T_1 \cdot \left[(2ab+b^2)\cot\alpha_0 + \frac{3ab^2+2b^3}{3 l_p}\right]\right\}$
	δ_{20}	$\frac{l_p \gamma_F}{4 B_Z k_Z^4 a}\left\{\left(1 - \frac{1}{\lambda_h \sin\alpha_0}\right)\frac{a}{l_p} - \frac{2\cos\alpha_0}{\lambda_h \sin^2\alpha_0} + \frac{2a^2 k_Z^2}{\lambda_h^2 a (a+b)} T_2\left[(2ab+b^2)\cot\alpha_0 + \frac{3ab^2+2b^3}{3 l_p}\right]\right\}$
Randschnittkräfte 	δ_{20}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^3}\left(H\frac{F_4}{F_1} - M k_Z \frac{F_2}{F_1}\right)$
	δ_{10}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^2}\left(-H\frac{F_2}{F_1} + M k_Z \frac{2F_3}{F_1}\right)$

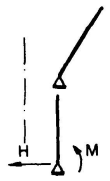
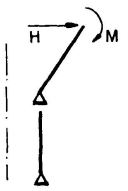
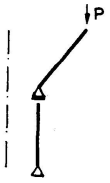
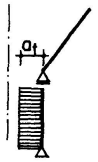
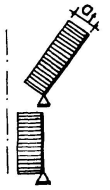
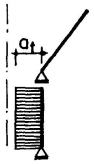
Randschnittkräfte 	δ_{10}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^3}\left(H \frac{F_9}{F_1} + M k_Z \frac{2 F_8}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$-\frac{1}{2 B_Z k_Z^2}\left(H \frac{2 F_8}{F_1} + M k_Z \frac{2 F_{10}}{F_1}\right)$
Randschnittkräfte 	δ_{10}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^3}\left(H \frac{\sqrt{\lambda_h \sin \alpha_0}}{\lambda_h^2} T_1 - M \frac{k_Z}{\lambda_h^2} 2 T_2\right)$
	δ_{20}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^2}\left(H \frac{1}{\lambda_h^2} 2 T_2 - M \frac{k_Z}{\lambda_h^2 \sqrt{\lambda_h \sin \alpha_0}} 2 T_3\right)$
Auflast 	δ_{10}	$-\frac{P}{4 B_Z k_Z^4 a}\left[\frac{2 a k_Z \cot \alpha_0 \sqrt{\lambda_h \sin \alpha_0}}{\lambda_h^2}\left(R_1 + \frac{a}{a + l_k \cos \alpha_0} T_1\right) + \mu\left(1 - \frac{1}{\lambda_h \sin \alpha_0}\right)\right]$
	δ_{20}	$-\frac{P}{4 B_Z k_Z^4 a^2} \cot \alpha_0 \left[\frac{1}{\lambda_h \sin \alpha_0} + \frac{2 a^2 k_Z^2}{\lambda_h^2}\left(R_2 + \frac{a}{a + l_k \cos \alpha_0} 2 T_2\right)\right]$
Temperatur $t = a_t$ 	δ_{10}	$-a a_t \alpha_t$
	δ_{20}	0
Temperatur $\Delta t = t_a - t_i = a_t$ 	δ_{10}	$\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{2 h_Z k_Z^2}\left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{2 F_8}{F_1} - R_2 + 2 T_2\right)$
	δ_{20}	$-\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{h_Z k_Z}\left[\frac{F_3}{F_1} - \frac{F_{10}}{F_1} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_h \sin \alpha_0}}(R_3 - T_3)\right]$
Temperatur $t_a - t_i = a_t$ 	δ_{10}	$\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{2 h_Z k_Z^2}\left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{2 F_8}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$-\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{h_Z k_Z}\left(\frac{F_3}{F_1} - \frac{F_{10}}{F_1}\right)$

Tafel 8. Belastungszahlen für verschiedene Lastfälle der Schalenkombination Form 10



Form 10

Belastung		
Eigengewicht g_k 	δ_{10}	$-\frac{g_k}{4 B_Z k_Z^4}\frac{1}{\lambda_h \sin\alpha_0}\left[\cos\alpha_0-\left(a\,k_Z\frac{\sqrt{\lambda_h \sin\alpha_0}}{\lambda_h}R_1-\frac{\mu}{2\cos\alpha_0}\right)\left(2+\frac{b}{a}\right)\frac{b}{a}\right]$
	δ_{20}	$-\frac{g_k}{4 B_Z k_Z^4 a}\frac{1}{\lambda_h \sin^2\alpha_0}\left[2\cos^2\alpha_0+\left(\frac{1}{2}+a^2 k_Z^2\frac{\sin\alpha_0}{\lambda_h}R_2\right)\left(2+\frac{b}{a}\right)\frac{b}{a}-\mu\sin^2\alpha_0\right]$
Eigengewicht g_Z+g_k  $G_k=\frac{g_k b}{2\cos\alpha_0}\left(2+\frac{b}{a}\right)$	δ_{10}	$\frac{g_k}{4 B_Z k_Z^4}\frac{\mu}{2\cos\alpha_0}\frac{b}{a}\left(2+\frac{b}{a}\right)$
	δ_{20}	$-\frac{g_Z}{4 B_Z k_Z^4 a}\mu$
Flüssigkeitsfüllung (γ_F) konstanter Druck (p_0) 	δ_{10}	$\frac{p_0}{4 B_Z k_Z^4}\left\{1-\frac{1}{\lambda_h \sin\alpha_0}+\left[a\,k_Z\frac{\sqrt{\lambda_h \sin\alpha_0}}{\lambda_h^2}R_1-\frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{\lambda_h\cos\alpha_0}-\tan\alpha_0\right)\right]\left[\left(2+\frac{b}{a}\right)\cot\alpha_0-\left(1+\frac{2}{3}\frac{b}{a}\right)\frac{b\gamma_F}{p_0}\right]\frac{b}{a}\right\}$
	δ_{20}	$-\frac{p_0}{4 B_Z k_Z^4 a}\left\{\frac{a\gamma_F}{p_0}-\frac{1}{\lambda_h \sin\alpha_0}\left[\left(1+\frac{b^2}{2a^2}+\frac{b^3}{3a^3}\right)\frac{a\gamma_F}{p_0}-\left(2+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{2a^2}\right)\cot\alpha_0\right]+\frac{a^2 k_Z^2}{\lambda_h^2}R_2\left[\left(2+\frac{b}{a}\right)\cot\alpha_0-\left(1+\frac{2}{3}\frac{b}{a}\right)\frac{b\gamma_F}{p_0}\right]\frac{b}{a}\right\}$
Randschnittkräfte 	δ_{10}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^3}\left(H\frac{F_4}{F_1}+M\,k_Z\frac{F_2}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^2}\left(H\frac{F_2}{F_1}+M\,k_Z\frac{2F_3}{F_1}\right)$

Randschnittkräfte 	δ_{10}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^3}\left(H \frac{F_9}{F_1} - M k_Z \frac{2 F_8}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^2}\left(H \frac{2 F_8}{F_1} - M k_Z \frac{2 F_{10}}{F_1}\right)$
Randschnittkräfte 	δ_{10}	$\frac{1}{2 B_Z k_Z^3}\left(H \frac{\sqrt{\lambda_h \sin \alpha_0}}{\lambda_h^2} T_1 + M \frac{k_Z}{\lambda_h^2} 2 T_2\right)$
	δ_{20}	$-\frac{1}{2 B_Z k_Z^2}\left(H \frac{1}{\lambda_h^2} 2 T_2 + M \frac{k_Z}{\lambda_h^2 \sqrt{\lambda_h \sin \alpha_0}} 2 T_3\right)$
Auflast 	δ_{10}	$\frac{P}{4 B_Z k_Z^4 a}\left[\frac{2 a k_Z \cot \alpha_0 \sqrt{\lambda_h \sin \alpha_0}}{\lambda_h^2}\left(\frac{a + l_k \cos \alpha_0}{a} R_1 + T_1\right) + \mu\left(1 - \frac{1}{\lambda_h \sin \alpha_0}\right)\frac{a + l_k \cos \alpha_0}{a}\right]$
	δ_{20}	$-\frac{P}{4 B_Z k_Z^4 a^2} \cot \alpha_0 \left[\frac{1}{\lambda_h \sin \alpha_0} \frac{a + l_k \cos \alpha_0}{a} + \frac{2 a^2 k_Z^2}{\lambda_h^2}\left(\frac{a + l_k \cos \alpha_0}{a} R_2 + 2 T_2\right)\right]$
Temperatur $t = a_t$ 	δ_{10}	$a\, a_t\, \alpha_t$
	δ_{20}	0
Temperatur $t_a - t_i = a_t$ 	δ_{10}	$-\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{2 h_Z k_Z^2}\left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{2 F_8}{F_1} - R_2 + 2 T_2\right)$
	δ_{20}	$-\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{h_Z k_Z}\left[\frac{F_3}{F_1} - \frac{F_{10}}{F_1} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_h \sin \alpha_0}}(R_3 - T_3)\right]$
Temperatur $t_a - t_i = a_t$ 	δ_{10}	$-\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{2 h_Z k_Z^2}\left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{2 F_8}{F_1}\right)$
	δ_{20}	$-\frac{a_t \alpha_t (1+\mu)}{h_Z k_Z}\left(\frac{F_3}{F_1} - \frac{F_{10}}{F_1}\right)$

Tafel 9. Zusammenstellung der in den Tafeln 3—8 verwendeten Faktoren R und T

Schalenformen	R_1	R_2
„Hohe" Kegel- bzw. Kugelschale „Lange, hohe" Kegelzonenschale (Form 1—10)	1,0	1,0
„Flache" Kegelschale (Form 5—8)	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\left[(G_9^{\cdot 2} + G_{10}^{\cdot 2}) - \frac{4\mu^2}{\alpha^2}(G_9^2 + G_{10}^2)\right]}{R_4}$	$\frac{(G_{10} G_9^{\cdot} - G_9 G_{10}^{\cdot})}{R_4}$
„Lange, flache" Kegelzonenschale (Form 9—10)	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\left[(G_{11}^{\cdot 2} + G_{12}^{\cdot 2}) - \frac{4\mu^2}{\alpha^2}(G_{11}^2 + G_{12}^2)\right]}{R_4}$	$\frac{(G_{12} G_{11}^{\cdot} - G_{11} G_{12}^{\cdot})}{R_4}$
„Kurze, hohe" Kegelzonenschale (Form 9—10)	$\frac{F_{4k}}{F_{1k}}$	$\frac{F_{2k}}{F_{1k}}$
„Flache" Kugelschale (Form 1—4)	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\left[G_5^{\cdot 2} + G_6^{\cdot 2} - \frac{\mu^2}{\alpha^2}(G_1^{\cdot 2} + G_2^{\cdot 2})\right]}{R_4}$	$\frac{(G_2^{\cdot} G_5^{\cdot} - G_1^{\cdot} G_6^{\cdot})}{R_4}$

schale und Kegelschale angegeben. Die dabei verwendeten Faktoren R_1 bis R_4 und T_1 bis T_3 sind in Tafel 9 zusammengestellt.

3. Zahlenbeispiel

Zur Einführung in die bereitgestellten Rechenbehelfe wird nachstehend ein Zahlenbeispiel angegeben.

Aufgabenstellung

Für das in Fig. 2 gezeigte zusammengesetzte Schalentragwerk soll der Schnittkraftzustand angegeben werden. Die Bestimmung der Überzähligen erfolgt unter Verwendung des statisch unbestimmten Hauptsystems gemäß Fig. 3 (Form 10 nach Tafel 1), für dessen Behandlung die im Beitrag dargelegte Grundaufgabe mehrfach anzuwenden ist.

Geometrie und Materialkennwerte

Alle erforderlichen Angaben sind in Fig. 2 enthalten.

R_3	R_4	T_1	T_2	T_3
1,0		0	0	0
$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(G_{10}^2+G_9^2)}{R_4}$	$G_9 G_9^{\cdot}+G_{10} G_{10}^{\cdot}+\frac{2\mu}{\alpha}(G_9^2+G_{10}^2)$			
$\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}(G_{11}^2+G_{12}^2)}{R_4}$	$G_{11} G_{11}^{\cdot}+G_{12} G_{12}^{\cdot}-\frac{2\mu}{\alpha}(G_{11}^2+G_{12}^2)$	0	0	0
$\frac{F_{3k}}{F_{1k}}$		$\frac{F_{9k}}{F_{1k}}$	$\frac{F_{8k}}{F_{1k}}$	$\frac{F_{10k}}{F_{1k}}$
$\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}(G_1^{\cdot 2}+G_2^{\cdot 2})}{R_4}$	$G_1^{\cdot} G_5^{\cdot}+G_2^{\cdot} G_6^{\cdot}-\frac{\mu}{\alpha}(G_1^{\cdot 2}+G_2^{\cdot 2})$			

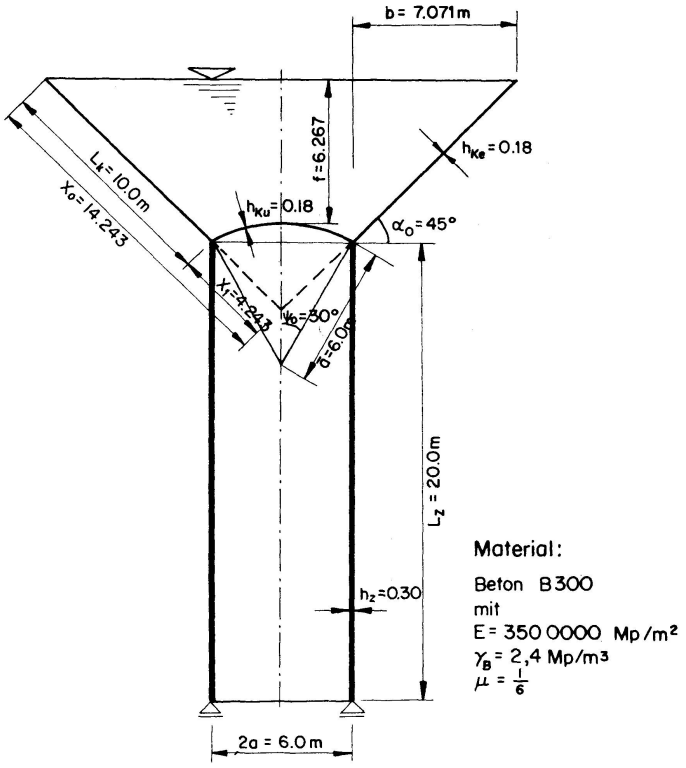


Fig. 2. System, Abmessungen und Materialangaben zum Tragwerk des Zahlenbeispieles.

Belastung

Das Tragwerk wird für die Lastfälle Eigengewicht g und Flüssigkeitsfüllung F untersucht.

$$g_Z = 0{,}720\ [\mathrm{Mp/m^2}],$$
$$g_{Ke} = g_{Ku} = 0{,}432\ [\mathrm{Mp/m^2}],$$
$$\gamma_F = 1{,}0\ [\mathrm{Mp/m^3}].$$

Hilfswerte

Zylinder:
$$k_Z = \frac{\sqrt[4]{3\left(1-\frac{1}{36}\right)}}{\sqrt{3\cdot 0{,}30}} = 1{,}3775 \quad [1/\mathrm{m}],$$
$$B_Z = \frac{3\cdot 10^6 \cdot 0{,}3^3}{12\left(1-\frac{1}{36}\right)} = 6942{,}85 \quad [\mathrm{Mpm^2/m}],$$
$$k_Z l_Z = 1{,}3775\cdot 20 = 27{,}55 > 5.$$

Kegel:
$$\lambda_h = \frac{0{,}18}{0{,}30} = 0{,}6,$$
$$k_{Ke} = k_Z \frac{0{,}7071}{0{,}6} = 1{,}4954 \quad [1/\mathrm{m}],$$
$$B_{Ke} = \frac{3\cdot 10^6 \cdot 0{,}18^3}{12\left(1-\frac{1}{36}\right)} = 1499{,}66 \quad [\mathrm{Mpm^2/m}],$$
$$k_{Ke} l_{Ke} = 1{,}4954\cdot 10 = 14{,}954 > 5.$$

Kugel:
$$k_{Ku} = k_Z \frac{0{,}5}{0{,}6} = 1{,}2575 \quad [1/\mathrm{m}],$$
$$B_{Ku} = B_{Ke} = 1499{,}66 \quad [\mathrm{Mpm^2/m}].$$

Berechnung

Es werden zunächst die Übergangsschnittkräfte gemäß Fig. 3a aus folgenden Lastfällen benötigt:

Eigengewicht g,
Flüssigkeitsfüllung F,
Überzählige $X_1^{(2)} = 1{,}0$ [Mp],
Überzählige $X_2^{(2)} = 1{,}0$ [Mpm].

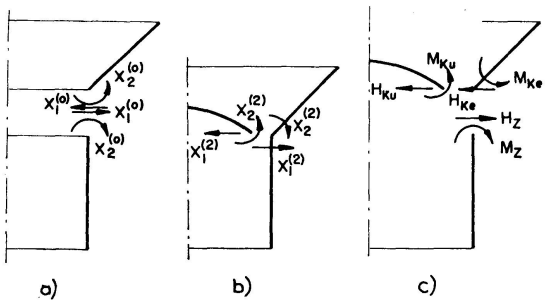


Fig. 3. Definition der Übergangsschnittkräfte X_1 bzw. der Randschnittkräfte H_{ik} bzw. M_{ik}.

Die Belastungszahlen δ_i für die Lastfälle ergeben sich in vorstehender Reihenfolge mit den Beziehungen aus Tafel 8, Zeile 1 bis 4 wie folgt:

$$\begin{aligned}
\delta_{10}^{(g)} &= +\ 4{,}548 \cdot 10^{-4}\,[\mathrm{m}],\\
\delta_{20}^{(g)} &= -10{,}216 \cdot 10^{-4},\\
\delta_{10}^{(F)} &= +20{,}254 \cdot 10^{-4}\,[\mathrm{m}],\\
\delta_{20}^{(F)} &= -49{,}116 \cdot 10^{-4},\\
\delta_{10}^{(X_1^{(2)})} &= +\ 0{,}276 \cdot 10^{-4}\,[\mathrm{m}],\\
\delta_{20}^{(X_1^{(2)})} &= +\ 0{,}380 \cdot 10^{-4},\\
\delta_{10}^{(X_2^{(2)})} &= +\ 0{,}380 \cdot 10^{-4}\,[\mathrm{m}],\\
\delta_{20}^{(X_2^{(2)})} &= +\ 1{,}046 \cdot 10^{-4}.
\end{aligned}$$

Im weiteren Verlauf der Berechnung werden auf dem üblichen Wege die Überzähligen $X_1^{(2)}$ und $X_2^{(2)}$ ermittelt. Damit lassen sich für die einzelnen Tragwerksteile Zylinder, Kegel und Kugel die Randschnittkräfte H_{ik} und M_{ik} (Definition gemäß Fig. 3c) zusammenstellen, die sich wie folgt ergeben:

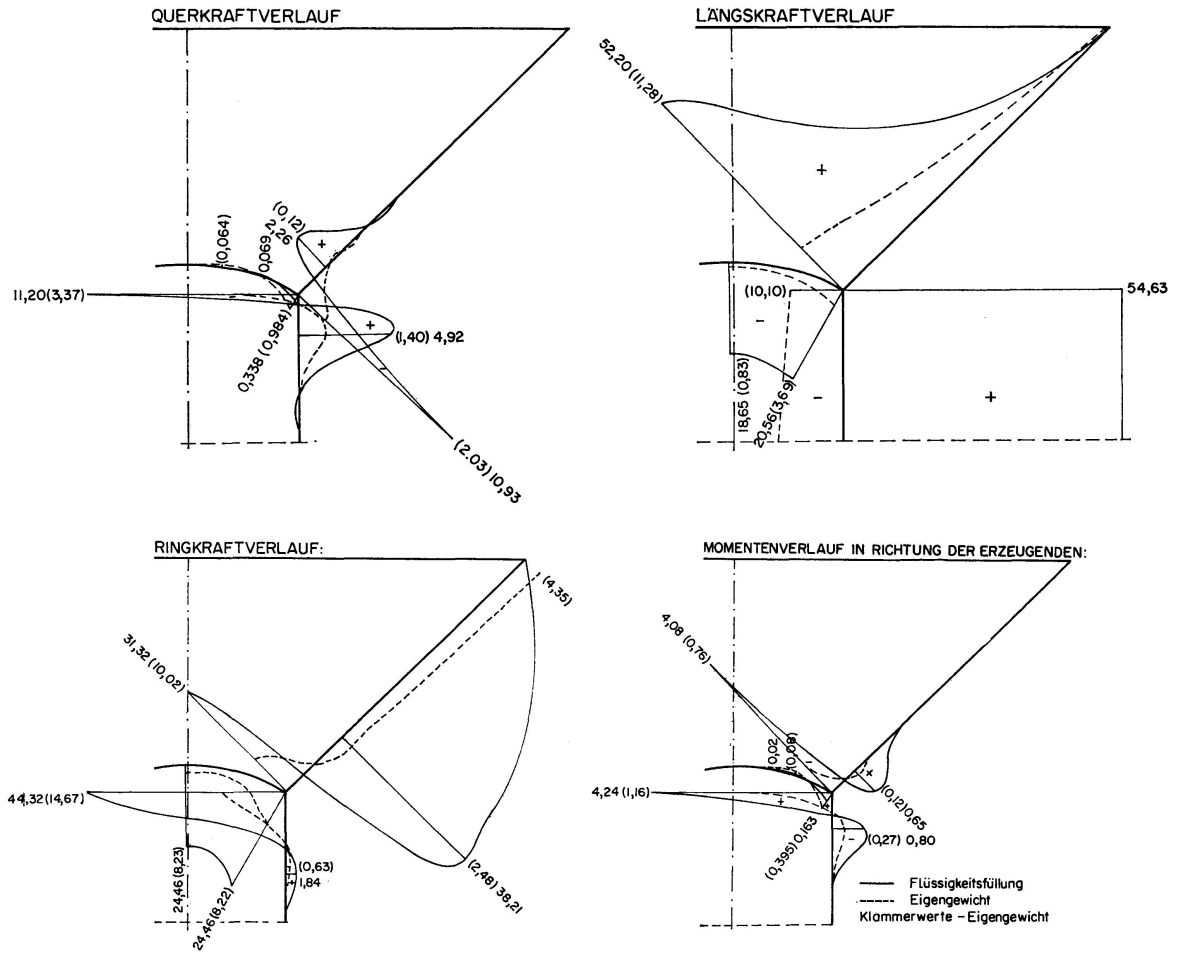


Fig. 4. Schnittkraftverlauf im zusammengesetzten Schalentragwerks nach Bild 2 für Eigengewicht und Flüssigkeitsfüllung.

Lastfall Eigengewicht:

Zylinder:	$H = -3{,}367\,[\mathrm{Mp/m}]$	$M = +1{,}156\,[\mathrm{Mpm/m}]$,
Kegel:	$H = +2{,}872\,[\mathrm{Mp/m}]$	$M = +0{,}762\,[\mathrm{Mpm/m}]$,
Kugel:	$H = +1{,}969\,[\mathrm{Mp/m}]$	$M = +0{,}394\,[\mathrm{Mpm/m}]$.

Lastfall Flüssigkeitsfüllung:

Zylinder:	$H = -11{,}205\,[\mathrm{Mp/m}]$	$M = +4{,}242\,[\mathrm{Mpm/m}]$,
Kegel:	$H = +15{,}460\,[\mathrm{Mp/m}]$	$M = +4{,}079\,[\mathrm{Mpm/m}]$,
Kugel:	$H = +\ 0{,}676\,[\mathrm{Mp/m}]$	$M = +0{,}163\,[\mathrm{Mpm/m}]$.

Der sich damit ergebende Schnittkraftverlauf ist in Fig. 4 angegeben.

4. Literatur

HAMPE, E.: Statik rotationssymmetrischer Flächentragwerke. Band 1—4, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin (1963, 1964).

Zusammenfassung

Für die Berechnung von zusammengesetzten rotationssymmetrischen Flächentragwerken werden Rechenbehelfe angegeben, die Berechnung der Kombination zwischen Zylinderschalen, Kegelschalen und Kugelschalen unter Einbeziehung der wichtigsten Belastungsfälle — einschließlich Temperaturbelastung — in einer einfachen Form möglich macht.

Summary

Means are indicated for the calculation of the surfaces of revolution which simplify the design of combinations of cylindrical, conical and spherical shells, taking into account the cases of the most important loads including changes in temperature.

Résumé

On indique pour le calcul des surfaces de rotation des moyens qui simplifient le calcul des combinaisons de coques cylindriques, côniques et sphériques en tenant compte des cas de charges les plus importants y compris les changements de température.

Zur Bestimmung der Knicklänge von Rahmenstielen

On the Determination of the Buckling Length of Frame Columns

De la détermination de la longueur de flambage des poteaux de cadres

KAMAL HASSAN
Dr.-Ing., Lehrstuhl für Stahlbau und Holzbau, Technische Hochschule Stuttgart
Ass. Prof., Faculty of Engineering, Ain Shams University, Kairo

1. Einleitung

Die Praxis des Stahlbaues stellt häufig die Aufgabe der Bestimmung der Knicklänge von Rahmenstielen mit eingespannten Füßen, die an den Rahmenecken und zwischen diesen und den Stützenfüßen durch lotrecht angreifende Lasten beansprucht werden.

Dieser Rahmen soll hier untersucht werden, insbesondere wenn die am Stiel angreifenden Lasten verschiedene Verhältnisse zueinander aufweisen, da diesem Belastungsfall in der Praxis große Bedeutung zukommt.

2. Voraussetzungen

Wir untersuchen einen Rahmen, der aus geraden Stäben besteht und in den Knotenpunkten 1, 2, 1′, 2′ durch ein System lotrechter richtungstreuer Lasten beansprucht ist. Die Kraftwirkungslinien fallen mit den Stabachsen zusammen (s. Fig. 1). Versehen wir alle diese Lasten mit einem gemeinsamen Multiplikator ν, so lassen sich, wenn die üblichen idealisierenden Voraus-

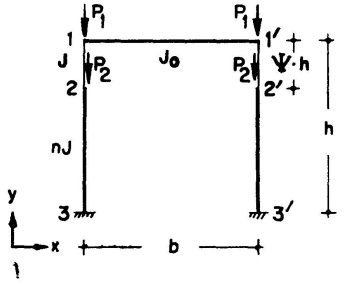


Fig. 1.

setzungen der Stabilitätstheorie (ideal gerade Stabachsen, ideal mittige Krafteinleitung, ideal homogener Werkstoff) erfüllt sind, bestimmte kritische Werte ν_{ki} angeben, die den idealen Knickbelastungszuständen (Verzweigungsstellen des Gleichgewichts) des Rahmens zugehören. Diese sind dadurch gekennzeichnet, daß unter derselben Laststufe zwei verschiedene Gleichgewichtsfiguren — die biegemomentenfreie und die infinitesimal ausgebogene — ausgebildet werden können. Der kleinste Wert stellt die Knicksicherheitszahl dar und bestimmt die ideale Knickbelastung des Rahmens.

Der Fall der symmetrisch gebauten Rahmen, bei denen die Riegel durch symmetrische Querlasten beansprucht werden und die daher schon vor dem Ausknicken Biegemomente und Querkräfte aufweisen, läßt sich mit ausreichender Näherung auf den untersuchten Fall zurückführen [1].

Eine Beschränkung auf kleine Ausbiegungen erlaubt den Zusammenhang zwischen der Achsenkrümmung $1/\rho$ und dem Biegemoment M_y weiterhin als linear anzunehmen, wenn auch die im Gleichgewichtszustand über die Querschnittsfläche F gleichmäßig verteilte Längsspannung $\sigma_0 = \frac{\nu S}{F}$ — wobei S die Stabkraft ist — die Proportionalitätsgrenze überschreitet.

Es wird weiter vorausgesetzt, daß die beim Ausknicken auftretenden elastischen Längsänderungen und Schubverformungen der Stäbe vernachlässigt werden, da sie keinen nennenswerten Einfluß auf die gesuchten Knicklängen der Rahmen ausüben.

3. Lösung des Stabilitätsproblems

Zur Lösung des Problems wird die von BEER [2] und KUPFERSCHMID [3] vorgeschlagene Verknüppfung eines Ausgleichverfahrens mit dem Ostenfeldschen Formänderungsgrößenverfahren [4] verwendet. Wenn wir alle Knoten, Sprungstellen des Trägheitsmoments und Einspannstellen des Rahmens (Fig. 2a) durch Gelenke ersetzen, erhalten wir ein 3fach verschiebliches System

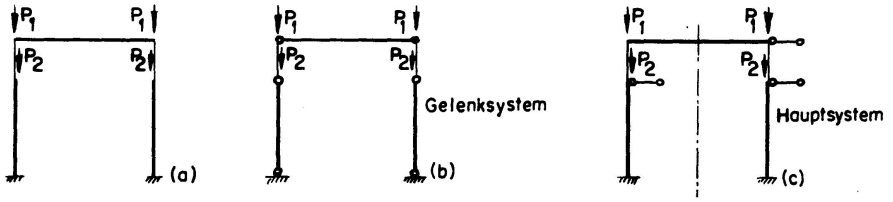


Fig. 2.

(Fig. 2b), bei dem leicht zu erkennen ist, wo die zur Gewinnung des unverschieblichen Hauptsystems benötigten 3 Ostenfeldschen Festhaltestäbe angeordnet werden müssen. Diese Festhaltestäbe sind starr und werden an den Knoten gelenkig angeschlossen. Unter der hier gegebenen Belastung weisen sie keine Kräfte auf ($Z_0 = 0$).

Da der biegemomentenfreien Gleichgewichtsfigur an der Stabilitätsgrenze eine antimetrische Knickfigur überlagert wird, müssen wir die der antimetrischen Knickfigur zugeordnete Teilknickbedingung herleiten. Die Mittelachse des Rahmens stellt in diesem Fall eine Antimetrieachse dar, und man kann sich dadurch auf die Untersuchung des in Fig. 3 mit nur zwei Festhaltestäben versehenen Teilsystems beschränken.

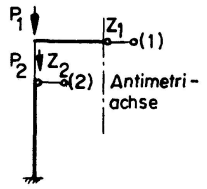


Fig. 3.

Unter einer gewählten Laststufe, die unterhalb der kritischen liegt, werden dem Hauptsystem Fig. 3 zwei Verschiebungszustände aufgezwungen:

1. Der Festhaltestab (1) wird aufgeschnitten und den Schnittufern eine gegenseitige Verschiebung $\zeta_1 = 1$ aufgezwungen. Bei diesem Zwängungszustand werden die Einspannmomente in den Stäben sowie die Ausgleichzahlen (Steifigkeits- und Fortleitungszahlen) unter Berücksichtigung der Axiallasteinflüsse ermittelt. Sie lassen sich mit Hilfe der «Chwalla-Hilfstafeln» [5] als Funktionen der Stabkennzahl

$$\epsilon_{ab} = l_{ab} \sqrt{\frac{S_{ab}}{E_{ab} I_{ab}}} \tag{1}$$

angeben, wobei hier l_{ab} die Länge, I_{ab} das Trägheitsmoment, E_{ab} der Elastizitätsmodul, S_{ab} die Axialkraft des Stabes ab bedeuten.

Nach dem Ausgleich der Momente sind die Festhaltekräfte Z_{11} und Z_{21} zu ermitteln. Sie ergeben sich sowohl aus dem Anteil der Endmomente als auch aus dem Anteil des Versetzungsmoments, das durch die richtungstreuen Axialkräfte erzeugt wird.

2. In gleicher Weise wird der Festhaltestab (2) aufgeschnitten und den Schnittufern eine gegenseitige Verschiebung $\zeta_2 = 1$ aufgezwungen. Die entstehenden Festhaltekräfte in den Stäben (1) und (2) werden mit Z_{12} und Z_{22} bezeichnet. Nach dem Satz von BETTI ist $Z_{12} = Z_{21}$.

Bei gleichzeitigem Auftreten der Verschiebungszustände $\zeta_1 = 1$ und $\zeta_2 = 1$ ergeben sich die resultierenden Festhaltekräfte

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_{11}\,\zeta_1 + Z_{12}\,\zeta_2, \\ Z_2 &= Z_{21}\,\zeta_1 + Z_{22}\,\zeta_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Da aber die Festhaltestäbe im tatsächlichen System nicht vorhanden sind, müssen die Knotenverschiebungen ζ_1 und ζ_2 so eingestellt werden, daß die Festhaltekräfte $Z_1 = Z_2 = 0$ sind. Anders ausgedrückt, bedeutet das, daß eine von der trivialen Nullage verschiedene Gleichgewichtslage existiert, wenn die aus den Z-Kräften gebildete Determinante

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

ist. Diese Beziehung stellt das Knickkriterium dar. Ist $\Delta_k > 0$, dann ist der Rahmen noch stabil. Die Lasten werden gesteigert und der Rechnungsgang wird wiederholt bis eine Laststufe erreicht ist, bei der die Knickbedingung (3) erfüllt ist.

4. Grundbeziehungen für den Einzelstab

4.1. Starreinspannmoment unter Berücksichtigung der Axialkraft S

4.1.1. Beiderseits starr eingespannter, längsverschieblich gelagerter Stab bei einer Querversetzung Δ der beiden Enden

$$M^0_{ab} = M^0_{ba} = \frac{E\,I_{ab}}{l^2_{ab}}(A' + B')\,\Delta\,. \tag{4}$$

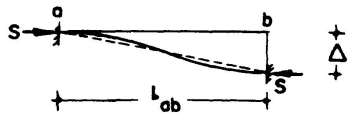


Fig. 4.

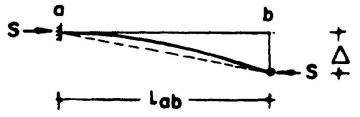


Fig. 5.

4.1.2. An einem Ende starr eingespannter, an dem anderen Ende gelenkig längsverschieblich gelagerter Stab

$$M^0_{ab} = \frac{E\,I_{ab}}{l^2_{ab}}C'\,\Delta\,. \tag{5}$$

Hierbei sind:

$$A' = \frac{\epsilon \sin\epsilon - \epsilon^2 \cos\epsilon}{2\,(1-\cos\epsilon) - \epsilon \sin\epsilon}, \tag{6}$$

$$B' = \frac{\epsilon^2 - \epsilon \sin\epsilon}{2\,(1-\cos\epsilon) - \epsilon \sin\epsilon}, \tag{7}$$

$$C' = \frac{\epsilon^2 \sin\epsilon}{\sin\epsilon - \epsilon\cos\epsilon}. \tag{8}$$

Diese Werte können den «Chwalla-Hilfstafeln» entnommen werden.

4.2. Die Steifigkeit s und die Fortleitungszahl c

4.2.1. Starr eingespannter Stab

$$s_{ab} = \frac{E\,I_{ab}}{l_{ab}}A'. \tag{9}$$

Hierin ist statt A' bei Symmetrie $(A' - B')$, bei Antimetrie $(A' + B')$ zu setzen.

$$c_{ab} = \frac{B'}{A'}. \tag{10}$$

4.2.2. Gelenkstab

$$s_{ab} = \frac{E\,I_{ab}}{l_{ab}} C', \tag{11}$$

$$c_{ab} = 0. \tag{12}$$

5. Grundbeziehungen für den Rahmen

5.1. Grundwerte

Der Rahmen Fig. 6 weist folgende Grundwerte auf:

h = Höhe des Rahmens
b = Spannweite des Rahmens
Ψh = Länge des oberen Teils des Stieles ($\psi = 0{,}25,\ 0{,}30$)
I_0 = Trägheitsmoment des Riegels
I = Trägheitsmoment des oberen Teils des Stieles
$n\,I$ = Trägheitsmoment des unteren Teils des Stieles ($n = 1,\ 5,\ 10,\ 50$)
$c = \frac{b\,I}{h\,I_0}$ ($c = 0,\ 0{,}5,\ 1,\ 2,\ \infty$)
$\alpha = \frac{P_1}{P_1 + P_2}$ ($\alpha = 0,\ 0{,}2,\ 0{,}5,\ 1$)

5.2. Vorzeichen

M: positiv wenn es den Knoten im Uhrzeigersinn dreht.
P: Druckkraft wird als positiv bezeichnet.
Z: Zugkraft wird als positiv bezeichnet.

5.3. Verschiebungszustände

5.3.1. Verschiebungszustand I

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\Psi h}{\sqrt{E\,I}} \sqrt{P_1},$$

$$\epsilon_{2,3} = \frac{(1-\Psi)\,h}{\sqrt{E\,I}} \sqrt{P_1 + P_2},$$

wenn $I_0 > 0$:

$$M^0_{12} = M^0_{21} = \frac{E\,I}{(\Psi h)^2} (A' + B')_{1,2},$$

wenn $I_0 = 0$:

$$M^0_{12} = 0,$$

$$M^0_{21} = \frac{E\,I}{(\Psi h)^2} C'_{1,2}.$$

Mit Hilfe des Ausgleichverfahrens nach Cross werden die Endmomente M_{12}, M_{21}, M_{23}, M_{32} ermittelt.

Die Festhaltekräfte ergeben sich sowohl aus dem Anteil der Endmomente als auch aus dem Anteil des Versetzungsmoments $P_1 \zeta_1$, das durch die richtungstreue Druckkraft P_1 erzeugt wird.

$$Z_{11} = \frac{M_{12}+M_{21}}{\Psi h} - \frac{P_1 \zeta_1}{\Psi h}, \tag{13}$$

$$Z_{21} = \frac{M_{23}+M_{32}}{(1-\Psi) h} - \frac{M_{21}+M_{12}}{\Psi h} + \frac{P_1 \zeta_1}{\Psi h}. \tag{14}$$

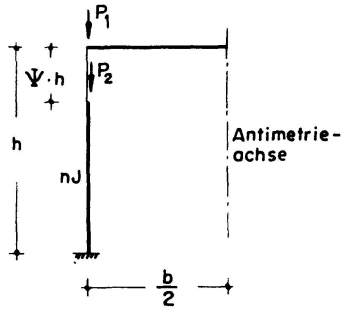


Fig. 6.

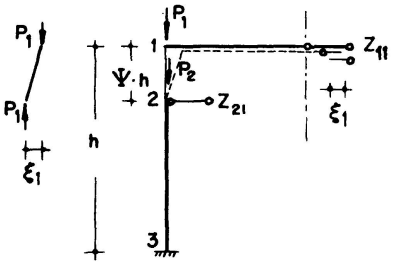


Fig. 7.

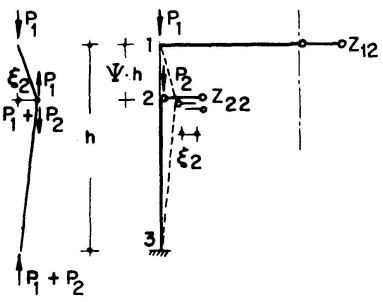


Fig. 8.

5.3.2. Verschiebungszustand II

Wenn $I_0 > 0$:

$$M_{12}^0 = M_{21}^0 = -\frac{E I}{(\Psi h)^2}(A' + B')_{1,2},$$

wenn $I_0 = 0$:

$$M_{12}^0 = 0,$$

$$M_{21}^0 = -\frac{E I}{(\Psi h)^2} C'_{1,2},$$

$$M_{23}^0 = M_{32}^0 = \frac{n E I}{[(1-\Psi) h]^2}(A' + B')_{2,3}.$$

Die Festhaltekräfte ergeben sich zu:

$$Z_{12} = \frac{M_{12}+M_{21}}{\Psi h} + \frac{P_1 \zeta_2}{\Psi h}, \tag{15}$$

$$Z_{22} = \frac{M_{23}+M_{32}}{(1-\Psi) h} - \frac{M_{21}+M_{12}}{\Psi h} - \frac{(P_1+P_2) \zeta_2}{(1-\Psi) h} - \frac{P_1 \zeta_2}{\Psi h}. \tag{16}$$

Nachdem die Festhaltekräfte ermittelt sind, bilden wir die Determinante und berechnen uns den Wert

$$\Delta_k = Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}. \tag{17}$$

Der geschilderte Rechnungsgang ist für andere Laststufen so oft zu wiederholen, bis mit genügender Genauigkeit durch numerische oder graphische Interpolation die zu dem Wert $\Delta_k = 0$ gehörende Laststufe ermittelt ist.

Die kritische Last lautet:

$$(P_1 + P_2)_{ki} = \frac{\pi^2 E n I}{(\beta h)^2}. \tag{18}$$

Daraus wird der β-Wert ermittelt.

In den Fig. 9 bis 16 sind die β-Werte für $n = 1$, $n = 5$, $n = 10$ in Abhängigkeit von c unter Berücksichtigung einiger Lastverhältnisse ($0 \leqq \alpha \leqq 1$) und für $\Psi = 0{,}25$, bzw. $\Psi = 0{,}3$ dargestellt. Die Fig. 17 bis 20 zeigen die Abhängigkeit der Werte β von α für $c = 0$, $c = 1$, $c = 2$ und $c = \infty$. Für die Grenzwerte von c ($c = 0$, $c = \infty$) werden die β-Werte in Abhängigkeit von n in den Fig. 21 und 22 angegeben.

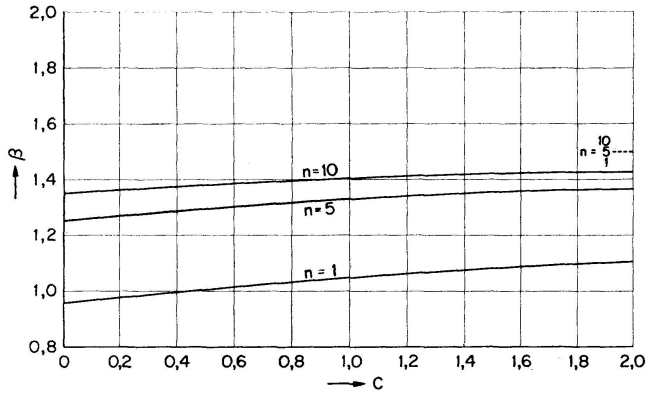


Fig. 9. $\alpha = 0$, $\Psi = 0{,}25$.

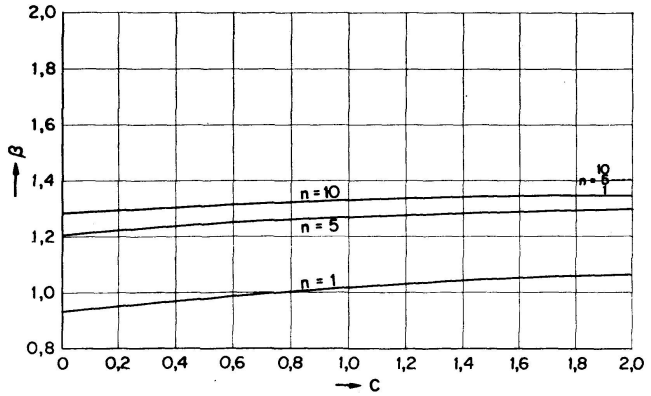
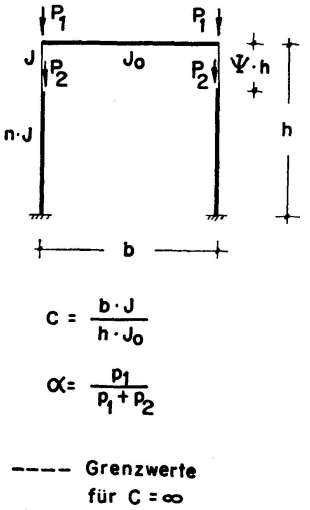


Fig. 10. $\alpha = 0$, $\Psi = 0{,}3$.



Erläuterung zu den Figuren 9—16.

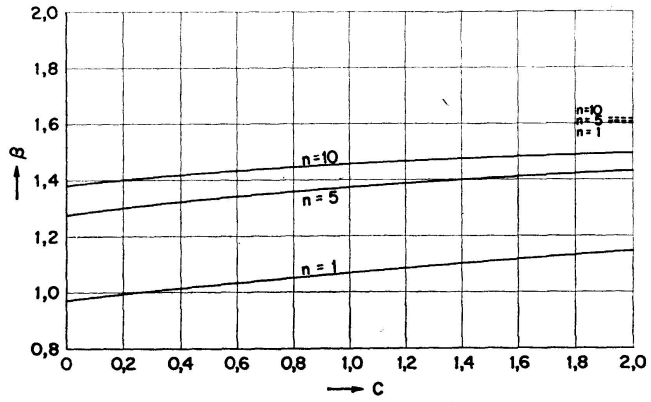


Fig. 11. $\alpha = 0{,}2$, $\Psi = 0{,}25$.

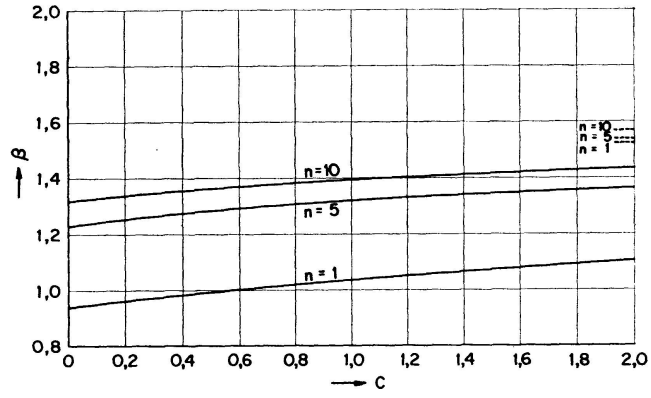


Fig. 12. $\alpha = 0{,}2$, $\Psi = 0{,}3$.

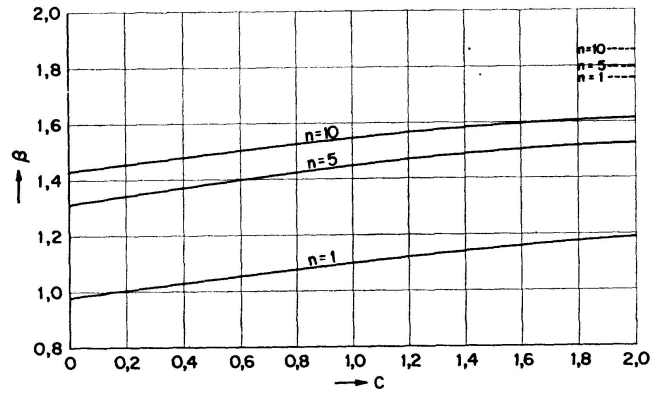


Fig. 13. $\alpha = 0{,}5$, $\Psi = 0{,}25$.

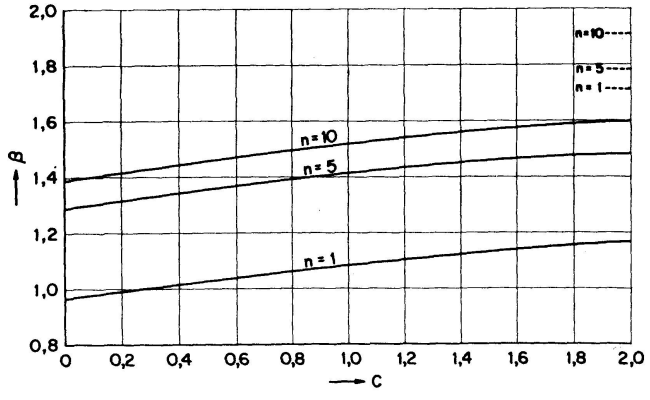


Fig. 14. $\alpha = 0{,}5$, $\Psi = 0{,}3$.

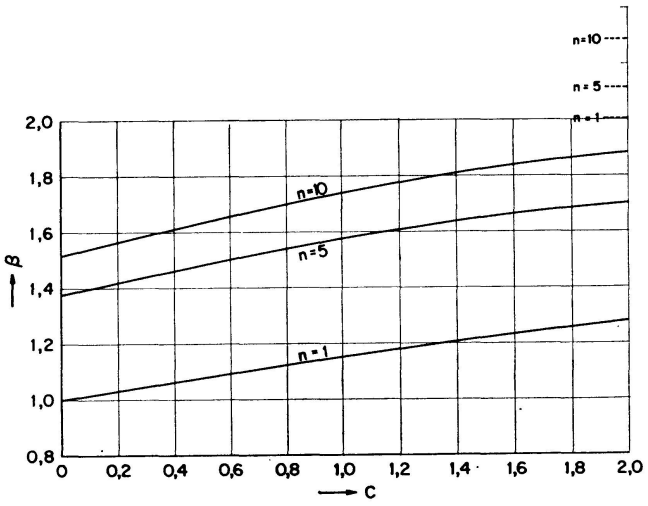


Fig. 15. $\alpha = 1{,}0$, $\Psi = 0{,}25$.

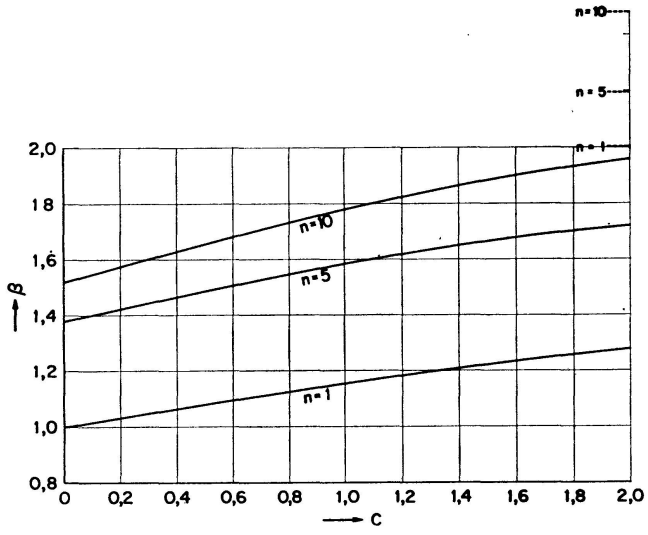


Fig. 16. $\alpha = 1{,}0$, $\Psi = 0{,}3$.

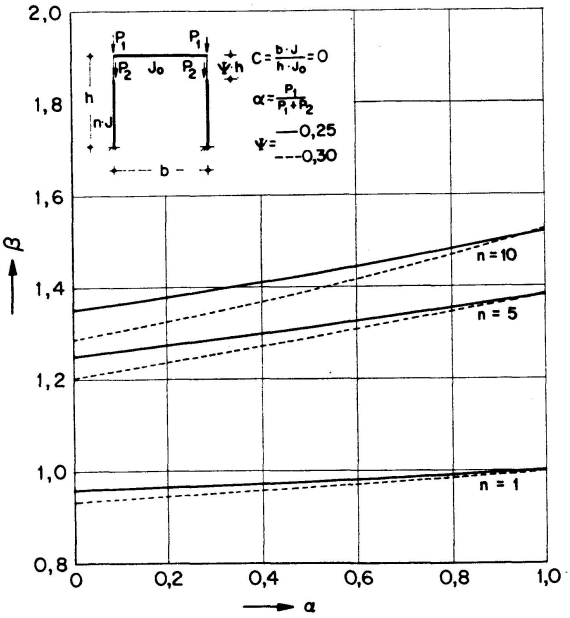


Fig. 17.

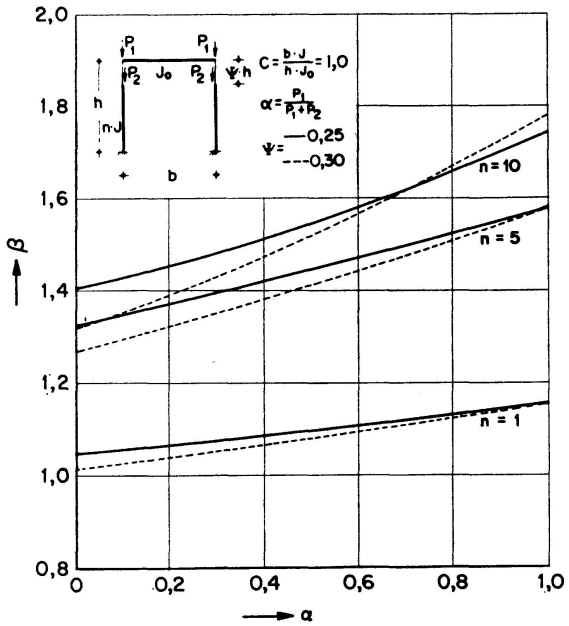


Fig. 18.

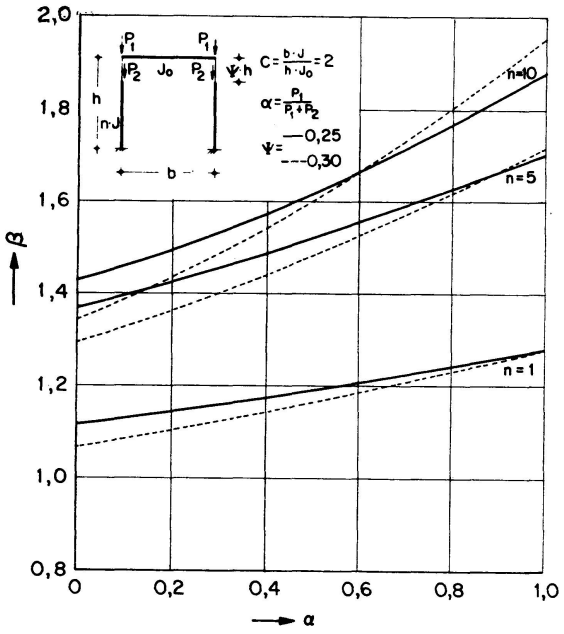


Fig. 19.

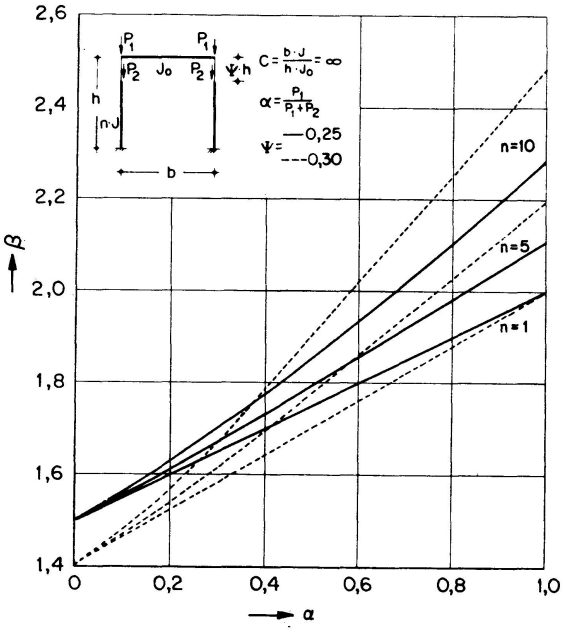


Fig. 20.

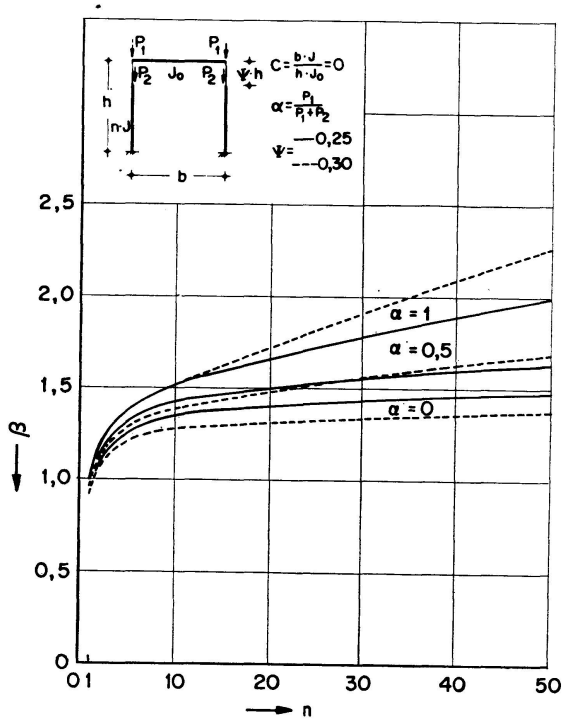


Fig. 21

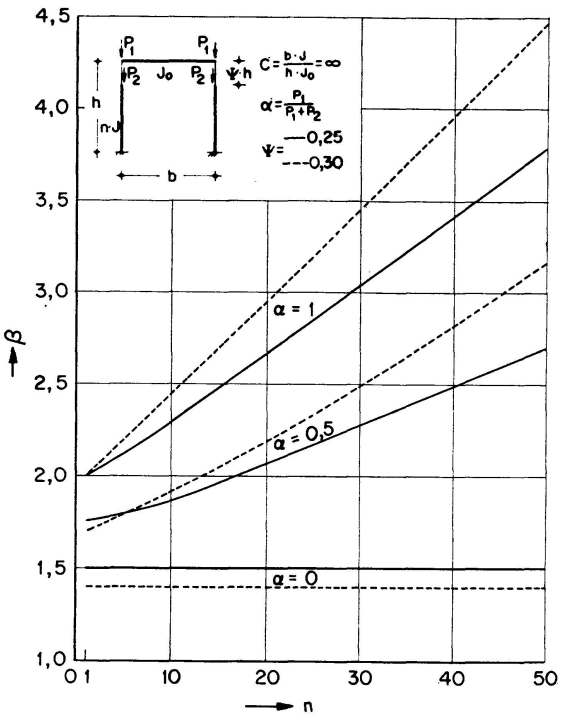


Fig. 22.

Literatur

1. CHWALLA, E. und JOKISCH, F.: Über das ebene Knickproblem des Stockwerkrahmens. Der Stahlbau 14 (1941), H. 8/9, S. 33.
2. BEER, H.: Beitrag zur Berechnung von räumlichen Rahmensystemen mit beweglicher Knickfigur. Österr. Bauzeitschrift 1948, S. 103.
3. KUPFERSCHMID, V.: Ebene und räumliche Rahmentragwerke. Wien: Springer 1952.
4. OSTENFELD, A.: Die Deformationsmethode. Berlin: Springer 1926.
5. CHWALLA, E.: Hilfstafeln zur Berechnung von Spannungsproblemen der Theorie zweiter Ordnung und von Knickproblemen. Köln 1959, Stahlbau-Verlags-GmbH.
6. BÜLTMANN, W.: Die Stabilität des Dreigelenkrechteckrahmens. Der Stahlbau 14 (1941), H. 1/3, S. 3.
7. RESINGER, F.: Beitrag zur Lösung von Stabwerksproblemen der Theorie II. Ordnung. Der Stahlbau 28 (1959), H. 3, S. 75.

Zusammenfassung

Für Rahmenstiele mit eingespannten Füßen, die an den Rahmenecken und zwischen diesen und den Stützenfüßen durch lotrecht angreifende Lasten beansprucht sind, wurden die Beiwerte β für die Knicklänge in Abhängigkeit von verschiedenen Parametern graphisch angegeben.

Summary

The coefficients β for the buckling lengthes of frame columns fixed at their base and subjected to vertical loads acting at the corners as well as within the column height are given in curves as functions of various parameters.

Résumé

Les coefficients β pour la longueur de flambage des poteaux de cadres, encastrés à leur base et soumis à des charges verticales agissant aux nœuds et sur les poteaux, ont été représentés en courbes, fonctions de différents paramètres.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Approximate Analysis of Continuous Prismatic Shells

Calcul approché des voiles prismatiques à travées multiples

Näherungsverfahren für durchlaufende, prismatische Schalen

A. M. MOUSA
Ph.D., Minister of Defense, Ministry of Defense, Karthoum, Sudan

R. A. PARMELEE
Ph.D., Associate Professor of Civil Engineering, Northwestern University, Evanston, Illinois, U.S.A.

S. L. LEE
Ph.D., Professor of Civil Engineering, Northwestern University, Evanston, Illinois, U.S.A.

Introduction

During the past few years several investigators have presented various techniques for the analysis of prismatic shell structures, and many computer programs have been developed for analyzing this type of simple span structure. An excellent review of the numerous papers which have been published in the literature on the analysis of simply supported prismatic shell structures can be found in the report of the ASCE Task Committee on Folded Plate Construction [1], and a comparison of simplified theories has been given by POWELL [2].

In contrast, the analysis of continuous prismatic shell structures has not received as much attention. However, this subject has recently been considered by several investigators, and a few methods of analysis have been presented. Approximate methods for the analysis of continuous prismatic shell structures have been discussed by YITZHAKI and REISS [3], and BEAUFAIT [4]. Procedures for obtaining more accurate solutions have been suggested by PULMANO and LEE [5], GOLDBERG, GUTZWILLER and LEE [6], SCORDELIS and LO [7], and LEE and MOUSA [8].

This paper presents an approximate method for the analysis of prismatic shell structures continuous over intermediate transverse diaphragms and simply supported at the two end diaphragms. The method is based on the ordinary theory for folded plates [9], and leads to improved accuracies in

comparison with the procedure suggested by BEAUFAIT [4], as discussed by SCORDELIS and LO [7], by formulating the elastic curves of individual plates, in the beam action analysis, in terms of infinite trigonometric series. The suggested procedure is convenient for hand computations.

An example problem to illustrate the application of the method is solved, and the results are compared with those obtained by LEE and MOUSA [8]. As a further comparison, the proposed method is used in solving one of the illustrative examples given by BEAUFAIT [4], which was also analyzed by SCORDELIS and LO [7].

Assumptions. The method of analysis is based on the following assumptions: Each plate is rectangular and of constant thickness; the material is homogeneous, isotropic and elastic; the longitudinal strains vary linearly across the width of each plate; the principle of superposition holds; the longitudinal fold lines are continuous and fully monolithic along their entire length; plates are relatively long compared to their width, aspect ratio equal to or greater than three; the supporting diaphragms are infinitely rigid in their planes but flexible normal to their planes.

Sign Convention. The sign convention adopted in this analysis is summarized below for convenient reference.

Component	*Positive Direction*
Normal load component	Acting downward
Tangential load component	Acting from left to right
In-plane load	Acting from left to right
Transverse bending moment	Producing tensile stresses on bottom fiber
Longitudinal bending moment	Producing tensile stresses on right edge
In-plane displacement	Producing movement from left to right
Rotation	Clockwise
Normal stress	Tensile

Notation. The letter symbols adopted for use in this paper are defined where they first appear and are listed alphabetically in the Appendix.

Method of Analysis

The method of analysis entails the following steps:

a) Assuming non-yielding fold lines, the reactions of the longitudinal edges due to the applied loads are determined using a transverse slab action analysis.

b) The final in-plane loads, the redundant reactions, and the elastic curves for individual plates are expanded into Fourier series satisfying the boundary conditions at the two transverse end diaphragms; setting the displacements at the intermediate supports equal to zero gives the value of the redundant reactions.

c) Applying arbitrary rotation for each plate and assuming that these rotations and the corresponding transverse bending moments and fold line reactions vary along the span as the elastic curves due to applied loads, the corrected values of these rotations are determined for each term of the Fourier series by satisfying the compatibility conditions at the fold lines.

d) Superposition of steps a, b and c gives the total stresses and displacements in the structure due to applied loads.

e) Steps b, c and d are repeated for succeeding terms of the Fourier series until the necessary degree of accuracy is achieved.

Beam Action Analysis. The differential equation governing the displacement of a prismatic beam subjected to an arbitrary loading of intensity $p(x)$ is given by

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{p(x)}{E I}, \tag{1}$$

in which E is the modulus of elasticity and I the moment of inertia of the beam. The general solution of Eq. 1 is

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + y_p(x), \tag{2}$$

in which $y_p(x)$ is the particular solution of Eq. (1) and c_1 to c_4 are integration constants.

A beam, simply supported on the two outer edges, continuous over t intermediate supports and subjected to the applied load $q(x)$, as shown in Fig. 1,

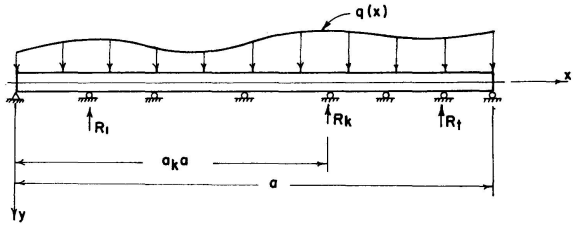


Fig. 1. Beam continuous over t intermediate supports and subjected to transverse load.

can be analyzed [10] as a simply supported beam subjected to the applied load $q(x)$ and the redundant reactions $R_1, R_2, \ldots R_t$, the latter assumed to be positive if acting upward. The applied load and the redundant reactions are approximated by Fourier series of the forms

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m \pi x}{a}, \tag{3}$$

$$R_k = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^k \sin \frac{m \pi x}{a} \quad (k = 1, 2, \ldots t), \tag{4}$$

in which

$$A_m = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \sin \frac{m \pi x}{a} dx, \tag{5}$$

$$A_m^k = \frac{2}{a} \lim_{\substack{r \to 0 \\ (a_k a - r)}}^{(a_k a + r)} \int \frac{R_k}{2r} \sin \frac{m \pi x}{a} dx = \frac{2 R_k}{a} \sin m \pi a_k, \tag{6}$$

in which a is the total longitudinal span, and a_k is the ratio of the distance between the end support and the redundant reaction k to the total longitudinal span length, as shown in Fig. 1.

The boundary conditions are given by

$$y(0) = y''(0) = y(a) = y''(a) = 0. \tag{7}$$

In view of Eq. (7), $y_p(x)$ can be conveniently taken in the form

$$y_p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m \pi x}{a}. \tag{8}$$

Referring to Eqs. (3) and (4), the total load $p(x)$ acting on the beam can be taken as

$$p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m - \sum_{k=1}^{t} A_m^k) \sin \frac{m \pi x}{a}, \tag{9}$$

substituting Eqs. (8) and (9) into Eq. (1) gives

$$B_m = \frac{a^4}{E I \pi^4 m^4} (A_m - \sum_{k=1}^{t} A_m^k) \tag{10}$$

and substituting Eqs. (2) and (8) into Eq. (7) yields

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0. \tag{11}$$

Therefore, Eq. (2) takes the form

$$y(x) = y_p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m \pi x}{a}, \tag{12}$$

substituting Eq. (10) into Eq. (12) in view of Eq. (6) yields the elastic curve

$$y(x) = \frac{a^4}{E I \pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \left(A_m - \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{t} R_k \sin m \pi a_k \right) \sin \frac{m \pi x}{a}. \tag{13}$$

For the unyielding intermediate supports, the displacements at these supports vanish, i.e.,

$$y(x_l) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots t), \tag{14}$$

in which x_l is the distance along the x-axis to the particular intermediate support l. Substituting Eq. (14) into Eq. (13) yields

$$\sum_{k=1}^{t} R_k D_{lk} = \frac{a}{2} D_l \qquad (l = 1, 2, \ldots t), \tag{15}$$

in which

$$D_l = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{m^4} \sin m\pi a_l, \tag{16}$$

$$D_{lk} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sin m\pi a_l \sin m\pi a_k. \tag{17}$$

Eq. (15) gives a set of t simultaneous equations which can be solved for the redundant reactions $R_1, R_2, \ldots R_t$. Substituting the calculated reactions and the Fourier coefficient A_m given by Eq. (13) gives the elastic curves of individual plates.

Stress Relaxation. In general the longitudinal normal stresses caused by the above mentioned beam action at the common edges of any two adjacent plates are not the same. Therefore, to satisfy the continuity condition, shearing stresses equal in magnitude and opposite in direction are applied at the common edges as shown in Fig. 2a. The magnitude and direction of these shearing

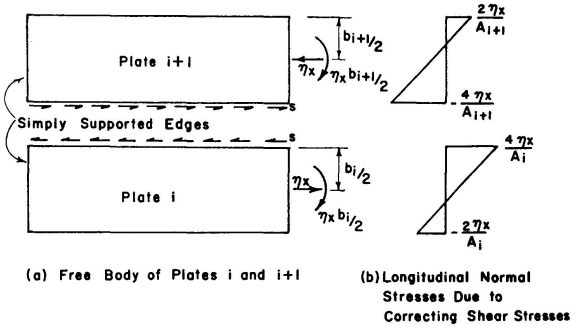


Fig. 2. Longitudinal normal stresses.

stresses are determined by a stress relaxation procedure [11]. Referring to Fig. 2b, it can be shown that the distribution factors are given by

$$d_i = \frac{4\eta_x/A_i}{(4\eta_x/A_i)+(4\eta_x/A_{i+1})} = \frac{A_{i+1}}{A_i+A_{i+1}}, \tag{18}$$

$$d_{i+1} = \frac{4\eta_x/A_{i+1}}{(4\eta_x/A_i)+(4\eta_x/A_{i+1})} = \frac{A_i}{A_i+A_{i+1}}, \tag{19}$$

in which d_i, A_i and d_{i+1}, A_{i+1} are the distribution factors and transverse cross-sectional areas of plate i and plate $i+1$, respectively; η_x is the normal force caused by the applied correcting shearing stresses. The carry over factors in this case are $-1/2$. It can be seen that the stress relaxation procedure is analogous to the moment distribution method in which the transverse cross-sectional areas correspond to the reciprocal of the stiffeness factors.

The corrected in-plane displacements due to the applied load of plate i at a reference transverse section are given by

$$\Delta_i = \frac{y_i}{M_{Li}} \frac{I_i(\sigma_1-\sigma_2)}{b_i}, \tag{20}$$

in which b_i, I_i, M_{Li} and y_i are the width, the moment of inertia, the longitudinal bending moment and the in-plane displacements on the reference section before the correcting shear stresses are applied, of plate i, respectively; and σ_1 and σ_2 are the corrected longitudinal stresses at the right and left edges respectively.

Compatability Conditions. Considering the geometry of the transverse cross-section of a continuous prismatic shell structure, the rotation of plate i, ψ_i, is expressed in terms of the final corrected in-plane displacements as

$$\psi_i = f(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots), \tag{21}$$

in which ψ_i is the rotation of plate i at a reference transverse section; δ_1, δ_2, $\delta_3, \ldots$, are the final corrected in-plane displacements of plates $1, 2, 3, \ldots$ at the section.

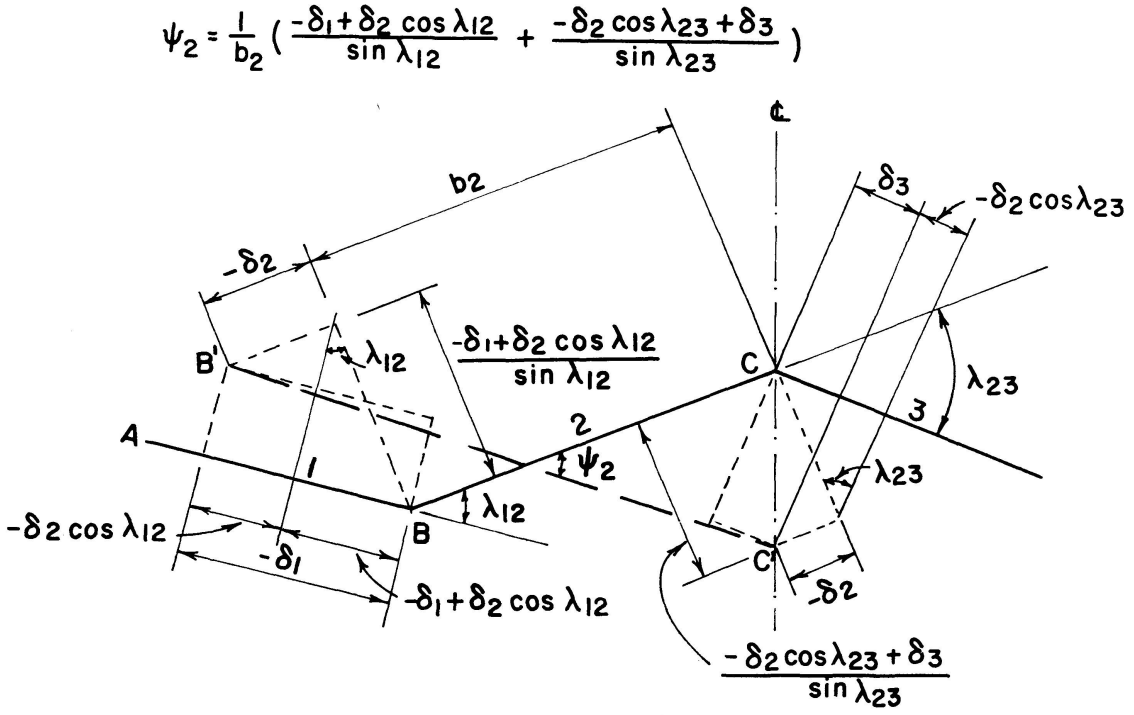


Fig. 3. Rotation of plate 2 in terms of in-plane displacements.

Eq. (21) is illustrated in Fig. 3. The plate rotation ψ_i can be expressed as

$$\psi_i = K_i \psi_i^0, \tag{22}$$

in which K_i and ψ_i^0 are the correction factor and an assumed arbitrary rotation of plate i respectively. A separate analysis for each plate is carried out for an assumed rotation ψ_i while the other plates undergo rigid body translation. The analysis is based on the assumption that the arbitrary rotation and the corresponding reactions at the fold lines vary, in the longitudinal direction, as the elastic curve, Eq. (13), due to the applied load for each term of the Fourier series.

The final corrected in-plane displacement δ_i is obtained by the superposition of the corrected in-plane displacements due to the applied load and those due to the plate rotations, i. e.,

$$\delta_i = \Delta_i + \sum_j \Delta_{ij} K_j, \tag{23}$$

in which Δ_i is the corrected in-plane displacements of plate i due to applied load, Δ_{ij} is the corrected in-plane displacement of plate i due to an arbitrary rotation of plate j, and j denotes the number of the plates excepting any cantilevered end plates. The displacement Δ_{ij} is computed by Eq. (20) in which, in this case, y_i, M_{Li}, σ_1 and σ_2 are those due to the assumed rotation of plate j.

Equating Eq. (21) to Eq. (22) yields

$$K_i \psi_i^0 = f(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots). \tag{24}$$

Eq. (24) gives a set of i simultaneous equations which satisfy the compatibility condition and, in view of Eq. (23), can be solved for the correction factors K_j.

The final longitudinal normal stresses and transverse bending moments for each term of the Fourier series are given by

$$\sigma_i = \sigma_i^1 + \sum_j K_j \sigma_{ij}, \tag{25}$$

$$M_{Ti} = M_{Ti}^1 + \sum_j K_j M_{Tij}, \tag{26}$$

in which σ_i^1 and M_{Ti}^1 are the corrected normal longitudinal stress and the transverse moment of plate i, respectively, due to the applied load; σ_{ij} and M_{Tij} are the corrected normal longitudinal stress and the transverse bending moment of plate i, respectively, due to an arbitrary rotation of plate j. The final stresses are the sum of all the stresses due to all the terms in the Fourier series.

Procedure of Analysis

The procedure to be followed in the analysis of a continuous prismatic shell consists of the following steps:

1. The applied load acting on each plate is resolved into normal and tangential components.

2. Assuming non-yielding fold lines, a transverse section of unit width is analyzed as a continuous one-way slab subjected to the normal load component, and the reactions at the longitudinal edges are obtained.

3. The final in-plane load acting on each plate is the vectorial sum of the tangential component of the applied load in step (1) and the in-plane component of the forces equal in magnitude and opposite in direction to the reactions in step (2).

4. The final in-plane load, the intermediate reactions and the elastic curve are expanded into infinite trigonometric series. Eq. (5) is used to calculate the Fourier coefficient A_m for the applied load, the redundant reactions are determined by Eq. (15), and the elastic curve is defined by Eq. (13).

5. To satisfy continuity conditions, the longitudinal normal stresses at the common edges of any two adjacent plates are made equal by applying the stress relaxation procedure. The corrected in-plane displacements at the reference section, where the deflections are non-zero for all Fourier harmonics are determined by Eq. (20).

6. An arbitrary rotation is applied at the reference transverse section for each plate, excepting any cantilevered end plates, and the reactions at the fold lines are determined. The rotations, the resulting transverse bending moments and the reactions at the fold lines are assumed to vary along the span in the same manner as the elastic curve evaluated in step (4). The corrected in-plane displacements are determined at the reference section as discussed in steps (3) to (5).

7. To satisfy the compatability conditions, each plate rotation is expressed in terms of the final corrected in-plane displacements, which are the sum of the displacements due to the applied load and the displacements due to each of the assumed plate rotations multiplied by a corresponding correction factor, in accordance with Eq. (23). Equating each plate rotation to the arbitrarily chosen rotation multiplied by the correction factor leads to a set of simultaneous equations, Eq. (24), which, upon substitution of Eq. (23), can be solved for the correction factors K_j.

8. The stresses are evaluated as the sum of the stresses due to the applied loads and the stresses due to the different rotations, each multiplied by the appropriate correction factors obtained in step (7), usings Eqs. (25) and (26).

9. Steps (5) to (8) are repeated for each term of the Fourier series. The number of terms needed for a solution depends on the desired degree of accuracy. This point will be discussed later in the illustrative examples. It is pertinent to observe that the correction factors are independent of the reference transverse section taken in the calculation.

Illustrative Examples

Example 1

A continuous prismatic shell structure having the dimensions shown in Fig. 4 and subjected to a uniformly distributed live load of intensity 80 psf. of horizontal projection is analyzed to illustrate the application of the proposed method. All plates have the same thickness, $h = 4$ in. Due to symmetry only half of the shell need be taken into consideration.

A transverse section of unit width at $x = 21$ ft. is selected as the reference section. One-way slab action analysis due to the normal load component is shown in Table 1a applying a routine moment distribution procedure. The total in-plane loads per unit length, q_i, on plate i is shown in Fig. 5a.

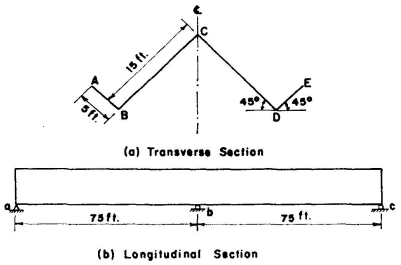


Fig. 4. Shell dimensions (example 1).

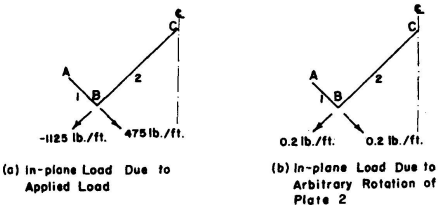


Fig. 5. Total in-plane load at $x = 21$ ft.

Table 1. Slab Action Analysis at $x = 21$ ft.
(Example 1)

a) Slab Action Analysis for Applied Load				b) Slab Action Analysis for Arbitrary Rotation of Plate 2			
Joint		B	C	Joint		B	C
D.F.	0	1	0	D.F.	0	1	0
F.E.M. (ft-lb)	500	—750	750	F.E.M. (ft-lb)	0	0	—3
Final Moment (ft-lb)	500	—500	875	Final Moment (ft-lb)	0	0	—3
Shear (lb)	—200	275	—325	Shear (lb)	0	0.2	—0.2

Substituting the uniform q_i into Eq. (5) yields

$$A_m = \frac{4 q_i}{m \pi} \qquad (m = 1, 3, \ldots). \tag{27}$$

Substituting Eq. (27) into Eq. (15), taking only odd values of m in Eqs. (16) and (17) due to symmetry and solving for the redundant reaction R_1 lead to, using only the first three terms of the series,

$$R_1 = 0.6255\, q_i a, \tag{28}$$

where $q_i a$ is the total in-plane load of plate i; the exact value being $R = 0.625\, q_i a$. Substituting Eqs. (27) and (28) into Eq. (13) yields

$$y_i(x) = \frac{a^4 q_i}{E I \pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^4} \left(\frac{4}{m \pi} - 1.251 \sin \frac{m \pi}{2} \right) \sin \frac{m \pi x}{a}. \tag{29}$$

Differentiating Eq. (29) gives expressions for the longitudinal bending moment,

$$M_{Li}(x) = \frac{a^2 q_i}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(\frac{4}{m \pi} - 1.251 \sin \frac{m \pi}{2} \right) \sin \frac{m \pi x}{a}. \tag{30}$$

For $m=1$, Eqs. (29) and (30) give

$$y_i(x) = 0.02228 \frac{a^4 q_i}{E I \pi^4} \sin \frac{\pi x}{a}, \tag{31}$$

$$M_{Li}(x) = 0.02228 \frac{a^2 q_i}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{a}. \tag{32}$$

In view of Eq. (32) and using simple beam theory the longitudinal normal stresses at the fold lines are determined. Substituting the transverse cross-sectional areas of the plates into Eqs. (18) and (19) gives the distribution factors for the stress relaxation procedure. The corrected longitudinal normal stresses at the reference section, for the first term of the Fourier series due to applied load is shown in Table 2.

Table 2. Corrected Longitudinal Normal Stresses at $x=21$ ft. due to Applied Load for $m=1$
(Example 1)

Joint	*A*	*B*		*C*
D.F.	0	0.75	0.25	0
Long. Stresses (psi)	—51.37	51.37	13.52	—13.52
Dist.	0	—28.39	9.46	0
C.O.	14.20	0	0	—4.73
Dist.	0	0	0	0
Corrected Stresses (psi)	—37.17	22.98	22.98	—18.25

Substituting Eqs. (31) and (32) with $x=21$ ft., the corrected longitudinal normal stresses shown in Table 2, and the moment of inertia and width of each plate into Eq. (20), yield the corrected in-plane displacements due to applied load at the reference section for the first term of the Fourier series

$$\Delta_1 = \quad 3948\,(10^3/E), \tag{33}$$

$$\Delta_2 = -9021\,(10^3/E), \tag{34}$$

in which Δ_i and E are in ft. and psf. respectively.

For the rotation of plate 2, assume, at the reference section,

$$\psi_2^0 = \frac{b_2}{E I_2}, \tag{35}$$

in which b_2 and I_2 are the width and moment of inertia of the transverse cross-section of plate 2 per unit length respectively. The moment distribution procedure for the assumed rotation and the resulting in-plane loads are shown in Table 1b and Fig. 5b respectively. The in-plane loads due to rotation of plate i, $q_{0i}(x)$, are assumed to vary along the span as the elastic curve due to the applied load. Hence $q_{0i}(x)$ is given by

$$q_{0i}(x) = \frac{q_{0i}^1}{y_i^1} y_i(x), \tag{36}$$

in which q_{0i}^1 is the in-plane load on plate i at the reference section due to the assumed rotation; y_i^1 is the in-plane displacement of plate i at the reference section due to the applied load. Substituting Eq. (31) into Eq. (36) yields, for $m=1$,

$$q_{0i}(x) = 2.349\, q_{0i}^1 \sin\frac{nx}{a}. \tag{37}$$

Applying the same procedure used perviously for the case of applied load, the corrected in-plane displacements due to rotation of plate 2 at the reference section, for $m=1$, are

$$\Delta_{12} = 2.735\,(10^3/E), \tag{38}$$

$$\Delta_{22} = 0.2363\,(10^3/E), \tag{39}$$

in which Δ_{ij} and E are in ft. and psf. respectively.

Referring to Fig. 3 and Fig. 4a, it can be seen that $\lambda_{12}=\lambda_{23}=\pi/2$, $\delta_2=-\delta_3$ and

$$\psi_2^0 K_2 = -(\delta_1+\delta_2)/15, \tag{40}$$

in which δ_i is in ft. Substituting Eqs. (33), (34), (38) and (39) into Eq. (23) gives

$$\delta_1 = (3948+2.735\,K_2)\,(10^3/E), \tag{41}$$

$$\delta_2 = (902.1-0.2363\,K_2)\,(10^3/E), \tag{42}$$

in which δ_i and E are in ft. and psf. respectively. Next Eq. (35) yields

$$\psi_2^0 = 4.860\,(10^3/E), \tag{43}$$

in which E is in psf. Substituting Eqs. (41), (42) and (43) into Eq. (40) and solving for K_2 yields $K_2=-40.40$.

Finally, substituting the appropriate values of the stresses into Eqs. (25) and (26) gives the final longitudinal normal stresses and transverse bending moments at the reference section for $m=1$.

The elastic curve and the longitudinal bending moments given by Eqs. (29) and (30) respectively are obrained for the other harmonics of the Fourier series and the stresses are calculated in the same manner. The number of terms in the Fourier series used depends upon the desired accuracy. In the following, the series is truncated when the value of the last term is less than one percent of the partial sum up to the previous terms. A summary of the correction factors, the corresponding transverse bending moments and the longitudinal normal stresses are shown in Tables 3 and 4. Only four terms of the Fourier series are needed to achieve the desired accuracy. The correction factors have the same values along the span for each Fourier harmonic, hence the stresses along the span can be readily calculated.

Table 3. Transverse Moment M_T at $x = 21$ ft.
(Example 1)

	m	K_2	Fold Line	
			B	C
Rotation of Plate 2	1	—40.40	0	—121.2
	3	—85.31	0	—255.9
	5	5.681	0	17.0
	7	—0.2079	0	—0.6
Applied Load			—500	—875.0
Final M_T (ft-lb)			—500	—1236

Table 4. Longitudinal Normal Stresses σ at $x = 21$ ft.
(Example 1)

m	K_2	Applied Load			Rotation of Plate 2			Final σ (psi)		
		Fold Line			Fold Line			Fold Line		
		A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	—40.40	—27.2	23.0	—18.3	1.3	—0.4	0.1			
3	—85.31	—706.3	436.7	—346.8	24.9	—7.1	1.2			
5	5.681	126.3	—78.1	62.0	—0.0	—0.0	—0.0	—598.1	378.7	—305.3
7	—0.2079	—7.1	4.4	—3.5	0.0	0.0	0.0			

A comparison of the above results with those obtained by LEE and MOUSA [8] is shown in Figs. 6 and 7. In the latter, the plate and membrane analysis are treated as plate and plane stress problems and the exact distributions of the intermediate diaphragm reactions are approximated by uniform step functions expanded into double Fourier series using nine steps.

Example 2

A continuous prismatic shell structure having the dimensions shown in Fig. 8, with constant thickness $h = 4$ in., is analyzed by the proposed method for the case of a uniformly distributed live load of intensity 80 psf. of horizontal projection. A comparison with the results given by BEAUFAIT [4], and SCORDELIS and LO [7], is shown in Figs. 9 and 10. Beaufait's procedure is also based on the ordinary folded plate theory; the continuity condition at the fold lines is satisfied at the center of selected segments and the elastic curve is obtained from the corrected longitudinal moments at these locations. SCORDELIS

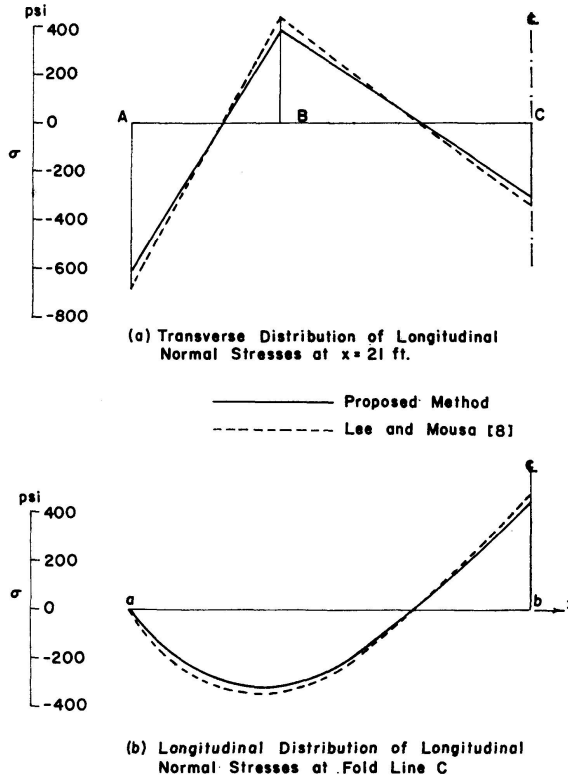


Fig. 6. Longitudinal normal stresses σ (example 1).

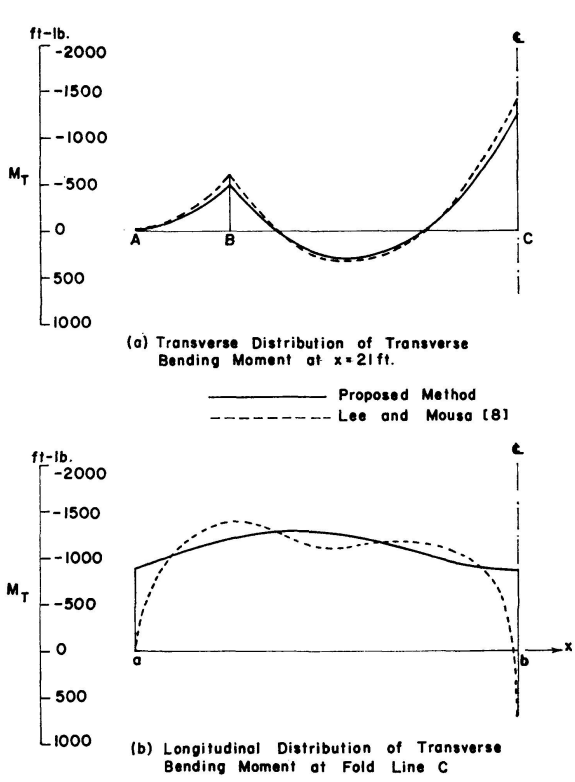


Fig. 7. Transverse bending moment M_T (example 1).

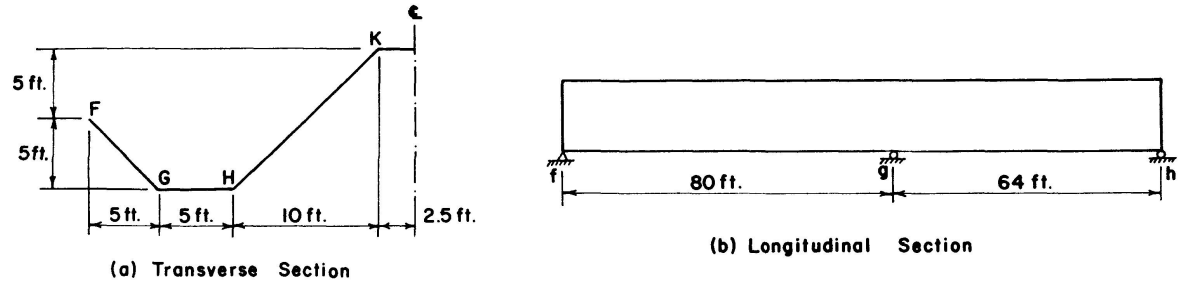


Fig. 8. Shell dimensions (example 2).

and Lo formulated a computer technique using plate bending and plane stress analysis and assuming that the reactions at the intermediate diaphragms vary linearly across the width of each plate. It is of interest to note that the variations of the normal and tangential component of the reactions across the width of each plate as shown by Lee and Mousa [8] deviate considerably from such an assumption.

Conclusions

This paper presents a simple procedure, which is convenient for hand computation, for the analysis of continuous prismatic shell structures. It can be seen that, except at the diaphragms, the transverse bending moments

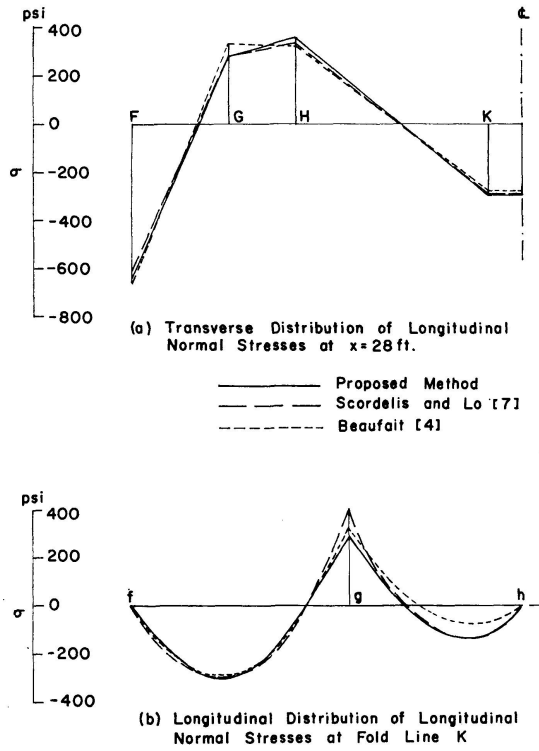


Fig. 9. Longitudinal normal stresses σ (example 2).

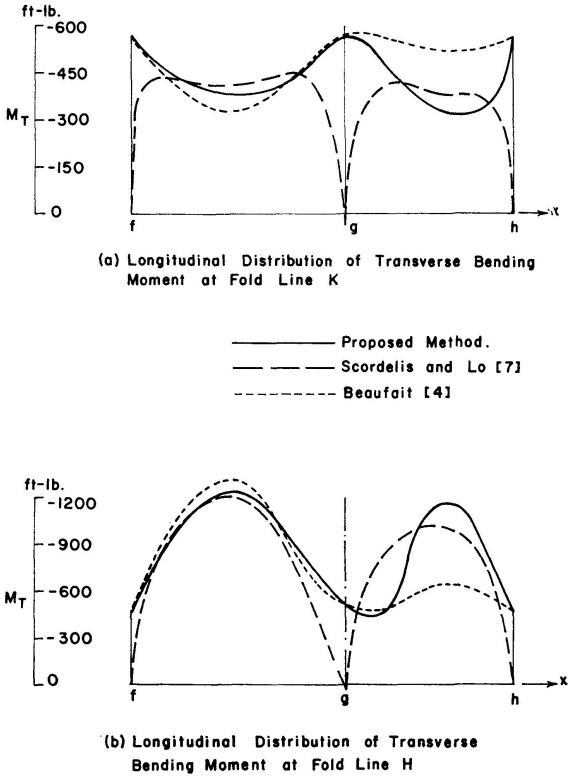


Fig. 10. Transverse bending moment M_T (example 2).

obtained by the proposed method of analysis are in good agreement with the results obtained by SCORDELIS and LO [7] and LEE and MOUSA [8]. Beaufait's results are in poorer agreement, especially at the smaller span. The agreement in the longitudinal normal stresses is better than the transverse bending moment, as expected.

Consideration of a unit strip in the analysis of the one-way slab action is justified by the fact that the variation of the transverse bending moment and the transverse normal stresses along the span, as shown by LEE and MOUSA [8], is very small except at the diaphragms.

The continuity condition need only be satisfied at one reference transverse section due to the fact that the reactions along the fold lines have the same variation along the span.

The compatibility condition is satisfied at all transverse sections if it is satisfied for a reference transverse section due to the assumption that the plate rotations, hence the corresponding reactions at the fold lines, have the same variation along the span as the elastic curves due to the applied load. Hence the correction factors K_j have the same values at all transverse sections.

A comparison of the stresses calculated by the proposed method with those obtained by the more exact method suggested by LEE and MOUSA [8], as shown in Figs. 6 and 7 and with those obtained by SCORDELIS and LO [7], as shown in Figs. 9 and 10, shows good agreement except at the supports. It is

pertinent to note that the agreement between the proposed method and the solution by LEE and MOUSA [8] is better than that between the proposed method and the solution by SCORDELIS and LO [7]. The latter may be due to the assumption made by SCORDELIS and LO, in their analysis of linear variation of the components of intermediate diaphragm reactions along the width of each plate. It was mentioned previously that the linear distributions of the reaction components deviate considerably from the results obtained by LEE and MOUSA using uniform step functions with nine steps across each plate.

Appendix. Notation

The following symbols are used in this paper:

A_i	transverse cross-sectional area of plate i
A_m, A_m^1 to A_m^t	Fourier coefficients for load and reactions
a_1 to a_t	span ratio
a	longitudinal span
B_m	Fourier coefficient for elastic curves
b_i	width of plate i
c_1 to c_4	constants of integration
D_l, D_{lk}	series defined by Eqs. (16) and (17)
d_i	distribution factor of plate i
E	modulus of elasticity
K_i	correction factor of plate i
I_i	moment of inertia of plate i
$M_{Li}(x)$	longitudinal bending moment function of plate i
M_{Li}	longitudinal bending moment of plate i
M_{Ti}	final transverse bending moment of plate i
M_{Ti}^1	transverse bending moment of plate i due to applied load
M_{Tij}	transverse bending moment of plate i due to rotation of plate j
m	integer defining Fourier harmonic in x direction
$p(x)$	arbitrary load function
$q(x)$	in-plane load function due to applied load
$q_{0i}(x)$	in-plane load function on plate i due to rotation
q_i	uniformly distributed in-plane load on plate i due to applied load
q_i^1	in-plane load on plate i at reference section due to applied load
q_{0i}^1	in-plane load on plate i at reference section due to rotation
R_1 to R_t	intermediate reactions
r	infinitely small length increment
t	number of intermediate diaphragms
$y(x)$	in-plane displacement function
$y_p(x)$	particular solution for y

$y_i(x)$	in-plane displacement function of plate i
y_i^1	in-plane displacement of plate i at reference section
σ_i	final normal stresses of plate i
σ_i^1	normal stresses of plate i due to applied load
σ_{ij}	normal stresses of plate i due to rotation of plate j
η_x	resultant of longitudinal normal stresses at x
ψ_i	total rotation of plate i
ψ_i^0	assumed rotation of plate i
δ_i	final corrected in-plane displacement of plate i
Δ_{ij}	corrected in-plane displacement of plate i due to rotation of plate j
Δ_i	corrected in-plane displacement of plate i
λ_{ij}	angle between plate i and plate j defined in Fig. 3

References

1. Phase I Report on Folded Plate Construction. Report of the Task Committee on Folded Plate Construction. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 89, No. ST6, p. 365, 1963.
2. Powell, G. H.: Comparison of Simplified Theories for Folded Plates. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 91, No. ST6, p. 1, 1965.
3. Yitzhaki, D. and Reiss, M.: Analysis of Folded Plates. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 88, No. ST5, p. 107, 1962.
4. Beaufait, F. W.: Analysis of Continous Folded Surfaces. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 91, No. ST6, p. 117, 1965.
5. Pulmano, V. A. and Lee, S. L.: Prismatic Shells with Intermediate Columns. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 91, No. ST6, p. 215, 1965.
6. Goldberg, J. E., Gutzwiller, M. J. and Lee, R. H.: Experimental and Analytical Studies of Continuous Folded Plates. Preprint, Structural Engineering Conference, ASCE, Miami, Florida, 1966.
7. Scordelis, A. C. and Lo, K. S.: Analysis of Continuous Folded Plate Surfaces. Discussion, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 92, No. ST3, p. 281, 1966.
8. Lee, S. L. and Mousa, A. M.: Prismatic Shell Structure Continuous over Transverse Diaphragms. Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 27, p. 43, 1967.
9. Scordelis, A. C.: Experimental and Analytical Study of Folded Plates. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 87, No. ST8, p. 139, 1961.
10. Lee, S. L.: Analysis of Continuous Beams by Fourier Series. Journal of the Engineering Mechanics Division. ASCE, Vol. 83, No. EM4, Proc. Paper No. 1399, 1957.
11. Winter, G. and Pei, M.: Hipped Plate Construction. Proceedings Awerican Concrete Institute, Vol. 43, p. 505, 1947.

Summary

An approximate analysis of multiple span, multiple bay prismatic shell structures simply supported at the two end diaphragms and continuous over the intermediate transverse diaphragms is presented. The in-plane load, the

intermediate diaphragm reactions and the elastic curve in the beam action analysis are expanded into Fourier series. The arbitrary plate rotations and the corresponding transverse bending moments and fold line reactions are assumed to vary along the span as the elastic curves due to the applied load for each term of the Fourier series. The actual plate rotations are determined from the compatability of fold line displacements at a reference transverse section. The number of terms in the Fourier series needed depends upon the desired accuracy of the solution. In general, four to five terms are sufficient for practical purposes and the proposed method is feasible for hand calculation.

Résumé

On présente une méthode de calcul approché des voiles prismatiques à travées multiples et à baies multiples simplement appuyées aux deux diaphragmes extrèmes et continus sur les diaphragmes transversaux intermédiaires. La charge dans le plan, les réactions des diaphragmes intermédiaires et la ligne élastique calculée comme pour une poutre ont été exprimé en séries de Fourier. Les rotations arbitraires de la plaque et les moments de flexion transversaux correspondants et les réactions des lignes de jonction sont supposés varier le long de portée comme les lignes élastique sous la charge appliquée pour chaque terme des séries de Fourier. Les rotations effectives de la plaque sont déterminées grâce à la loi de compatibilité des déplacements des lignes de pli par rapport à une section transversale de référence. Le nombre des termes nécessaires de la série de Fourier dépend de l'exactitude de la solution exigée. En général, 4 ou 5 termes sont suffisants dans la pratique et la méthode proposée est réalisable à la main.

Zusammenfassung

Für mehrfeldrige, mehrschiffige und prismatische Schalen, deren Endscheiben frei aufgelegt sind sowie über Zwischenquerscheiben durchlaufen, wird ein Näherungsverfahren vorgelegt. Die in der Fläche liegende Last, der Zwischenscheiben Auflagerkraft und die sich für einen Balken ergebende elastische Linie wurden in Fourier-Reihen entwickelt. Zur Variation längs der Spannweite sind die willkürlichen Plattenverdrehungen und die entsprechenden Quer-Biegemomente sowie Faltlinien-Auflagerkräfte so wie die elastische Linie, angemessen jedem Glied der Fourier-Reihe der angreifenden Last, angenommen. Die wirklichen Plattenverdrehungen sind durch die Verträglichkeit der Faltlinien-Verschiebungen eines nachgewiesenen Teils bestimmt. Es hängt von der gewünschten Genauigkeit ab, wie hoch die Zahl der benötigten Fourier-Glieder ist. Im allgemeinen dürften für die praktischen Fälle vier bis fünf Glieder genügen und es zeigt sich, daß das vorgeschlagene Verfahren für die Handrechnung durchführbar ist.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Semi-Infinite Plate Subjected to the Concentrated Load Acting at its Internal Point

Plaque semi-infinie soumise à une charge concentrée agissant en un point intérieur

Halbebenen-Platte unter Einzellast im Innern

BÜLENT ÖVÜNÇ*)
Ph.D., Academic Research Fellow, University of British Columbia, Vancouver, Canada

In this paper, the complex variable method of N. I. MUSKHELISHVILI is applied to the solution of semi-infinite plate subjected to the concentrated load acting at its internal point. The coefficients of the two functions of complex variable, whose combination gives the Airy Stress function, are taken as unknowns. Then they are determined by using the boundary conditions and considering the limits of these two functions while the loaded point approaches to the boundary or tends to the infinity. Two examples are given in order to visualize the stress pattern in the semi-infinite plate.

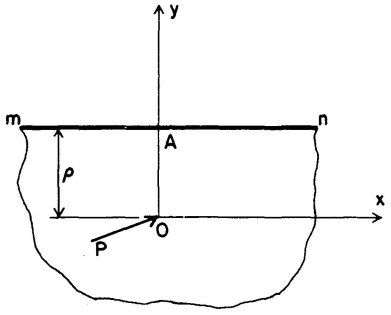


Fig. 1.

Consider the region S occupied by the semi-infinite plate as the "lower" half plane (Fig. 1) bounded by the horizontal line $m\,n$ at a distance ρ from the origin 0. Let the horizontal and vertical components of the load, P, applied at the origin 0, be respectively X, Y and let the two independent functions of complex variable be:

*) Presently Associate Professor, University of Southwestern Louisiana, U.S.A.

$$\begin{aligned}\tau(z) &= -(A+iB)\log z-(C+iD)\log(z-2i\rho)+\frac{E+iF}{z-2i\rho},\\ \psi(z) &= (C-iD)\log z+(A-iB)\log(z-2i\rho)+\frac{E+iF}{z-2i\rho},\end{aligned} \tag{1}$$

where the constants A, B, C, D, E, F, are the unknowns to be determined by the boundary conditions and from the limiting conditions corresponding to ρ, approaching zero or infinity.

The boundary condition is given by MUSKHELISHVILI [1])

$$\tau(t)+t\overline{\tau'(t)}+\overline{\psi(t)} = \text{constant}, \qquad t = x+i\rho. \tag{2}$$

Substituting the expressions (1) into the boundary condition (2) one obtains the following relations between the constants

$$E = 2\rho B, \qquad F = 2\rho A.$$

Then $\tau(z)$ and $\psi(z)$ become:

$$\begin{aligned}\tau(z) &= -(A+iB)\log z-(C+iD)\log(z-2i\rho)+2i\rho\frac{A-iB}{z-2i\rho},\\ \psi(z) &= (C-iD)\log z+(A-iB)\log(z-i\rho)+2i\rho\frac{A-iB}{z-2i\rho}.\end{aligned} \tag{3}$$

The first derivatives of the functions $\tau(z)$ and $\psi(z)$ are:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= -\frac{A+iB}{z}-\frac{C+iD}{z-2i\rho}-2i\rho\frac{A-iB}{(z-2i\rho)^2},\\ \Psi(z) &= \frac{C-iD}{z}+\frac{A-iB}{z-2i\rho}-2i\rho\frac{A-iB}{(z-2i\rho)^2},\end{aligned} \tag{4}$$

where, $$\Phi(z) = \tau'(z), \qquad \Psi(z) = \psi'(z).$$

Now, consider the case when ρ approaches zero. Putting $\rho = 0$ in the relations (4) one obtains

$$\Phi(z) = -\frac{A+iB}{z}-\frac{C+iD}{z}, \qquad \Psi(z) = \frac{C-iD}{z}+\frac{A-iB}{z}. \tag{5}$$

Similarly, when ρ increases to infinity the relations (4) become

$$\Phi(z) = -\frac{A+iB}{z}, \qquad \Psi(z) = \frac{C-iD}{z}. \tag{6}$$

But the solution of a semi-infinite plate under the concentrated load applied to its boundary is known.

---

[1]) N. I. MUSKEHELISHVILI: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, translated from the Russian by J. R. M. Radok, P. Noordhoff, Ltd., Groningen 1963.

$$\Phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi}\frac{1}{z}, \qquad \Psi(z) = \frac{X-iY}{2\pi}\frac{1}{z}. \tag{7}$$

Similarly the known solution of the infinite plate under a concentrated load gives

$$\Phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\chi)}\frac{1}{z}, \qquad \Psi(z) = \frac{\chi(X-iY)}{2\pi(1+\chi)}\frac{1}{z}, \tag{8}$$

where $\chi = 3-\nu$ for plane strain conditions

and $\chi = \dfrac{3-\nu}{1-\nu}$ for generalized plane stress conditions,

ν being the Poisson's ratio.

The remaining unknown constants A, B, C, D, can be determined from the relations (5), (6), (7), (8) as follows:

$$A = \frac{X}{2\pi(1+\chi)}, \quad B = \frac{Y}{2\pi(1+\chi)}, \quad C = \frac{\chi X}{2\pi(1+\chi)}, \quad D = \frac{\chi Y}{2\pi(1+\chi)}. \tag{9}$$

Finally, by substituting the expressions for the coefficients (9) in the relations (3), the functions $\tau(z)$ and $\psi(z)$ are found as follows.

$$\begin{aligned} \tau(z) &= \frac{1}{2\pi(1+\chi)}\left[-(X+iY)(\log z+\chi\log(z-2i\rho)+2i\rho\frac{X-iY}{z-2i\rho}\right], \\ \psi(z) &= \frac{X+iY}{2\pi(1+\chi)}\left[\chi\log z+\log(z-2i\rho)+\frac{2i\rho}{z-2i\rho}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

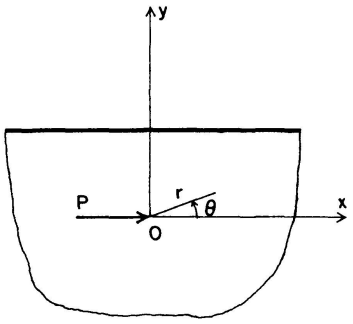


Fig. 2.

Example 1. Let the force P acting at the point 0 be horizontal, Fig. 2. MUSKHELISHVILI gives the following expressions for the stresses in polar coordinates[2]).

$$\sigma_\rho+\sigma_\theta = 2[\phi(z)+\overline{\phi(z)}], \qquad \sigma_\theta-\sigma_\rho+2i\tau_{\rho\theta} = 2[\bar{z}\phi'(z)+\Psi(z)]e^{2i\theta}. \tag{11}$$

Taking the derivatives of the functions $\tau(z)$ and $\psi(z)$ in (10) and substituting them in (11), the stress components are obtained in polar coordinates as follows:

---

[2]) Please refer to footnote 1.

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2\pi(1+\chi)}\left[\frac{(\chi-1)\cos\theta}{r} + \frac{(1-2\chi)\,r\cos\theta - 2\rho\sin 2\theta}{r^2-4\rho r\sin\theta+4\rho^2}\right.$$
$$+\frac{[\chi r^2+4(6-\chi)\rho^2]\,r\cos\theta-4(r^2+2\rho^2)\rho\sin 2\theta}{(r^2-4\rho r\sin\theta+4\rho^2)^2}$$
$$\left.+4\rho r\frac{r^3\sin 2\theta-6\rho r^2\cos\theta+8\rho^3\cos\theta}{(r^2-4\rho r\sin\theta+4\rho^2)^3}\right],$$

$$\sigma_\rho = \frac{P}{2\pi(1+\chi)}\left[(3+\chi)\frac{\cos\theta}{r} + \frac{(1+2\chi)\,r\cos\theta-2\rho\sin 2\theta}{r^2-4\rho r\sin\theta+4\rho^2}\right.$$
$$+\frac{[\chi r^2-4(\chi+2)\rho^2]\,r\cos\theta+4(r^2-2\rho^2)\rho\sin 2\theta}{(r^2-4\rho r\sin\theta+4\rho^2)^2}$$
$$\left.+4\rho r\frac{r^3\sin 2\theta-6\rho r^2\cos\theta+8\rho^3\cos\theta}{(r^2-4\rho r\sin\theta+4\rho^2)^3}\right],$$

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{P}{2\pi(1+\chi)}\left[(\chi-1)\frac{\sin\theta}{r} + \frac{r\sin\theta+2\rho\cos 2\theta}{r^2-4\rho r\sin\theta+4\rho^2}\right.$$
$$+\frac{[4\rho^2 r(2-\chi)-\chi r^3]\sin\theta+8\rho^3\cos 2\theta-2\rho r^2(1-2\chi)}{(r^2-4\rho r\sin\theta+4\rho^2)^2}$$
$$\left.+4\rho r\frac{r^3\cos 2\theta+6\rho r^2\sin\theta+8\rho^3\sin\theta-12\rho^2 r}{(r^2-4\rho r\sin\theta+4\rho^2)^3}\right].$$

Example 2. The concentrated load P and the Poisson ration ν are taken

$$P = 100\pi e^{\frac{i\pi}{6}}, \qquad \nu = 0.3.$$

For a possible comparison with the results of photo-elastic experiments the calculation is made of isoclinic and isochromatic lines. The former (Fig. 3) keep constant angle with the directions of principal stresses at all points, and the latter (Fig. 4) correspond to lines along which the difference of principal stresses is constant.

The calculations have been made with the IBM 7040 computer.

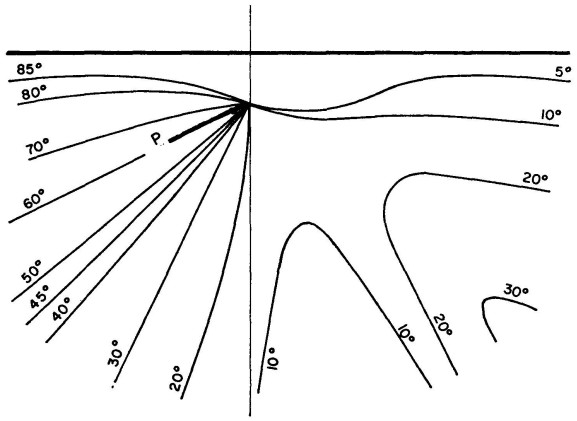


Fig. 3. Isoclinics.

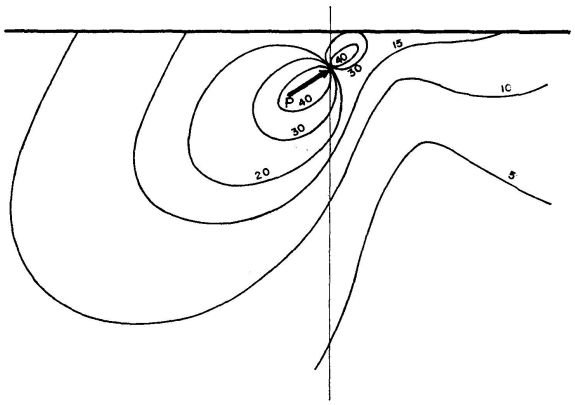


Fig. 4. Isochromatics.

Acknowledgement

The author wishes to express gratitude to Professor Dr. SEMIH TEZCAN and to the National Research Council for financial support.

Summary

An attempt has been made to obtain the solution of the presented problem by considering the solution of the semi-infinite plate loaded at the boundary and the solution of infinite plate loaded at the internal point are its limit cases.

Résumé

On a essayé d'obtenir la solution du problème présenté en examinant la solution d'une plaque semi-infinie chargée sur son bord, et la solution d'une plaque infinie chargée sur un point intérieur qui sont ses cas limites.

Zusammenfassung

Für das vorgelegte Problem ward der Versuch unternommen, eine Lösung zu finden, in Anbetracht dessen, daß die Lösungen der Halbebene für Lasten einmal am Rand und im Innern die Grenzfälle darstellen.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Theorie elastischer Balkenreihen

Theory for Series of Elastic Beams

Théorie pour des séries de poutres élastiques

GERHARD SPAETHE
Dr. Ing., Versuchs- und Entwicklungsstelle des Straßenwesens, Berlin, DDR

1. Allgemeines

Unter einer Balkenreihe verstehen wir im folgenden ein Tragwerk, welches aus einer Reihe nebeneinander liegender elastischer Stäbe besteht, die sich in einer Linie berühren und in dieser Berührungslinie auf der ganzen Länge gelenkig miteinander verbunden sind.

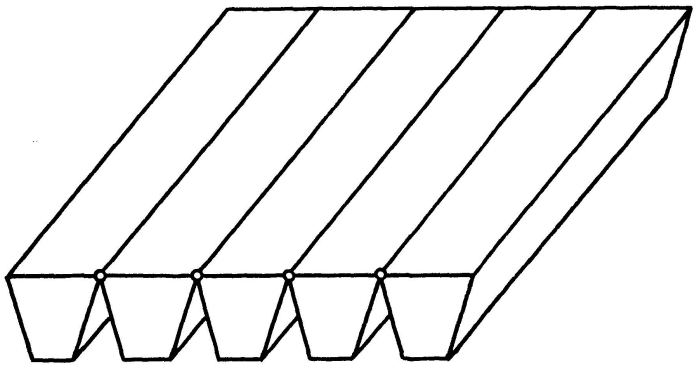


Fig. 1. Balkenreihe.

Solche Systeme gewinnen mit der Verbreitung der Fertigteilbauweise an Bedeutung. Bei der Herstellung von ebenen Tragwerken aus einzelnen stabförmigen Elementen werden vielfach Verbindungen angewendet, die in Querrichtung nur vernachlässigbar kleine Momente übertragen, jedoch gleiche Verschiebungen der Balkenränder erzwingen. Unter Ausnützung der Torsionssteifigkeit der Balken entsteht eine Querverteilung der Schnittgrößen und eine gewisse flächenhafte Tragwirkung.

Als erster hat CSONKA bereits 1936 ein Verfahren zur Berechnung von Balkenreihen angegeben, wobei er sich zunächst [1] auf den Fall beschränkt,

daß die Schubmittelpunkte der Balken und die Gelenke in einer Ebene liegen. Die spätere Erweiterung auf den allgemeineren Fall [2] führt auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Durchbiegungen der Gelenke[1]). Die numerische Lösung für den Fall der frei drehbaren Lagerung ergibt sich mit Hilfe von Fourierreihen.

Roesli [3] betrachtet die Balkenreihe als Kontinuum und geht von der Theorie der orthotropen Platte aus, die er für die besonderen Bedingungen der Balkenreihe erweitert. Dieses Verfahren gilt also unter der Voraussetzung, daß die Zahl der Balken groß ist.

In den letzten Jahren wurden vor allem von tschechischen Autoren Berechnungsverfahren angegeben [4 bis 9]. Sie gehen sämtlich vom Diskontinuum aus, vernachlässigen die gegenseitige Behinderung der Verdrehung der Balken und die daraus resultierenden horizontalen Gelenkkräfte.

Zur Lösung werden entweder Fourierreihen benutzt [6, 7] oder das sich ergebende Differentialgleichungssystem wird geschlossen gelöst [5, 8, 9]. Dabei beschränkt man sich vielfach auf den Sonderfall, daß die Lasten in Querrichtung gesehen mittig auf den Balken stehen.

Vom Verfasser wurde in [10, 11] für den Sonderfall der frei drehbaren Lagerung der Balken und kräftefreien Längsrändern eine geschlossene Lösung angegeben, die es gestattet, auch Einzellasten zu behandeln. Damit wurde die Grundlage für die Berechnung von Einflußfeldern geschaffen.

Alle bisher bekannt gewordenen Arbeiten beschränken sich auf den zwar praktisch wichtigsten, aber auch einfachsten Fall der beidseitig frei drehbaren Lagerung. In der vorliegenden Arbeit wird die in [10, 11] für einen Sonderfall angegebene Theorie in erweiterter und verallgemeinerter Form dargestellt, wobei insbesondere verschiedene technisch wichtige Randbedingungen an den Längs- und Querrändern berücksichtigt werden. Damit wird die Möglichkeit geschaffen, Verformungen, Schnittgrößen, Gelenkkräfte und Auflagerkräfte in beliebig gestützten Balkenreihen mit rechteckigem Grundriß unter beliebiger vertikaler Belastung in geschlossener Form zu berechnen. In dieser Arbeit werden die theoretischen Grundlagen bereitgestellt und die Anwendung der Theorie an einem einfachen Beispiel gezeigt. Eine Einschätzung des Tragverhaltens von Balkenreihen mit einer Darstellung der Ergebnisse numerischer Rechnungen wird an anderer Stelle gegeben.

Im Sinne einer widerspruchsfreien Darstellung der Theorie ist es erforderlich, den folgenden Ableitungen die Torsionstheorie der dünnwandigen Stäbe unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion [12, 13] zugrunde zu legen. Die bei Vollquerschnitten und dickwandigen Hohlquerschnitten übliche Vernachlässigung der Wölbkrafttorsion ist als Sonderfall mit $C_T = 0$ enthalten.

Die Theorie eignet sich besonders für eine Auswertung mit elektronischen

---

[1]) Dieses Differentialgleichungssystem stimmt mit System (9) für die Stützungsart Ia nach Fig. 3 überein.

Digitalrechnern. Für die Berechnung von Einflußfeldern frei aufliegender Balkenreihen liegt in der Versuchs- und Entwicklungsstelle des Straßenwesens ein Programm vor, welches seit mehreren Jahren mit Erfolg bei der Projektierung von Fertigteilbrücken angewendet wird.

2. Annahmen und Voraussetzungen, Bezeichnungen

Die Balken werden als vollkommen elastische Stäbe im Sinne Stabstatik betrachtet, deren Querschnittsform unter Belastung erhalten bleibt. Alle Balken sind gleich ausgebildet und haben einfach symmetrische Querschnittsform, die sich in Balkenlängsrichtung nicht ändert. Sie liegen alle in einer gemeinsamen horizontalen Ebene, welche senkrecht zu den Symmetrieachsen liegt. Die Schubverformungen aus Querkräften werden vernachlässigt.

Aus Fig. 2 ist die Lage des Koordinatensystems, die Numerierung der Balken und Gelenke sowie die Definition der Schnittgrößen und Gelenkkräfte ersichtlich.

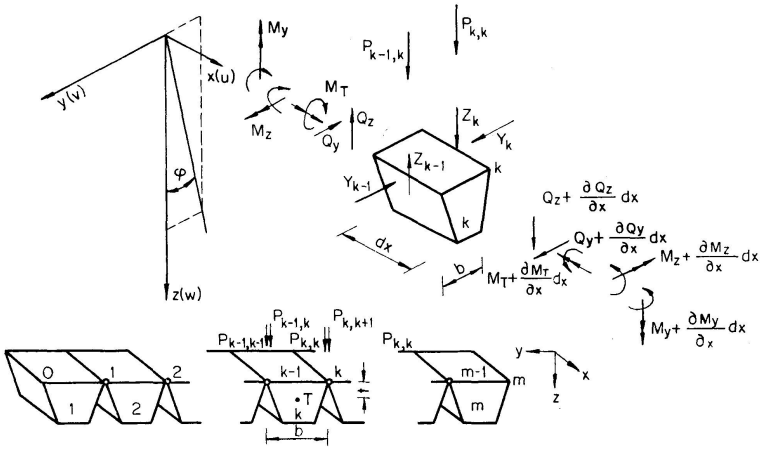


Fig. 2. Definitionen.

Es ist ferner

l	Stützweite der Balken
b	Balkenbreite
t	Abstand zwischen Schubmittelpunkt T des Balkens und den Gelenklinien in Richtung z, im folgenden Schubmittelpunktsabstand genannt
EJ_y	Biegesteifigkeit bei Biegung um die y-Achse
EJ_z	Biegesteifigkeit bei Biegung um die z-Achse
GJ_T	Saint Venantsche Torsionssteifigkeit
EC_T	Wölbsteifigkeit bezogen auf den Schubmittelpunkt T
v_k, w_k	Verschiebungen der Gelenklinie k in Richtung y und z
$\hat{v}_k, \hat{w}_k$	Verschiebungen des Schubmittelpunktes des Balkens k in Richtung y und z

φ_k Verdrehung des Balkenquerschnittes k
m Anzahl der Balken

Die auf den Balken k einwirkende beliebige äußere Belastung kann man bei Annahme einer starren Querschnittsform nach dem Hebelgesetz in zwei Linienlasten $p_{k-1,k}$ und $p_{k,k}$ aufteilen, die in den Balkenrändern wirken. Es ist ferner

$$p_k = p_{k,k} + p_{k,k+1} \tag{1}$$

die Summe beider am Gelenk k angreifenden Linienlasten.

Im allgemeinen Fall wird die Gelenkkraft eine bestimmte Richtung im Raum haben. Von ihren drei Komponenten X_k, Y_k und Z_k wird die Kraft X_k, die in Richtung der Balkenlängsachse wirkt, vernachlässigt. In [10] wurde der Einfluß dieser Komponente genauer untersucht. Dabei zeigte sich, daß X_k verhältnismäßig große Werte annehmen kann, jedoch sein Einfluß auf die Schnittkräfte und Spannungen in den Balken bei den im Fertigteilbau üblichen Abmessungen im allgemeinen klein ist. Die im folgenden dargestellte Theorie gilt, wenn der vertikale Abstand zwischen Balkenschwerpunkt und Gelenk genügend klein ist. Bei sehr hohen und schmalen Balken mit Gelenken an den oberen Balkenkanten ist eine genauere Untersuchung zu empfehlen.

3. Das Differentialgleichungssystem für die Verschiebungen der Gelenke

Als unbekannte Funktionen werden die Verschiebungen w_k und v_k der Gelenke eingeführt. Werden die Balken als Stäbe mit starrer Querschnittsform betrachtet, so können sich alle Gelenke in horizontaler Richtung nur um den gleichen Betrag $v_k = v$ verschieben.

Das Problem führt auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die unbekannten Durchbiegungen w_k. Die erste und die letzte Gleichung dieses Systems sind dabei von der Art der Stützung der Längsränder der Balkenreihe abhängig.

In dieser Arbeit werden die in Fig. 3 dargestellten Randbedingungen untersucht. Die dort im Querschnitt gezeichnete Stützung denke man sich über die gesamte Balkenlänge kontinuierlich durchgehend.

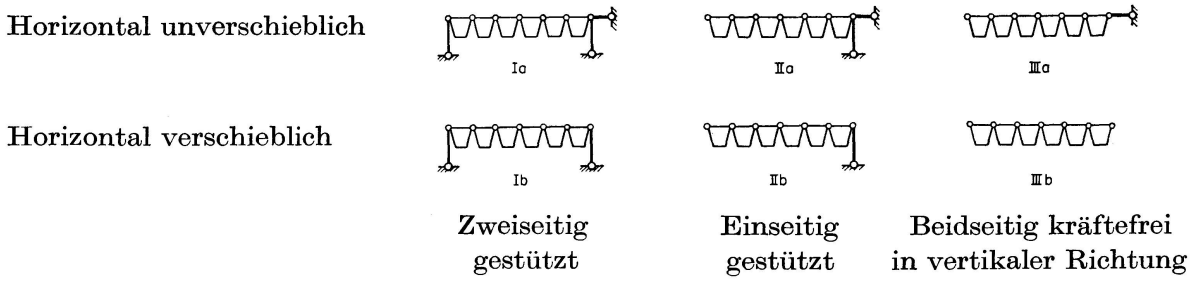


Fig. 3. Randbedingungen an den Längsrändern.

Für einen beliebigen mittleren Balken k gelten die bekannten Differentialgleichungen der Balkenbiegung und Balkentorsion, die mit den in Fig. 2 definierten Gelenkkräften und äußeren Lasten folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned}
\frac{E J_y}{l^4}\hat{w}_k^{\cdot\cdot\cdot\cdot} &= Z_k - Z_{k-1} + p_{k,k} + p_{k-1,k},\\
\frac{E J_z}{l^4}\hat{v}_k^{\cdot\cdot\cdot\cdot} &= Y_k - Y_{k-1},\\
\frac{G J_T}{l^2}\varphi_k^{\cdot\cdot} - \frac{E C_T}{l^4}\varphi_k^{\cdot\cdot\cdot\cdot} &= (Z_k + Z_{k-1})\frac{b}{2} - (Y_k - Y_{k-1})\,t + (p_{k\,k} - p_{k-1,k})\frac{b}{2}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Darin bedeuten Punkte Ableitungen nach der bezogenen Koordinate

$$\xi = x/l.$$

Multipliziert man die drei Gleichungen der Reihe noch mit $b/2$, t und l und addiert sie, so ergibt sich

$$\frac{E J_y}{l^4}\frac{b}{2}\hat{w}_k^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \frac{E J_z}{l^4}t\,\hat{v}_k^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \frac{G J_T}{l^2}\varphi_k^{\cdot\cdot} - \frac{E C_T}{l^4}\varphi_k^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = Z_k b + p_{k,k} b \tag{3}$$

und mit den Faktoren $b/2$, $-t$ und -1 wird

$$\frac{E J_y}{l^4}\frac{b}{2}\hat{w}_k^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - \frac{E J_z}{l^4}t\,\hat{v}_k^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - \frac{G J_T}{l^2}\varphi_k^{\cdot\cdot} + \frac{E C_T}{l^4}\varphi_k^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = -Z_{k-1} b + p_{k-1,k} b. \tag{4}$$

Der Übergang von k auf $k+1$ in der letzten Gleichung und Addition ergibt

$$\begin{aligned}
&\frac{E J_y}{l^4}\frac{b}{2}(\hat{w}_k^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \hat{w}_{k+1}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}) + \frac{E J_z}{l^4}t(\hat{v}_k^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - \hat{v}_{k+1}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}) + \frac{G J_T}{l^2}(\varphi_k^{\cdot\cdot} - \varphi_{k+1}^{\cdot\cdot})\\
&\quad - \frac{E C_T}{l^4}(\varphi_k^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - \varphi_{k+1}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}) = b\,(p_{k,k} + p_{k,k+1}) = b\,p_k.
\end{aligned} \tag{5}$$

Aus Fig. 4 können die Beziehungen zwischen den Verschiebungen des Schubmittelpunktes $\hat{w}_k$, $\hat{v}_k$ und der Balkenverdrehung φ_k einerseits und den Verschiebungen der Gelenke w_k, v andererseits abgelesen werden.

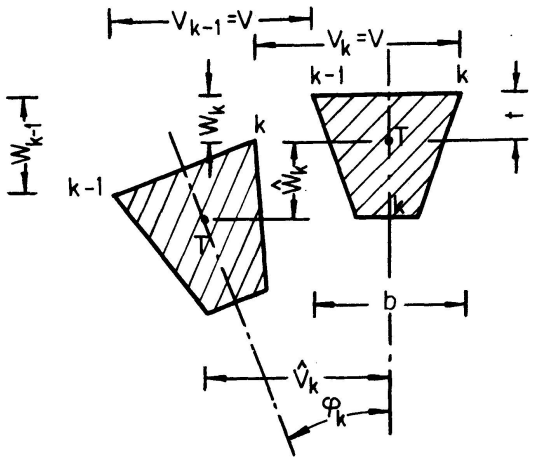


Fig. 4. Verformter Querschnitt.

$$\hat{w}_k = \frac{1}{2}(w_{k-1} + w_k), \qquad \varphi_k = \frac{1}{b}(w_{k-1} - w_k), \qquad \hat{v}_k = v - \frac{t}{b}(w_{k-1} - w_k). \tag{6}$$

Bei der Stützung I a, II a und III a ist $v = 0$.

Werden die Gleichungen (6) in (5) eingesetzt und noch folgende dimensionslose Abkürzungen eingeführt

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{4}\left(\frac{b}{l}\right)^2 \frac{E J_y}{G J_T} + \left(\frac{t}{l}\right)^2 \frac{E J_z}{G J_T} + \frac{E C_T}{l^2 G J_T}, \\ f_2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{b}{l}\right)^2 \frac{E J_y}{G J_T} - \left(\frac{t}{l}\right)^2 \frac{E J_z}{G J_T} - \frac{E C_T}{l^2 G J_T}, \end{aligned} \tag{7}$$

so erhält man nach kurzer Rechnung die Differentialgleichung für eine mittlere Gelenkfuge in der Form

$$f_2 w_{k-1}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + 2 f_1 w_k^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + f_2 w_{k+1}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + w_{k-1}^{\cdot\cdot} - 2 w_k^{\cdot\cdot} + w_{k+1}^{\cdot\cdot} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} p_k. \tag{8}$$

Es ist bemerkenswert, daß hier die Horizontalverschiebung v der Gelenke herausfällt. Die Randgleichungen für vertikal gestützte Ränder ergeben sich aus (8) mit $w_0 = 0$ bzw. $w_m = 0$.

Die Randgleichungen für kräftefreie Ränder erhält man auf ähnlichem Wege wie oben durch Elimination der Gelenkkräfte aus den Gleichungen (2), in denen man $k = 1$ zu setzen und die Randbedingungen $Z_0 = Y_0 = 0$ zu beachten hat.

Es ergibt sich für den freien Rand 0

$$f_1 w_0^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + f_2 w_1^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - w_0^{\cdot\cdot} + w_1^{\cdot\cdot} - \frac{t b}{l^2} \frac{E J_z}{G J_T} v^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} p_0 \tag{9}$$

und für den freien Rand m

$$f_2 w_{m-1}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + f_1 w_m^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + w_{m-1}^{\cdot\cdot} - w_m^{\cdot\cdot} + \frac{t b}{l^2} \frac{E J_z}{G J_T} v^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} p_m. \tag{9}$$

Hier tritt als weitere unbekannte Funktion die Horizontalverschiebung v auf. Diese kann in folgender Weise eliminiert werden. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß gelten muß

$$Y_1 + (Y_2 - Y_1) + (Y_3 - Y_2) + \cdots + (Y_{m-1} - Y_{m-2}) - Y_{m-1} = 0.$$

Daraus folgt mit der zweiten Gleichung (2)

$$\hat{v}_1^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \hat{v}_2^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \hat{v}_3^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \cdots + \hat{v}_{m-1}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \hat{v}_m^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = 0.$$

In diese setzen wir die dritte Gleichung (6) ein

$$v^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - (w_0^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - w_1^{\cdot\cdot\cdot\cdot})\frac{t}{b} + v^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - (w_1^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - w_2^{\cdot\cdot\cdot\cdot})\frac{t}{b} + \cdots + v^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - (w_{m-1}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - w_m^{\cdot\cdot\cdot\cdot})\frac{t}{b} = 0$$

und erhalten für die Stützung III b

$$v^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{t}{m\,b}\left(w_0^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - w_m^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\right). \tag{10}$$

Bei der Stützung II b wird mit $w_m = 0$

$$v^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{t}{m\,b} w_0^{\cdot\cdot\cdot\cdot}. \tag{11}$$

Dies in (9) eingesetzt ergibt die gesuchten Randgleichungen.

Stützung II b — Rand 0

$$\left[f_1 - \frac{1}{m}\left(\frac{t}{l}\right)^2 \frac{E J_z}{G J_T}\right] w_0^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + f_2\, w_1^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - w_0^{\cdot\cdot} + w_1^{\cdot\cdot} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} p_0,$$

Stützung III b — Rand 0

$$\left[f_1 - \frac{1}{m}\left(\frac{t}{l}\right)^2 \frac{E J_z}{G J_T}\right] w_0^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + f_2\, w_1^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \frac{1}{m}\left(\frac{t}{l}\right)^2 \frac{E J_z}{G J_T} w_m^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - w_0^{\cdot\cdot} + w_1^{\cdot\cdot} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} p_0,$$

Rand m

$$\frac{1}{m}\left(\frac{t}{l}\right)^2 \frac{E J_z}{G J_T} w_0^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + f_2\, w_{m-1}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \left[f_1 - \frac{1}{m}\left(\frac{t}{l}\right)^2 \frac{E J_z}{G J_T}\right] w_m^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + w_{m-1}^{\cdot\cdot} - w_m^{\cdot\cdot} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} p_m.$$

Diese Ergebnisse lassen sich in übersichtlicher Form in Matrizenschreibweise zusammenfassen. Wir schreiben das Differentialgleichungssystem für die Berechnung der Balkenreihe in der Form

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{H})\,\mathfrak{w}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{w}^{\cdot\cdot} = \frac{b^2 l^2}{G J_T}\mathfrak{p}. \tag{12}$$

Darin sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ symmetrische Matrizen mit

$m-1$ Zeilen und Spalten bei Stützung I,
m Zeilen und Spalten bei Stützung II
und $m+1$ Zeilen und Spalten bei Stützung III.

Ihr Aufbau ist für die verschiedenen Stützungsarten aus Tafel 1 ersichtlich.

$\mathfrak{B}$ ist bei Stützung III singulär, was man sofort erkennt, wenn man ihre Zeilenvektoren addiert, in den Fällen I und II jedoch nichtsingulär. Die Matrix $\mathfrak{A}$ ist im allgemeinen nichtsingulär, sie wird jedoch bei Stützung III für den Sonderfall $f_1 = f_2$ ebenfalls singulär. Diesen Fall, bei dem sämtliche Matrizen der Differentialgleichung (12) singulär sind, wollen wir bei den weiteren Ableitungen zunächst ausschließen. Auf ihn wird weiter unten noch kurz eingegangen. Die Matrix $\mathfrak{H}$ ist nur in den Fällen II b und III b nicht gleich Null. Bei Stützung III b ist sie an ihren vier Ecken besetzt, während bei Stützung II b nur ein einziger Koeffizient von Null verschieden ist.

Die gegebenen äußeren Belastungsfunktionen werden zum Vektor $\mathfrak{p}$ und die gesuchten Durchbiegungsfunktionen zum Vektor $\mathfrak{w}$ zusammengefaßt.

Tafel 1

Stützung der Längsränder		Vertikal I	Vertikal II	Vertikal III
Horizontal	a, b	$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 2f_1 & f_2 & & & \\ f_2 & 2f_1 & f_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & f_2 & 2f_1 & f_2 \\ & & & f_2 & 2f_1 \end{bmatrix}$	$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & & & \\ f_2 & 2f_1 & f_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & f_2 & 2f_1 & f_2 \\ & & & f_2 & 2f_1 \end{bmatrix}$	$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & & & \\ f_2 & 2f_1 & f_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & f_2 & 2f_1 & f_2 \\ & & & f_2 & f_1 \end{bmatrix}$
	a, b	$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$	$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$	$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$
	a	$\mathfrak{H} = 0$	$\mathfrak{H} = 0$	$\mathfrak{H} = 0$
	b	$\mathfrak{H} = 0$	$\mathfrak{H} = \frac{1}{m}\left(\frac{t}{l}\right)^2 \frac{EJ_z}{GJ_T} \begin{bmatrix} -1 & \\ & \end{bmatrix}$	$\mathfrak{H} = \frac{1}{m}\left(\frac{t}{l}\right)^2 \frac{EJ_z}{GJ_T} \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}$
Anzahl der Zeilen u. Spalten		$m-1$	m	$m+1$

$$\mathfrak{p} = \begin{bmatrix} \vdots \\ p_j \\ \vdots \end{bmatrix}, \qquad \mathfrak{w} = \begin{bmatrix} \vdots \\ w_j \\ \vdots \end{bmatrix}, \tag{13}$$

mit $j = 1, 2, 3 \ldots (m-1)$ bei Stützung I,
$j = 0, 1, 2 \ldots (m-1)$ bei Stützung II
und $j = 0, 1, 2 \quad m$ bei Stützung III.

Es ist bemerkenswert, daß bei der Stützungsart I b keine Horizontalverschiebung v auftreten kann und somit der Verformungs- und Spannungszustand stets mit dem des Falles I a identisch ist. Im Sonderfall $t = 0$, wenn die Gelenke und die Schubmittelpunkte sämtlicher Balken in einer Ebene liegen, wird auch bei den Stützungen II b und III b die Horizontalverschiebung zu Null.

Das Differentialgleichungssystem (12) ist die Grundgleichung für die Berechnung von Balkenreihen. Gelingt es, dieses System für eine bestimmte Balkenreihe unter der vorgegebenen Belastung $\mathfrak{p}$ bei Berücksichtigung aller aus der Art der Stützung und der Belastung sich ergebenden Randbedingungen zu integrieren, so ist damit die strenge Lösung des Problems gefunden. Sobald die Durchbiegungen $\mathfrak{w}$ der Gelenke bekannt sind, können die Schnittgrößen, Gelenkkräfte und Auflagerkräfte aus den im Abschnitt 6 angegebenen Beziehungen ermittelt werden.

4. Die Lösung des Differentialgleichungssystems

Es gelingt, das System (12) bei den vier Stützungsarten in geschlossener Form zu lösen, in denen die Matrix $\mathfrak{H} = 0$ ist. Es läßt sich jedoch zeigen, daß bei den beiden übrigen Stützungsarten II b und III b der Einfluß von $\mathfrak{H}$ auf die Vertikalverschiebungen $\mathfrak{w}$ der Gelenke von sehr geringem Einfluß ist. Um auch in diesen beiden Fällen mit einem erträglichen Aufwand zu einer Lösung zu kommen, wird $\mathfrak{H}$ vernachlässigt und die Durchbiegungen $\mathfrak{w}$ werden stets aus dem vereinfachten System

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{w}'''' + \mathfrak{B}\,\mathfrak{w}'' = \frac{b^2 l^2}{G J_T}\mathfrak{p} \tag{14}$$

berechnet. Die Ermittlung der Horizontalverschiebungen v erfolgt dann anschließend aus der Differentialgleichung (10) bzw. (11).

Dieses Vorgehen bedeutet geometrisch, daß die Durchbiegungen w unter der Annahme berechnet werden, daß die Balkenreihe seitlich durch eine Kraft Y_m gestützt ist. Anschließend wird durch eine Horizontalverschiebung dieses Y_m zu Null gemacht. Dabei werden die unter der Annahme $v = 0$ berechneten Durchbiegungen w beibehalten. Diese Näherung wird um so besser Werte liefern, je kleiner der Schubmittelpunktsabstand t, je größer die Stützweite l und die Balkenzahl m ist.

Wir betrachten das homogene System

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{w}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}+\mathfrak{B}\,\mathfrak{w}^{\cdot\cdot}=0 \tag{15}$$

und machen den Ansatz

$$\mathfrak{w}=\mathfrak{x}_k\,e^{\lambda_k\xi} \tag{16}$$

mit

$$\mathfrak{x}_k=\begin{bmatrix}\vdots\\ x_{jk}\\ \vdots\end{bmatrix},\quad \begin{array}{ll} j=1,2\ldots(m-1) & \text{Stützung I,}\\ j=0,1\ldots(m-1) & \text{Stützung II,}\\ j=0,1\ldots\quad m & \text{Stützung III.}\end{array}$$

Dieser Ansatz, in (15) eingesetzt, führt auf das Eigenwertproblem

$$(\mathfrak{A}\lambda_k^2+\mathfrak{B})\,\lambda_k^2\,\mathfrak{x}_k=0.$$

Die Eigenwerte $\lambda_{k,1}=\lambda_{k,2}=0$ interessieren uns nicht weiter. Wir fassen das homogene Gleichungssystem

$$(\mathfrak{A}\lambda_k^2+\mathfrak{B})\,\mathfrak{x}_k=0 \tag{17}$$

als System von Differenzengleichungen auf. Die i-te Gleichung lautet ausführlich hingeschrieben

$$(f_2\lambda_k^2+1)\,x_{j-1,k}+2\,(f_1\lambda_k^2-1)\,x_{j,k}+(f_2\lambda_k^2+1)\,x_{j+1,k}=0$$

oder mit

$$\cos\psi_k=-\frac{f_1\lambda_k^2-1}{f_2\lambda_k^2+1}, \tag{18}$$

$$x_{j-1,k}-2\,x_{j,k}\cos\psi_k+x_{j+1,k}=0. \tag{19}$$

Der Ansatz

$$x_{j,k}=r^j$$

liefert

$$r^2-2\,r\cos\psi_k+1=0 \qquad i=\sqrt{-1}$$

$$r_{1,2}=\cos\psi_k\pm\sqrt{\cos^2\psi_k-1}=\cos\psi_k\pm i\sin\psi_k=e^{\pm i\psi_k}.$$

Daraus folgt die allgemeine Lösung des Systems von homogenen Differenzengleichungen (17)

$$x_{j,k}=A_1 r_1^j+A_2 r_2^j=A_1 e^{ij\psi_k}+A_2 e^{-ij\psi_k}=B_1\cos j\psi_k+B_2\sin j\psi_k. \tag{20}$$

Darin sind B_1 und B_2 reelle Konstanten, deren Größe aus der ersten und letzten Gleichung des Systems (17) bzw. (19) ermittelt werden kann. Diese Randgleichungen sind je nach der Stützungsart verschieden. Wir zeigen hier den Rechnungsgang für die Stützung II. Die erste Gleichung lautet mit $j=0$

$$-x_{0,k}\cos\psi_k+x_{1,k}=0$$

und mit (20)

$$-B_1\cos\psi_k+B_1\cos\psi_k+B_2\sin\psi_k=0.$$

Daraus folgt $B_2=0$.

Aus der letzten Gleichung

$$x_{m-2,k}-2\,x_{m-1,k}\cos\psi_k=0$$

ergibt sich mit $B_2=0$

$$B_1\,[\cos(m-2)\,\psi_k-2\cos(m-1)\,\psi_k\cos\psi_k]=0$$

und nach kurzer Rechnung

$$\cos m\psi_k = 0, \qquad m\psi_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \psi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2m}.$$

Wir setzen dies in (18) ein und lösen nach den gesuchten Eigenwerten λ_k^2 auf.

$$\lambda_k^2 = \frac{1 - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2m}}{f_1 + f_2 \cos\frac{(2k+1)\pi}{2m}}, \qquad k = 0, 1, 2 \ldots (m-1). \tag{21}$$

Den zugehörigen Eigenvektor $\mathfrak{x}_k$ erhält man, wenn man die noch freie Konstante $B_1 = 1$ setzt, unter Beachtung von $B_2 = 0$ aus (20) zu

$$\mathfrak{x}_k = \begin{bmatrix} \cos\frac{0\,(2k+1)\pi}{2m} \\ \cos\frac{1\,(2k+1)\pi}{2m} \\ \vdots \\ \cos\frac{j\,(2k+1)\pi}{2m} \\ \vdots \\ \cos\frac{(m-1)\,(2k+1)\pi}{2m} \end{bmatrix}.$$

In dieser Form ist $\mathfrak{x}_k$ bezüglich der Matrix $\mathfrak{A}$ orthogonal, jedoch nicht normiert, so daß gilt

$$\mathfrak{x}_k' \mathfrak{A} \mathfrak{x}_j = \begin{cases} 0 \text{ für } j \neq k, \\ d_k \text{ für } j = k. \end{cases} \tag{22}$$

Die m Eigenvektoren $\mathfrak{x}_k$ werden folgendermaßen zur quadratischen, nichtsymmetrischen Matrix $\mathfrak{X}$ zusammengefaßt.

$$\mathfrak{X} = (\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \ldots \mathfrak{x}_k \ldots \mathfrak{x}_{m-1}),$$

$$\mathfrak{X} = (x_{j,k}) \quad \text{mit} \quad x_{j,k} = \cos\frac{j\,(2k+1)\pi}{2m}$$

$$\text{und } j = 0, 1, 2 \ldots (m-1),$$

$$k = 0, 1, 2 \ldots (m-1).$$

Oder ausführlich hingeschrieben:

$$\mathfrak{X} = \begin{bmatrix} \cos\frac{0\cdot 1\pi}{2m} & \cos\frac{0\cdot 3\pi}{2m} & \cos\frac{0\cdot 5\pi}{2m} & \ldots & \cos\frac{0\,(2m-1)\pi}{2m} \\ \cos\frac{1\cdot 1\pi}{2m} & \cos\frac{1\cdot 3\pi}{2m} & \cos\frac{1\cdot 5\pi}{2m} & & \cos\frac{1\,(2m-1)\pi}{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos\frac{(m-1)\,1\pi}{2m} & \cos\frac{(m-1)\,3\pi}{2m} & \cos\frac{(m-1)\,5\pi}{2m} & \ldots & \cos\frac{(m-1)\,(2m-1)\pi}{2m} \end{bmatrix}.$$

Dann kann man die Gleichungen (22) zur Matrizengleichung

$$\mathfrak{X}' \mathfrak{A} \mathfrak{X} = \mathfrak{D} = \mathrm{Diag}\,(d_k) \tag{23}$$

zusammenfassen.

Die Berechnung der Koeffizienten der Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ kann in üblicher Weise nach (23) erfolgen. Zur Rechenvereinfachung und mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung bei der Formulierung der Randbedingungen für elastisch senkbare Stützung spalten wir die Matrix $\mathfrak{A}$ folgendermaßen auf:

$$\mathfrak{A} = f_1 \mathfrak{A}_1 + f_2 \mathfrak{A}_2 \tag{24}$$

mit

mit
$$\mathfrak{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathfrak{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{D} = f_1 \mathfrak{X}' \mathfrak{A}_1 \mathfrak{X} + f_2 \mathfrak{X}' \mathfrak{A}_2 \mathfrak{X} = f_1 \mathfrak{D}_1 + f_2 \mathfrak{D}_2 .$$

Führt man die Matrizenmultiplikationen im einzelnen durch, so erhält man nach längerer aber elementarer Rechnung, wobei zu beachten ist, daß allgemein

$$\sum_{j=1}^{n} \cos j\,\alpha = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}}{2 \sin\frac{\alpha}{2}}$$

gilt, die folgenden Ergebnisse:

$$\mathfrak{D}_1 = \mathrm{Diag}\,(d_{1,k}) = m \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} = m\,\mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{D}_2 = \mathrm{Diag}\,(d_{2,k}) = m \begin{bmatrix} \cos\frac{2\cdot 0+1}{2m}\pi & & & \\ & \cos\frac{2\cdot 1+1}{2m}\pi & & \\ & & \cos\frac{2\cdot 2+1}{2m}\pi & \\ & & & \ddots \\ & & & & \cos\frac{2(m-1)+1}{2m}\pi \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$\mathfrak{D} = f_1 \mathfrak{D}_1 + f_2 \mathfrak{D}_2 = m \begin{bmatrix} f_1 + f_2 \cos \frac{2 \cdot 0 + 1}{2m} \pi & & & \\ & f_1 + f_2 \cos \frac{2 \cdot 1 + 1}{2m} \pi & & \\ & & f_1 + f_2 \cos \frac{2 \cdot 2 + 1}{2m} \pi & \\ & & & \ddots \\ & & & f_1 + f_2 \cos \frac{2(m-1)+1}{2m} \pi \end{bmatrix}.$$

Die hier für die Stützung II gezeigten Ableitungen lassen sich in ähnlicher Weise auch für die beiden anderen Stützungsarten I und III durchführen. Die Ergebnisse sind in der Tafel 2 übersichtlich zusammengestellt.

Die Eigenwerte λ_k^2 sind sämtlich verschieden und reell und für die Stützungen I und II stets positiv. Bei Stützung III ist der erste Eigenwert λ_0^2 immer gleich Null. Bei den Matrizen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ beachte man im Fall III den Faktor 2 beim ersten und letzten Koeffizienten. Die quadratische Matrix $\mathfrak{X}$ ist in den Fällen I und III symmetrisch, im Fall II jedoch nichtsymmetrisch.

Faßt man die Eigenwerte λ_k^2 zur Diagonalmatrix

$$\Lambda = \mathrm{Diag}\,(\lambda_k^2)$$

zusammen, so läßt sich die Gesamtheit der Gleichungen (17) in Form der Matrizengleichung

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{X}\,\Lambda + \mathfrak{B}\,\mathfrak{X} = 0$$

schreiben. Linksmultiplikation mit $\mathfrak{X}'$ ergibt

$$\mathfrak{X}'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{X}\,\Lambda + \mathfrak{X}'\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{X} = 0$$

oder mit (23)

$$\mathfrak{D}\,\Lambda + \mathfrak{X}'\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{X} = 0. \tag{26}$$

Das Differentialgleichungssystem (14) läßt sich nun auf Orthogonalform transformieren, wenn man an Stelle der Durchbiegungen w_k der Gelenke neue unbekannte Funktionen g_k einführt, die mit w_k durch die Transformationsbeziehung

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{X}\,\mathfrak{g} \tag{27}$$

verknüpft sind. Wird diese in (14) eingesetzt, so ergibt sich

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{g}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{g}^{\cdot\cdot} = \frac{b^2 l^2}{G J_T}\mathfrak{p}$$

und nach Multiplikation mit $\mathfrak{X}'$ von links

$$\mathfrak{X}'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{g}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \mathfrak{X}'\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{g}^{\cdot\cdot} = \frac{b^2 l^2}{G J_T}\mathfrak{X}'\,\mathfrak{p}.$$

Tafel 2

Stützung der Längsränder	I	II	III
Indizes	$j = 1, 2, 3 \ldots (m-1)$ $k = 1, 2, 3 \ldots (m-1)$	$j = 0, 1, 2 \ldots (m-1)$ $k = 0, 1, 2 \ldots (m-1)$	$j = 0, 1, 2 \ldots m$ $k = 0, 1, 2 \ldots m$
Eigenwerte	$\lambda_k^2 = \dfrac{1 - \cos \frac{k}{m}\pi}{f_1 + f_2 \cos \frac{k}{m}\pi}$	$\lambda_k^2 = \dfrac{1 - \cos \frac{(2k+1)}{2m}\pi}{f_1 + f_2 \cos \frac{(2k+1)}{2m}\pi}$	$\lambda_k^2 = \dfrac{1 - \cos \frac{k}{m}\pi}{f_1 + f_2 \cos \frac{k}{m}\pi}$
Koeff. der Matrix $\mathfrak{X} = (x_{jk})$	$x_{jk} = \sin \dfrac{jk}{m}\pi$	$x_{jk} = \cos \dfrac{j(2k+1)}{2m}\pi$	$x_{jk} = \cos \dfrac{jk}{m}\pi$
Diagonal-matrizen $\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{D}_1 = m \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$	$\mathfrak{D}_1 = m \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$	$\mathfrak{D}_1 = m \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$
Diagonal-matrizen $\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{D}_2 = m \begin{bmatrix} \cos \frac{1}{m}\pi & & & & \\ & \cos \frac{2}{m}\pi & & & \\ & & \cos \frac{3}{m}\pi & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \cos \frac{m-1}{m}\pi \end{bmatrix}$	$\mathfrak{D}_2 = m \begin{bmatrix} \cos \frac{2\cdot 0+1}{2m}\pi & & & & \\ & \cos \frac{2\cdot 1+1}{2m}\pi & & & \\ & & \cos \frac{2\cdot 2+1}{2m}\pi & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \cos \frac{2(m-1)+1}{2m}\pi \end{bmatrix}$	$\mathfrak{D}_2 = m \begin{bmatrix} 2\cos \frac{0}{m}\pi & & & & \\ & \cos \frac{1}{m}\pi & & & \\ & & \cos \frac{2}{m}\pi & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2\cos \frac{m}{m}\pi \end{bmatrix}$

Führt man hier (23) und (26) ein, so erhält man das Differentialgleichungssystem in der entkoppelten Form

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{g}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - \mathfrak{D}\,\Lambda\,\mathfrak{g}^{\cdot\cdot} = \frac{b^2 l^2}{G J_T}\,\mathfrak{X}'\,\mathfrak{p}$$

oder

$$\mathfrak{g}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - \Lambda\,\mathfrak{g}^{\cdot\cdot} = \frac{b^2 l^2}{G J_T}\,\mathfrak{D}^{-1}\,\mathfrak{X}'\,\mathfrak{p}\,. \tag{28}$$

Die k-te Einzelgleichung lautet

$$g_k^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - \lambda_k^2 g_k^{\cdot\cdot} = \frac{b^2 l^2}{G J_T}\,\frac{\mathfrak{x}_k'\,\mathfrak{p}}{d_k} \tag{29}$$

und ihre allgemeine Lösung

$$g_k = A_k + B_k\,\xi + C_k \sinh \lambda_k \xi + D_k \cosh \lambda_k \xi + P_k^*(\xi)\,. \tag{30}$$

Darin sind A_k, B_k, C_k und D_k Integrationskonstanten, die aus Rand- und Übergangsbedingungen zu ermitteln sind, und $P_k^*(\xi)$ ist ein partikuläres Integral der Gleichung (29), das man durch einen geeigneten Ansatz gewinnen kann.

Bei der Stützung III ist darauf zu achten, daß der erste Eigenwert $\lambda_0^2 = 0$ ist. Dadurch vereinfacht sich die erste Differentialgleichung ($k = 0$) des Systems (28) wesentlich.

$$g_0^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{b^2 l^2}{G J_T}\,\frac{\mathfrak{x}_0'\,\mathfrak{p}}{d_0}. \tag{31}$$

Da die Komponenten des Vektors $\mathfrak{x}_0$ bei Stützung III sämtlich gleich 1 sind, kann man auch schreiben

$$g_0^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{b^2 l^2}{G J_T}\,\frac{\sum_{j=0}^{m} p_j}{2m\,(f_1 + f_2)}$$

oder unter Berücksichtigung von (7)

$$\frac{E J_y}{l^4}\,g_0^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{\sum_j p_j}{m}.$$

Durch Vergleich mit der ersten Gleichung (2) erkennt man sofort, daß g_0 nichts anderes darstellt als die mittlere Durchbiegung der Balkenreihe. g_0 ist die Durchbiegung, die entsteht, wenn sämtliche äußeren Lasten in Querrichtung gleichmäßig auf alle Balken verteilt werden. g_0 kann also auf elementarem Wege ermittelt werden.

Betrachten wir noch kurz den singulären Fall, der bei den bisherigen Ableitungen zunächst ausgeschlossen wurde. Er tritt bei Stützung III auf, bei wölbfreien Querschnittsformen, wenn gleichzeitig der Schubmittelpunktsabstand $t = 0$ ist. Dieser Fall hat somit auch praktische Bedeutung. Es wird dann $f_1 = f_2$ und damit beide Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ singulär. Wir wollen jetzt den

Grenzübergang $f_1 \to f_2$ durchführen und sehen, was sich gegenüber den bisherigen Ableitungen ändert. Aus der letzten Spalte der Tafel 2 ist ersichtlich, daß dann der größte Eigenwert $\lambda_m \to \infty$ strebt. Die Differentialgleichung (27), die hier zweckmäßigerweise in die Form

$$\frac{1}{\lambda_k^2} g_k^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - g_k^{\cdot\cdot} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} \frac{\mathfrak{x}_k' \mathfrak{p}}{\lambda_k d_k} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} \frac{\mathfrak{x}_k' \mathfrak{p}}{\delta m \left(1 - \cos \frac{k}{m} \pi\right)},$$

$$\delta = \begin{cases} 1 \text{ für } k = 1, 2 \ldots (m-1), \\ 2 \text{ für } k = 0 \text{ und } k = m \end{cases}$$

gebracht wird, geht für den Fall $k = m$ und $\lambda_m \to \infty$ über in

$$G J_T g_m^{\cdot\cdot} = -\frac{b^2 l^2}{4m} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j p_j .$$

$G J_T g_m$ nimmt also einen endlichen Wert an, und die Berechnung ist auch in diesem Sonderfall immer möglich.

5. Randbedingungen an den Balkenauflagern

Für die Bestimmung der Integrationskonstanten in der allgemeinen Lösung (30) werden die Randbedingungen für die Funktionen g_k benötigt. Die Formulierung der Randbedingung ist jedoch von Haus aus gegeben für die Durchbiegungen $\hat{w}_k$ und für die Verdrehungen φ_k der Balken. Es ist daher erforderlich, die Randbedingungen für g_k aus denen für $\hat{w}_k$ und φ_k zu gewinnen. Dazu werden zunächst aus den Beziehungen (6)

$$\hat{w}_k = \frac{1}{2}(w_{k-1} + w_k), \qquad \varphi_k = \frac{1}{b}(w_{k-1} - w_k)$$

und deren Ableitungen nach ξ

$$\hat{w}_k^{\cdot} = \frac{1}{2}(w_{k-1}^{\cdot} + w_k^{\cdot}), \qquad \varphi_k^{\cdot} = \frac{1}{b}(w_{k-1}^{\cdot} - w_k^{\cdot}) \quad \text{usw.}$$

die Randbedingungen für die Durchbiegungen w_k der Balkenränder ermittelt. Aus diesen ergeben sich die Randbedingungen für g_k aus der Lineartransformation (27)

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{X}\, \mathfrak{g}$$

und deren Ableitungen

$$\mathfrak{w}^{\cdot} = \mathfrak{X}\, \mathfrak{g}^{\cdot} \text{ usw.}$$

Im folgenden wird dieser Weg für eine Reihe technisch wichtiger Lastfälle beschritten.

5.1. Frei drehbare Lagerung

Es gilt am Rande $\xi = 0$

$$\begin{aligned} \hat{w}_k(0) &= 0 \quad \text{keine Durchbiegungen,} \\ \varphi_k(0) &= 0 \quad \text{keine Verdrehungen,} \\ \hat{w}_k''(0) &= 0 \quad \text{keine Biegemomente,} \\ \varphi_k''(0) &= 0 \quad \text{keine Wölbbehinderung.} \end{aligned}$$

Aus (6) folgt dann

$$w_k(0) = 0, \quad w_k''(0) = 0, \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{w}(0) = 0, \quad \mathfrak{w}''(0) = 0. \tag{32}$$

Dies in (27) eingesetzt ergibt

$$\mathfrak{g}(0) = 0, \quad \mathfrak{g}''(0) = 0, \quad g_k(0) = 0, \quad g_k''(0) = 0. \tag{33}$$

Für die Balkenreihe mit beidseitig frei aufliegender Lagerung ergibt sich eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung. Man kann nämlich das Differentialgleichungssystem (14) unmittelbar zweimal integrieren. Die dabei auftretenden Integrationskonstanten können aus den Randbedingungen (32) bestimmt werden. Aus der Art und Weise der Konstantenbestimmung erkennt man jedoch, daß sie in genau der gleichen Weise erfolgt wie bei der Berechnung der Biegemomente $M(\xi)$ eines beidseitig frei aufliegenden Einzelbalkens, und es läßt sich leicht zeigen, daß man das System (14) einfacher in der Form

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{w}'' + \mathfrak{B}\,\mathfrak{w} = -\frac{b^2}{GJ_T}\,\mathfrak{m} \tag{34}$$

schreiben kann. Darin ist $\mathfrak{m}$ ein Vektor

$$\mathfrak{m} = \begin{bmatrix} \vdots \\ M_j \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} j &= 1, 2 \ldots (m-1) \quad \text{Stützung I,} \\ j &= 0, 1 \ldots (m-1) \quad \text{Stützung II,} \\ j &= 0, 1 \ldots \quad m \quad \text{Stützung III,} \end{aligned}$$

dessen Komponenten M_j Biegemomente von gedachten beidseitig frei aufliegenden Balken unter der gegebenen äußeren Belastung p_j sind. Diese Momente lassen sich auf elementarem Wege sehr einfach aus Gleichgewichtsbedingungen errechnen. Die Lineartransformation $\mathfrak{w} = \mathfrak{X}\,\mathfrak{g}$ führt auf das entkoppelte System

$$\mathfrak{g}'' - \Lambda\,\mathfrak{g} = -\frac{b^2}{GJ_T}\,\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{X}'\,\mathfrak{m} \tag{35}$$

mit den Einzelgleichungen

$$g_k'' - \lambda_k^2 g_k = -\frac{b^2}{GJ_T}\,\frac{\mathfrak{x}_k'\,\mathfrak{m}}{d_k}$$

und deren allgemeiner Lösung

$$g_k = C_k \sinh \lambda_k \xi + D_k \cosh \lambda_k \xi + P_k^*(\xi).$$

Auf diese Weise hat sich die Anzahl der zu bestimmenden Integrationskonstanten halbiert. Die Zurückführung des Differentialgleichungssystems 4. Ordnung auf ein solches 2. Ordnung gelingt nur im Falle der beidseitig frei drehbaren Lagerung. Dieser Fall ist zwar der theoretisch einfachste, aber für die praktische Anwendung auch wichtigste Fall. Ausgehend von dem Differentialgleichungssystem 2. Ordnung (34) wurde diese Lagerung für die Stützungsart III b der Längsränder vom Verfasser eingehend in [10, 11] untersucht.

In Tafel 3 werden für eine Reihe praktisch wichtiger Lastfälle die Funktionen g_k angegeben. In die Beziehungen sind die Größen λ_k^2, d_k und $\mathfrak{x}_k'$ je nach der vorgegebenen Stützungsart der Längsränder entsprechend den Angaben der Tafel 2 einzusetzen.

5.2. Starre Einspannung

Es gilt am Rande $\xi = 0$

$$\begin{aligned} \hat{w}_k(0) &= 0 \quad \text{keine Durchbiegungen,} \\ \varphi_k(0) &= 0 \quad \text{keine Verdrehungen,} \\ \hat{w}_k^{\cdot}(0) &= 0 \quad \text{horizontale Biegelinie,} \\ \varphi_k^{\cdot}(0) &= 0 \quad \text{keine Verwölbungen.} \end{aligned}$$

Aus (6) folgt

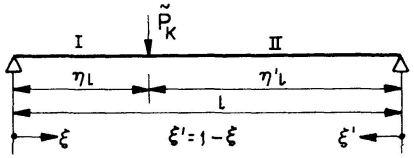
$$\begin{aligned} w_k(0) &= w_k^{\cdot}(0) = 0 \\ \text{bzw. } \mathfrak{w}(0) &= \mathfrak{w}^{\cdot}(0) = 0 \end{aligned}$$

und mit (27)

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(0) &= \mathfrak{g}^{\cdot}(0) = 0 \\ \text{oder } g_k(0) &= g_k^{\cdot}(0) = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

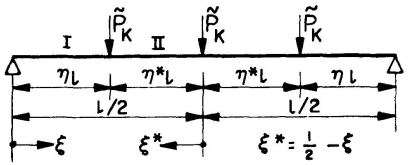
5.3. Freies Stabende mit und ohne Einzellast am Rande

Die Abfassung der Randbedingungen für diesen und die folgenden Fälle wird etwas komplizierter. Und zwar ist zu beachten, daß in den Gelenken nicht nur stetig verteilte Gelenkkräfte Z_k und Y_k wirken, sondern auch Einzelkräfte, die mit $\tilde{Z}_k$ und $\tilde{Y}_k$ bezeichnet werden sollen. Solche Einzelkräfte treten in allen Querschnitten auf, in denen auch äußere Einzelkräfte angreifen, ferner über allen Auflagerpunkten und an den freien Stabenden. Nur wenn man die Existenz solcher Einzelgelenkkräfte voraussetzt, lassen sich alle Gleichgewichts- und Kontinuitätsbedingungen widerspruchsfrei und eindeutig erfüllen. Da die Einzelgelenkkräfte nur an den Enden der Balkenreihe und an Stellen wirken, an denen Einzelkräfte als äußere Lasten oder Auflagerkräfte eingetragen werden, beeinflussen sie nur die Rand- und Übergangsbedingungen und haben keinen Einfluß auf die Differentialgleichungen. In Fig. 5 ist ein möglicher Verlauf der Gelenkkräfte über der Gesamtlänge des Balkens dargestellt. Der



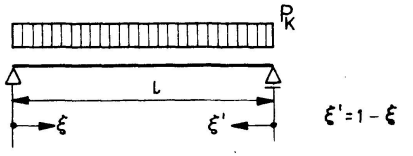
Bereich I: $G J_T g_k = b^2 l \left(\eta' \xi - \dfrac{\sinh \lambda_k \eta' \sinh \lambda_k \xi}{\lambda_k \sinh \lambda_k} \right) \dfrac{\mathfrak{x}'_k \tilde{\mathfrak{p}}}{\lambda_k^2 d_k}$

Bereich II: $G J_T g_k = b^2 l \left(\eta \xi' - \dfrac{\sinh \lambda_k \eta \sinh \lambda_k \xi'}{\lambda_k \sinh \lambda_k} \right) \dfrac{\mathfrak{x}'_k \tilde{\mathfrak{p}}}{\lambda_k^2 d_k}$

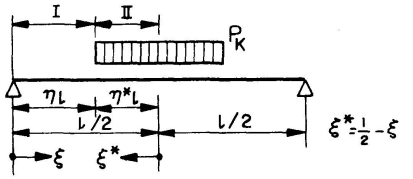


Bereich I: $G J_T g_k = b^2 l \left(\dfrac{3}{2} \xi - \dfrac{\frac{1}{2} + \cosh \lambda_k \eta^*}{\lambda_k \cosh \frac{1}{2} \lambda_k} \sinh \lambda_k \xi \right) \dfrac{\mathfrak{x}'_k \tilde{\mathfrak{p}}}{\lambda_k^2 d_k}$

Bereich II: $G J_T g_k = b^2 l \left(\dfrac{3}{4} - \eta^* - \dfrac{1}{2} \xi^* - \dfrac{\frac{1}{2} \sinh \lambda_k \xi + \sinh \lambda_k \eta \cosh \lambda_k \xi^*}{\lambda_k \cosh \frac{1}{2} \lambda_k} \right) \dfrac{\mathfrak{x}'_k \tilde{\mathfrak{p}}}{\lambda_k^2 d_k}$

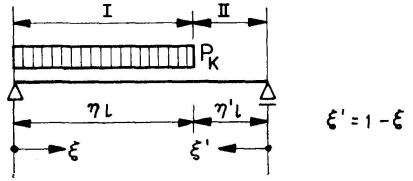


$G J_T g_k = b^2 l^2 \left[\xi - \xi^2 + \dfrac{2}{\lambda_k^2} \left(\dfrac{\sinh \lambda_k \xi + \sinh \lambda_k \xi'}{\sinh \lambda_k} - 1 \right) \right] \dfrac{\mathfrak{x}'_k \mathfrak{p}}{2 \lambda_k^2 d_k}$



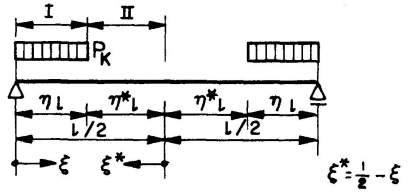
Bereich I: $G J_T g_k = b^2 l^2 \left(\eta^* \xi - \dfrac{\sinh \lambda_k \eta^* \sinh \lambda_k \xi}{\lambda_k^2 \cos \frac{1}{2} \lambda_k} \right) \dfrac{\mathfrak{x}'_k \mathfrak{p}}{\lambda_k^2 d_k}$

Bereich II: $G J_T g_k = b^2 l^2 \left[\dfrac{1}{2} (\xi - \xi^2 - \eta^2) + \dfrac{1}{\lambda_k^2} \left(\dfrac{\cosh \lambda_k \eta \cosh \lambda_k \xi^*}{\cosh \frac{1}{2} \lambda_k} - 1 \right) \right] \dfrac{\mathfrak{x}'_k \mathfrak{p}}{\lambda_k^2 d_k}$



Bereich I: $G J_T g_k = b^2 l^2 \left[\left(\eta - \dfrac{\eta^2}{2} \right) \xi - \dfrac{1}{2} \xi^2 + \dfrac{1}{\lambda_k^2} \left(\dfrac{\cosh \lambda_k \eta' \sinh \lambda_k \xi + \sinh \lambda_k \xi'}{\sinh \lambda_k} - 1 \right) \right] \dfrac{\mathfrak{x}'_k \mathfrak{p}}{\lambda_k^2 d_k}$

Bereich II: $G J_T g_k = b^2 l^2 \left(\dfrac{\eta^2}{2} \xi' - \dfrac{\cosh \lambda_k \eta - 1}{\lambda_k^2 \sinh \lambda_k} \sinh \lambda_k \xi' \right) \dfrac{\mathfrak{x}'_k \mathfrak{p}}{\lambda_k^2 d_k}$



Bereich I: $G J_T g_k = b^2 l^2 \left[\eta \xi - \dfrac{1}{2} \xi^2 + \dfrac{1}{\lambda_k^2} \left(\dfrac{\sinh \lambda_k \eta^* \sinh \lambda_k \xi + \cosh \lambda_k \xi^*}{\cosh \frac{1}{2} \lambda_k} - 1 \right) \right] \dfrac{\mathfrak{x}'_k \mathfrak{p}}{\lambda_k^2 d_k}$

Bereich II: $G J_T g_k = b^2 l^2 \left[\dfrac{\eta^2}{2} - \dfrac{(\cosh \lambda_k \eta - 1) \cosh \lambda_k \xi^*}{\lambda_k^2 \cosh \frac{1}{2} \lambda_k} \right] \dfrac{\mathfrak{x}'_k \mathfrak{p}}{\lambda_k^2 d_k}$

dort angegebene Richtungssinn definiert die positive Richtung der Einzelgelenkkräfte.

Wir betrachten jetzt ein Balkenelement der Länge dx am freien Rand $x=0$ und setzen die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den äußeren und inneren Kräften an. Um möglichst allgemein zu bleiben, soll angenommen werden, daß am freien Rand vorgegebene Kräfte $\tilde{P}$ in Richtung z wirken. Die Randlasten, die am Balken k angreifen, werden nach dem Hebelgesetz in zwei Einzellasten $\tilde{P}_{k-1,k}$ und $\tilde{P}_{k,k}$ in den Endpunkten der Gelenke aufgeteilt. Analog zu (1) ist auch hier

$$\tilde{P}_k = \tilde{P}_{k,k} + \tilde{P}_{k,k+1} \tag{37}$$

die Summe beider am Gelenkende k wirkenden Einzellasten.

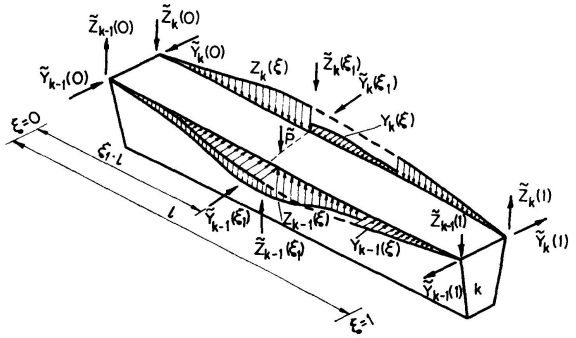


Fig. 5. Verlauf der Gelenkkräfte über der Balkenlänge.

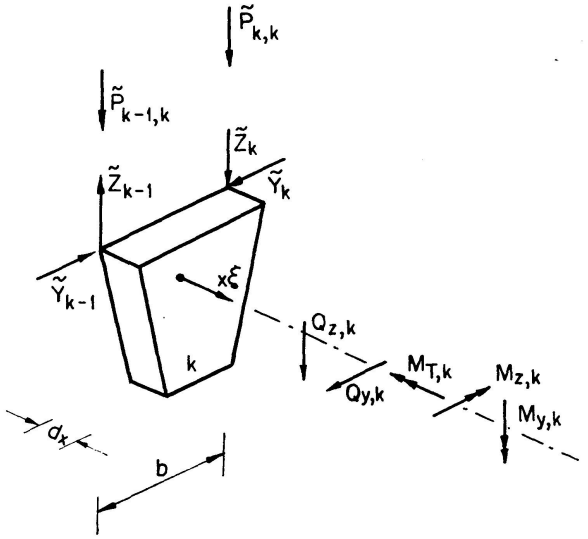


Fig. 6. Balkenelement unmittelbar am freien Ende mit allen äußeren und inneren Kräften.

Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben unter Berücksichtigung der bekannten Beziehungen zwischen Schnittgrößen und Verformungen des Stabes

$$-Q_{zk} = +\frac{E J_y}{l^3}\hat{w}_k'''(0) = \tilde{Z}_k - \tilde{Z}_{k-1} + \tilde{P}_{k,k} + \tilde{P}_{k-1,k},$$

$$-Q_{yk} = +\frac{E J_z}{l^3}\hat{v}_k'''(0) = \tilde{Y}_k - \tilde{Y}_{k-1},$$

$$M_{Tk} = -\frac{E C_T}{l^3}\varphi_k'''(0) + \frac{G J_T}{l}\varphi_k'(0) =$$

$$(\tilde{Z}_k + \tilde{Z}_{k-1})\frac{b}{2} - (\tilde{Y}_k - \tilde{Y}_{k-1})\,t + (\tilde{P}_{k,k} - \tilde{P}_{k-1,k})\frac{b}{2}.$$

Diese Gleichungen sind genau so aufgebaut wie die Gleichungen (2), und auf die gleiche Weise, wie oben die Funktionen Z_k und Y_k eliminiert wurden, lassen sich jetzt auch die Einzelkräfte $\tilde{Z}_k$ und $\tilde{Y}_k$ eliminieren. Alle oben durchgeführten Entwicklungen einschließlich der Betrachtungen über den Einfluß der Horizontalverschiebungen v gelten analog auch hier. Lediglich der Grad

der Ableitungen bei den Verformungen erniedrigt sich um 1, und wir haben es nicht wie oben mit Funktionen von ξ zu tun, sondern mit deren Randwerten. Es ergibt sich analog (12) als Ergebnis die Randbedingung

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{H})\,\mathfrak{w}^{\cdot\cdot\cdot}(0)+\mathfrak{B}\,\mathfrak{w}^{\cdot}(0)=\frac{b^2 l}{GJ_T}\tilde{\mathfrak{p}}, \tag{38}$$

wobei im Vektor $\tilde{\mathfrak{p}}$ die Gesamtheit der angreifenden Einzellasten zusammengefaßt ist.

$$\tilde{\mathfrak{p}}=\begin{bmatrix}\vdots\\ P_j\\ \vdots\end{bmatrix},\qquad \begin{aligned} &j=1,2\ldots(m-1) && \text{Stützung I},\\ &j=0,1\ldots(m-1) && \text{Stützung II},\\ &j=0,1\ldots\ \ m && \text{Stützung III}.\end{aligned} \tag{39}$$

Die Randbedingungen für die Durchbiegungen w_k sind also in ähnlicher Weise wie die Differentialgleichungen miteinander verkoppelt. Mit den aus (27) folgenden Beziehungen

$$\mathfrak{w}^{\cdot\cdot\cdot}(0)=\mathfrak{X}\,\mathfrak{g}^{\cdot\cdot\cdot}(0),\qquad \mathfrak{w}^{\cdot}(0)=\mathfrak{X}\,\mathfrak{g}^{\cdot}(0) \tag{40}$$

gelingt auch hier eine Entkoppelung, wenn die Matrix $\mathfrak{H}=0$ ist (Fälle I a, I b, II a, III a) oder vernachlässigt wird. Man erhält analog (28)

$$\mathfrak{g}^{\cdot\cdot\cdot}(0)-\Lambda\,\mathfrak{g}^{\cdot}(0)=\frac{b^2 l}{GJ_T}\,\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{X}'\tilde{\mathfrak{p}} \tag{41}$$

mit den Einzelgleichungen

$$g_k^{\cdot\cdot\cdot}(0)-\lambda_k^2 g_k^{\cdot}(0)=\frac{b^2 l}{GJ_T}\,\frac{\mathfrak{x}_k'\tilde{\mathfrak{p}}}{d_k}. \tag{42}$$

Für den wichtigen Sonderfall, daß keine Randlasten $\tilde{P}_k$ vorhanden sind, gilt

$$g_k^{\cdot\cdot\cdot}(0)-\lambda_k^2 g_k^{\cdot}(0)=0.$$

Als zweite Randbedingung folgt aus der Bedingung, daß keine Biegemomente und keine Wölbbehinderungen auftreten, wie unter 5.1

$$g_k^{\cdot\cdot}(0)=0.$$

5.4. Das Balkenende auf elastisch senkbaren Stützen

Jedes Balkenende sei auf zwei symmetrisch angeordnete Federn von gleicher Steifigkeit angeordnet. Der Abstand der Federn sei a, und ihre Federkonstante c_L. Eine solche Randbedingung hat praktische Bedeutung bei der Auflagerung von Brückenträgern aus Fertigteilen auf Gummischichtenlagern.

Aus der biege- und bimomentenfreien Lagerung folgt zunächst $g_k^{\cdot\cdot}(0)=0$. Auf das Balkenende wirkt eine Auflagerkraft der Größe

$$A_k=2c_L\hat{w}_k(0) \tag{43}$$

und ein Moment

$$M_{Ak} = \frac{1}{2} a^2 c_L \varphi_k(0).$$

Die Gleichgewichtsbedingungen am Balkenelement nach Fig. 7 ergeben

$$-Q_{zk} + A_k = \frac{E J_y}{l^3} \hat{w}_k^{\cdots}(0) + 2 c_L \hat{w}_k(0) = \tilde{Z}_k - \tilde{Z}_{k-1} + \tilde{P}_{k,k} + \tilde{P}_{k-1,k},$$

$$-Q_{yk} = \frac{E J_z}{l^3} \hat{v}_k^{\cdots}(0) = \tilde{Y}_k - \tilde{Y}_{k-1},$$

$$M_{Tk} - M_{Ak} = -\frac{E C_T}{l^3} \varphi_k^{\cdots}(0) + \frac{G J_T}{l} \dot{\varphi}_k(0) - \frac{a^2 c_L}{2} \varphi_k(0) =$$

$$(\tilde{Z}_k + \tilde{Z}_{k-1}) \frac{b}{2} - (\tilde{Y}_k - \tilde{Y}_{k-1}) t + (\tilde{P}_{k,k} - \tilde{P}_{k-1,k}) \frac{b}{2}.$$

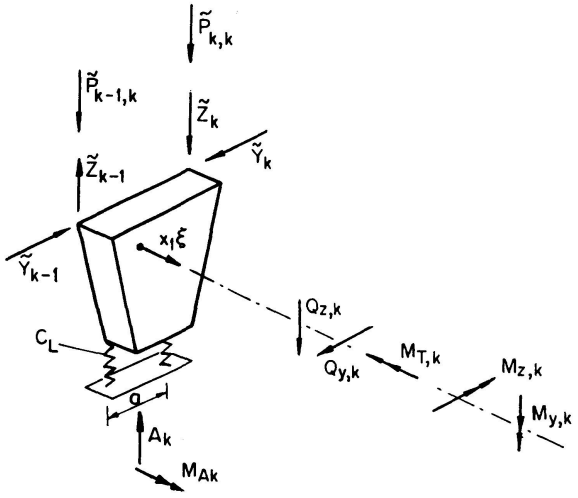


Fig. 7. Balkenelement am elastisch gestützten Rand.

Die Elimination der Gelenkkräfte liefert

$$\frac{b}{2} \frac{E J_y}{l^3} [\hat{w}_k^{\cdots}(0) + \hat{w}_{k+1}^{\cdots}(0)] + b c_L [\hat{w}_k(0) + \hat{w}_{k+1}(0)] + \frac{E J_z}{l^3} t [\hat{v}_k^{\cdots}(0) - \hat{v}_{k+1}^{\cdots}(0)]$$

$$+ \frac{G J_T}{l} [\dot{\varphi}_k(0) - \dot{\varphi}_{k+1}(0)] - \frac{E C_T}{l^3} [\varphi_k^{\cdots}(0) - \varphi_{k+1}^{\cdots}(0)]$$

$$- \frac{a^2 c_L}{2} [\varphi_k(0) - \varphi_{k+1}(0)] = b (\tilde{P}_{k,k} + \tilde{P}_{k,k+1}) = b \tilde{P}_k.$$

Setzt man hier die Gleichungen (6) und deren Ableitungen ein und führt außer den in (7) definierten Größen f_1 und f_2 noch die dimensionslosen Abkürzungen

$$f_3 = \frac{l c_L}{2 G J_T} (b^2 + a^2), \qquad f_4 = \frac{l c_L}{2 G J_T} (b^2 - a^2) \tag{44}$$

ein, so erhält man nach kurzer Rechnung die Randbedingungen für die Durchbiegungen w_k der Gelenke in der Form

$$f_2 w_{k-1}^{\cdot\cdot\cdot}(0) + 2 f_1 w_k^{\cdot\cdot\cdot}(0) + f_2 w_{k+1}^{\cdot\cdot\cdot}(0) + w_{k-1}^{\cdot}(0) - 2 w_k^{\cdot}(0) + w_{k+1}^{\cdot}(0)$$
$$+ f_4 w_{k-1}(0) + 2 f_3 w_k(0) + f_4 w_{k+1}(0) = \frac{b^2 l}{G J_T} \tilde{P}_k .$$

Auf ähnlichem Wege ergibt sich die Gleichung für die Ecke am kräftefreien Rand. Setzt man dabei eine Unverschieblichkeit der Gelenke über den Auflagern in horizontaler Richtung voraus ($v = 0$) oder vernachlässigt den Einfluß von v auf die Randbedingungen, so läßt sich die Gesamtheit der Randbedingungen zur Matrizengleichung

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{w}^{\cdot\cdot\cdot}(0) + \mathfrak{B}\,\mathfrak{w}^{\cdot}(0) + (f_3 \mathfrak{A}_1 + f_4 \mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{w}(0) = \frac{b^2 l}{G J_T} \tilde{\mathfrak{p}}$$

zusammenfassen. Auch diese Randbedingung läßt sich orthogonalisieren, wenn man hier (40) einsetzt und mit $\mathfrak{X}'$ von links multipliziert. Unter Beachtung von (23) und (26) ergibt sich

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{g}^{\cdot\cdot\cdot}(0) - \mathfrak{D}\,\Lambda\,\mathfrak{g}^{\cdot}(0) + (f_3 \mathfrak{D}_1 + f_4 \mathfrak{D}_2)\,\mathfrak{g}(0) = \frac{b^2 l}{G J_T} \mathfrak{X}'\,\tilde{\mathfrak{p}}$$

oder
$$\mathfrak{g}^{\cdot\cdot\cdot}(0) - \Lambda\,\mathfrak{g}^{\cdot}(0) + \bar{\mathfrak{D}}\,\mathfrak{g}(0) = \frac{b^2 l}{G J_T} \mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{X}'\,\mathfrak{p} \tag{45}$$

mit der Abkürzung

$$\bar{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}^{-1}(f_3 \mathfrak{D}_1 + f_4 \mathfrak{D}_2) \tag{46}$$

Die k-te Einzelgleichung lautet

$$g_k^{\cdot\cdot\cdot}(0) - \lambda_k^2 g_k^{\cdot}(0) + \bar{d}_k g_k(0) = \frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\mathfrak{x}_k' \tilde{\mathfrak{p}}}{d_k} \tag{47}$$

mit
$$\bar{d}_k = \frac{f_3 d_{1,k} + f_4 d_{2,k}}{f_1 d_{1,k} + f_2 d_{2,k}}, \qquad d_{1,k};\ d_{2,k} \text{ nach Tafel 2}$$

Greifen am Rand keine Einzelkräfte $\tilde{P}_k$ an, so wird die Randbedingung

$$g_k^{\cdot\cdot\cdot}(0) - \lambda_k^2 g_k^{\cdot}(0) + \bar{d}_k g_k(0) = 0$$

homogen. Wird die elastische Federung des Randes unendlich weich $c_L = 0$, so geht mit $\bar{d}_k = 0$ die Randbedingung (47) in die des freien Randes (42) über. Wird dagegen die Stützung unendlich starr, so erhalten wir mit $\bar{d}_k \to \infty$ die Bedingung (33) $g_k(0) = 0$.

5.5. Die elastische Zwischenunterstützung

Es gilt an der Stelle $\xi = \xi_1$

$\hat{w}_{kA}(\xi_1) = \hat{w}_{kB}(\xi_1)$ gleiche Durchbiegungen und

$\varphi_{kA}(\xi_1) = \varphi_{kB}(\xi_1)$ gleiche Verdrehungen in den Bereichen A und B. Daraus folgt mit (6), (13) und (27)

$$\mathfrak{g}_A(\xi_1) = \mathfrak{g}_B(\xi_1).$$

Aus

$\hat{w}'_{kA}(\xi_1) = \hat{w}'_{kB}(\xi_1)$ gleiche Tangentenneigung der Balkenachsen

$\varphi'_{kA}(\xi_1) = \varphi'_{kB}(\xi_1)$ gleiche Querschnittsverwölbungen ergibt sich

$$\mathfrak{g}'_A(\xi_1) = \mathfrak{g}'_B(\xi_1)$$

und aus

$w''_{kA}(\xi_1) = w''_{kB}(\xi_1)$ gleiche Biegemomente

$\varphi''_{kA}(\xi_1) = \varphi''_{kB}(\xi_1)$ gleiche Bimomente

folgt $$\mathfrak{g}''_A(\xi_1) = \mathfrak{g}''_B(\xi_1).$$

Zur vollständigen Festlegung der Integrationskonstanten wird noch eine vierte Übergangsbedingung benötigt. Diese ergibt sich wieder aus den Gleichgewichtsbedingungen am unterstützten Balkenelement.

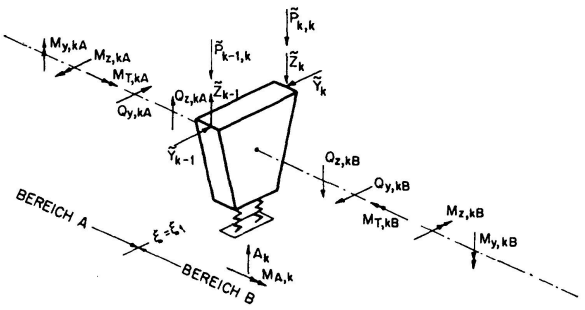


Fig. 8. Balkenelement über einer elastischen Zwischenunterstützung.

$$Q_{z\,kA} - Q_{z\,kB} + A_k = \frac{E J_y}{l^3}(\hat{w}'''_{kB} - \hat{w}'''_{kA}) + 2 c_L w_k = \tilde{Z}_k - \tilde{Z}_{k-1} + \tilde{P}_{k,k} + \tilde{P}_{k-1,k},$$

$$Q_{y\,kA} - Q_{y\,kB} = \frac{E J_z}{l^3}(\hat{v}'''_{kB} - \hat{v}'''_{kA}) = \tilde{Y}_k - \tilde{Y}_{k-1},$$

$$-M_{T\,kA} + M_{T\,kB} - M_{Ak} = -\frac{E C_T}{l^3}(\varphi'''_{kB} - \varphi'''_{kA}) + \frac{G J_T}{l}(\varphi'_{kB} - \varphi'_{kA}) - \frac{1}{2} a^2 c_L \varphi_k =$$

$$(\tilde{Z}_k + \tilde{Z}_{k-1})\frac{b}{2} - (\tilde{Y}_k - \tilde{Y}_{k-1})\,t + (\tilde{P}_{k,k} - \tilde{P}_{k-1,k})\frac{b}{2}.$$

Die Elimination der Einzelgelenkkräfte $\tilde{Z}_k$ und $\tilde{Y}_k$ kann auf ähnliche Weise wie unter 5.4 durchgeführt werden. Dabei ist zu beachten, daß infolge der Gleichheit der Verwölbungen in den beiden angrenzenden Bereichen $\varphi'_{kB} - \varphi'_{kA} = 0$ ist. Die Rechnung liefert als Ergebnis

$$\mathfrak{g}'''_B(\xi_1) - \mathfrak{g}'''_A(\xi_1) + \bar{\mathfrak{D}}\,\mathfrak{g}(\xi_1) = \frac{b^2 l}{G J_T}\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{X}'\tilde{\mathfrak{p}} \tag{48}$$

mit $\bar{\mathfrak{D}}$ nach (46). Die Einzelgleichung lautet

$$g'''_{kB}(\xi_1) - g'''_{kA}(\xi_1) + \bar{d}_k g_k(\xi_1) = \frac{b^2 l}{G J_T}\frac{\mathfrak{x}'_k \tilde{\mathfrak{p}}}{d_k} \tag{49}$$

und wenn keine äußeren Lasten über der Stütze angreifen

$$g_{kB}^{\cdots}(\xi_1) - g_{kA}^{\cdots}(\xi_1) + \bar{d}_k g_k(\xi_1) = 0.$$

Darin ist

$$g_k(\xi_1) = g_{kA}(\xi_1) = g_{kB}(\xi_1).$$

5.6. Die starre Zwischenunterstützung

Die Übergangsbedingungen ergeben sich aus denen der elastischen Zwischenunterstützung, indem man die Federkonstante $c_L \to \infty$ gehen läßt. Damit strebt $\bar{d}_k \to \infty$ und es ergibt sich an Stelle von (49)

$$\begin{aligned} g_k(\xi_1) &= g_{kA}(\xi_1) = 0 \\ &= g_{kB}(\xi_1) = 0. \end{aligned}$$

5.7. Überganbsbedingungen unter einer Einzellast

Auch die Übergangsbedingungen für diesen Fall erhält man als Sonderfall von (49), wenn man dort $c_L = \bar{d}_k = 0$ setzt.

$$g_{kB}^{\cdots}(\xi_1) - g_{kA}^{\cdots}(\xi_1) = \frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\mathfrak{x}_k' \tilde{\mathfrak{p}}}{d_k}. \tag{50}$$

5.8. Übergangsbedingungen an Bereichsgrenzen ohne Einzellast

Mit $\tilde{\mathfrak{p}} = 0$ folgt aus (50)

$$g_{kA}^{\cdots}(\xi_1) = g_{kB}^{\cdots}(\xi_1).$$

In der Tafel 4 sind die betrachteten Rand- und Übergangsbedingungen der Funktionen g_k für die praktische Anwendung übersichtlich zusammengestellt.

5.9. Randbedingungen für die Horizontalverschiebungen v

Für die Berechnung der Schnittgrößen M_{yi} und Q_{yi} werden bei den Stützungsarten II b und III b auch die Horizontalverschiebungen v der Gelenke benötigt. Wenn die Vertikalverschiebungen w_k bekannt sind, können die v aus den Differentialgleichungen (10) und (11) berechnet werden. Dabei sind am Rande $\xi = 0$ folgende Randbedingungen zu beachten:

$v^{\cdot\cdot}(0) = 0$ wenn die Balken um ihre vertikale Achse frei drehbar gelagert sind,

$v^{\cdot}(0) = 0$ bei Einspannung um die vertikale Achse,

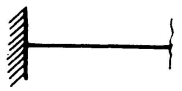
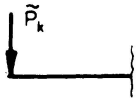
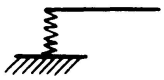
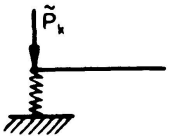
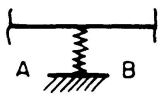
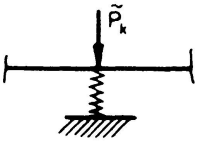
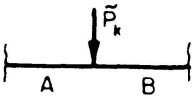
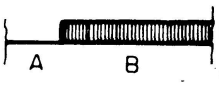
$v(0) = 0$ bei seitlich unverschieblicher Lagerung,

$v^{\cdots}(0) = \frac{t}{m b}[w_0^{\cdots}(0) - w_m^{\cdots}(0)] = \frac{t}{m b}(\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_m)\,\mathfrak{g}^{\cdots}(0)$ bei Stützung III b,

$v^{\cdots}(0) = \frac{t}{m b} w_0^{\cdots}(0) = \frac{t}{m b}\mathfrak{x}_0\,\mathfrak{g}^{\cdots}(0)$ bei Stützung II b

bei seitlich frei verschieblicher Lagerung.

Tafel 4. Rand- und Übergangsbedingungen der Funktionen g_k

Frei drehbare Lagerung		$g_k = 0; \quad g_k'' = 0$
Starre Einspannung		$g_k = 0; \quad g_k' = 0$
Freies Stabende		$g_k'' = 0; \quad g_k''' - \lambda_k^2 g_k' = 0$
Stabende mit Einzellast		$g_k'' = 0;$ $g_k''' - \lambda_k^2 g_k' = \frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\mathfrak{x}_k' \tilde{\mathfrak{p}}}{d_k}$
Elastisch gestütztes Ende		$g_k'' = 0; \quad g_k''' - \lambda_k^2 g_k' + \bar{d}_k g_k = 0$
Elastisch gestütztes Ende mit Einzellast		$g_k'' = 0;$ $g_k''' - \lambda_k^2 g_k' + \bar{d}_k g_k = \frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\mathfrak{x}_k' \tilde{\mathfrak{p}}}{d_k}$
Elastische Zwischenunterstützung		$g_{kA} = g_{kB}; \quad g_{kA}' = g_{kB}';$ $g_{kA}'' = g_{kB}''; \quad g_{kB}''' - g_{kA}''' + \bar{d}_k g_k = 0$
Elastische Zwischenunterstützung mit Einzellast		$g_{kA} = g_{kB}; \quad g_{kA}' = g_{kB}'; \quad g_{kA}'' = g_{kB}'';$ $g_{kB}''' - g_{kA}''' + \bar{d}_k g_k = \frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\mathfrak{x}_k' \tilde{\mathfrak{p}}}{d_k}$
Starre Zwischenunterstützung		$g_{kA} = 0; \quad g_{kB} = 0;$ $g_{kA}' = g_{kB}'; \quad g_{kA}'' = g_{kB}''$
Übergangsbedingungen an einer Einzellast		$g_{kA} = g_{kB}; \quad g_{kA}' = g_{kB}';$ $g_{kA}'' = g_{kB}''; \quad g_{kB}''' - g_{kA}''' = \frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\mathfrak{x}_k' \tilde{\mathfrak{p}}}{d_k}$
Übergangsbedingungen an Bereichsgrenze ohne Einzellast		$g_{kA} = g_{kB}; \quad g_{kA}' = g_{kB}';$ $g_{kA}'' = g_{kB}''; \quad g_{kA}''' = g_{kB}'''$

Die beiden letzten Gleichungen ergeben sich auf ähnlichem Wege wie oben die Differentialgleichungen (10) und (11), nur daß hier an Stelle der Funktionen w_k und v deren Randwerte, an Stelle der Gelenkkräfte Y_k die Einzelkräfte $\tilde{Y}_k$ treten und der Grad der Ableitungen sich um 1 erniedrigt.

Bei seitlich fester Zwischenunterstützung an der Stelle $\xi = \xi_1$ gilt

$$v_A(\xi_1) = 0, \quad v_B(\xi_1) = 0, \quad v'_A(\xi_1) = v'_B(\xi_1), \quad v''_A(\xi_1) = v''_B(\xi_1)$$

und bei seitlich frei verschieblicher Zwischenunterstützung

$$v_A(\xi_1) = v_B(\xi_1), \quad v'_A(\xi_1) = v'_B(\xi_1), \quad v''_A(\xi_1) = v''_B(\xi_1)$$

und

$$v'''_B(\xi_1) - v'''_A(\xi_1) = \frac{t}{m\,b}(\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_m)\,[\mathfrak{g}'''_B(\xi_1) - \mathfrak{g}'''_A(\xi_1)], \quad \text{bei Stützung III b},$$

bzw. $$v'''_B(\xi_1) - v'''_A(\xi_1) = \frac{t}{m\,b}\,\mathfrak{x}_0\,[\mathfrak{g}'''_B(\xi_1) - \mathfrak{g}'''_A(\xi_1)], \quad \text{bei Stützung II b}.$$

6. Schnittgrößen, Verformungen, Gelenkkräfte, Auflagerkräfte

Ausgehend von den bekannten Beziehungen der Festigkeitslehre zwischen Schnittgrößen und Verformungen der Balkenachsen erhält man mit den Gleichungen (6) und der aus (27) folgenden Einzelgleichung

$$w_i = \mathfrak{x}_i^*\,\mathfrak{g} \tag{51}$$

die Formeln für die Berechnung der Schnittgrößen im Balken i direkt in Abhängigkeit von den Funktionen g_k. In (51) ist $\mathfrak{x}_i^*$ der i-te Zeilenvektor der Matrix $\mathfrak{X}$. Bei den Stützungsarten I und III ist als Folge der Symmetrie von $\mathfrak{X}$

$$\mathfrak{x}'_i = \mathfrak{x}_i^*.$$

Für numerische Berechnungen ist es zweckmäßig, mit den GJ_T-fachen Funktionen $\mathfrak{g}$ zu rechnen. Zur Vereinfachung werden noch folgende Abkürzungen eingeführt

$$GJ_T\,\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{g}}, \qquad \beta_z^2 = \frac{E\,J_y}{G\,J_T}, \qquad \beta_y^2 = \frac{E\,J_z}{G\,J_T}, \qquad \beta_c^2 = \frac{E\,C_T}{G\,J_T}. \tag{52}$$

Damit ergibt sich

Biegemoment M_{zi}

$$M_{zi} = -\frac{E\,J_y}{l^2}\,\hat{w}''_i = -\frac{\beta_z^2}{2l^2}(\mathfrak{x}_{i-1}^* + \mathfrak{x}_i^*)\,\bar{\mathfrak{g}}'',$$

Querkraft Q_{zi}

$$Q_{zi} = -\frac{E\,J_y}{l^3}\,\hat{w}'''_i = -\frac{\beta_z^2}{2l^3}(\mathfrak{x}_{i-1}^* + \mathfrak{x}_i^*)\,\bar{\mathfrak{g}}''',$$

Bimoment (Wölbverdrehmomentenintegral) B_i

$$B_i = -\frac{E\,C_T}{l^2}\varphi_i'' = -\frac{\beta_c^2}{b\,l^2}(\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_i^*)\,\bar{\mathfrak{g}}'',$$

Primäres Torsionsmoment M_{TPi}

$$M_{TPi} = +\frac{G\,J_T}{l}\varphi_i' = \frac{1}{b\,l}(\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_i^*)\,\bar{\mathfrak{g}}',$$

Sekundäres Torsionsmoment M_{TSi}

$$M_{TSi} = -\frac{E\,C_T}{l^3}\varphi_i''' = -\frac{\beta_c^2}{b\,l^3}(\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_i^*)\,\bar{\mathfrak{g}}''',$$

Gesamtes Torsionsmoment M_{Ti}

$$M_{Ti} = M_{TPi} + M_{TSi} = \frac{1}{b\,l}(\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_i^*)\left(\bar{\mathfrak{g}}' - \frac{\beta_c^2}{l^2}\bar{\mathfrak{g}}'''\right).$$

Bei den Beziehungen zur Berechnung der Schnittgrößen M_{yi} und Q_{yi} treten auch die Horizontalverschiebungen v auf.

$$M_{yi} = -\frac{E\,J_z}{l^2}\hat{v}_i'' = -\frac{E\,J_z}{l^2}\left[v'' - (w_{i-1}'' - w_i'')\,\frac{t}{b}\right],$$

$$Q_{yi} = -\frac{E\,J_z}{l^3}\hat{v}_i''' = -\frac{E\,J_z}{l^3}\left[v''' - (w_{i-1}''' - w_i''')\,\frac{t}{b}\right].$$

Bei den Stützungen I a, I b, II a und III a ist $v = 0$ und damit wird

$$M_{yi} = \frac{t\,\beta_y^2}{b\,l^2}(\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_i^*)\,\bar{\mathfrak{g}}'', \qquad Q_{yi} = \frac{t\,\beta_y^2}{b\,l^3}(\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_i^*)\,\bar{\mathfrak{g}}'''.$$

Bei den Stützungen II b und III b müssen zunächst die Funktionen v aus den Differentialgleichungen (10) bzw. (11) unter Beachtung der unter 5.9 angegebenen Randbedingungen integriert werden. In der überwiegenden Mehrzahl der praktisch vorkommenden Fälle, aber leider nicht in allen Fällen, ergeben sich sämtliche bei der Integration von (10) und (11) auftretenden Konstanten zu Null. Für diesen wichtigen Sonderfall ist

$$v = \frac{t}{m\,b}w_0 = \frac{t}{m\,b}\mathfrak{x}_0^*\,\mathfrak{g} \qquad \text{bei Stützung II b}$$

und

$$v = \frac{t}{m\,b}w_0 - w_m) = \frac{t}{m\,b}(\mathfrak{x}_0^* - \mathfrak{x}_m^*)\,\mathfrak{g}, \qquad \text{bei Stützung III b}$$

$$\left.\begin{aligned} M_{yi} &= \frac{t\,\beta_y^2}{b\,l^2}\left(\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_i^* - \frac{\mathfrak{x}_0^*}{m}\right)\bar{\mathfrak{g}}'', \\ Q_{yi} &= \frac{t\,\beta_y^2}{b\,l^3}\left(\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_i^* - \frac{\mathfrak{x}_0^*}{m}\right)\bar{\mathfrak{g}}''', \end{aligned}\right\} \text{bei Stützung II b}$$

$$\left.\begin{aligned} M_{yi} &= \frac{t\,\beta_y^2}{b\,l^2}\left(\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_i^* - \frac{\mathfrak{x}_0^* - \mathfrak{x}_m^*}{m}\right)\bar{\mathfrak{g}}'', \\ Q_{yi} &= \frac{t\,\beta_y^2}{b\,l^3}\left(\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_i^* - \frac{\mathfrak{x}_0^* - \mathfrak{x}_m^*}{m}\right)\bar{\mathfrak{g}}'''. \end{aligned}\right\} \text{bei Stützung III b}$$

Die Formeln für die Ermittlung der vertikalen Gelenkkraftkomponente Z_i erhält man aus den Gleichungen (3) und (4) unter Beachtung von (6), (7), (10) und (11) nach einigen Zwischenrechnungen

$$Z_i = \frac{p_{i,i+1} - p_{i,i}}{2} + \frac{1}{2\,l^2\,b^2}\left[(\mathfrak{x}^*_{i-1} - \mathfrak{x}^*_{i+1})\,(f_2\,\bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot}) + \frac{2\,\beta_y^2}{m}\left(\frac{t}{l}\right)^2 (\mathfrak{x}^*_0 - \mathfrak{x}^*_m)\,\bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\right],$$

bei Stützung III b

$$Z_i = \frac{p_{i,i+1} - p_{i,i}}{2} + \frac{1}{2\,l^2\,b^2}\left[(\mathfrak{x}^*_{i-1} - \mathfrak{x}^*_{i+1})\,(f_2\,\bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot}) + \frac{2\,\beta_y^2}{m}\left(\frac{t}{l}\right)^2 \mathfrak{x}^*_0\,\bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\right],$$

bei Stützung II b

$$Z_i = \frac{p_{i,i+1} - p_{i,i}}{2} + \frac{1}{2\,l^2\,b^2}(\mathfrak{x}^*_{i-1} - \mathfrak{x}^*_{i+1})\,(f_2\,\bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot}),$$

bei den Stützungen I a, I b, II a und III a.

Der Einfluß der Horizontalverschiebung v auf die Gelenkkraftkomponente Z_i wird im allgemeinen vernachlässigbar klein sein, so daß es in der Regel zulässig ist, die Z_i für sämtliche Randbedingungen einheitlich nach der zuletzt angegebenen Formel zu berechnen. Die Gelenkkraft Z_m im letzten Gelenk m, welche gleichzeitig die Auflagerkraft einer am Längsrand gestützten Balkenreihe darstellt, errechnet sich aus folgenden Beziehungen, die sich aus Gleichung (3) nach einigen Umrechnungen ergeben.

$$Z_m = -p_{m,m} + \frac{1}{l^2\,b^2}\left[\mathfrak{x}^*_{m-1}\,(f_2\,\bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot}) + \frac{\beta_y^2}{m}\left(\frac{t}{l}\right)^2 \mathfrak{x}^*_0\,\bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\right], \qquad \text{bei Stützung II b}$$

$$Z_m = -p_{m,m} + \frac{1}{l^2\,b^2}\,\mathfrak{x}^*_{m-1}\,(f_2\,\bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot}), \qquad \text{bei den Stützungen I a, I b und II a}$$

Zur Berechnung der horizontalen Komponenten der Gelenkkräfte Y_i werden die Differentialgleichungen für die Balkenbiegung um die z-Achse für alle Balken links von der Fuge i angeschrieben.

$$\begin{aligned}
\frac{E\,J_z}{l^4}\,\hat{v}_1^{\cdot\cdot\cdot\cdot} &= Y_1,\\
\frac{E\,J_z}{l^4}\,\hat{v}_2^{\cdot\cdot\cdot\cdot} &= Y_2 - Y_1,\\
&\vdots\\
\frac{E\,J_z}{l^4}\,\hat{v}_i^{\cdot\cdot\cdot\cdot} &= Y_i - Y_{i-1}.
\end{aligned}$$

Die Summation ergibt

$$Y_i = \frac{E\,J_z}{l^4}\,(\hat{v}_1^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \hat{v}_2^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \cdots + \hat{v}_i^{\cdot\cdot}).$$

Setzt man hier die Gleichung (6) ein

$$Y_i = \frac{E J_z}{l^4}\left[i\, v^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - (w_0^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - w_i^{\cdot\cdot\cdot\cdot})\frac{t}{b}\right]$$

und beachtet (10), (11) und (51), so erhält man für die verschiedenen Stützungsarten folgende Beziehungen für die Berechnung der Y_i.

$$Y_i = \frac{t\beta_y^2}{b\,l^4}\,\mathfrak{x}_i^*\,\bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}, \qquad \text{bei den Stützungen Ia, Ib}$$

$$Y_i = \frac{t\beta_y^2}{b\,l^4}(\mathfrak{x}_i^* - \mathfrak{x}_0^*)\,\bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}, \qquad \text{bei den Stützungen IIa, IIIa}$$

$$Y_i = \frac{t\beta_y^2}{b\,l^4}\left(\mathfrak{x}_i^* - \frac{m-i}{m}\,\mathfrak{x}_0^*\right)\bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}, \qquad \text{bei der Stützung IIb}$$

$$Y_i = \frac{t\beta_y^2}{b\,l^4}\left(-\frac{i}{m}\,\mathfrak{x}_m^* + \mathfrak{x}_i^* - \frac{m-i}{m}\,\mathfrak{x}_0^*\right)\bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}, \qquad \text{bei der Stützung IIIb}$$

Die in den Gelenken wirkenden Einzelkräfte $\tilde{Z}_i$ sind von den Lagerungsbedingungen der Balken abhängig. Wir geben im folgenden die Endbeziehungen an, die sich aus den Gleichgewichtsbedingungen an den Balkenenden, den Zwischenunterstützungen oder den Angriffspunkten von Einzellasten nach einigen Zwischenrechnungen ergeben.

Elastisch gestütztes Balkenende

$$\tilde{Z}_i = \frac{\tilde{P}_{i,i+1} - \tilde{P}_{i,i}}{2} + \frac{1}{2\,l\,b^2}(\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_{i+1}^*)\,(f_2\,\bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot\cdot} + \bar{\mathfrak{g}}^{\cdot} + f_4\,\bar{\mathfrak{g}}),$$

Freies Stabende

$$\tilde{Z}_i = \frac{\tilde{P}_{i,i+1} - \tilde{P}_{i,i}}{2} + \frac{1}{2\,l\,b^2}(\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_{i+1}^*)\,(f_2\,\bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot\cdot} + \bar{\mathfrak{g}}^{\cdot}),$$

Elastische Zwischenunterstützung

$$\tilde{Z}_i = \frac{\tilde{P}_{i,i+1} - \tilde{P}_{i,i}}{2} + \frac{1}{2\,l\,b^2}(\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_{i+1}^*)\,[f_2(\bar{\mathfrak{g}}_B^{\cdot\cdot} - \bar{\mathfrak{g}}_A^{\cdot\cdot}) + f_4\,\bar{\mathfrak{g}}],$$

Angriffspunkt einer Einzellast

$$\tilde{Z}_i = \frac{\tilde{P}_{i,i+1} - \tilde{P}_{i,i}}{2} + \frac{1}{2\,l\,b^2}(\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_{i+1}^*)\,f_2(\bar{\mathfrak{g}}_B^{\cdot\cdot\cdot} - \bar{\mathfrak{g}}_A^{\cdot\cdot\cdot}).$$

Greifen an den Balkenenden und den Zwischenunterstützungen keine Einzellasten an, so ist $\tilde{P}_{i,i+1} = \tilde{P}_{i,i} = 0$ zu setzen.

Diese Formeln gelten streng für die vier Fälle, bei denen $v = 0$ ist und mit sehr guter Näherung auch für die anderen beiden Stützungsarten. Bei starrer Stützung wird mit $c_L \to \infty$, $f_4 \to \infty$ und $\mathfrak{g} \to 0$ der Ausdruck für die $\tilde{Z}_i$ unbestimmt.

Die horizontal wirkenden Einzelkräfte $\tilde{Y}_i$ berechnen sich aus

$$\tilde{Y}_i = \frac{\beta_y^2}{l^4}\left[i G J_T v^{\cdots} - \frac{t}{b}(\mathfrak{x}_0^* - \mathfrak{x}_i^*)\,\bar{\mathfrak{g}}^{\cdots}\right].$$

Die Auflagerkräfte A_i und die vom Auflager abzutragenden Torsionsmomente M_{Ai} berechnet man bei elastischer Lagerung nach den Gleichungen (43), die man auch in der Form

$$A_i = c_L(\mathfrak{x}_{i-1}^* + \mathfrak{x}_i^*)\,\mathfrak{g}, \qquad M_{Ai} = \frac{a^2 c_L}{2b}(\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_i^*)\,\mathfrak{g}$$

schreiben kann.

7. Beispiel

Die Anwendung der Theorie soll an einem einfachen Beispiel gezeigt werden. Wir berechnen die Gelenkkräfte und Schnittgrößen in der tordierten Balkenreihe, die nach Fig. 9 durch vier an den Ecken wirkende Einzellasten $\tilde{P}$ belastet ist. Diese Belastung wurde von MÜLLER [14] zur experimentellen Bestimmung der Torsionssteifigkeit einer Balkenreihe benutzt.

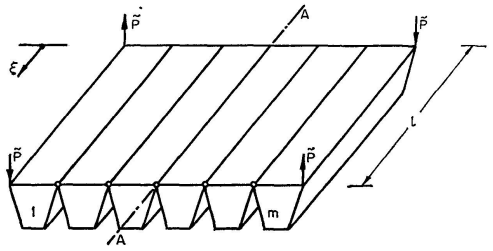


Fig. 9. Tordierte Balkenreihe.

Die Balkenreihe liege so im Raume, daß am Rande $\xi = 0$ die Verschiebungen gleich Null sind. Die Balkenzahl m sei gerade. Für die Stützung der Längsränder liegt Fall III b nach Fig. 3 vor. Da hier als äußere Lasten nur Randkräfte auftreten, ist $\mathfrak{p} = 0$; die Differentialgleichung (29) wird homogen, und damit ist auch das partikuläre Integral in (30) $P_k^*(\xi) = 0$. Die Integrationskonstanten der allgemeinen Lösung (30) errechnen sich aus den Randbedingungen:

$$g_k^{\cdot\cdot}(0) = 0 \quad \text{liefert} \quad D_k = 0,$$

$$g_k^{\cdot\cdot}(1) = 0 \quad \text{liefert} \quad C_k = 0,$$

$$g_k^{\cdot\cdot\cdot}(0) - \lambda_k^2 g_k^{\cdot}(0) = \frac{b^2 l}{G J_T}\frac{\mathfrak{x}_k' \tilde{\mathfrak{p}}}{d_k} \quad \text{liefert} \quad B_k = -\frac{b^2 l}{G J_T}\frac{\mathfrak{x}_k' \tilde{\mathfrak{p}}}{\lambda_k^2 d_k},$$

$$g_k^{\cdot\cdot\cdot}(1) - \lambda_k^2 g_k^{\cdot}(1) = \frac{b^2 l}{G J_T}\frac{\mathfrak{x}_k' \tilde{\mathfrak{p}}}{d_k} \quad \text{ist mit den bereits berechneten Konstanten widerspruchsfrei erfüllt,}$$

$$g_k(0) = 0 \quad \text{liefert} \quad A_k = 0.$$

Die erste Komponente g_0 des Vektors $\mathfrak{g}$ wird aus der Gleichung (31) ermittelt, die infolge $\mathfrak{p}=0$ hier

$$g_0^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = 0 \quad \text{lautet.}$$

Allgemeine Lösung $\quad g_0 = A_0\frac{\xi^3}{6}+B_0\frac{\xi^2}{2}+C_0\xi+D_0$

$$g_0^{\cdot\cdot}(0) = 0 \quad \text{liefert} \quad B_0 = 0,$$
$$g_0^{\cdot\cdot}(1) = 0 \quad \text{liefert} \quad A_0 = 0,$$
$$g_0\ (0) = 0 \quad \text{liefert} \quad D_0 = 0.$$

$g_0^{\cdot\cdot\cdot}(0) = g_0^{\cdot\cdot\cdot}(1) = 0$ ist mit $A_0 = 0$ bereits erfüllt. Die restliche Konstante C_0 hat lediglich eine Lageveränderung der Balkenreihe, und zwar eine Drehung um die Auflagerachse $\xi = 0$ zur Folge. Wir setzen auch $C_0 = 0$, das bedeutet geometrisch, daß die Balkenreihe so im Raume festgelegt wird, daß ihre Längsachse A—A nach Fig. 9 bei der Verformung ihre Lage nicht verändert.

Damit ist

$$g_0 = 0, \qquad g_k = -\frac{b^2 l}{G J_T}\frac{\mathfrak{x}_k'\tilde{\mathfrak{p}}}{\lambda_k^2 d_k}\xi, \qquad k = 1, 2 \ldots m.$$

Mit den Angaben der Tafel 2 ist für Stützungsart III

$$\frac{1}{\lambda_k^2 d_k} = \frac{1}{m\,\delta\left(1-\cos\frac{k}{m}\pi\right)} \quad \text{mit} \quad \delta = \begin{cases} 1 \text{ für } k = 1, 2 \ldots (m-1), \\ 2 \text{ für } k = m. \end{cases}$$

Die gegebene äußere Belastung wird zum Vektor

$$\tilde{\mathfrak{p}} = \tilde{P}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}$$

zusammengefaßt.

Beachtet man, daß nach Tafel 2 die erste und die letzte Komponente von $\mathfrak{x}_k$

$$x_{0k} = \cos 0 \quad = \quad +1,$$
$$x_{mk} = \cos k\pi = \begin{cases} +1 \text{ für gerades } k, \\ -1 \text{ für ungerades } k \end{cases}$$

ist, so erkennt man, daß

$$\mathfrak{X}'\tilde{\mathfrak{p}} = -2\tilde{P}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gilt. Damit ergibt sich für den Vektor $\mathfrak{g}$

$$G J_T \mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{g}} = +\frac{2\tilde{P}}{m} b^2 l \xi \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1-\cos\frac{1\pi}{m}} \\ 0 \\ \frac{1}{1-\cos\frac{3\pi}{m}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{1-\cos\frac{(m-1)\pi}{m}} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \bar{\mathfrak{g}}' = \frac{2\tilde{P}}{m} b^2 l \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1-\cos\frac{1\pi}{m}} \\ 0 \\ \frac{1}{1-\cos\frac{3\pi}{m}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{1-\cos\frac{(m-1)\pi}{m}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathfrak{g}}'' = \bar{\mathfrak{g}}''' = \bar{\mathfrak{g}}'''' = 0.$$

Daraus folgt zunächst, daß sämtliche Schnittgrößen in den Balken zu Null werden mit Ausnahme des primären Torsionsmomentes.

Für dieses erhalten wir

$$M_{TPi} = \frac{1}{b l}(\mathfrak{x}^*_{i-1} - \mathfrak{x}^*_i)\,\bar{\mathfrak{g}}' = +\frac{2\tilde{P}b}{m} \sum_{k=1,3,5\ldots}^{m-1} \frac{\cos\frac{(i-1)k\pi}{m} - \cos\frac{ik\pi}{m}}{1-\cos\frac{k\pi}{m}}.$$

Die Auswertung der Summe liefert stets den Wert $m/2$, so daß

$$M_{TPi} = \tilde{P} b \quad \text{wird.}$$

Die stetig verteilten Gelenkkräfte Z_i und Y_i verschwinden ebenfalls. Lediglich die Einzelkräfte $\tilde{Z}_i$ an den Fugenenden haben einen von Null verschiedenen Wert.

$$\tilde{Z}_i = \frac{1}{2 l b^2}(\mathfrak{x}^*_{i-1} - \mathfrak{x}^*_{i+1})\,\bar{\mathfrak{g}}' = +\frac{\tilde{P}}{m} \sum_{k=1,3,5\ldots}^{m-1} \frac{\cos\frac{(i-1)k\pi}{m} - \cos\frac{(i+1)k\pi}{m}}{1-\cos\frac{k\pi}{m}}.$$

Diese Summe nimmt den Wert m an, und wir erhalten

$$\tilde{Z}_i = \tilde{P}.$$

Der Ausgleich der an den Ecken angreifenden Einzelkräfte $\tilde{P}$ erfolgt über die an den Gelenkenden wirkenden Einzelkräfte $\tilde{Z}_i$. Diese leiten in alle Balken gleiche Torsionsmomente der Größe $\tilde{P}b$ ein. Die Balken selbst sind frei von Biegemomenten und Querkräften. Damit besteht ein wesentlicher Unterschied zur tordierten Platte. Wie die verfeinerte Plattentheorie von Reißner zeigt,

werden dort die Einzellasten $\tilde{P}$ durch Querkräfte der Größe $\tilde{P}/2$ entlang aller vier Plattenränder von einer Ecke zu den anderen transportiert. Bei der Balkenreihe erfolgt der Kraftausgleich nur entlang der zu den Balken senkrecht liegenden Rändern.

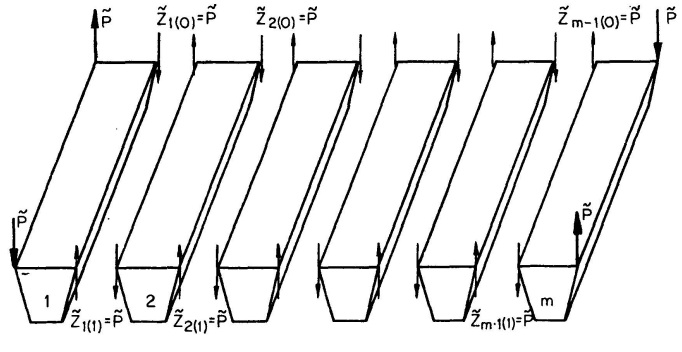


Fig. 10. Darstellung des Kräfteverlaufs in der tordierten Balkenreihe.

Literatur

1. Csonka, P.: Über frei aufliegende, längs eines einzigen Zwischenbalkens belastete Balkenketten. Beton und Eisen 1936, H. 11, S. 187.
2. Csonka, P.: Über frei aufliegende Balkenreihen. Bautechnik 1958, S. 138.
3. Roesli, A.: Lateral Load Distribution in Multi-Beam-Bridges (Querlastverteilung in Balkenreihenbrücken). Progress Report 10. Prestressed Concrete Bridge Members, July 1955, Lehigh University, Institut of Research, Bethlehem, Pennsylvania.
4. Vitek, J.: Spolupůsobeni nosniků montovaných mostů (Zusammenwirkung von Brückenfertigteilen). Inženýrské stavby 1961, H. 12, S. 445.
5. Krajci, L., Smrcina, M.: Spolupôsobenie nosnikov montovanych mostov (Mitwirkung der Träger bei Fertigteilbrücken). Inženýrské stavby 1962, H. 5, S. 191.
6. Kristek, V.: Výpocet spolupůsobeni komůrkových nosniků montovaných mostů (Berechnung der Zusammenwirkung von Hohlkastenträgern bei Fertikteilbrücken). Inženýrské stavby 1962, H. 7, S. 269.
7. Búci, B.: Statický výpočet montovaných mostov s kĺbovým spojenim prefabrikátov v priečnom smere (Statische Berechnung von Brücken aus Fertigteilen mit Gelenkverbindung in Querrichtung). Inženýrské stavby 1963, H. 2, S. 72.
8. Brilla, I.: Statické riešenie žaluziovych dosák (Statische Lösung von Balkenreihen). Stavebnicky časopis 1963, H. 1—2.
9. Martinćek, G.: Dynamické riesĕnie žalúzových dosák (Dynamische Lösung von Balkenreihen). Stavebnický ĕasopis 1963, H. 3, S. 144—164.
10. Spaethe, G.: Ein Beitrag zur Berechnung von Brückentragwerken aus Balkenreihen. Dissertation, TU Dresden, 1965.
11. Spaethe, G.: Die Berechnung von Einflußfeldern der Schnittgrößen und Verformungen für frei aufliegende Balkenreihen. Die Straße 1965, H. 4, S. 196—204.
12. Wlassow, W. S.: Dünnwandige elastische Stäbe. 2 Bände, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1964.
13. Bornscheuer, F.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehungsvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion. Der Stahlbau 1952, S. 1, S. 225; 1953, S. 32.
14. Müller, K.: Modellstatische Untersuchung an Balkenreihen für den Überbau einer Straßenbrücke aus Fertigteilen BT 50. Die Straße 1964, H. 2, S. 68.

Zusammenfassung

Es wird eine allgemeine Theorie zur Berechnung von Balkenreihen über rechteckigem Grundriß unter beliebiger vertikaler Belastung dargestellt. Das sich ergebende Differentialgleichungssystem für die Durchbiegungen der Balkenränder wird durch eine geeignete Lineartransformation auf Diagonalform überführt. Damit wird eine einfache Lösung in strenger Form möglich. Die Lösungen werden für eine Reihe technisch wichtiger Randbedingungen an den Längs- und Querrändern entwickelt. Die Randbedingungen an den Längsrändern beeinflussen das Differentialgleichungssystem und damit dessen Lösung. Die Randbedingungen für die Querränder dienen zur Bestimmung der Konstanten in diesen Lösungen. Die Anwendung der Theorie wird am Beispiel der tordierten Balkenreihe gezeigt.

Summary

A general theory is presented for the design of series of beams disposed in a rectangular plane and subjected to any vertical loading. The resulting system of differential equations for the deflections of the edges of the beams becomes, by a suitable linear transformation, a diagonal matrix, so that a simple and rigorous solution is possible. The solutions are provided for a series of boundary conditions for the longitudinal and transverse edges commonly met with in practice. The boundary conditions for the longitudinal edges affect the system of differential equations and hence the solutions. The boundary conditions for the transverse edges are used to determine the constants of these solutions. The application of the theory is demonstrated by the example of a series of beams subjected to torsional stresses.

Résumé

On présente une théorie générale pour le calcul de séries de poutres placées dans un plan rectangulaire, soumises à une charge verticale quelconque. Le système d'équations différentielles qui en résulte pour les flèches des bords des poutres devient, par une transformation linéaire appropriée, une matrice diagonale. Ainsi une solution simple et rigoureuse est possible. Les solutions sont apportées pour une série de conditions aux limites pour les bords longitudinaux et transversaux courantes dans la pratique. Les conditions aux limites pour les bords longitudinaux influencent le système d'équations differentielles et donc ses solutions. Les conditions aux limites pour les bords transversaux servent à déterminer les constantes de ces solutions. On montre une application de la théorie sur l'exemple de la série de poutres soumises à la torsion.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Traglastversuche an eingespannten Geschoßstützen mit I-Querschnitt bei Biegung um beide Hauptachsen

Ultimate Load Test on I-Shaped Restrained Columns in Biaxial Bending

Essais de charges limites pour des poteaux encastrés à profil en I soumis à la flexion selon les deux axes principaux

UDO VOGEL
Wiss. Rat, Universität Stuttgart (TH), z. Zt. Vist. Associate Professor, University of California, Berkeley

WERNER ZIMMERMANN
Dipl.-Ing., wissenschaftlicher Mitarbeiter des Otto-Graf-Instituts an der Universität Stuttgart (TH)

1. Einleitung

In [1] wird über eine Näherungstheorie zur Berechnung der Traglasten von eingespannten Geschoßstützen bei schiefer Biegung berichtet. Solche Stützen treten in Skelettbauten auf, bei denen sie als Teile von Quer- und Längsrahmen oder durch biegesteif angeschlossene Quer- und Längsunterzüge bzw. Deckenplatten, außer den Axiallasten auch Biegemomente in beiden Hauptachsenrichtungen erhalten. Diese Biegemomente werden in der Regel durch die Verdrehungen der Stützenköpfe und -füße eingeleitet.

Während für die Traglast- und Stabilitätsuntersuchungen *ebener* Rahmentragwerke im unelastischen Bereich bereits eine Reihe von geeigneten Berechnungsverfahren nach der Plastizitätstheorie existieren, fehlen solche Verfahren für *räumliche* Rahmentragwerke fast völlig. Das ist u. a. auf die mathematischen Schwierigkeiten bei der genauen Untersuchung des Tragverhaltens der auf schiefe Biegung beanspruchten Stützen zurückzuführen. Ohne rigorose Vereinfachungen und Näherungsannahmen wird man kaum in der Lage sein, hierfür Methoden zu entwickeln, die mit für die Praxis vertretbarem Rechenaufwand zum Ziel führen. Solche Vereinfachungen enthält die in [1] vorgeschlagene Näherungstheorie.

Zur Überprüfung der Näherungsannahmen und zur Ergänzung der Theorie wurde daher im Frühsommer 1967 im Otto-Graf-Institut der Universität Stuttgart eine 1. Versuchsreihe von 4 Traglastversuchen an Geschoßstützen

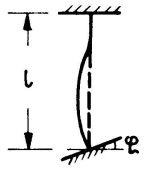
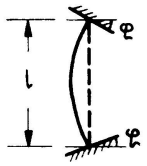
natürlicher Größe durchgeführt, die bei verschiedenen Längen und Randbedingungen auf schiefe Biegung und Axialkraft beansprucht wurden. Über Durchführung, Ergebnis und Schlußfolgerungen für die Näherungstheorie wird im folgenden berichtet.

2. Beschreibung der Versuche und Versuchsdurchführung

2.1. Probekörper

Die Tabelle I gibt eine Übersicht über Bezeichnung, Randbedingungen und Länge der Probekörper.

Tabelle I

Versuch Nr.	System	Profil	l [m]	φ_x	φ_y	φ_{Res}
1.1		IPB 120	3,00	0,0071	0,0071	0,01
1.2			6,00			
2.1		IPB 120	3,00	0,0142	0,0142	0,02
2.2			6,00			

2.1.1. Abmessungen und Bezeichnung der Probekörper

Die Probekörper wurden aus zwei je 10 m langen Stangen IPB 120, DIN 1025 der Materialgüte R St 37-2, DIN 17 100, herausgeschnitten, und zwar je ein 6,0 m langes Stück und ein 3,0 m langes Stück. Das 1 m lange Reststück wurde in ein 0,5 m und 0,4 m langes Stück für Druck- und Zugversuche aufgeteilt. Die Schnittfolge war: 6,0 m, 1,0 m, 3,0 m.

Die Probekörper erhielten folgende Bezeichnung:

Aus Stange 1: Stützen: 1.1; $l = 3{,}0$ m,
1.2; $l = 6{,}0$ m.

Säule 1 für Druckversuch (Querschnittsversuch). Probestäbe: 1.1 und 1.2 für Zugversuche.

Aus Stange 2: Stützen: 2.1; $l = 3{,}0$ m,
2.2; $l = 6{,}0$ m.

Säule 2 für Druckversuch. Probestäbe: 2.1 und 2.2 für Zugversuche.

2.1.2. Vorbereitung der Probekörper für die Versuche

Die Stützen wurden mit sauberem, rechtwinklig zur Längsachse geführtem Sägeschnitt abgelängt. Danach wurden 60 mm dicke, planparallel gehobelte Kopf- und Fußplatten aus St 52-3, DIN 17 100, Kantenlängen 300 mm, mit ringsum laufenden Kehlnähten $a = 7$ mm an den Flanschen und $a = 4$ mm am Steg angeschweißt. Die Platten waren so gegen die Stützen verdreht, daß Plattenkante und Flanschkante einen Winkel von 45° bildeten. Die Kopf- und Fußplatten hatten je 4 Bohrungen ⌀ 25 mm für die Ankerschrauben. Weiterhin wurde eine Keilplatte 300×300 mm² mit der Neigung von $\varphi = 1\%$ und zwei Keilplatten mit $\varphi = 2\%$ Neigung hergestellt und zu den Kopf- und Fußplatten passend gebohrt. Die Keilplatten waren in Richtung einer Kante geneigt und wurden kantenbündig unter die Fuß- bzw. Kopfplatten gesetzt. Die um 45° zu den Plattenkanten verdrehten Stützen erhielten dadurch eine End-Neigung von $\varphi_x = \varphi_y = \varphi/\sqrt{2}$.

Die 500 mm langen Stützenabschnitte für den Druckversuch mit vollem Stützenquerschnitt (stub-column-test) wurden rechtwinklig zur Stützenachse planparallel gesägt.

Die Probestäbe für die Zugversuche wurden aus den Flanschen der 400 mm langen Reststücke entnommen und als lange Proportionalstäbe entsprechend DIN 50 125 vorbereitet.

2.2. Durchführung der Versuche

2.2.1. Druckversuch (Querschnittsversuch)

Für den Druckversuch mit vollem Stützenquerschnitt (stub-column-test) stand eine Druckprüfmaschine mit 500 Mp maximaler Druckkraft zur Verfügung; der Versuch wurde im 250-Mp-Bereich der Prüfmaschine gefahren. An der oberen Druckplatte der Prüfmaschine wurde die Gelenkwirkung der Kugelkalotte durch Paßstücke ausgeschaltet, die untere Druckplatte blieb gelenkig gelagert.

An den beiden Probekörpern wurden für die Verformungsmessung zwei Meßbügel im Abstand von 200 mm voneinander, mit je 150 mm Abstand von den Säulenenden, angeklemmt und an jeder Flanschseite eine Meßuhr mit $^1/_{100}$ mm Skalenteilung eingesetzt. Die Probekörper wurden sorgfältig zentrisch in die Prüfmaschine eingebaut und stufenweise in 5-Mp-Stufen ansteigend belastet.

Im Bereich der Fließgrenze wurden die Laststufen auf 2,5 Mp verringert und die Meßuhren bei der Säule 1 erst nach mehreren Minuten Wartezeit abgelesen, wenn sie nahezu zum Stillstand gekommen waren.

Bei der Säule 2 wurde die Last mit konstanter Ölfördermenge langsam gesteigert und die Längenänderungen der Meßstrecken bei den gleichen Laststufen wie bei Säule 1 abgelesen. Im Fließbereich wurden dann beide Meßuhren gleichzeitig abgelesen, wenn die Lastanzeige volle Mp-Zahlen erreichte.

2.2.2. Zugversuche

Die Zugversuche zur Bestimmung der Streckgrenze β_S, der Zugfestigkeit β_Z und der Bruchdehnung δ_{10} wurden entsprechend DIN 50 146 in einer 60-Mp-Zugprüfmaschine im 30-Mp-Bereich durchgeführt.

2.2.3. Traglastversuche

Für die Traglastversuche war es erforderlich, die 3,0 m und 6,0 m langen Stützen oben und unten voll einzuspannen und den Fußplatten bzw. Kopf- und Fußplatten eine bestimmte Anfangsneigung gegen die x- und y-Achsen der Stützen zu geben (s. Tabelle I).

Als geeignet für die Einspannung der Stützen erwies sich eine stehende 500-Mp-Zugprüfmaschine mit maximal 8,0 m Einspannlänge, deren massive Querhäupter mit Einspann-Nuten für Hammerkopfschrauben versehen sind. Die für diesen Fall erforderliche Verwendung als Druckprüfmaschine ließ sich dadurch ermöglichen, daß der unten stehende Druckzylinder der Prüfmaschine ausgeschaltet werden konnte und dafür zwischen dem Maschinenquerhaupt und dem vertikal verschieblichen unteren Querhaupt 5 Druckpressen mit je 20 Mp maximaler Druckkraft und einer Bauhöhe von 350 mm eingesetzt wurden. In Fig. 1 ist die Prüfmaschine schematisch skizziert. Die 5 Druckpressen mußten zunächst das Gewicht des unteren Querhauptes einschließlich der daran hängenden Unterkonstruktion mit dem Druckzylinder der Prüfmaschine von insgesamt etwa 16 Mp tragen, bevor die zu prüfende Stütze belastet wurde. Die Versuchseinrichtung wurde vor Beginn der Traglastversuche geeicht.

Danach wurden die Stützen nacheinander zum Versuch eingebaut. Die HV-Schrauben M 24 × 180-8 G wurden mit Paßstücken in die Nuten der Querhäupter eingeführt, danach die Keilplatten mit 1% bzw. 2% Neigung eingesetzt und schließlich die Stützen durch Verfahren des unteren Querhauptes in die Ankerschrauben eingeführt und die Muttern der Schrauben leicht von Hand angezogen. Dabei wurden die Druckpressen unter konstantem Druck gehalten, so daß die eingebauten Stützen vom Gewicht des Querhauptes unbeeinflußt blieben. In diesem Zustand erfolgte die erste Nullmessung an den Stützen. Die Fig. 2 zeigt die Stütze 2.2 in der Prüfmaschine (nach dem Versuch).

Danach wurden die Schrauben in Kopf- und Fußplatten mit einem Drehmomentenschlüssel vorgespannt. Die Vorspannung $P_v = 15$ Mp in den inneren Schrauben und $P_v = 5$ Mp in den äußeren Schrauben (s. Fig. 3) war so gewählt, daß die Kopf- und Fußplatten unter jeder möglichen Laststufe ohne klaffende Fuge an den Keilplatten bzw. Querhäuptern der Prüfmaschine anlagen. Auch beim Vorspannen der Schrauben gewährleistete der konstante Pressendruck den Ausgleich des Maschinen-Eigengewichtes. Damit war der erste Belastungszustand erreicht; Beanspruchung der Stütze durch ein Moment am Fuß bzw.

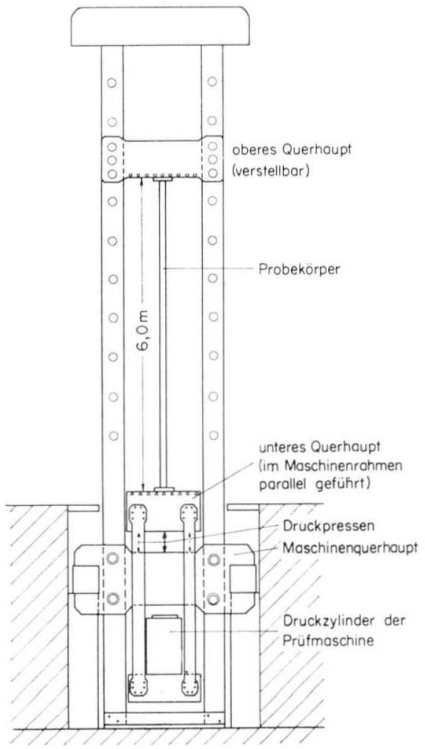


Fig. 1.

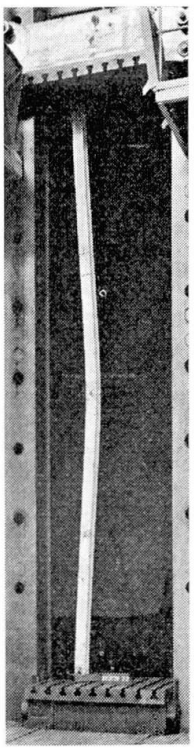


Fig. 2.

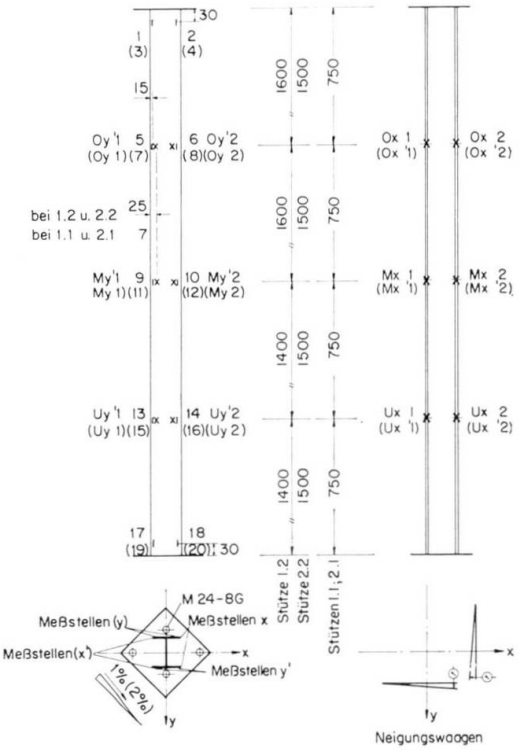


Fig. 3.

Fig. 1. Prinzipskizze der Prüfmaschine.
Fig. 2. Stütze 2.2 ($l = 6{,}0$ m) in der Prüfmaschine (nach dem Versuch).
Fig. 3. Lage der Meßstellen.

Fuß und Kopf der Stütze, ohne Axialkraft. Danach folgten die weiteren Belastungszustände mit zusätzlich stufenweise gesteigerter Axialkraft. Nach Erreichen einer jeden Laststufe wurden die Verformungen und Dehnungen in verschiedenen Meßquerschnitten gemessen.

2.2.4. Messungen

2.2.4.1. Dehnungsmessungen

An den 6 m langen Stützen wurden in jeweils 5 Meßquerschnitten mit je 4 elektrischen Dehnungsmeßstreifen die Dehnungsänderungen in Längsrichtung der Stützen gemessen. Verwendet wurden Hottinger-Dehnungsmeßstreifen vom Typ 20/600, $K = 2{,}11$. Die Lage der Meßstellen ist aus Fig. 3 zu ersehen.

2.2.4.2. Verschiebungsmessungen

Die Verformungen der Stützen in x- und y-Richtung wurden in 3 Meßquerschnitten verfolgt. Dazu waren in jedem Meßquerschnitt 4 Meßuhren mit $^1/_{100}$ mm-Teilung am steifen Maschinenrahmen befestigt. Mit diesen Meßuhren konnten nur geringe Anfangsverformungen gemessen werden, da die Verformungen schräg zur Meßuhrenrichtung verliefen und damit die Meßwerte der ortsfesten Meßuhren verfälscht wurden.

Deswegen wurden die Verformungen außerdem mit Spiegelmaßstäben gemessen. Dazu waren an den Stützen Meßplättchen mit Zentrierbohrungen aufgeklebt. In die Zentrierbohrungen wurde die kugelförmige Spitze des Spiegelmaßstabes eingesetzt. Gemessen wurde der Abstand der Meßstellen gegen parallel zur x- und y-Richtung der Stützen gespannte Meßdrähte. Der Spiegeleinsatz neben der Skala des Maßstabes erlaubte dabei ein parallaxefreies Ablesen auch bei vertikaler Verschiebung der Meßstellen gegen den Meßdraht. Die Ablesegenauigkeit lag bei den Spiegelmaßstäben bei $\pm 0{,}2$ mm. Mit den Spiegelmaßstäben und parallel zur Stützenlängsachse gespannten Meßdrähten wurde nach Einbau der Stützen auch die Geradheit der Probekörper kontrolliert und die festgestellten Abweichungen protokolliert.

2.2.4.3. Neigungsmessungen

Für die Versuche war es besonders wichtig, eventuelle Änderungen der Einspannung zu erkennen. Deswegen wurden die Bewegungen der Maschinenquerhäupter in x- und y-Richtung mit Neigungswaagen beobachtet und außerdem die Abstände O.K. Querhaupt zu O.K. Fußplatte bzw. Kopfplatte mit Meßuhren gemessen.

3. Versuchsergebnisse

3.1. Ermittlung der Materialkennwerte

3.1.1. Druckversuche (Querschnittsversuche)

Aus den tatsächlichen Abmessungen der verwendeten I-Profile ergab sich ein Stützenquerschnitt von $F \simeq 32{,}5$ cm² für beide Stützenpaare.

Die mittleren Querschnittsabmessungen betrugen:

Höhe: $h = 121{,}1$ mm;	Breite: $b = 118{,}6$ mm;
Flanschdicke $t = 10{,}6$ mm;	Stegdicke $s = 6{,}4$ mm.

Beim Druckversuch mit den kurzen Säulen mit vollem Querschnitt (stub-column-test) wurde bei jeder Laststufe der Mittelwert aus den Ablesungen an beiden Meßuhren gebildet. Die Meßergebnisse sind in den Fig. 4 und 5 als Kraft-Verkürzungs-Diagramme aufgetragen.

Setzt man die Quetschgrenze mit der $\beta_{d\,0{,}2}$-Grenze gleich, so ließe sich diese aus den Diagrammen zu $\beta_{d\,0{,}2} = 25{,}4$ kp/mm² bei Säule 1 und zu $\beta_{d\,0{,}2} = 25{,}3$ kp/mm² bei Säule 2 ermitteln.

3.1.2. Zugversuche

Die 4 Zugversuche brachten wenig streuende Ergebnisse:

Streckgrenze $\beta_S = 24{,}6$ kp/mm² (24,1 bis 25,0 kp/mm²),
Zugfestigkeit $\beta_Z = 40{,}4$ kp/mm² (40,3 bis 40,5 kp/mm²),
Bruchdehnung $\delta_{10} = 29{,}2\%$ (28,5 bis 30,0%)

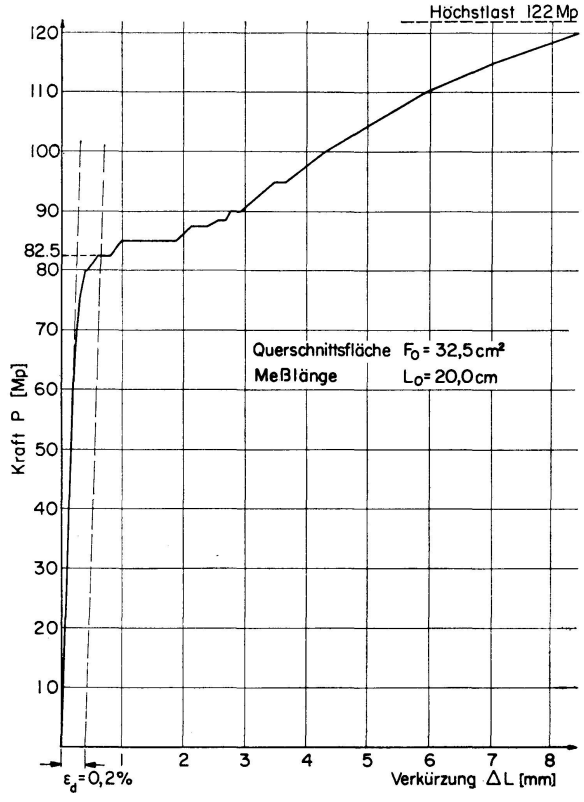


Fig. 4. Kraft-Verkürzungs-Diagramm der Säule 1 (stub-column-test).

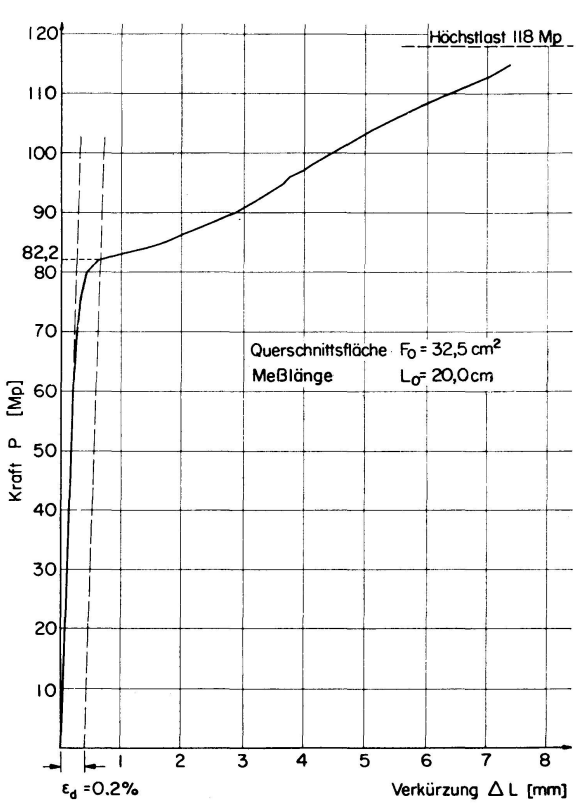


Fig. 5. Kraft-Verkürzungs-Diagramm der Säule 2 (stub-column-test).

Die Streckgrenzen waren ausgeprägt, Bruchaussehen und Einschnürung normal.

3.2. Traglastversuche

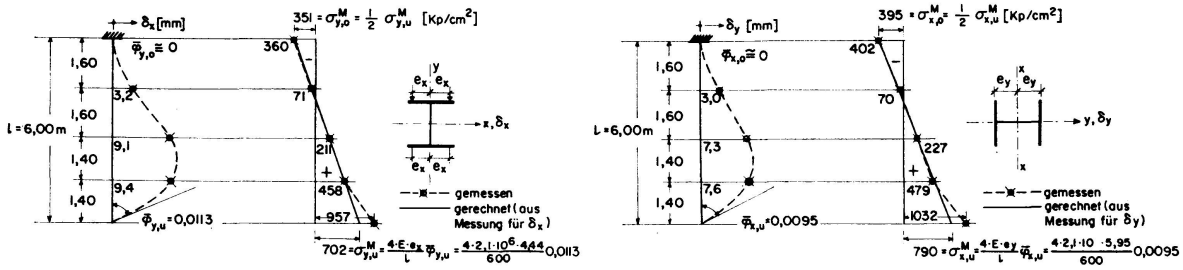
3.2.1. Die Enddrehwinkel φ_x und φ_y

Da die Enddrehwinkel von entscheidender Bedeutung für die Größe der Traglast sind, wurden sie — wie oben beschrieben — besonders sorgfältig vor Beginn der eigentlichen Traglastversuche bestimmt. Die möglichen Änderungen der Enddrehwinkel während des Versuchsablaufes konnten ohne Schwierigkeiten direkt gemessen werden. Die Ermittlung der Enddrehwinkel im Ausgangszustand — nach Anspannen der HV-Schrauben an den Stirnplatten, jedoch vor Aufbringen einer Axiallast — war jedoch nur indirekt möglich. Dazu wurden zwei Wege benutzt:

a) Die Differenzen der Verformungen vor und nach dem Anspannen der HV-Schrauben wurden graphisch aufgetragen und aus diesen Biegelinien die Enddrehwinkel entnommen.

b) Bei den Versuchen 1.2 und 2.2 — d. h. bei den 6,00 m langen Stützen — konnten die Enddrehwinkel außerdem aus den gemessenen Biegespannungen berechnet werden.

Es zeigte sich bei den langen Stützen, daß die Differenzen zwischen den nach a) und b) bestimmten Winkeln unbedeutend waren, so daß auch die nur nach a) bestimmten Winkel bei den kurzen Stützen als genügend genau angesehen werden können.



a) Verformungen und Spannungen für Biegung in der x—x-«Ebene».

b) Verformungen und Spannungen für Biegung in der y—y-«Ebene».

Fig. 6. Auswertung der Meßergebnisse für die Enddrehwinkel bei Stütze 1.2.

In Fig. 6 ist das Ergebnis dieser Messungen für die Stütze 1.2 dargestellt. Die am Stützenfuß gemessenen großen Dehnungen wurden für die Ermittlung von φ nicht herangezogen, da hier wegen der durch das Anschweißen der Fußplatten vorhandenen Eigenspannungen sehr früh Fließerscheinungen auftraten.

In Tabelle II sind für alle Stützen die nach den geschilderten Methoden ermittelten Enddrehwinkel $\bar{\varphi}$ zusammengestellt. Außerdem sind dort auch die im Versagenszustand vorhandenen zusätzlichen Enddrehwinkel $\bar{\bar{\varphi}}$ eingetragen, die durch die geringfügigen Bewegungen der Querhäupter während der Traglastversuche entstanden sind.

Tabelle II. Experimentelle Enddrehwinkel

Stütze	Kopfdrehwinkel					
	$\bar{\varphi}_{x,0}$	$\bar{\bar{\varphi}}_{x,0}$	$\varphi_{x,0}$	$\bar{\varphi}_{y,0}$	$\bar{\bar{\varphi}}_{y,0}$	$\varphi_{y,0}$
1.1	∼0	0,0002	∼0	∼0	0,0001	∼0
1.2	∼0	∼0	∼0	∼0	∼0	∼0
2.1	0,0164	∼0,0005	0,0169	0,0125	∼0,0001	0,0126
2.2	0,0233	0,0003	0,0236	0,0157	0,0003	0,0160
	Fußdrehwinkel					
	$\bar{\varphi}_{x,u}$	$\bar{\bar{\varphi}}_{x,u}$	$\varphi_{x,u}$	$\bar{\varphi}_{y,u}$	$\bar{\bar{\varphi}}_{y,u}$	$\varphi_{y,u}$
1.1	0,0063	0,0004	0,0067	0,0082	∼0	0,0082
1.2	0,0095	0,0002	0,0097	0,0113	0,0011	0,0124
2.1	0,0164	∼0,0005	0,0169	0,0125	0,0001	0,0125
2.2	0,0233	0,0003	0,0236	0,0157	0,0003	0,0160

Vergleicht man diese Enddrehwinkel mit den planmäßigen Winkeln $\varphi_{x,u} = \varphi_{y,u} = 0{,}0071$ für die Versuche 1.1 und 1.2, bzw. $\varphi_{x,0,u} = \varphi_{y,0,u} = 0{,}0142$ für die Versuche 2.1 und 2.2 (Tab. I), so erkennt man, daß trotz sorgfältiger Laborarbeit Abweichungen vom rechten Winkel zwischen Fußplatten-Ebene und Stabachse beim Zusammenschweißen nicht vermieden werden konnten. Auf diese Tatsache wird im nächsten Abschnitt noch einmal eingegangen.

3.2.2. Traglast und Last-Verformungs-Verhalten der Versuchsstützen

Wie in Abschnitt 2 bereits erwähnt, wurde die Belastung in Stufen bis zur Traglast gesteigert. Für die Ausbiegungen in Stützenmitte in x- und y-Richtung sind die Meßergebnisse in den Figuren 7a, b, c und d aufgetragen.

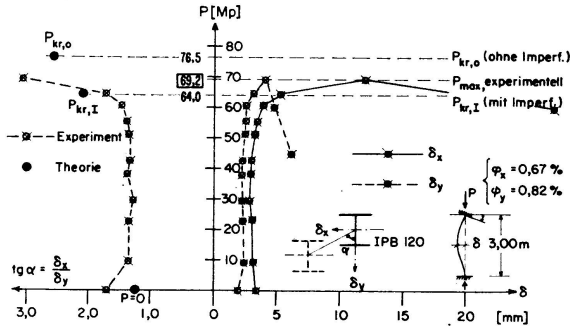


Fig. 7a. Last-Verformungs-Diagramm für Versuch 1.1.

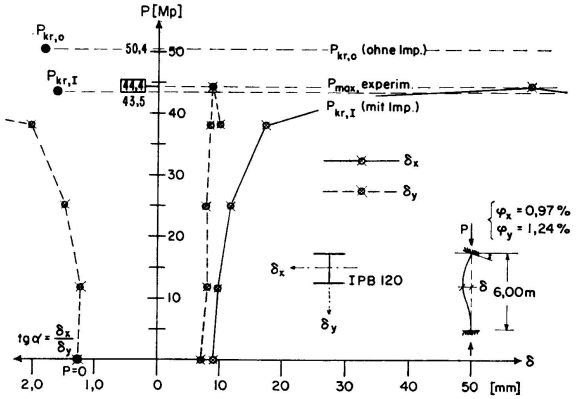


Fig. 7b. Last-Verformungs-Diagramm für Versuch 1.2.

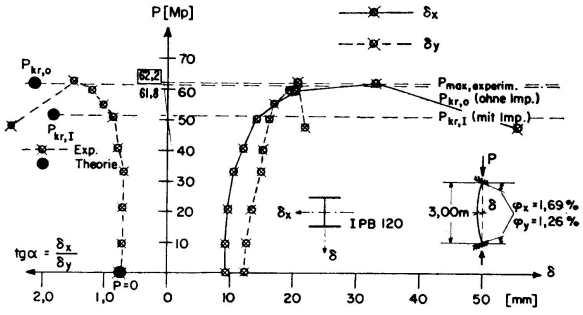


Fig. 7c. Last-Verformungs-Diagramm für Versuch 2.1.

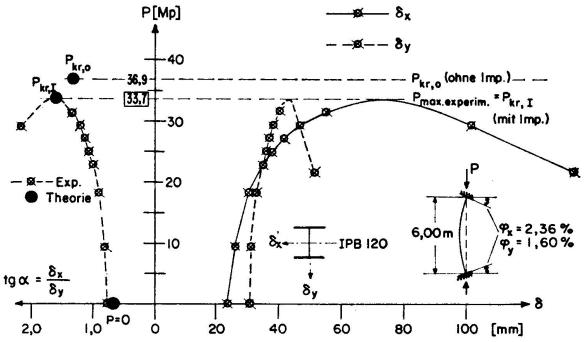


Fig. 7d. Last-Verformungs-Diagramm für Versuch 2.2.

Es zeigen sich die für Instabilitätsprobleme ohne Gleichgewichtsverzweigung charakteristischen Last-Verformungskurven mit dem abfallenden Ast nach Erreichen der Höchstlast bzw. Traglast $P_{max.\,experim.}$.

Zum Vergleich sind in diese Diagramme auch die mit Hilfe der Formeln (2.14) und (2.13) nach [1] und mit den Enddrehwinkeln der Tabelle II berech-

neten theoretischen Traglastwerte $P_{kr,0}$ eingetragen. Die Versuchsergebnisse liegen i. M. um 7,4% unter den theoretischen Werten, d. h. auf der «unsicheren Seite». Aus diesem Grunde wurde in [1] der zusätzliche (d. h. zu den *planmäßigen* Enddrehwinkeln zu addierende) Drehwinkel

$$\underset{(y)}{\Delta \varphi_x} = \frac{0{,}1}{\underset{(y)}{\lambda_x}} + 0{,}008$$

eingeführt, der eine Reihe von baupraktisch unvermeidbaren Imperfektionen, die in der Theorie nicht erfaßt sind, näherungsweise berücksichtigen soll. Zu diesen Imperfektionen gehören z. B. die in Abschnitt 3.2.1 erwähnten Abweichungen der Winkel zwischen Fußplatten und Stabachsen sowie die ebenfalls festgestellten Vorkrümmungen der Stützen und die sicher vorhandenen Eigenspannungen.

Berechnet man die Traglast-Lasten mit den Enddrehwinkeln $(\varphi_{soll} + \Delta\varphi)$, so ergeben sich die in den Figuren 7a–d als $P_{kr\,\mathrm{I}}$ eingetragenen Werte *). Diese Werte zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen, wobei nunmehr die Abweichungen auf der «sicheren Seite» liegen.

3.2.3. Neigungswinkel α der Verformungsebene

In den Figuren 7a–d ist auch der Tangens des Neigungswinkels α der in der Näherungstheorie nach [1] vorausgesetzten Verformungs-*Ebene* aufgetragen. Sowohl für den Anfangs-Zustand $P = 0$ als auch für den End-Zustand P_{kr} ergibt sich — wie man aus den eingetragenen theoretischen Werten ersieht — eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch. Damit ist gezeigt, daß die vereinfachende Annahme gerechtfertigt ist, die Verformungen näherungsweise in den beiden Ebenen *getrennt* nach Theorie II. Ordnung (d. h. ohne Berücksichtigung von Torsionsmomenten) zu berechnen.

Literatur

[1] Vogel, U.: Die Traglast von eingespannten Geschoßstützen mit I-Querschnitt bei Biegung um beide Hauptachsen. Vorgesehener Diskussionsbeitrag zum Thema IIIa des 8. Kongresses der IVBH in New York 1968.

*) Es sei hier noch auf folgendes hingewiesen: Der Winkel $\Delta\varphi$ ist oben und unten anzusetzen! Dadurch ergeben sich für die Stützen 1.1 und 1.2 Drehwinkelverhältnisse von $0 < \varphi_0/\varphi_u < 1$, für welche die Formeln (2.14) und (2.13) in [1] nicht gültig sind. Es kann jedoch zwischen den Ergebnissen nach Formel (2.14) und Formel (2.13) linear interpoliert werden.

Zusammenfassung

Es wird die Durchführung und Auswertung von 4 Traglastversuchen an eingespannten Stützen mit I-Querschnitt beschrieben, die durch Verdrehung der Endquerschnitte auf Biegung um beide Querschnittshauptachsen beansprucht werden. Die Auswertung der Meßergebnisse zeigte, daß eine gute Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit der vom erstgenannten Verfasser vorgeschlagenen Näherungstheorie [1] erst erreicht werden konnte, nachdem diese Theorie durch die Einführung eines plausiblen Imperfektionsgesetzes verbessert wurde.

Summary

Performance and interpretation of 4 ultimate load tests with restrained I-shaped columns, subjected to bending about both axes, are described. The interpretation of the test-results shows, that a good agreement with the proposed approximate theory of the first author [1] could be obtained, after introducing a plausible imperfection-law.

Résumé

On décrit l'exécution et l'interprétation de quatre essais de charges limites pour des poteaux encastrés à profil en I qui sont soumis, par rotation des deux extrémités, à de la flexion selon les deux axes principaux. L'interprétation des mesures montra une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et ceux de la théorie approximative proposée par le premier auteur dans [1] à condition d'introduire dans cette théorie une certaine loi d'imperfection plausible.

Leere Seite
Blank page
Page vide

On Thin Shallow Elastic Shells over Polygonal Bases

Des coques minces élastiques à courbure faible, ayant une base polygonale

Über dünne, flache, elastische Schalen vieleckigen Grundrisses

D. S. WALKINSHAW
Defence Research Board, Ralston, Alberta, Canada

G. E. RILEY
Professional Engineer, Province of Ontario, Canada

J. N. SIDDALL
Associate Professor of Mechanical Engineering, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada

G. AE. ORAVAS
Professor of Engineering Mechanics, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada

Introduction

This paper demonstrates the applicability of the approximate theoretical solution given by ORAVAS in 1957 [1][1]) for shallow thin calotte shells of spherical middle surface subjected to isothermal deformations by uniform normal pressures.

Although spherical calotte shells have been constructed in practice, as far as is known any analytical solution used in their design neglected the shell's transverse bending stiffness. Such momentless analyses introduce errors in the solution, particularily near the shell's boundary where transverse bending is important. The extent of penetration of this transverse bending zone towards the shell's apex depends upon the shell's thickness, middle surface curvature, boundary periodicity and loading.

The theoretical solution is based on a collocation procedure introduced for plates by TÖLKE in 1934 [2] by means of which prescribed boundary conditions are satisfied at discrete boundary points. In this method, derived from the general theory given by MUSHTARI in 1938 [3] and VLASOV in 1949 [4], the transverse shear deformation of the shell is neglected in comparison with its transverse bending and extensional surface deformation.

---

[1]) Numbers in brackets designate references at end of paper.

Sectional resultants obtained both theoretically and experimentally for a spherical shell enclosing an hexagonal base are graphically depicted for various radial lines of the characteristic segment of the shell.

Theoretical sectional resultants are also depicted for a similar spherical shell enclosing a triangular base.

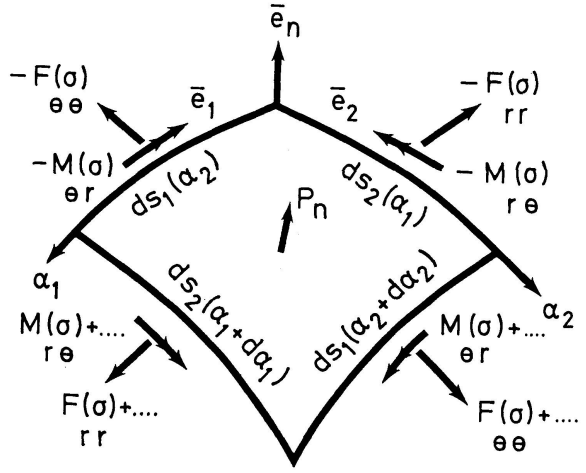


Fig. 1. Vector diagram of shell element showing sectional resultants of stress.

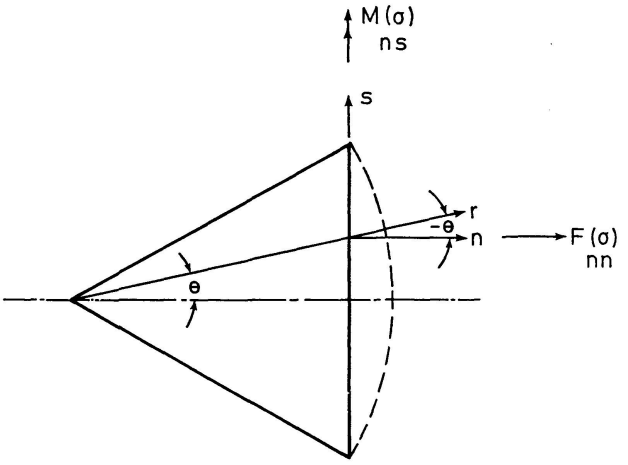


Fig. 2. Vector diagram showing relation of boundary coordinates n, s to shell interior coordinates r, θ.

Formulation of the Theoretical Solution

The two fundamental fourth order differential equations for thin shallow shells subjected to isothermal deformation by uniform normal loading given by MUSHTARI and VLASOV are

$$\begin{aligned} D\nabla^4 u_n + \frac{1}{R}\nabla^2 F &= p_n, \\ \nabla^4 F - \frac{Eh}{R}\nabla^2 u_n &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

where u_n normal displacement
F stress function
p_n load intensity component per unit area normal to middle surface of shell
h constant shell thickness
E YOUNG's modulus of elasticity
R radius of curvature of middle surface of spherical shell
$D = E h^3/12(1-\nu^2) \equiv$ flexural rigidity of shell
$\nabla^2 \equiv \frac{d}{d\bar{r}_0}\frac{d}{d\bar{r}_0} \equiv \frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$
$\nabla^4 \equiv \nabla^2\nabla^2$
ν POISSON's ratio
$\bar{r}_0$ radius vector to middle surface of shell
r radial parametric coordinate of shell
θ circumferential parametric coordinate of shell

MARGUERRE gave similar shallow shell equations in 1939 [5].

The solution of equations (1) under certain restrictions can be reduced to the solution of three differential equations

$$\begin{aligned} \nabla^2[\nabla^2 - i\lambda^2]V_0 &= \frac{p_n}{D}, \\ [\nabla^2 - i\lambda^2]\nabla^2 V_1 &= \nabla^2 V_1 = 0, \\ \nabla^2 V_2 - i\lambda^2 V_2 &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

where

$$\begin{aligned} V &= u_n + i\omega F = V_0 + V_1 + V_2, \\ \omega &= \sqrt{12(1-\nu^2)}/Eh^2, \\ \lambda^2 &= \sqrt{12(1-\nu^2)}/Rh \end{aligned}$$

and V_0, V_1 and V_2 represent three linearly independent solutions.

Solution of equations (2) yields the approximate normal displacement u_n and stress function F for a spherical shell of k-tuple symmetry. Since the shells which were investigated possessed no inner boundaries terms containing $\ker_n(x)$, $\mathrm{kei}_n(x)$ and r^{-n} are omitted from the solution because of their singular nature at the origin. Finally the solution becomes

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{p_n R^2}{Eh} + A_0^1 \operatorname{ber}_0(\lambda r) + A_0^2 \operatorname{bei}_0(\lambda r) + E_0^1 \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}[A_{kn}^1 \operatorname{ber}_{kn}(\lambda r) + A_{kn}^2 \operatorname{bei}_{kn}(\lambda r) + C_{kn}^1 r^{kn}]\cos(kn\theta), \\ F &= \frac{p_n R r^2}{4} + \frac{1}{\omega}\{A_0^1 \operatorname{bei}_0(\lambda r) - A_0^2 \operatorname{ber}_0(\lambda r) + E_0^2 \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}[A_{kn}^1 \operatorname{bei}_{kn}(\lambda r) - A_{kn}^2 \operatorname{ber}_{kn}(\lambda r) + C_{kn}^2 r^{kn}]\cos(kn\theta)\}. \end{aligned} \tag{3}$$

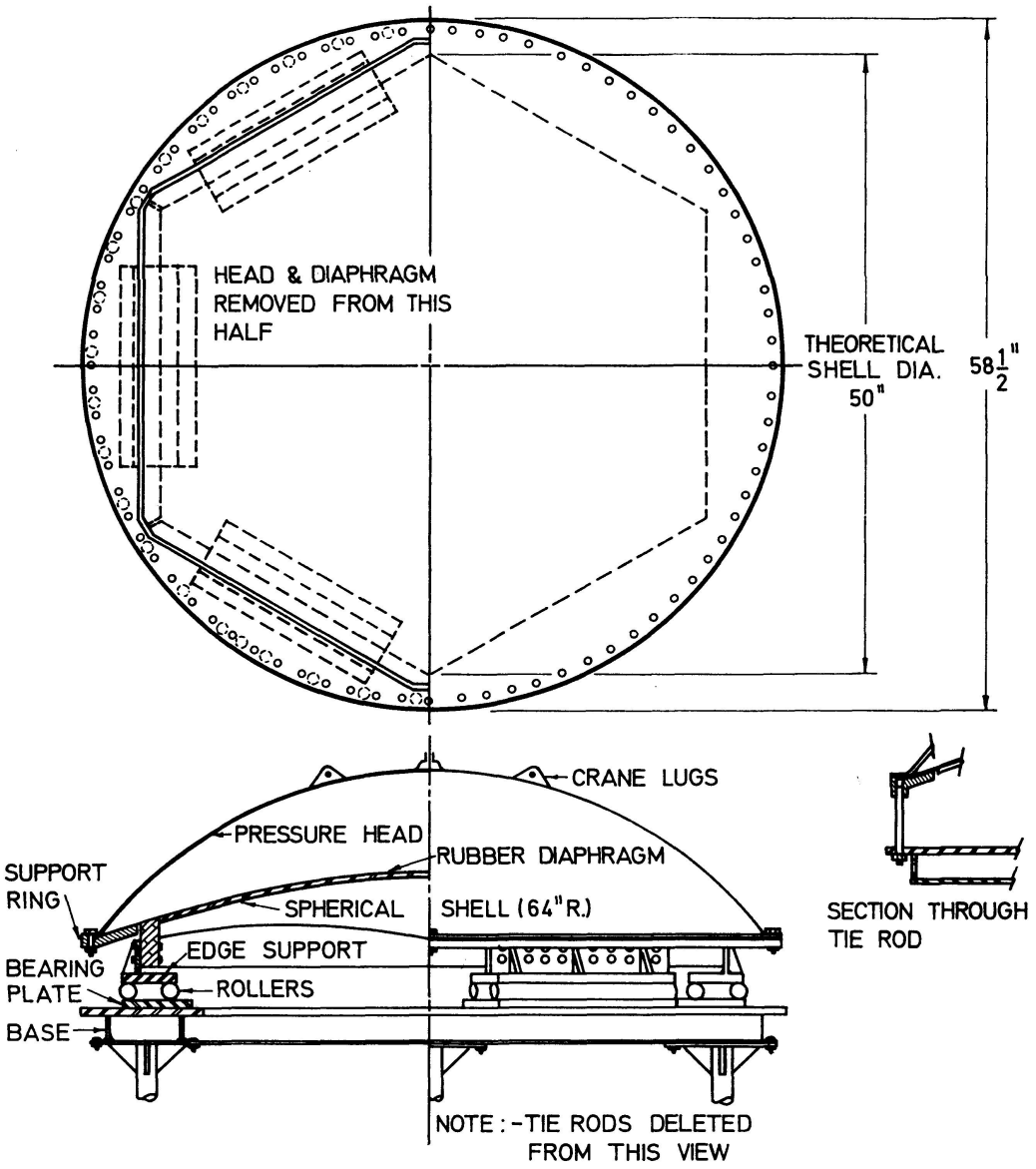


Fig. 3. Shell test assembly.

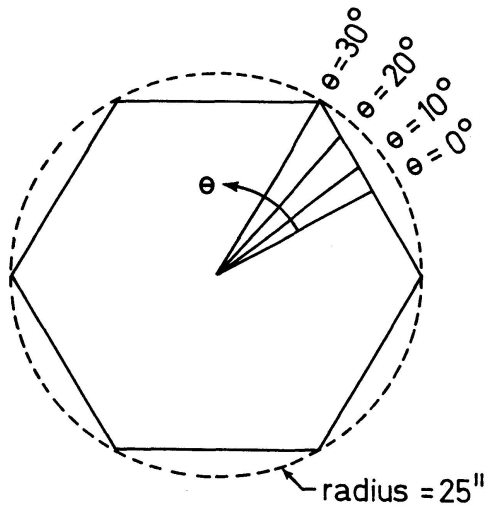


Fig. 4. Plan view of shell on hexagonal base showing location of radial lines for which sectional resultants of stress are calculated.

Sectional stress resultants and stress couples can be expressed in terms of the normal displacement and the stress function as

$$F_{\theta\theta}(\sigma) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2},$$

$$F_{rr}(\sigma) = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2},$$

$$F_{r\theta}(\sigma) = F_{\theta r}(\sigma) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) \tag{4}$$

and

$$M_{r\theta}(\sigma) = -D\left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_n}{\partial r}\right)\right],$$

$$M_{\theta r}(\sigma) = D\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_n}{\partial r} + \nu\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2}\right],$$

$$M_{rr}(\sigma) = -M_{\theta\theta}(\sigma) = \frac{\mu h^3}{6}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_n}{\partial \theta}\right)\right].$$

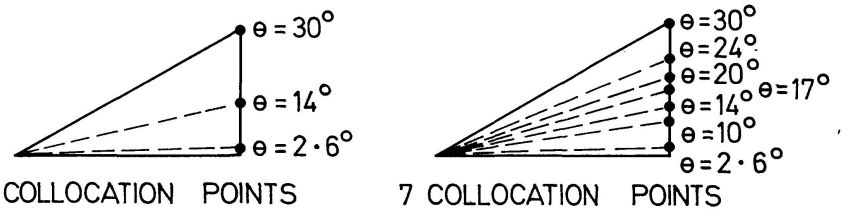


Fig. 5. Location of boundary collocation points for characteristic periodical segment of shell over hexagonal base.

The solution for the constants A_0^1, A_0^2, E_0^1, E_0^2, A_{kn}^1, A_{kn}^2, C_{kn}^1 and C_{kn}^2 in (3) is effected by employing TÖLKE's boundary collocation procedure which restricts idealized boundary conditions to be satisfied only at discrete boundary points instead of along the entire length of the boundary.

The boundary conditions relevant to the shallow calotte shells investigated are

a) Stress resultants normal to the boundary vanish:

$$F_{nn}(\sigma) = 0.$$

b) The boundary undergoes no rotation:

$$\delta\left(\frac{\partial u_n}{\partial n}\right) = 0.$$

c) The boundary undergoes no normal displacement:

$$u_n = 0. \tag{5}$$

d) The boundary is fully constrained and consequently undergoes no linear strain:

$$\epsilon_{ss} = 0.$$

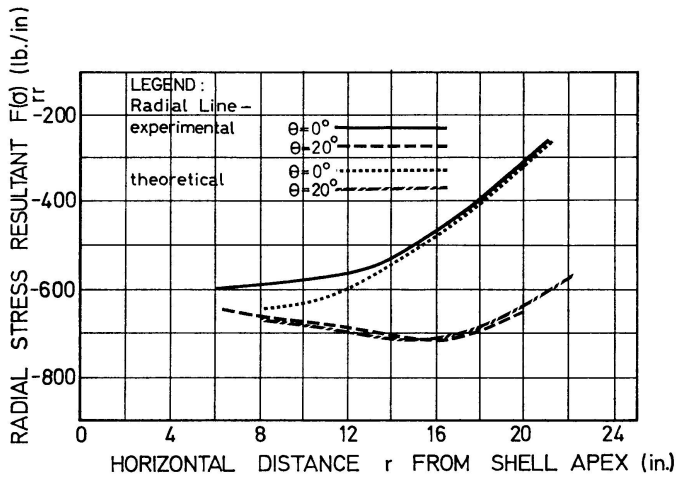


Fig. 6. Plot showing stress resultant "$F_{rr}(\sigma)$" for shell over hexagonal base obtained theoretically for three collocation points as well as experimentally.

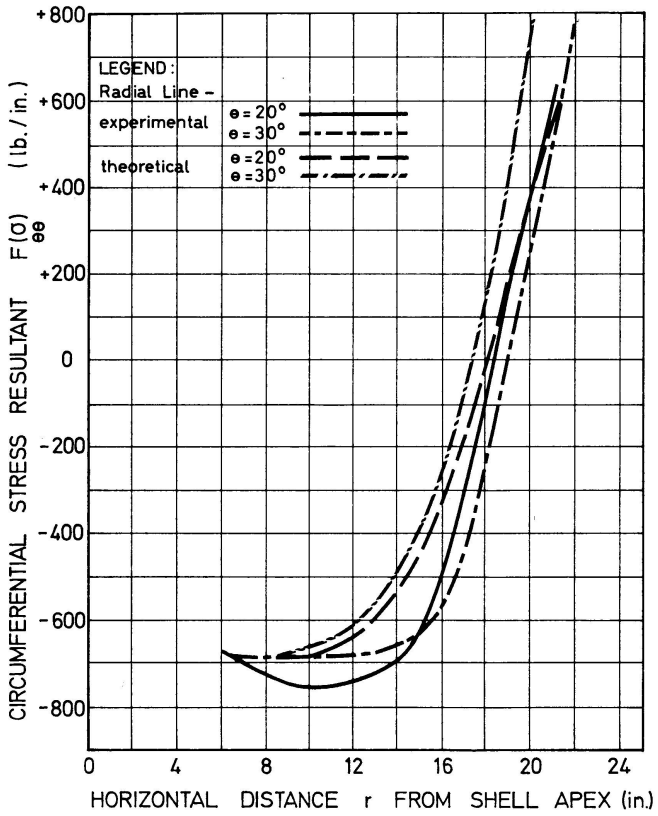


Fig. 7. Plot showing stress resultant "$F_{\theta\theta}(\sigma)$" for shell over hexagonal base obtained theoretically for three collocation points as well as experimentally.

e) The tangential stress couple vector vanishes along the boundary edge:

$$M_{ns} = 0.$$

Satisfaction of these boundary conditions, which can be expressed in terms of the normal displacement u_n and the stress function F, at points on the shell's boundary, results in a set of simultaneous equations whose solution yields the unknown constants in (3) allowing the calculation of the sectional resultants of stress.

Numerical Solution for a Spherical Shell Enclosing an Hexagonal Base

Experimental sectional resultants of stress were obtained for a spherical shell enclosing an hexagonal base subjected to isothermal deformation by a uniform normal load, by taking extensive strain measurements on the upper and lower surfaces of the shell. Sectional resultants were calculated theoretically for this shell using both three and seven boundary collocation points and satisfying the boundary conditions

$$\begin{aligned} F_{nn}(\sigma) &= -240 \text{ lb./in.}, \\ \delta\left(\frac{\partial u_n}{\partial n}\right) &= 0.00055 \text{ radians}, \\ u_n &= 0, \\ \epsilon_{ss} &= 0, \end{aligned}$$

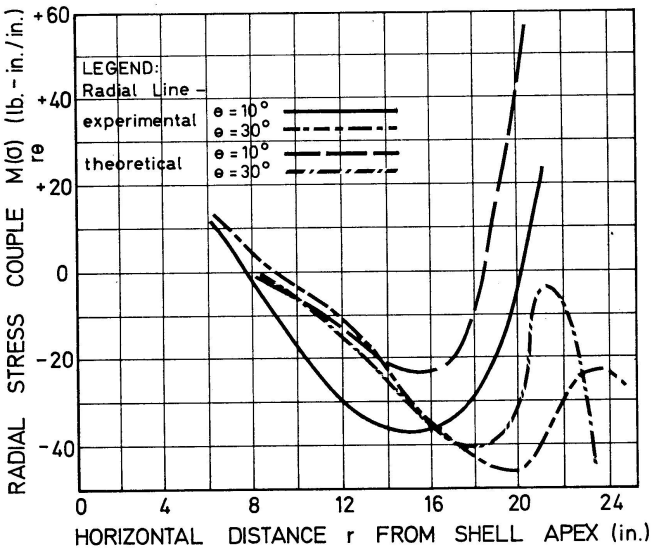


Fig. 8. Plot showing stress couple "$M_{r\theta}(\sigma)$" for shell over hexagonal base obtained theoretically for seven collocation points as well as experimentally.

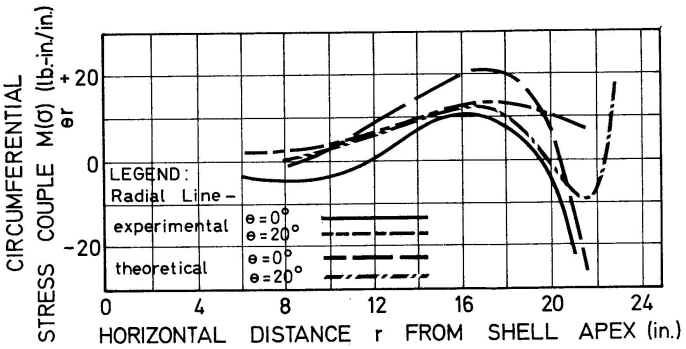


Fig. 9. Plot showing stress couple "$M_{\theta r}(\sigma)$" for shell over hexagonal base obtained theoretically for seven collocation points as well as experimentally.

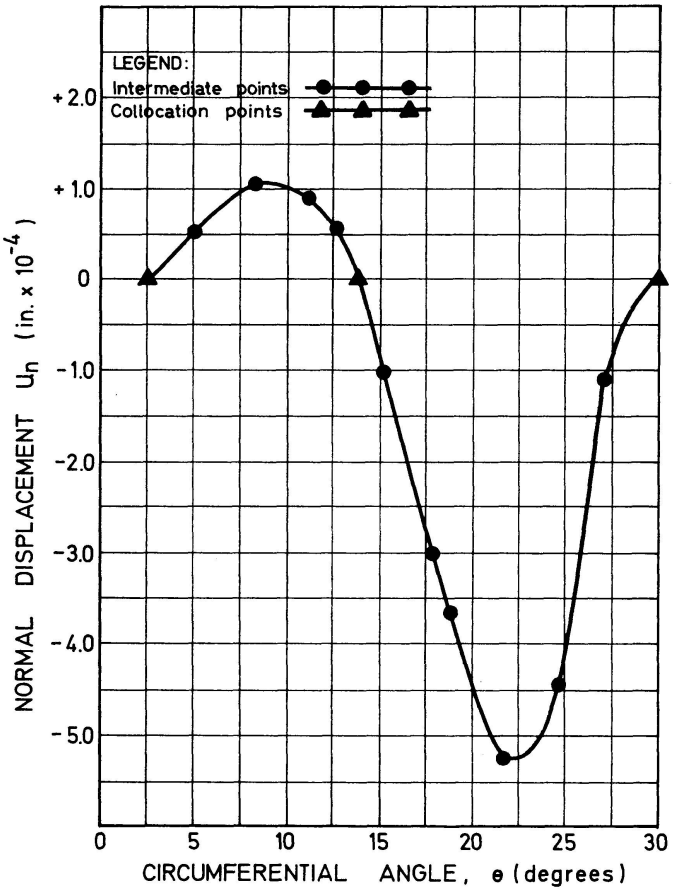


Fig. 10. Variation of "u_n" on the boundary of shell over hexagonal base for three collocation points.

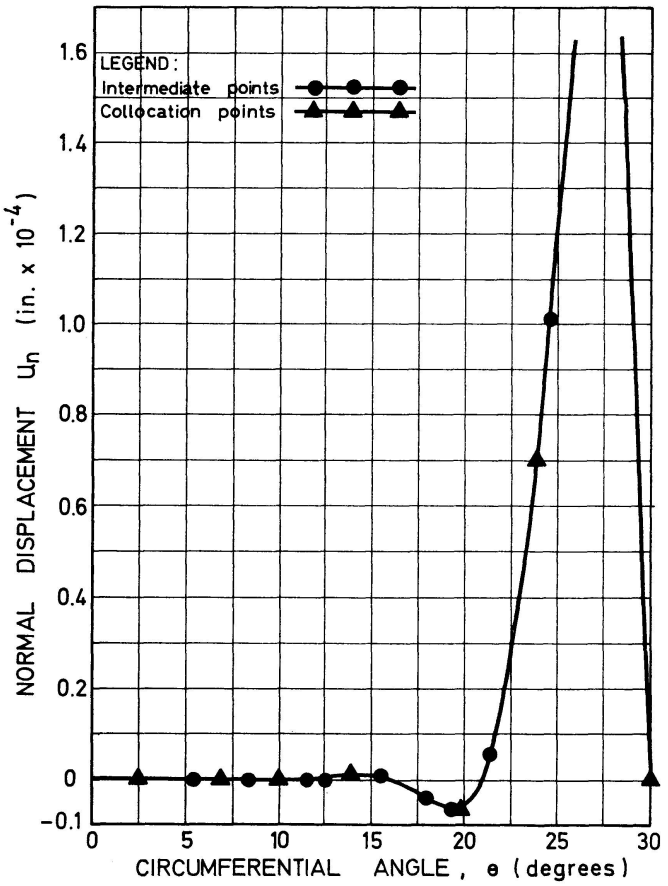


Fig. 11. Variation of "u_n" on the boundary of shell over hexagonal base for seven collocation points.

at each of the collocation points except at the shell's corners where the strain was not assumed to vanish.

Shell Parameters

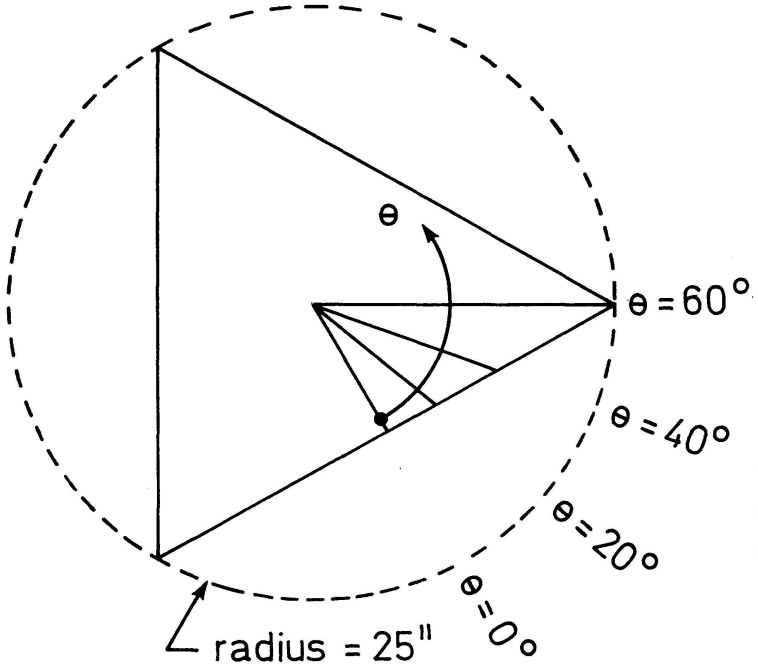
$E = 10^7$ p.s.i. (aluminium),
$\nu = 0.33$,
$p_n = -20$ p.s.i.,
$R = 64$ in.,
$h = 0.375$ in.,
$k = 6$.

Numerical Solution for a Spherical Shell Enclosing a Triangular Base

A solution by the collocation technique is given for a spherical calotte shell enclosing a triangular base since shells of this type have been constructed in practice and no other theoretical solutions are known to exist.

The shell was assumed to be supported on a very narrow boundary diaphragm. Hence the boundary conditions

$$u_n = 0,$$
$$\epsilon_{ss} = 0,$$
$$M_{ns}(\sigma) = 0,$$
$$F_{nn}(\sigma) = 0,$$



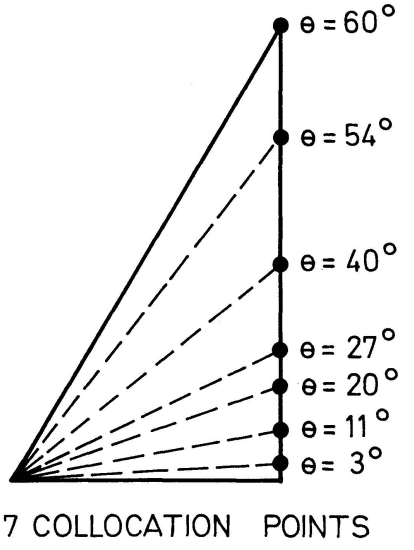


Fig. 13. Location of boundary collocation points for characteristic periodical segment of shell over triangular base.

Fig. 12. Plan view of shell over triangular base showing location of radial lines for which sectional resultants of stress are calculated.

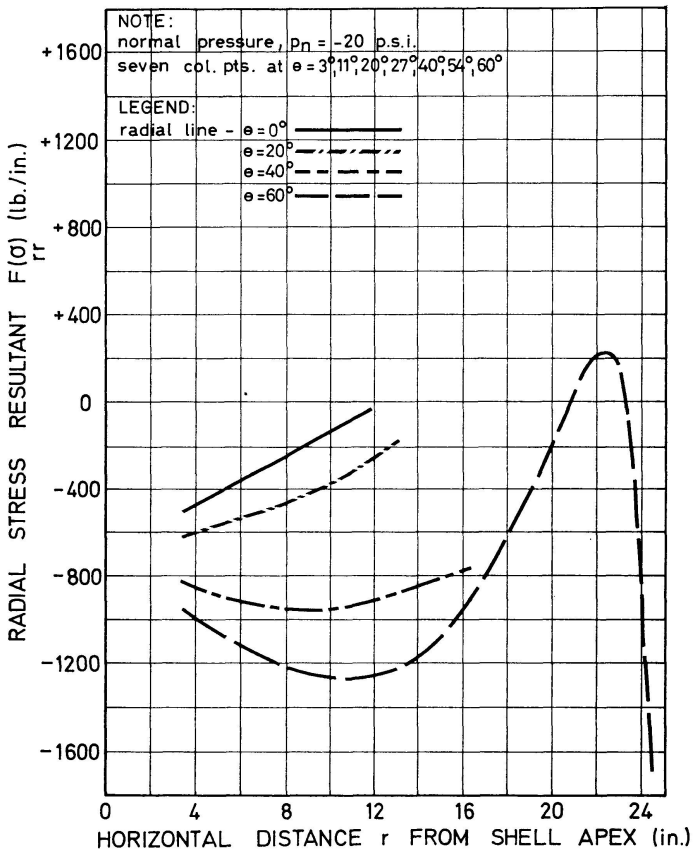


Fig. 14. Plot showing theoretical stress resultant "$F_{rr}(\sigma)$" for shell over triangular base.

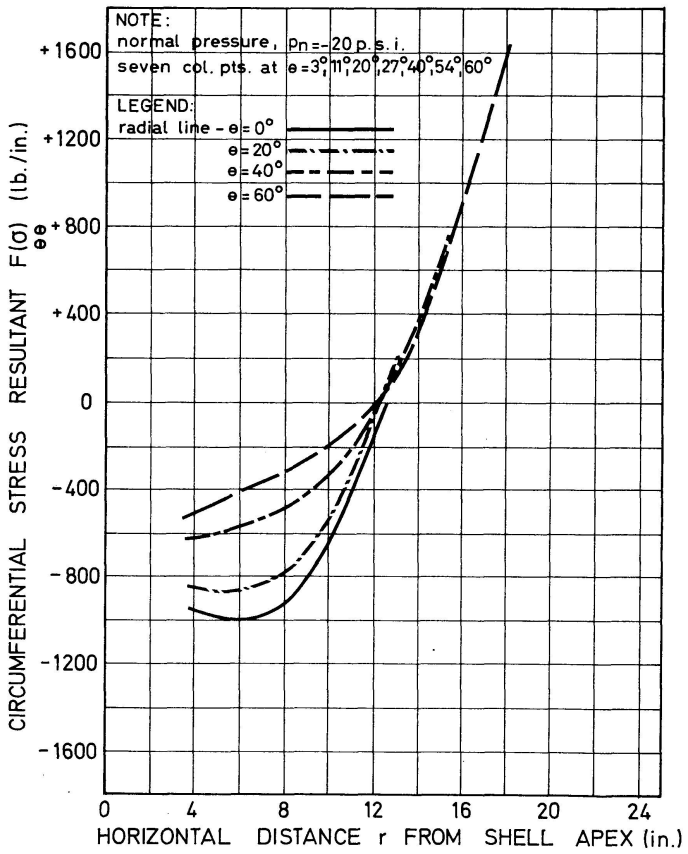


Fig. 15. Plot showing theoretical stress resultant "$F_{\theta\theta}(\sigma)$" for shell over triangular base.

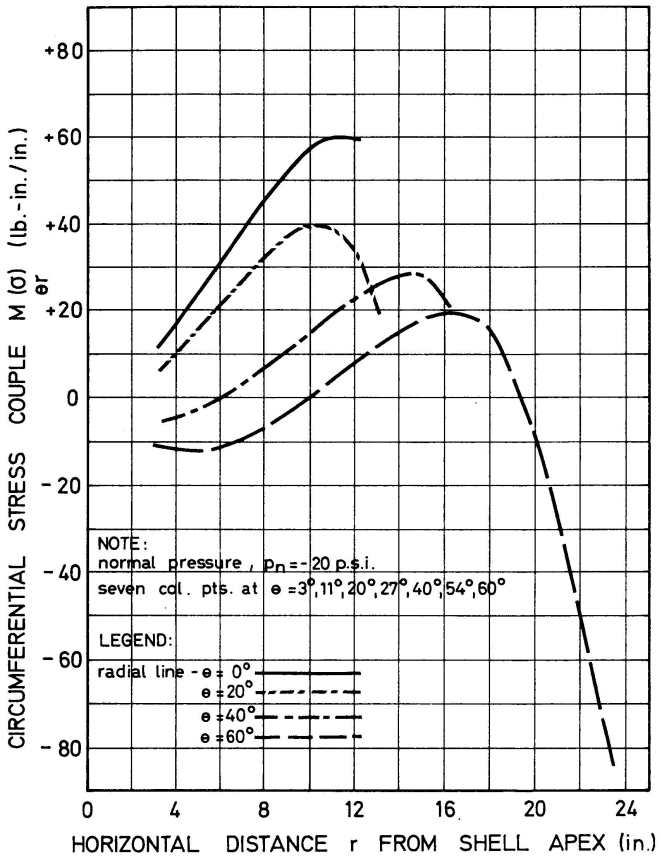


Fig. 16. Plot showing theoretical stress couple "$M_{r\theta}(\sigma)$" for shell over triangular base.

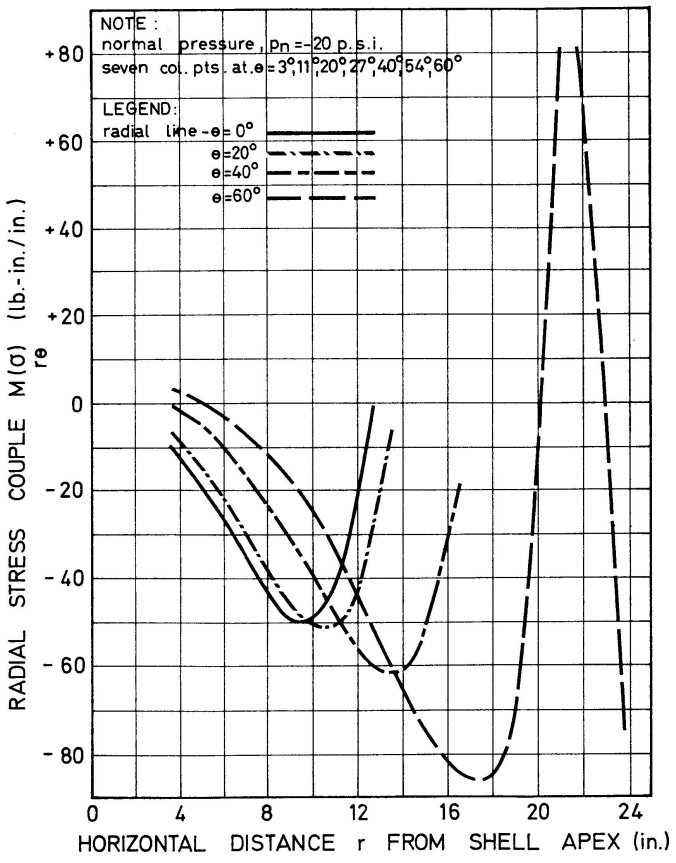


Fig. 17. Plot showing theoretical stress couple "$M_{\theta r}(\sigma)$" for shell over triangular base.

were satisfied at each of the collocation points except at the shell's corners where the normal boundary force $F_{nn}(\sigma)$ was not assumed to vanish.

Shell Parameters

$E = 10^7$ p.s.i.,
$\nu = 0.33$,
$p_n = -20$ p.s.i.,
$R = 64$ in.,
$h = 0.375$ in.,
$k = 3$.

Conclusions

The collocation technique satisfies idealized boundary conditions rigorously only at discrete boundary points. The number of boundary collocation points which will yield a solution satisfying these conditions over the entire shell boundary is not large. Theoretical solutions given by WALKINSHAW in 1965 [6] for a shell enclosing an hexagonal base employing three and seven collocation points on the boundary of the characteristic shell segment, agree reasonably well with experimental results obtained by RILEY in 1964 [7] for the same shell. Consequently for this calotte shell, three collocation points are sufficient to provide reliable solutions for practical design purposes. Obviously the minimum number of boundary collocation points providing reliable theoretical solutions increases as the circumferential periodicity of the calotte shell decreases.

The periodic polygonal boundary of a spherical shell introduces periodic perturbations in the rotationally symmetric solution emanating from the nonrotationally symmetric boundary. The extent of the penetration of these perturbations towards the shell's apex, where the rotationally symmetric solution associated with the zero order terms of the truncated series solution dominates, depends upon the degree by which the polygonal boundary deviates from the circular boundary of the rotational spherical shell enclosing the polygonal shell.

The experimental shell used in testing exhibited certain unavoidable geometric imperfections, which did not satisfy the conditions of perfect periodicity in the configuration of the six shell segments assumed in the theoretical solution. The boundary members were not connected at their intersection points in order to simulate the boundary conditions imposed by the theoretical solution as closely as possible. The discontinuity of the boundary members created some stress concentrations at the corners of the shell, which partially account for greater discrepancies between the theoretical and experimental results in these regions.

The boundary conditions in the experimental shell which were not uniform

along the boundary members, did not strictly satisfy the homogeneous theoretical boundary conditions. This shortcoming necessitated an introduction of average corrections to the theoretical boundary conditions which neglected the variations of the boundary conditions along the boundary members.

The theoretical solution and the experimental results were as compatible as could be expected in view of these physical limitations in both the construction and boundary conditions of the shell structure. Therefore, the experimental results can merely serve as a good indication for the general nature of the structural comportment of the shell treated in the theoretical problem.

The higher order KELVIN Functions employed in this collocative solution in the form of a truncated series were evaluated by means of the Backward Recurrence Technique, devised by J. C. P. MILLER and outlined in detail by T. E. MICHELS in 1964, using McMaster University's I.B.M. 7040 computer and double-precision procedure with 17 figure accuracy.

It was established that the number and location of the collocation points used are not of the paramount significance to the practical reliability of the results as was initially believed. The discrete satisfaction of boundary conditions in the collocative solution tends to accumulate larger magnitude errors in the results near the corners of the polygonal calotte shell and, therefore, it is to be expected that the collocative solution tends to deviate more from the actual solution in the neighbourhood of the corners of the shell than in the remaining region of the shell. It is considered that seven boundary collocation points provide a reliable practical solution for the calotte shell with as little as triple periodicity.

An Appendix has been given for various quantities in the theoretical solution, which correct all the misprints in the same expressions given by ORAVAS in 1957.

Appendix

Boundary conditions (5-a) to (5-e) can be expressed in terms of the normal displacement u_n and stress function F as:

$$
\begin{aligned}
&A_0^1\psi_1 + A_0^2\psi_2 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_{kn}^1\psi_3 + A_{kn}^2\psi_4 + C_{kn}^2\psi_5] = \frac{-p_n R}{2},\\
&A_0^1\psi_6 + A_0^2\psi_7 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_{kn}^1\psi_8 + A_{kn}^2\psi_9 + C_{kn}^1\psi_{10}] = 0,\\
&A_0^1\psi_{11} + A_0^2\psi_{12} + E_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_{kn}^1\psi_{13} + A_{kn}^2\psi_{14} + C_{kn}^1\psi_{15}] = \frac{-p_n R^2}{E h}, \qquad \text{(A-1)}\\
&A_0^1\psi_{16} + A_0^2\psi_{17} + \sum_{n=1}^{\infty}[A_{kn}^1\psi_{18} + A_{kn}^2\psi_{19} + C_{kn}^2\psi_{20}] = -(1-\nu)\frac{p_n R}{2},\\
&A_0^1\psi_{21} + A_0^2\psi_{22} + \sum_{n=1}^{\infty}[A_{kn}^1\psi_{23} + A_{kn}^2\psi_{24} + C_{kn}^1\psi_{25}] = 0.
\end{aligned}
$$

The coefficients in equations (A-1) are:

$$\psi_1 = \frac{\lambda}{\omega\bar{r}}\mathrm{bei}_0'(\lambda\bar{r})\cos^2\bar{\theta} + \frac{\lambda^2}{\omega}\mathrm{bei}_0''(\lambda\bar{r})\sin^2\bar{\theta},$$

$$\psi_2 = -\frac{\lambda}{\omega\bar{r}}\mathrm{ber}_0'(\lambda\bar{r})\cos^2\bar{\theta} + \frac{\lambda^2}{\omega}\mathrm{ber}_0''(\lambda\bar{r})\sin^2\bar{\theta},$$

$$\psi_3 = \left\{\frac{\lambda}{\omega\bar{r}}\mathrm{bei}_{kn}'(\lambda\bar{r})\cos^2\bar{\theta} - \frac{(kn)^2}{\omega\bar{r}^2}\mathrm{bei}_{kn}(\lambda\bar{r})\cos^2\bar{\theta} + \frac{\lambda^2}{\omega}\mathrm{bei}_{kn}''(\lambda\bar{r})\sin^2\bar{\theta}\right\}\cos(kn\bar{\theta})$$
$$+ \left\{\frac{kn}{\omega\bar{r}^2}\mathrm{bei}_{kn}(\lambda\bar{r})\sin 2\bar{\theta} - kn\left(\frac{\lambda}{\omega\bar{r}}\right)\mathrm{bei}_{kn}'(\lambda\bar{r})\sin 2\bar{\theta}\right\}\sin(kn\bar{\theta}),$$

$$\psi_4 = \left\{-\frac{\lambda}{\omega\bar{r}}\mathrm{ber}_{kn}'(\lambda\bar{r})\cos^2\bar{\theta} + \frac{(kn)^2}{\omega\bar{r}^2}\mathrm{ber}_{kn}(\lambda\bar{r})\cos^2\bar{\theta}\right.$$
$$\left. - \frac{\lambda^2}{\omega}\mathrm{ber}_{kn}''(\lambda\bar{r})\sin^2\bar{\theta}\right\}\cos(kn\bar{\theta})$$
$$+ \left\{-\frac{kn}{\omega\bar{r}^2}\mathrm{ber}_{kn}(\lambda\bar{r}) + \frac{\lambda kn}{\omega\bar{r}}\mathrm{ber}_{kn}'(\lambda\bar{r})\right\}\sin 2\bar{\theta}\sin(kn\bar{\theta}),$$

$$\psi_5 = \frac{kn}{\omega}(kn-1)\bar{r}^{kn-2}[(\sin^2\bar{\theta} - \cos^2\bar{\theta})\cos(kn\bar{\theta}) - \sin 2\bar{\theta}\sin(kn\bar{\theta})],$$

$$\psi_6 = -\lambda\,\mathrm{ber}_0'(\lambda\bar{r})\cos\bar{\theta},$$

$$\psi_7 = -\lambda\,\mathrm{bei}_0'(\lambda\bar{r})\cos\bar{\theta},$$

$$\psi_8 = -\left[\frac{kn}{\bar{r}}\mathrm{ber}_{kn}(\lambda\bar{r})\sin\bar{\theta}\right]\sin(kn\bar{\theta}) - [\lambda\,\mathrm{ber}_{kn}'(\lambda\bar{r})\cos\bar{\theta}]\cos(kn\bar{\theta}),$$

$$\psi_9 = -\left[\frac{kn}{\bar{r}}\mathrm{bei}_{kn}(\lambda\bar{r})\sin\bar{\theta}\right]\sin(kn\bar{\theta}) - [\lambda\,\mathrm{bei}_{kn}'(\lambda\bar{r})\cos\bar{\theta}]\cos(kn\bar{\theta}),$$

$$\psi_{10} = -[kn\bar{r}^{kn-1}\sin\bar{\theta}]\sin(kn\bar{\theta}) - [kn\bar{r}^{kn-1}\cos\bar{\theta}]\cos(kn\bar{\theta}),$$

$$\psi_{11} = \mathrm{ber}_0(\lambda\bar{r}),$$

$$\psi_{12} = \mathrm{bei}_0(\lambda\bar{r}),$$

$$\psi_{13} = \mathrm{ber}_{kn}(\lambda\bar{r})\cos(kn\bar{\theta}),$$

$$\psi_{14} = \mathrm{bei}_{kn}(\lambda\bar{r})\cos(kn\bar{\theta}),$$

$$\psi_{15} = \bar{r}^{kn}\cos(kn\bar{\theta}),$$

$$\psi_{16} = \left[\frac{\lambda}{\omega\bar{r}}\mathrm{bei}_0'(\lambda\bar{r}) - \frac{\nu\lambda^2}{\omega}\mathrm{bei}_0''(\lambda\bar{r})\right]\sin^2\bar{\theta} + \left[\frac{\lambda^2}{\omega}\mathrm{bei}_0''(\lambda\bar{r}) - \frac{\nu\lambda}{\omega\bar{r}}\mathrm{bei}_0'(\lambda\bar{r})\right]\cos^2\bar{\theta},$$

$$\psi_{17} = \left[-\frac{\lambda}{\omega\bar{r}}\mathrm{ber}_0'(\lambda\bar{r}) + \frac{\nu\lambda^2}{\omega}\mathrm{ber}_0''(\lambda\bar{r})\right]\sin^2\bar{\theta}$$
$$+ \left[-\frac{\lambda^2}{\omega}\mathrm{ber}_0''(\lambda\bar{r}) + \frac{\nu\lambda}{\omega\bar{r}}\mathrm{ber}_0'(\lambda\bar{r})\right]\cos^2\bar{\theta},$$

$$\psi_{18} = \left\{\left[\frac{\lambda}{\omega\bar{r}}\,\mathrm{bei}'_{kn}(\lambda\bar{r}) - \frac{1}{\omega}\left(\frac{kn}{\bar{r}}\right)^2 \mathrm{bei}_{kn}(\lambda\bar{r}) - \frac{\nu\lambda^2}{\omega}\,\mathrm{bei}''_{kn}(\lambda\bar{r})\right]\sin^2\bar{\theta}\right.$$
$$\left. + \left[-\frac{\nu\lambda}{\omega\bar{r}}\,\mathrm{bei}'_{kn}(\lambda\bar{r}) + \frac{\nu}{\omega}\left(\frac{kn}{\bar{r}}\right)^2 \mathrm{bei}_{kn}(\lambda\bar{r}) + \frac{\lambda^2}{\omega}\,\mathrm{bei}''_{kn}(\lambda\bar{r})\right]\cos^2\bar{\theta}\right\}\cos(kn\bar{\theta})$$
$$+ \left\{(1+\nu)\frac{kn}{\omega}\left[\frac{\lambda}{\bar{r}}\,\mathrm{bei}'_{kn}(\lambda\bar{r}) - \frac{1}{\bar{r}^2}\,\mathrm{bei}_{kn}(\lambda\bar{r})\right]\sin 2\bar{\theta}\right\}\sin(kn\bar{\theta}),$$

$$\psi_{19} = \left\{\left[-\frac{\lambda}{\omega\bar{r}}\,\mathrm{ber}'_{kn}(\lambda\bar{r}) + \frac{1}{\omega}\left(\frac{kn}{\bar{r}}\right)^2 \mathrm{ber}_{kn}(\lambda\bar{r}) + \frac{\nu\lambda^2}{\omega}\,\mathrm{ber}''_{kn}(\lambda\bar{r})\right]\sin^2\bar{\theta}\right.$$
$$\left. + \left[\frac{\nu\lambda}{\omega\bar{r}}\,\mathrm{ber}'_{kn}(\lambda\bar{r}) - \frac{\nu}{\omega}\left(\frac{kn}{\bar{r}}\right)^2 \mathrm{ber}_{kn}(\lambda\bar{r}) - \frac{\lambda^2}{\omega}\,\mathrm{ber}''_{kn}(\lambda\bar{r})\right]\cos^2\bar{\theta}\right\}\cos(kn\bar{\theta})$$
$$+ \left\{(1+\nu)\frac{kn}{\omega}\left[\frac{1}{\bar{r}^2}\,\mathrm{ber}_{kn}(\lambda\bar{r}) - \frac{\lambda}{\bar{r}}\,\mathrm{ber}'_{kn}(\lambda\bar{r})\right]\sin 2\bar{\theta}\right\}\sin(kn\bar{\theta}),$$

$$\psi_{20} = \frac{1+\nu}{\omega}\,kn(kn-1)\,\bar{r}^{kn-2}\{[\cos^2\bar{\theta} - \sin^2\bar{\theta}]\cos(kn\bar{\theta}) + \sin 2\bar{\theta}\sin(kn\bar{\theta})\},$$

$$\psi_{21} = \left[\lambda^2\,\mathrm{ber}''_0(\lambda\bar{r}) + \frac{\nu\lambda}{\bar{r}}\,\mathrm{ber}'_0(\lambda\bar{r})\right]\cos^2\bar{\theta} + \left[\frac{\lambda}{\bar{r}}\,\mathrm{ber}'_0(\lambda\bar{r}) + \nu\lambda^2\,\mathrm{ber}''_0(\lambda\bar{r})\right]\sin^2\bar{\theta},$$

$$\psi_{22} = \left[\lambda^2\,\mathrm{bei}''_0(\lambda\bar{r}) + \frac{\nu\lambda}{\bar{r}}\,\mathrm{bei}'_0(\lambda\bar{r})\right]\cos^2\bar{\theta} + \left[\frac{\lambda}{\bar{r}}\,\mathrm{bei}'_0(\lambda\bar{r}) + \nu\lambda^2\,\mathrm{bei}''_0(\lambda\bar{r})\right]\sin^2\bar{\theta},$$

$$\psi_{23} = \left\{\left[\lambda^2\,\mathrm{ber}''_{kn}(\lambda\bar{r}) - \nu\left(\frac{kn}{\bar{r}}\right)^2 \mathrm{ber}_{kn}(\lambda\bar{r}) + \frac{\nu\lambda}{\bar{r}}\,\mathrm{ber}'_{kn}(\lambda\bar{r})\right]\cos^2\bar{\theta}\right.$$
$$\left. + \left[-\frac{(kn)^2}{\bar{r}^2}\,\mathrm{ber}_{kn}(\lambda\bar{r}) + \frac{\lambda}{\bar{r}}\,\mathrm{ber}'_{kn}(\lambda\bar{r}) + \nu\lambda^2\,\mathrm{ber}''_{kn}(\lambda\bar{r})\right]\sin^2\bar{\theta}\right\}\cos(kn\bar{\theta})$$
$$+ \left\{\frac{kn}{\bar{r}}(1-\nu)\left[\lambda\,\mathrm{ber}'_{kn}(\lambda\bar{r}) - \frac{1}{\bar{r}}\,\mathrm{ber}_{kn}(\lambda\bar{r})\right]\sin 2\bar{\theta}\right\}\sin(kn\bar{\theta}),$$

$$\psi_{24} = \left\{\left[\lambda^2\,\mathrm{bei}''_{kn}(\lambda\bar{r}) - \nu\left(\frac{kn}{\bar{r}}\right)^2 \mathrm{bei}_{kn}(\lambda\bar{r}) + \frac{\nu\lambda}{\bar{r}}\,\mathrm{bei}'_{kn}(\lambda\bar{r})\right]\cos^2\bar{\theta}\right.$$
$$\left. + \left[-\frac{(kn)^2}{\bar{r}^2}\,\mathrm{bei}_{kn}(\lambda\bar{r}) + \frac{\lambda}{\bar{r}}\,\mathrm{bei}'_{kn}(\lambda\bar{r}) + \nu\lambda^2\,\mathrm{bei}''_{kn}(\lambda\bar{r})\right]\sin^2\bar{\theta}\right\}\cos(kn\bar{\theta})$$
$$+ \left\{\frac{kn}{\bar{r}}(1-\nu)\left[\lambda\,\mathrm{bei}'_{kn}(\lambda\bar{r}) - \frac{1}{\bar{r}}\,\mathrm{bei}_{kn}(\lambda\bar{r})\right]\sin 2\bar{\theta}\right\}\sin(kn\bar{\theta}),$$

$$\psi_{25} = kn(kn-1)(1-\nu)\,\bar{r}^{kn-2}[\sin 2\bar{\theta}\sin(kn\bar{\theta}) + (2\cos^2\bar{\theta} - 1)\cos(kn\bar{\theta})],$$

where $\bar{r}$, $\bar{\theta}$ are the coordinates of collocation points.

Substitution of the expressions for u_n and F from (3) in (4) yields the sectional resultants of stress:

$$F_{rr}(\sigma) = \frac{p_n R}{2} + A_0^1\left[\frac{\lambda}{\omega r}\mathrm{bei}_0'(\lambda r)\right] + A_0^2\left[-\frac{\lambda}{\omega r}\mathrm{ber}_0'(\lambda r)\right]$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_{kn}^1\left[\frac{\lambda}{\omega r}\mathrm{bei}_{kn}'(\lambda r) - \frac{1}{\omega}\left(\frac{kn}{r}\right)^2\mathrm{bei}_{kn}(\lambda r)\right]\right.$$
$$+ A_{kn}^2\left[-\frac{\lambda}{\omega r}\mathrm{ber}_{kn}'(\lambda r) + \frac{1}{\omega}\left(\frac{kn}{r}\right)^2\mathrm{ber}_{kn}(\lambda r)\right]$$
$$\left. - C_{kn}^2\frac{kn(kn-1)}{\omega}r^{kn-2}\right\}\cos(kn\theta),$$

$$F_{\theta\theta}(\sigma) = \frac{p_n R}{2} + A_0^1\left[\frac{\lambda^2}{\omega}\mathrm{bei}_0''(\lambda r)\right] + A_0^2\left[-\frac{\lambda^2}{\omega}\mathrm{ber}_0''(\lambda r)\right]$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_{kn}^1\left[\frac{\lambda^2}{\omega}\mathrm{bei}_{kn}''(\lambda r)\right] + A_{kn}^2\left[-\frac{\lambda^2}{\omega}\mathrm{ber}_{kn}''(\lambda r)\right]\right.$$
$$\left. + C_{kn}^2\left[\frac{kn}{\omega}(kn-1)r^{kn-2}\right]\right\}\cos(kn\theta),$$

$$M_{r\theta}(\sigma) = D\left[A_0^1\left[-\lambda^2\mathrm{ber}_0''(\lambda r) - \frac{\nu}{r}\lambda\,\mathrm{ber}_0'(\lambda r)\right]\right.$$
$$+ A_0^2\left[-\lambda^2\mathrm{bei}_0''(\lambda r) - \frac{\nu}{r}\lambda\,\mathrm{bei}_0'(\lambda r)\right]$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_{kn}^1\left[-\lambda^2\mathrm{ber}_{kn}''(\lambda r) + \nu\left(\frac{kn}{r}\right)^2\mathrm{ber}_{kn}(\lambda r) - \frac{\nu}{r}\lambda\,\mathrm{ber}_{kn}'(\lambda r)\right]\right.$$
$$+ A_{kn}^2\left[-\lambda^2\mathrm{bei}_{kn}''(\lambda r) + \nu\left(\frac{kn}{r}\right)^2\mathrm{bei}_{kn}(\lambda r) - \frac{\nu}{r}\lambda\,\mathrm{bei}_{kn}'(\lambda r)\right]$$
$$\left.\left. + C_{kn}^1[-kn(kn-1)(1-\nu)r^{kn-2}]\right\}\cos(kn\theta)\right],$$

$$M_{\theta r}(\sigma) = D\left[A_0^1\left[\frac{\lambda}{r}\mathrm{ber}_0'(\lambda r) + \nu\lambda^2\mathrm{ber}_0''(\lambda r)\right] + A_0^2\left[\frac{\lambda}{r}\mathrm{bei}_0'(\lambda r) + \nu\lambda^2\mathrm{bei}_0''(\lambda r)\right]\right.$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_{kn}^1\left[-\left(\frac{kn}{r}\right)^2\mathrm{ber}_{kn}(\lambda r) + \frac{\lambda}{r}\mathrm{ber}_{kn}'(\lambda r) + \nu\lambda^2\mathrm{ber}_{kn}''(\lambda r)\right]\right.$$
$$+ A_{kn}^2\left[-\left(\frac{kn}{r}\right)^2\mathrm{bei}_{kn}(\lambda r) + \frac{\lambda}{r}\mathrm{bei}_{kn}'(\lambda r) + \nu\lambda^2\mathrm{bei}_{kn}''(\lambda r)\right]$$
$$\left.\left. + C_{kn}^1[-kn(kn-1)(1-\nu)r^{kn-2}]\right\}\cos(kn\theta)\right].$$

First derivatives of KELVIN functions of kn-th order with respect to λr can be expressed by:

$$\mathrm{ber}'_{kn}(\lambda r) = -\frac{1}{\sqrt{2}}[\mathrm{ber}_{kn-1}(\lambda r) + \mathrm{bei}_{kn-1}(\lambda r)] - [k n \,\mathrm{ber}_{kn}(\lambda r)],$$

$$\mathrm{bei}'_{kn}(\lambda r) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathrm{ber}_{kn-1}(\lambda r) - \mathrm{bei}_{kn-1}(\lambda r)] - [k n \,\mathrm{bei}_{kn}(\lambda r)].$$

Second derivatives of KELVIN functions of kn-th order with respect to λr can be expressed by:

$$\mathrm{ber}''_{kn}(\lambda r) = -\frac{1}{\lambda r}\mathrm{ber}'_{kn}(\lambda r) + \left(\frac{k n}{\lambda r}\right)^2 \mathrm{ber}_{kn}(\lambda r) - \mathrm{bei}_{kn}(\lambda r),$$

$$\mathrm{bei}''_{kn}(\lambda r) = -\frac{1}{\lambda r}\mathrm{bei}'_{kn}(\lambda r) + \left(\frac{k n}{\lambda r}\right)^2 \mathrm{bei}_{kn}(\lambda r) + \mathrm{ber}_{kn}(\lambda r).$$

Bibliography

1. G. A. ORAVAS: "Stress and Strain in Thin Shallow Spherical Calotte Shells". International Association for Bridge and Structural Engineering, Zurich, v. 17, 1957, p. 139.
2. F. TÖLKE: «Über Spannungszustände in dünnen Rechteckplatten». Ingenieur-Archiv, v. 5, 1934, p. 187.
3. A. H. MUSHTARI: «Nekotorye obobshcheniya teorii tonkikh obolochek». Izvestiya Fiziko-Matematicheskogo obshchestva pri Kazanskom Universitete, v. 11, series 8, 1938.
4. V. Z. VLASOV: «Obshchaya teoriya obolochek i ee prilosheniya v tekhnike». Gostekhizdat, Moscow, 1949, p. 295. (NASA Technical Translation TT F-99, April 1964.)
5. K. MARGUERRE: «Zur Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderung». Proc. 5th International Congress of Applied Mechanics. Cambridge, Mass., J. Wiley, New York, 1939.
6. D. S. WALKINSHAW: "On Thin Shallow Elastic Shells over Polygonal Bases". Thesis, McMaster University, Canada, 1965.
7. G. E. RILEY: "Stress and Strain in a Shallow Elastic Calotte Shell". Thesis, McMaster University, Canada, 1964.

Summary

An approximate solution is presented for the flexure of thin spherical shells of polygonal plan in which edge conditions are satisfied exactly only at discrete collocation points on the shell's boundary. Sectional resultants obtained both theoretically and experimentally for a spherical shell over an hexagonal base and theoretically for a shell over a triangular base are graphically depicted for various radial lines on the characteristic segment of each shell.

Résumé

On présente une solution approchée pour le calcul de la flexion des coques minces sphériques à base polygonale, pour lesquelles les conditions aux limites sont exactement remplies seulement en certains points du bord de la coque. On a représenté graphiquement pour différentes radiales, d'une part les efforts obtenus théoriquement et expérimentalement pour une coque sphérique à base hexagonale et, d'autre part, ceux obtenus théoriquement pour une coque à base triangulaire.

Zusammenfassung

Dargestellt wird eine Näherungslösung für die Biegung dünner Kugelschalen vieleckigen Grundrisses, deren Kantenbedingungen nur in bestimmten Punkten der Schalenränder genau erfüllt sind. Die Spannungen, für eine Schale über sechseckigem Grundriß theoretisch wie experimentell und für eine solche über dreieckigem Grundriß theoretisch erhalten, werden für verschiedene Öffnungswinkel in ausgewählten Schnitten zeichnerisch dargestellt.

Elasto-plastische Biegeformänderungen der Stahlbetonsäulen und -balken (einseitige Biegung unter Axiallast)

Elasto-plastic Bending Deflections of Reinforced Concrete Columns and Beams (One Way Bending under Axial Force)

Déformations élasto-plastiques de flexion de colonnes et de poutres en béton armé (Flexion uniaxiale soumise à force axiale)

M. YAMADA
Prof. Dr. Ing., Univ. Kobe, Japan

H. KAWAMURA
Dipl. Ing., Univ. Kobe, Japan

1. Einleitung

Der Verfasser hat die plastische Formänderungsfähigkeit des Stahlbetons schon früher versuchsmäßig nachgewiesen und für die Berechnung eine Näherungsmethode entwickelt [1] [2] [3].

In diesem Aufsatz werden, um die elasto-plastischen Biegeformänderungseigenschaften der Stahlbetonsäulen noch genauer und ausführlicher zu erfassen, zuerst die verallgemeinerten Interaktionskurven (Interaction-Curve) zwischen Biegemoment und Normalkraft eines Stahlbetonquerschnittes dargestellt und die diesen Kurven entsprechenden Krümmungen erläutert. Es wird dadurch möglich, den elasto-plastischen Biegemoment-Krümmungszusammenhang unter beliebiger Normalkraft zu finden. Der Einfluß der Normalkraft und der Bewehrungsstärke $\beta_s \mu \left(= \frac{s\sigma_{Fl.}}{\sigma_p} \mu \right)$ auf das Krümmungsverhalten ist daraus ersichtlich. Dieses Vorgehen ermöglicht die elasto-plastischen Durchbiegungen zu erfassen. Es wurde eine Reihe von Versuchen durchgeführt und die in der beschriebenen Weise analytisch ermittelten Werte mit den entsprechenden Versuchsmeßwerten verglichen.

2. Vorbemerkungen

2.1. Annahmen

Zur Vereinfachung werden folgende Annahmen getroffen:

1. Gültigkeit der Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte (Hypothese von Bernoulli-Navier). Streng genommen ist diese Hypothese für den Stahl-

betonquerschnitt unter höheren Spannungen nicht mehr zutreffend, da der Haftwiderstand zwischen Beton und Bewehrung teilweise verloren geht (Rißbildung). Wenn der Verformungszustand des Stahlbetons aber nicht örtlich an einzelnen Stellen, sondern durchschnittlich über eine größere Länge betrachtet wird, darf diese Annahme getroffen werden. Der Einfluß der Schubspannungen und den dadurch entstehenden Schubverformungen wird vernachlässigt. Spannungsverteilung und Dehnungs- (Stauchungs-) Verteilung werden gemäß Fig. 1 angenommen.

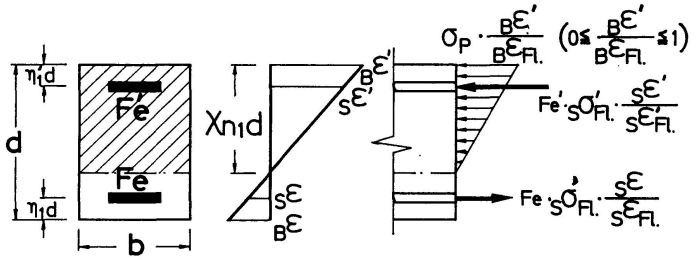


Fig. 1. Spannungs-Dehnungsverteilung im Stahlbetonquerschnitt.

2. Die Spannungs-Dehnungsbeziehung des Betons wird, die Fig. 2 zeigt, durch ein elasto-plastisches (bi-lineares) Verhalten vereinfacht. Als Betonfestigkeit des Querschnittes wird die Prismenfestigkeit — in diesem Fall mit $\sigma_p \cong 200$ kg/cm² — angenommen. Die übrigen Kenngrößen werden wie folgt angenommen:

$$\text{Betonfließstauchung} \quad {}_B\epsilon'_{Fl.} = 0{,}0015,$$
$$\text{Betonbruchstauchung} \quad {}_B\epsilon'_{Br.} = 0{,}0040,$$
$$\text{Betontrenndehnung} \quad {}_B\epsilon_{Tr.} = \frac{1}{10}\,{}_B\epsilon'_{Fl.} = 0{,}00015,$$
$$\text{Betontrennfestigkeit (Betonzugfestigkeit)} \quad {}_B\sigma_{Tr.} = \frac{1}{10}\sigma_p.$$

Der Betonzugwiderstand wird bis zum Erreichen der Betondehnung ${}_B\epsilon_{Tr.} = 0{,}00015$ am Zugrand berücksichtigt und nachher vernachlässigt.

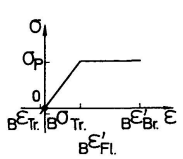


Fig. 2. Spannungs-Dehnungsverlauf des Betons.

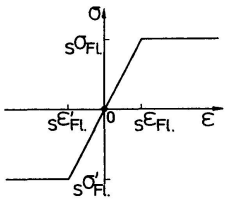


Fig. 3. Spannungs-Dehnungsverlauf des Stahls.

3. Der angenommene Spannungs-Dehnungsverlauf des Stahls verläuft ideal elasto-plastisch (Fig. 3). Als Zug- bzw. Druckfließspannung der Bewehrung werden ${}_S\sigma_{Fl.} = {}_S\sigma'_{Fl.} \cong 3000$ kg/cm² angenommen. Die Zug- bzw. Druckfließdehnungen betragen ${}_S\epsilon_{Fl.} = {}_S\epsilon'_{Fl.} = 0{,}0015$.

4. Als Bruchkriterium wird die Betonstauchung am Druckrand ${}_B\epsilon'_{Br.} = 0{,}0040$ betrachtet. Eine Instabilität der Druckbewehrung vor dem Eintreten dieser Randstauchung wird ausgeschlossen. In diesem Aufsatz wird mit folgenden Werten für Lage und Größe der Bewehrung gerechnet:

Lage der Bewehrung $\eta_1 = \eta/d = \eta_1' = \eta'/d = 0{,}1$,

Bewehrungsstärke $\beta_s\mu = \beta_s'\mu' = 0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}4,\ 0{,}5$.

2.2. *Bezeichnungen* (s. Fig. 1)

d	Höhe des Stahlbetonquerschnittes
b	Breite des Stahlbetonquerschnittes
$\eta = \eta_1 d$	Lage der Zugbewehrung
$\eta' = \eta_1' d$	Lage der Druckbewehrung
$x_n = x_{n1} d$	Lage der Nullinie
F_e	Zugbewehrungsfläche
F_e'	Druckbewehrungsfläche
$\mu = \frac{F_e}{b\,d}$	Zugbewehrungsanteil
$\mu' = \frac{F_e'}{b\,d}$	Druckbewehrungsanteil
${}_B\sigma_{D.}\ (= \sigma_p)$	Betondruckfestigkeit (Prismenfestigkeit)
${}_B\sigma_{Z.}$	Betonzugfestigkeit (Trennungsfestigkeit)
${}_S\sigma_{Fl.}$	Fließ- oder Streckspannung der Zugbewehrung
${}_S\sigma_{Fl.}'$	Fließ- oder Streckspannung der Druckbewehrung
${}_B\epsilon_{Fl.}'$	Betonfließstauchung
${}_B\epsilon_{Br.}'$	Betonbruchstauchung
${}_B\epsilon_{Tr.}$	Betontrenndehnung
${}_S\epsilon_{Fl.}$	Fließ- oder Streckdehnung der Zugbewehrung
${}_S\epsilon_{Fl.}'$	Fließ- oder Streckdehnung der Druckbewehrung
${}_B\epsilon$	Betondehnung am Zugrand
${}_B\epsilon'$	Betonstauchung am Druckrand
${}_S\epsilon$	Dehnung der Zugbewehrung
${}_S\epsilon'$	Stauchung der Druckbewehrung
$\beta_s\mu = \frac{{}_S\sigma_{Fl.}}{\sigma_p}\mu$	Zugbewehrungsstärke
$\beta_s'\mu' = \frac{{}_S\sigma_{Fl.}'}{\sigma_p}\mu'$	Druckbewehrungsstärke
M	Biegemoment um die Schwerachse des Querschnittes
N	Normalkraft (in Schwerachse wirkend)
M_0	Bruchmoment unter $N = 0$
N_0	Bruchnormalkraft unter $M = 0$
$\Phi\left(= \frac{1}{\rho}\right)$	Krümmung
$\varphi_{pl.}\ (= k\,d\,\Delta\,\Phi)$	Drehfähigkeit des plastischen Gelenkes

2.3. *Spannungsgrenzpunkte*

Am Druck- bzw. Zugrand des Betons und auf der Höhe der Druck- bzw. Zugbewehrung können bezüglich der Baustoffe folgende Spannungsgrenzpunkte unterschieden werden (s. Fig. 4):

B_0, S_0, S'_0, B'_0	Ursprungsstellen (Dehnungsnullpunkte)
$B_{Tr.}$	Trenndehnungsstelle des Betons am Zugrand
$B'_{Tr.}$	Trenndehnungsstelle des Betons am Druckrand
$B_{Fl.}$	Fließstauchungsstelle des Betons am Zugrand
$B'_{Fl.}$	Fließstauchungsstelle des Betons am Druckrand
$S_{Z.Fl.}$	Zugfließ- (Zugstreck-) Dehnungsstelle der Zugbewehrung auf der Zugseite
$S'_{Z.Fl.}$	Zugfließ- (Zugstreck-) Dehnungsstelle der Druckbewehrung auf der Druckseite
$S_{D.Fl.}$	Druckfließ- (Druckstreck-) Stauchungsstelle der Zugbewehrung auf der Zugseite
$S'_{D.Fl.}$	Druckfließ- (Druckstreck-) Stauchungsstelle der Druckbewehrung auf der Druckseite
$B'_{Br.}$	Druckbruchstauchungsstelle des Betons am Druckrand
$B_{1/3\,Fl.}$	Die Stelle der Betonstauchung am Zugrand, bei der $^1/_3$ der Betonfließstauchung erreicht wird
$B'_{1/3\,Fl.}$	Die Stelle der Betonstauchung am Druckrand, bei der $^1/_3$ der Betonfließstauchung erreicht wird
$B_{2/3\,Fl.}$	Die Stelle der Betonstauchung am Zugrand, bei der $^2/_3$ der Betonfließstauchung erreicht wird
$B'_{2/3\,Fl.}$	Die Stelle der Betonstauchung am Druckrand, bei der $^2/_3$ der Betonfließstauchung erreicht wird

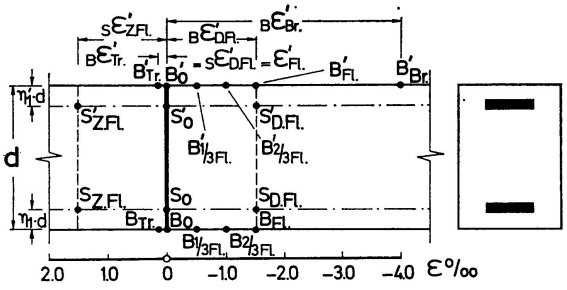


Fig. 4. Spannungsgrenzpunkte der Baustoffe in einem Stahlbetonquerschnitt.

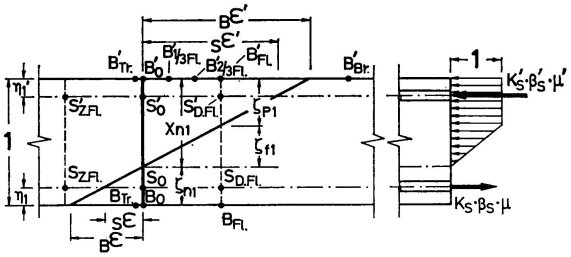


Fig. 5. Dehnungsverlauf, entsprechende Spannungsverteilung und Spannungsgrenzpunkte in einem Stahlbetonquerschnitt.

3. Beziehungen zwischen Biegemoment M, Normalkraft N und Krümmung Φ

3.1. Verallgemeinerte Interaktionsfläche zwischen M, N und Φ

Um die verallgemeinerte Interaktionskurve zwischen Biegemoment M und Normalkraft N und die Beziehungen dieser Kurve zu den Krümmungen zu veranschaulichen, wurde in Fig. 5 an einem Stahlbetonquerschnitt eine beliebige Dehnungsverteilung angenommen. Die Spannungsgrenzpunkte sind ebenfalls aus Fig. 5 ersichtlich. Die Normalkraft N und das Biegemoment M sind

nun von der Krümmung Φ abhängig. Für M und N ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\frac{N}{\sigma_p b d} = K'_s \beta'_s \mu' + K_s \beta_s \mu + K'_B \tfrac{1}{2} x_{n1} - K''_B \tfrac{1}{2} \zeta_{p1} - K_B \tfrac{1}{2} \zeta_{n1}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{M}{\sigma_p b d^2} = {} & (\tfrac{1}{2} - \eta'_1) K'_s \beta'_s \mu' - (\tfrac{1}{2} - \eta_1) K_s \beta_s \mu + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} x_{n1}) K'_B \tfrac{1}{2} x_{n1} \\ & - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} \zeta_{p1}) K''_B \tfrac{1}{2} \zeta_{p1} + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \zeta_{n1}) K_B \tfrac{1}{2} \zeta_{n1}.\end{aligned} \tag{2}$$

Mit den Vorzeichen (+) für Stauchungen und (−) für Dehnungen.

Es bedeuten:

$$\zeta_{n1} = x_{n1} - 1, \tag{3}$$

$$\zeta_{p1} = x_{n1} - \frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d}, \tag{4}$$

Dehnungsverteilungen gültig in (s. Fig. 4):

$$\begin{aligned} K'_s = \frac{S^{\epsilon'}}{S^{\epsilon'_{Fl.}}} = \frac{S^{\epsilon'}}{\epsilon_{Fl.}} &= -1 && : \sim [S'_{Z.Fl.}], \\ &= \frac{1}{\epsilon_{Fl.}} (x_{n1} - \eta'_1) \Phi d && : [S'_{Z.Fl.}] \sim [S'_{D.Fl.}], \\ &= +1 && : [S'_{D.Fl}] \sim, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} K_s = \frac{S^{\epsilon'}}{S^{\epsilon_{Fl.}}} = \frac{S^{\epsilon}}{\epsilon_{Fl.}} &= -1 && : \sim [S_{Z.Fl.}], \\ &= \frac{1}{\epsilon_{Fl.}} (x_{n1} - 1 + \eta_1) \Phi d && : [S_{Z.Fl.}] \sim [S_{D.Fl.}], \\ &= +1 && : [S_{D.Fl.}] \sim, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} K'_B = \frac{B^{\epsilon'}}{B^{\epsilon_{Fl.}}} = \frac{B^{\epsilon'}}{\epsilon_{Fl.}} &= 0 && : \sim [B'_0], \\ &= \frac{1}{\epsilon_{Fl.}} x_{n1} \Phi d && : [B'_0] \sim [B'_{Br.}], \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} K_B = \frac{B^{\epsilon}}{B^{\epsilon_{Fl.}}} = \frac{B^{\epsilon}}{\epsilon_{Fl.}} &= 0^* && : \sim [B_0], \\ &= \frac{1}{\epsilon_{Fl.}} (x_{n1} - 1) \Phi d && : [B_0] \sim [B_{Fl.}], \end{aligned} \tag{8}$$

$$\left(= -\frac{B^{\epsilon_{Tr.}}}{\epsilon_{Fl.}} = -0{,}1 \right) \quad : [B_{Tr.}], \tag{8'}$$

$$\begin{aligned} K''_B = K'_B - 1 \quad = 0 && : \sim [B'_{Fl.}], \\ = K'_B - 1 && : [B'_{Fl.}] \sim [B'_{Br.}]. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Krümmungen Φd, sowie Nullinienverhältnis x_{n1} für den beliebigen Dehnungsverlauf zwischen zwei Spannungsgrenzpunkten, sind in der Tafel 1 zusammengestellt.

Tafel 1

Drehmittelpunkte des Dehnungsverlaufes	Nullinienabstand x_{n1}	Krümmung Φd							
$B'_{Br.}$	$\frac{B\epsilon'_{Br.}}{\Phi d}$	B'_0	$S'_{Z.Fl.}$	$S'_{D.Fl.}$	$S_{Z.Fl.}$	B_0	$S_{D.Fl.}$	$B_{Fl.}$	$B'_{Br.}$
		∞	$\frac{B\epsilon'_{Br.}+\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{B\epsilon'_{Br.}-\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{B\epsilon'_{Br.}+\epsilon_{Fl.}}{1-\eta_1}$	$B\epsilon'_{Br.}$	$\frac{B\epsilon'_{Br.}-\epsilon_{Fl.}}{1-\eta_1}$	$B\epsilon'_{Br.}-\epsilon_{Fl.}$	0
$B'_{Fl.}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d}$	$B'_0, B'_{Br.}$	$S'_{Z.Fl.}$	$S_{Z.Fl.}$	B_0	$S'_{D.Fl.}, S_{D.Fl.}, B_{Fl.}$			
		∞	$\frac{2\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{2\epsilon_{Fl.}}{1-\eta_1}$	$\epsilon_{Fl.}$	0			
$B'_{2/3 Fl.}$	$\frac{2}{3}\frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d}$	$B'_0, B'_{Br.}$	$S'_{Z.Fl.}$	$S_{Z.Fl.}$	B_0	$B_{2/3 Fl.}$			
		∞	$\frac{\epsilon_{Fl.}+\frac{2}{3}\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}+\frac{2}{3}\epsilon_{Fl.}}{1-\eta_1}$	$\frac{2}{3}\epsilon_{Fl.}$	0			
$B'_{1/3 Fl.}$	$\frac{1}{3}\frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d}$	$B'_0, B'_{Br.}$	$S'_{Z.Fl.}$	$S_{Z.Fl.}$	B_0	$B_{1/3 Fl.}$			
		∞	$\frac{\epsilon_{Fl.}+\frac{1}{3}\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}+\frac{1}{3}\epsilon_{Fl.}}{1-\eta_1}$	$\frac{1}{3}\epsilon_{Fl.}$	0			
B'_0	0	$B'_{Fl.}, B'_{Br.}$	$S'_{Z.Fl.}$	$S_{Z.Fl.}$	B_0, S_0				
		∞	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{1-\eta_1}$	0				

S'_0	η'_1	$B'_{Br.}$	$B'_{Fl.}$	$B'_{2/3\,Fl.}$	$B'_{1/3\,Fl.}$	$S_{Z.Fl.}$	B'_0, S_0, B_0		
		$\frac{{}_B\epsilon'_{Br.}}{\eta'_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{2}{3}\frac{\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{1}{3}\frac{\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{1-\eta'_1-\eta_1}$	0		
$S'_{D.Fl.}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d}+\eta'_1$	$B'_{Br.}$	$S_{Z.Fl.}$	B_0	$B'_{Fl.}, S_{D.Fl.}, B_{Fl.}$				
		$\frac{{}_B\epsilon'_{Br.}-\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{2\,\epsilon_{Fl.}}{1-\eta'_1-\eta_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{1-\eta'_1}$	0				
$S_{Z.Fl.}$	$1-\eta_1-\frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d}$	$B'_{Br.}$	$S'_{D.Fl.}$	$B'_{Fl.}$	$B'_{2/3\,Fl.}$	$B'_{1/3\,Fl.}$	B'_0	$S'_{Z.Fl.}$	
		$\frac{\epsilon_{Fl.}+{}_B\epsilon'_{Br.}}{1-\eta_1}$	$\frac{2\,\epsilon_{Fl.}}{1-\eta'_1-\eta_1}$	$\frac{2\,\epsilon_{Fl.}}{1-\eta_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}+\frac{2}{3}\epsilon_{Fl.}}{1-\eta_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}+\frac{1}{3}\epsilon_{Fl.}}{1-\eta_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{1-\eta_1}$	0	
S_0	$1-\eta_1$	$B'_{Br.}$	$S'_{D.Fl.}$	$B'_{Fl.}$	$B'_{2/3\,Fl.}$	$B'_{1/3\,Fl.}$	B'_0, S'_0, B_0		
		$\frac{{}_B\epsilon'_{Br.}}{1-\eta_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{1-\eta'_1-\eta_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{1-\eta_1}$	$\frac{\frac{2}{3}\epsilon_{Fl.}}{1-\eta_1}$	$\frac{\frac{1}{3}\epsilon_{Fl.}}{1-\eta_1}$	0		
B_0	1	$B'_{Br.}$	$S'_{D.Fl.}$	$B'_{Fl.}$	$B'_{2/3\,Fl.}$	$B'_{1/3\,Fl.}$	B'_0, S'_0, B_0		
		${}_B\epsilon'_{Br.}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{1-\eta'_1}$	$\epsilon_{Fl.}$	$\frac{2}{3}\epsilon_{Fl.}$	$\frac{1}{3}\epsilon_{Fl.}$	0		
$B_{Tr.}$	$1-\frac{{}_B\epsilon_{Tr.}}{\Phi d}$	$B'_{Br.}$	$S'_{D.Fl.}$	$B'_{Fl.}$	B'_0	$B'_{Tr.}$			
		${}_B\epsilon'_{Br.}+{}_B\epsilon_{Tr.}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}+{}_B\epsilon_{Tr.}}{1-\eta'_1}$	$\epsilon_{Fl.}+{}_B\epsilon_{Tr.}$	${}_B\epsilon_{Tr.}$	0			

Als Beispiel betrachten wir einen Fall, bei dem der Dehnungsverlauf durch den Spannungsgrenzpunkt $[B'_{Br.}]$ geht, d.h. die Betonstauchung am Druckrand erreicht dabei gerade die Bruchstauchung ${}_B\epsilon'_{Br.} = 0{,}004$.

Wählt man nun den Wert Φd im Bereich ${}_B\epsilon'_{Br.} \leqq \Phi d \leqq \frac{{}_B\epsilon'_{Br.} + \epsilon_{Fl.}}{1-\eta_1}$, so muß der Dehnungsverlauf durch den Drehmittelpunkt $[B'_{Br.}]$ gehen und zwischen den Spannungsgrenzpunkten $[S_{Z.Fl.}]$ und $[B_0]$ liegen. Die Nullinie ist angegeben durch $x_{n1} = \frac{{}_B\epsilon'_{Br.}}{\Phi d}$. Der Dehnungsverlauf liegt zwischen $\overline{B'_{Br.} S_{Z.Fl.}}$ und $\overline{B'_{Br.} B_0}$.

Aus den Gleichungen (3) und (4) ergibt sich $\zeta_{n1} = x_{n1} - 1$ und $\zeta_{p1} = x_{n1} - \frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d}$. Aus den Gleichungen (5) und (9) ergibt sich

$$K'_s = +1, \quad K_s = \frac{1}{\epsilon_{Fl.}}(x_{n1} - 1 + \eta_1)\Phi d, \quad K'_B = \frac{1}{\epsilon_{Fl.}} x_{n1} \Phi d, \quad K_B = 0$$

und

$$K''_B = K'_B - 1 = \frac{1}{\epsilon_{Fl.}} x_{n1} \Phi d - 1.$$

Setzt man diese Beziehungen in die Gleichungen (1) und (2) ein, so ergibt sich das Biegemoment M und die Normalkraft N als Funktion der Krümmung im oben genannten Bereich:

$$\begin{aligned}
\frac{N}{\sigma_p b d} &= \beta'_s \mu' + \frac{1}{\epsilon_{Fl.}}(x_{n1} - 1 + \eta_1)\Phi d \beta_s \mu + \frac{x_{n1}}{\epsilon_{Fl.}} \Phi d \frac{1}{2} x_{n1} \\
&\quad - \left(\frac{1}{\epsilon_{Fl.}} x_{n1} \Phi d - 1\right) \frac{1}{2} \left(x_{n1} - \frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d}\right), \\
\frac{M}{\sigma_p b d^2} &= \left(\frac{1}{2} - \eta'_1\right) \beta'_s \mu' - \left(\frac{1}{2} - \eta_1\right) \frac{1}{\epsilon_{Fl.}} (x_{n1} - 1 + \eta_1) \Phi d \beta_s \mu \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} x_{n1}\right) \frac{1}{\epsilon_{Fl.}} x_{n1} \Phi d \frac{1}{2} x_{n1} \\
&\quad - \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(x_{n1} - \frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d}\right)\right\} \left(\frac{1}{\epsilon_{Fl.}} x_{n1} \Phi d - 1\right) \frac{1}{2} \left(x_{n1} - \frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d}\right).
\end{aligned}$$

Wenn man die Werte von ${}_B\epsilon'_{Fl.}$, ${}_B\epsilon'_{Br.}$, ${}_S\epsilon_{Fl.}$ und ${}_S\epsilon'_{Fl.}$ in diese Gleichungen einsetzt, dann sind das Biegemoment $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ und die Normalkraft $\frac{N}{\sigma_p b d}$ des Stahlbetonquerschnittes nur von seinen Kennwerten η_1, η_2, $\beta_s \mu$ und $\beta'_s \mu'$ abhängig. Für gegebene Kennwerte $\eta_1, \eta_1', \beta_S \mu$ und $\beta_S' \mu'$ ist der Zusammenhang zwischen Biegemoment M, Normalkraft N und Krümmung Φ des Stahlbetonquerschnittes durch eine kontinuierliche räumliche Kurve im Kartesischen Koordinatensystem mit den Achsen $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$, $\frac{N}{\sigma_p b d}$ und Φd gegeben.

Für alle andern Spannungsgrenzpunkte ergeben sich ähnliche Beziehungen. Im allgemeinen bilden das Biegemoment M, die Normalkraft N und die Krümmung Φ eines Stahlbetonquerschnittes eine kontinuierliche räumlich

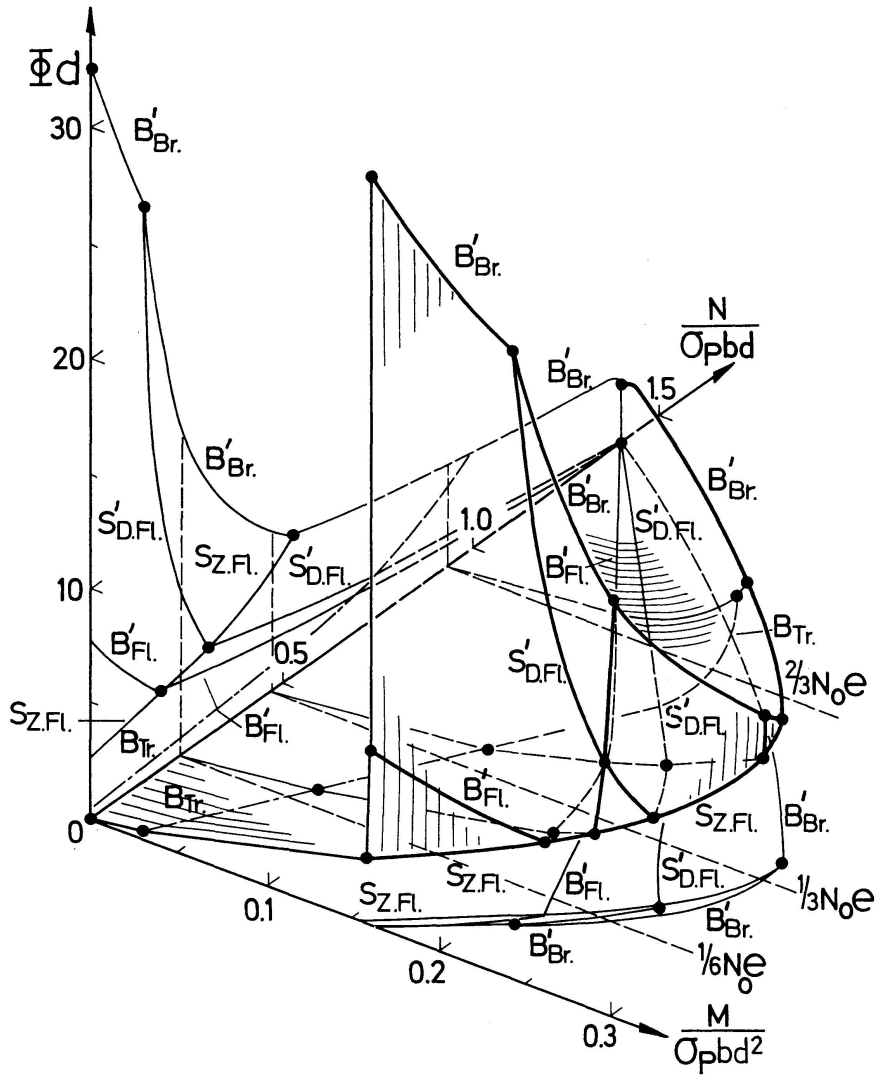


Fig. 6. Interaktionsfläche eines Stahlbetonquerschnittes im Koordinatensystem von Biegemoment, Normalkraft und Krümmung.

gekrümmte Fläche im Koordinatensystem mit den Achsen $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$, $\frac{N}{\sigma_p b d}$ und Φd abhängig von den Kennwerten des Querschnittes η_1, η_1', $\beta_s \mu$ und $\beta_s' \mu'$ (s. Fig. 6).

3.2. Beziehungen zwischen $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ und $\frac{N}{\sigma_p b d}$

Mit der obenerwähnten Methode können die Werte von $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$, $\frac{N}{\sigma_p b d}$ und Φd an allen Spannungsgrenzpunkten berechnet werden. In Fig. 7 (a) sind diese Beziehungen zwischen $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ und $\frac{N}{\sigma_p b d}$ dargestellt. Diese Kurven sind die Projektionen der oben beschriebenen räumlichen Kurven auf die Ebene mit den Koordinaten $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ und $\frac{N}{\sigma_p b d}$. Die in dieser Figur eingetragenen Kurvenbezeichnungen entsprechen dem als Drehmittelpunkt des Dehnungsverlaufes benutzten Spannungsgrenzpunkt (Fig. 4 und 5).

Fig. 7.1 (a). Beziehung zwischen Biegemoment $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ und Normalkraft $\frac{N}{\sigma_p b d}$ (Interaktionskurve zwischen Biegemoment und Normalkraft) mit $\beta_s \mu = 0{,}10$.

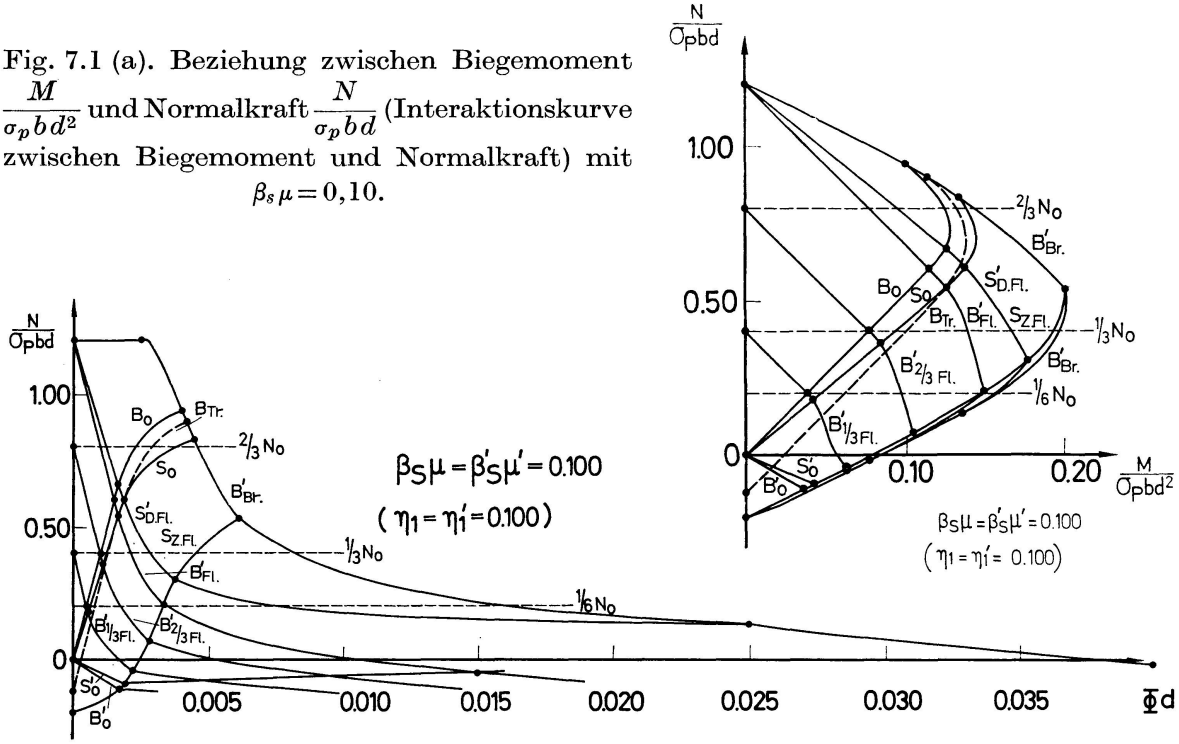


Fig. 7.1 (b). Beziehung zwischen Normalkraft $\frac{N}{\sigma_p b d}$ und Krümmung Φd mit $\beta_s \mu = 0{,}10$.

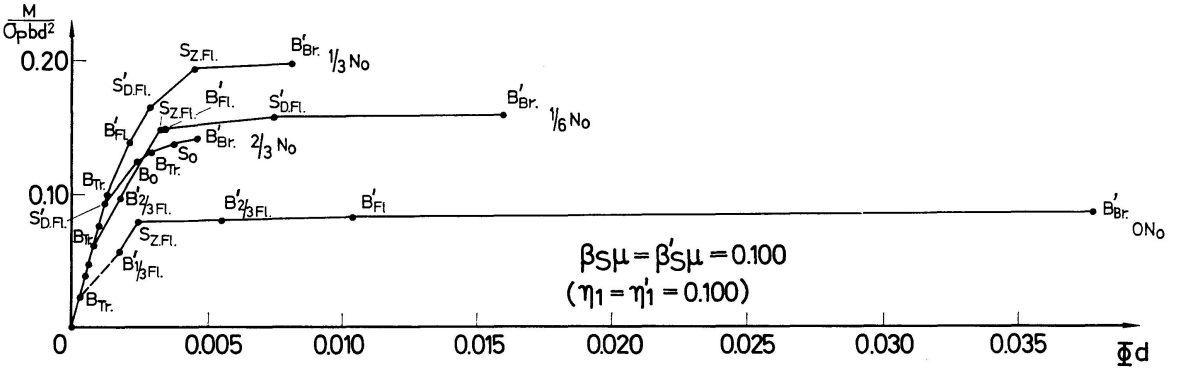


Fig. 7.1 (c). Beziehung zwischen Biegemoment $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ und Krümmung Φd mit $\beta_s \mu = 0{,}10$.

Die in der Figur mit gestrichelter Linie dargestellte $B_{Tr.}$-Kurve zeigt den Zustand, bei dem der Betonzugwiderstand — wie in der Annahme (2) erläutert wurde — bis zur Dehnung ${}_B\epsilon_{Tr.} = \frac{1}{10}\,{}_B\epsilon'_{Fl.} = 0{,}00015$ wirkend angenommen wird. Nach dem Erreichen des Betonzugtrennbruches wird der Betonzugwiderstand in diesem Aufsatz vernachlässigt. Der Kurvenverlauf wurde daher an diesem Punkt unterbrochen. Die geraden Linien $^1/_6\,N_0$, $^1/_3\,N_0$ und $^2/_3\,N_0$ zeigen den Biegebelastungsvorgang unter der bestimmten Normalkraft $^1/_6\,N_0$, $^1/_3\,N_0$ und $^2/_3\,N_0$, wobei N_0 die Bruchlast einer zentrisch gedrückten Stahlbetonsäule bedeutet.

Fig. 7.2 (a). Interaktionskurve zwischen Biegemoment und Normalkraft mit $\beta_s \mu = 0{,}20$.

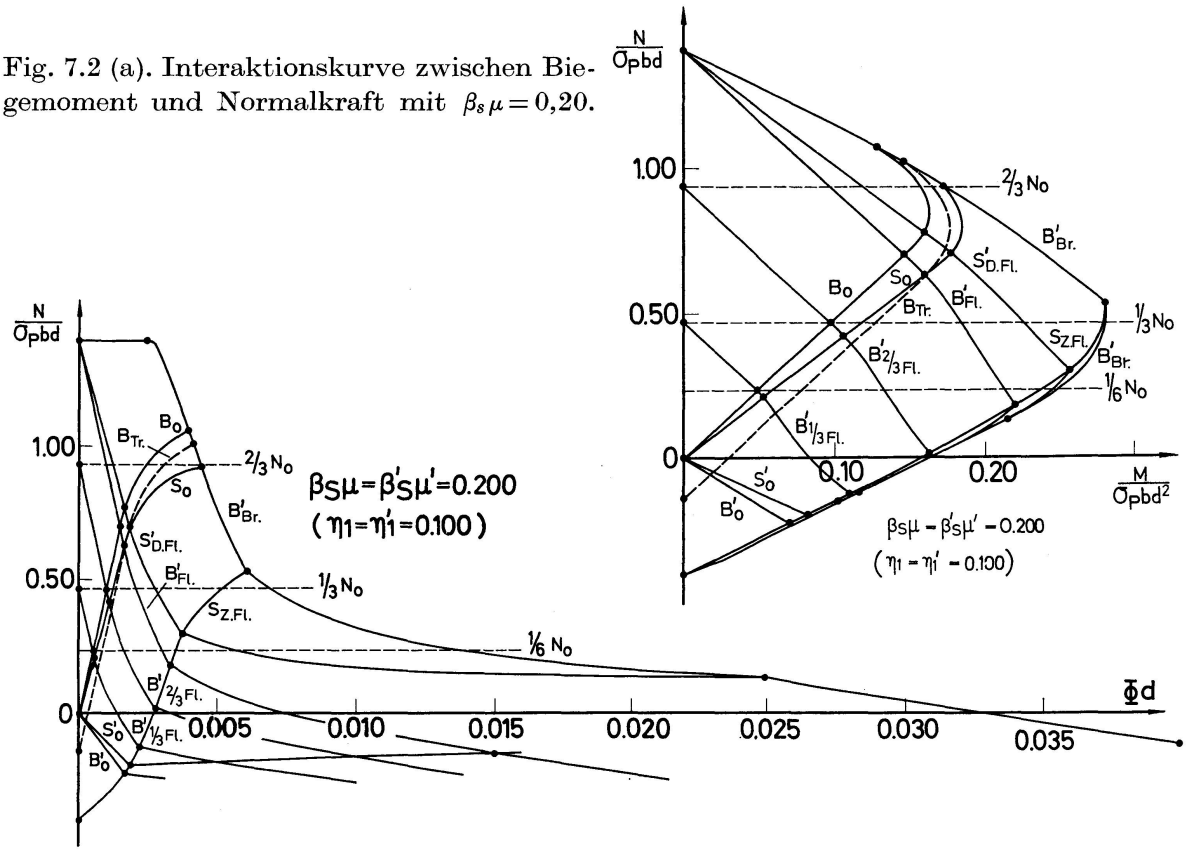


Fig. 7.2 (b). Beziehung zwischen Normalkraft und Krümmung mit $\beta_s \mu = 0{,}20$.

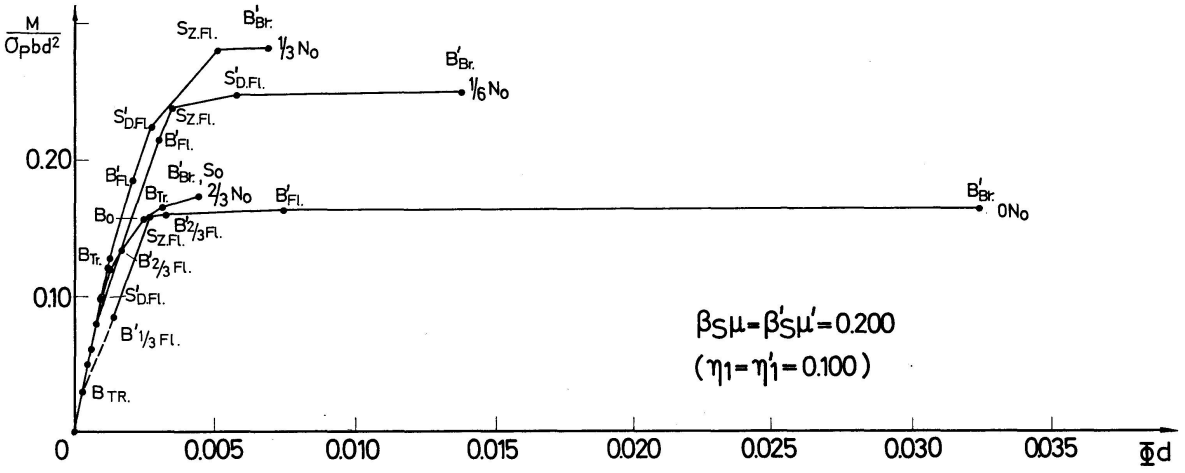


Fig. 7.2 (c). Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung mit $\beta_s \mu = 0{,}20$.

3.3. Beziehung zwischen $\frac{N}{\sigma_p b d}$ *und* Φd

Die Beziehungen zwischen Normalkraft $\frac{N}{\sigma_p b d}$ und Krümmung Φd werden in Fig. 7 (b) dargestellt. Diese Kurven sind die Projektionen der oben beschriebenen räumlichen Kurven auf die $\frac{N}{\sigma_p b d} - \Phi d$-Ebene. Auch hier entsprechen die Kurvenbezeichnungen den zugehörenden, als Drehmittelpunkte benutzten Spannungsgrenzpunkten gemäß Fig. 4 und 5.

Fig. 7.3 (a). Interaktionskurve zwischen Biegemoment und Normalkraft mit $\beta_s \mu = 0{,}30$.

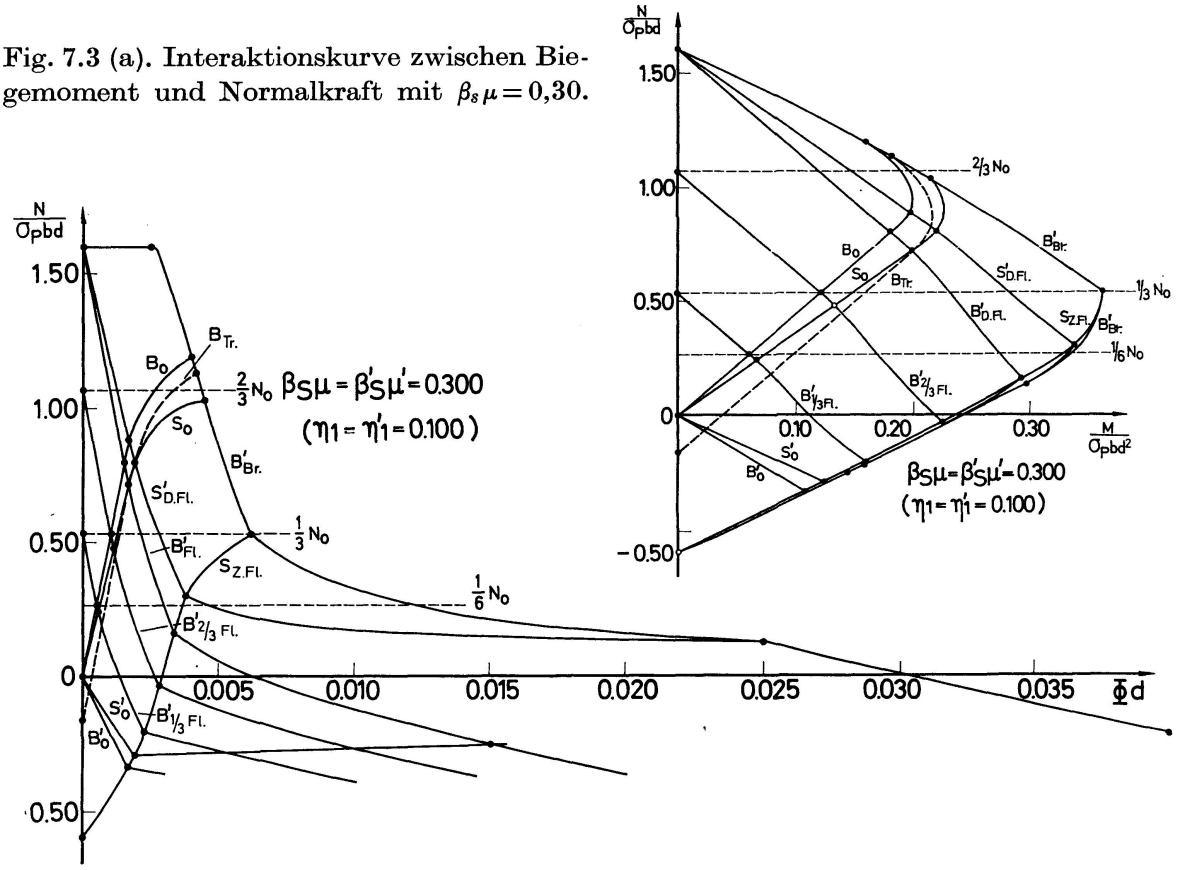


Fig. 7.3 (b). Beziehung zwischen Normalkraft und Krümmung mit $\beta_s \mu = 0{,}30$.

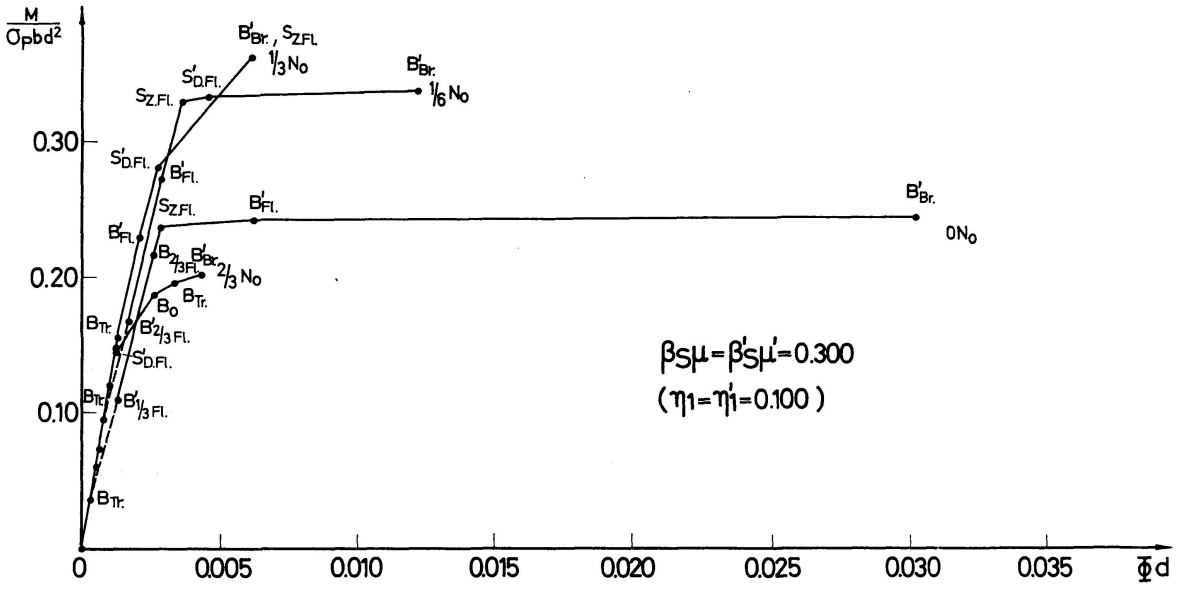


Fig. 7.3 (c). Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung mit $\beta_s \mu = 0{,}30$.

3.4. *Beziehungen zwischen* $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ *und* Φd

Aus den Werten von $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ in der beschriebenen Beziehung $\frac{M}{\sigma_p b d^2} - \frac{N}{\sigma_p b d}$ und aus den Werten von Φd in der beschriebenen Beziehung $\frac{N}{\sigma_p b d} - \Phi d$ wird

Fig. 7.4 (a). Interaktionskurve zwischen Biegemoment und Normalkraft mit $\beta_s \mu = 0{,}40$.

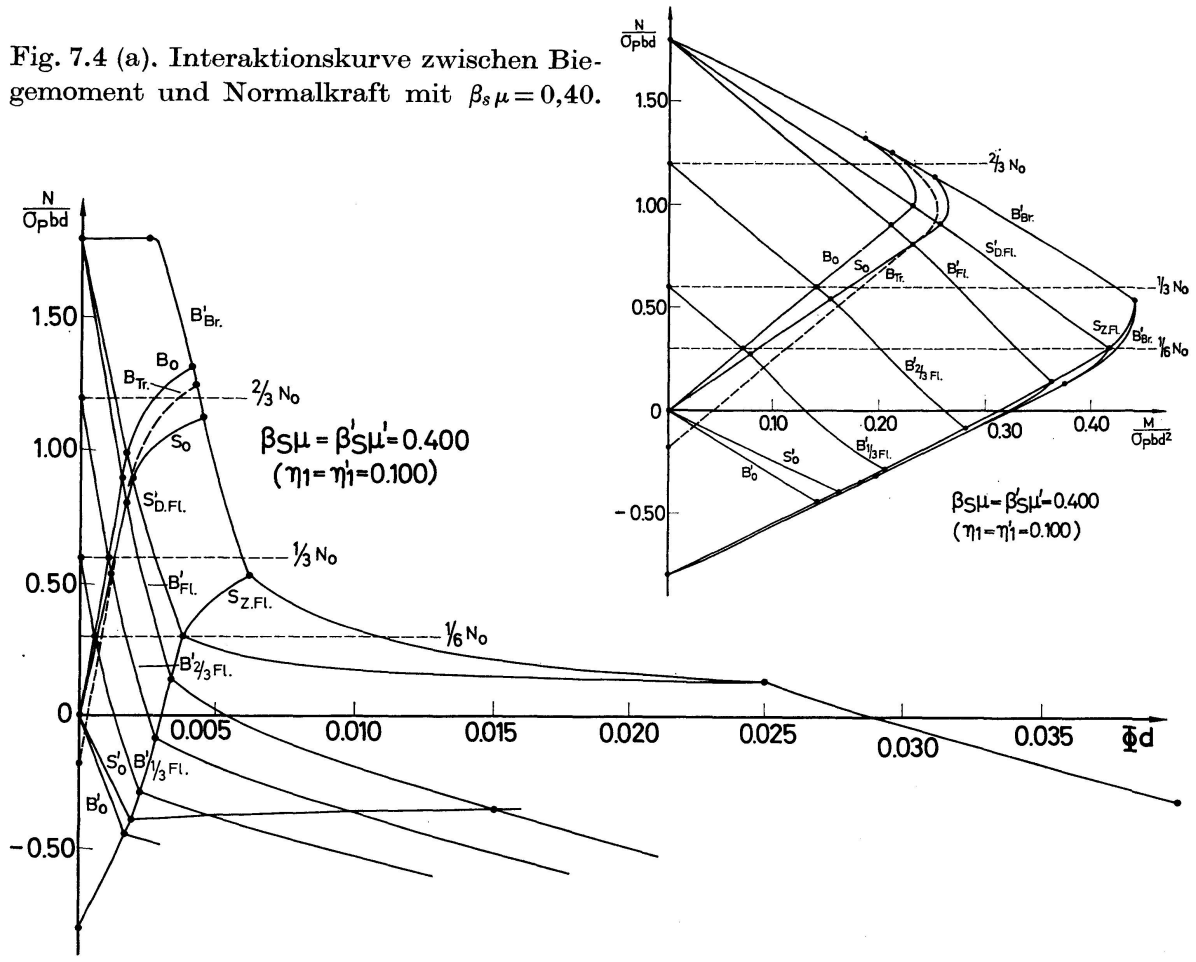


Fig. 7.4 (b). Beziehung zwischen Normalkraft und Krümmung mit $\beta_s \mu = 0{,}40$.

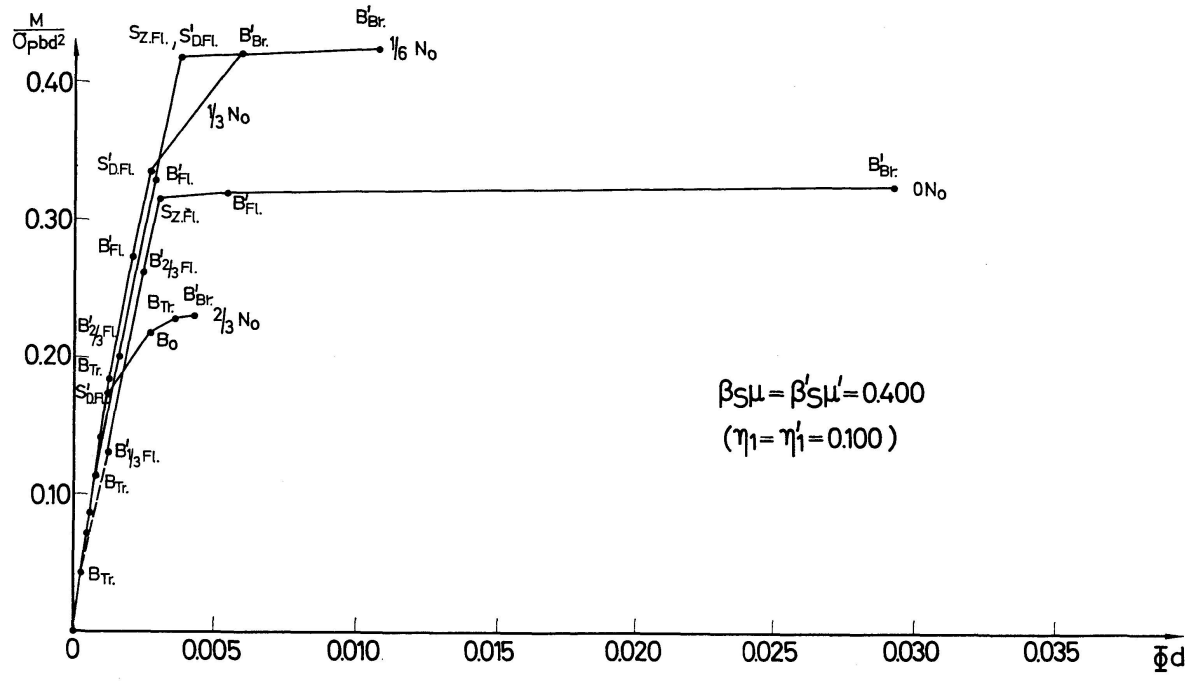


Fig. 7.4 (c). Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung mit $\beta_s \mu = 0{,}40$.

Fig. 7.5 (a). Interaktionskurve zwischen Biegemoment und Normalkraft mit $\beta_s \mu = 0{,}50$.

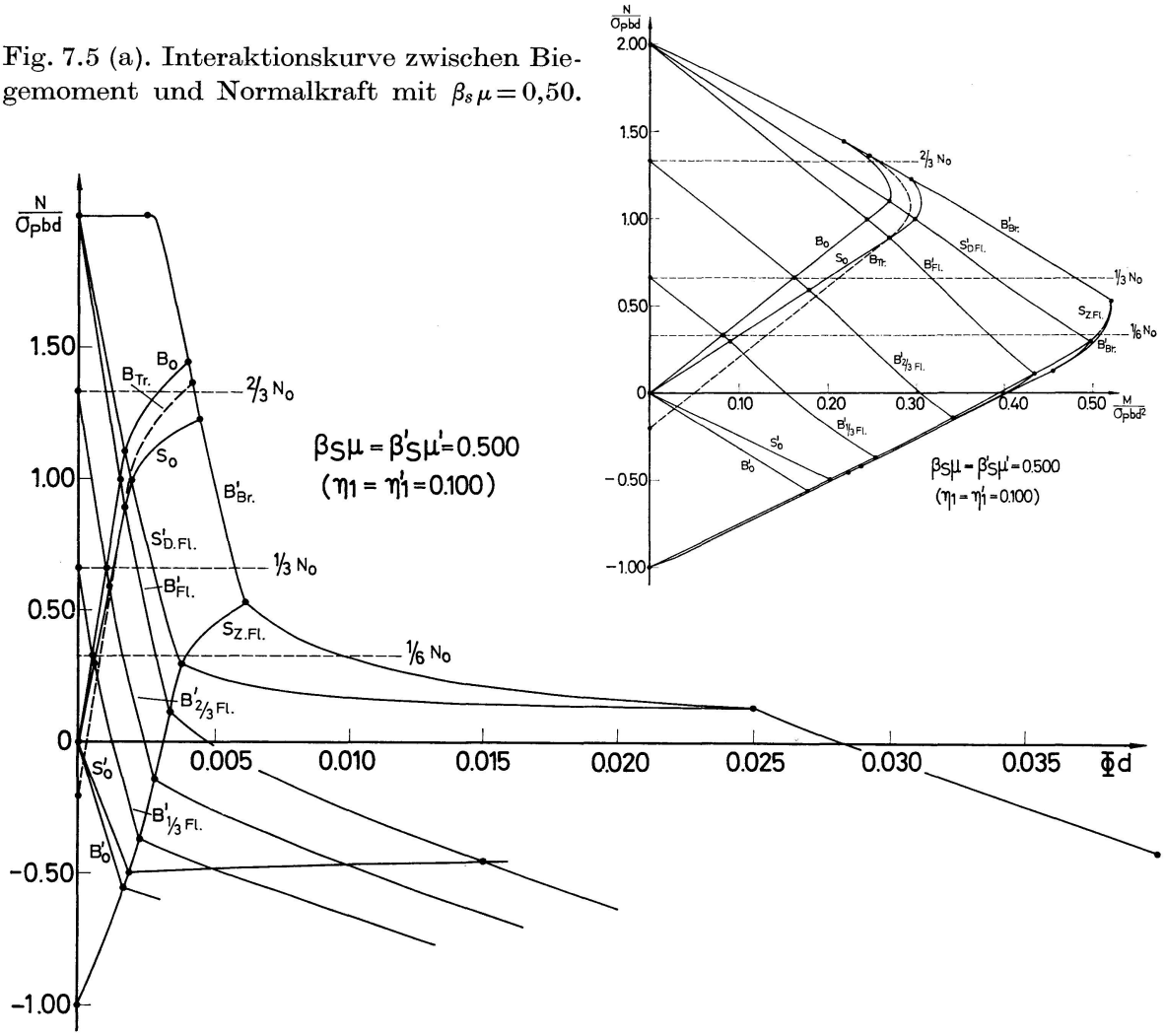


Fig. 7.5 (b). Beziehung zwischen Normalkraft und Krümmung mit $\beta_s \mu = 0{,}50$.

die Beziehung zwischen $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ und Φd unter der Bedingung $\frac{N}{\sigma_p b d} = \text{konst.}$ ($N = 0$, $^1/_6 N_0$, $^1/_3 N_0$, $^2/_3 N_0$) abgeleitet und in Fig. 7 (c) dargestellt.

Die Beziehungen der einzelnen Punkte in dieser Figur weisen darauf hin, daß der Dehnungsverlauf durch den entsprechenden Spannungsgrenzpunkt geht. Beispielsweise erreicht die Betondehnung am Zugrand im Punkt $[B_{Tr.}]$ den Wert ${}_B\epsilon_{Tr.} = 0{,}00015$ (Zugtrennbruch), im Punkt $[S_{Z.Fl.}]$ erreicht die Zugbewehrung den Fließbeginn ${}_S\epsilon_{Fl.} = 0{,}0015$, im Punkt $[S'_{D.Fl.}]$ beginnt die Druckbewehrung zu fließen ${}_S\epsilon'_{Fl.} = 0{,}0015$ und im Punkt $[B'_{Br.}]$ wird die Bruchstauchung des Betons ${}_B\epsilon'_{Br.} = 0{,}004$ (Zerstörung des Stahlbetonquerschnittes) erreicht.

Die gestrichelte Linie zwischen $[B_{Tr.}]$ und $[B'_{Fl.\,1/3}]$ zeigt das Vorhandensein einer Unstetigkeit im Krümmungsverhalten zwischen vor und nach der Entstehung des Zugrisses im Punkt $[B_{Tr.}]$. Darauf wird im nächsten Abschnitt noch näher eingetreten.

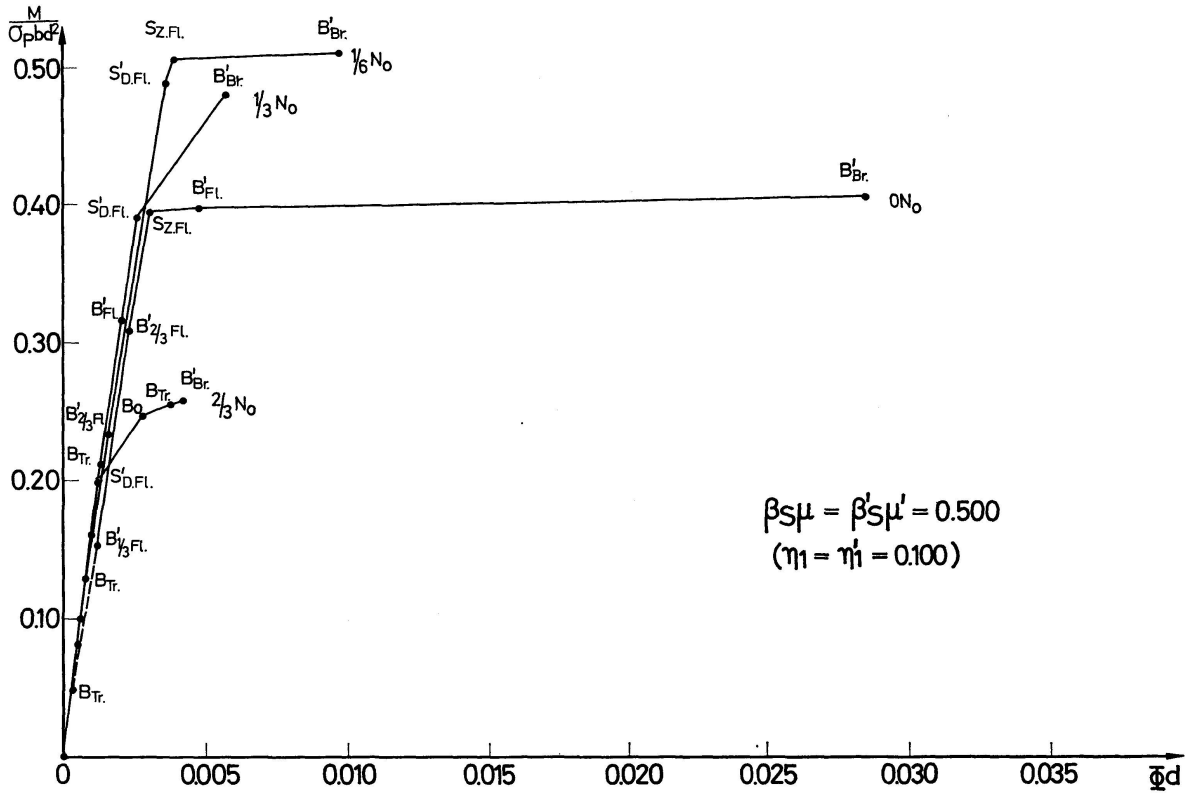


Fig. 7.5 (c). Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung mit $\beta_s \mu = 0{,}50$.

3.5. Betrachtungen über die Beziehungen zwischen $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$, $\frac{N}{\sigma_p b d}$ *und* Φd

Aus eingehenden Untersuchungen an den in den Fig. 7 (a, b, c) dargestellten Projektionen der räumlichen Flächen (Funktionen von $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$, $\frac{N}{\sigma_p b d}$ und Φd) sind die Biegemoment-Krümmungseigenschaften eines Stahlbetonquerschnittes und die darauf wirkenden Einflüsse von Normalkraft und Bewehrungsstärke $\beta_s \mu$ klar ersichtlich. Die infolge des Belastungsprozesses auftretenden Formänderungen des Stahlbetonquerschnittes können ausführlich verfolgt werden:

1. Das Bruchmoment $[B'_{Br.}]$ unter einer bestimmten Normalkraft vergrößert sich ungefähr proportional zur Vergrößerung des Wertes der Bewehrungsstärke $\beta_s \mu$. Im Fall der symmetrischen Bewehrung wird das maximale Bruchmoment — unabhängig von $\beta_s \mu$ — unter der Normalkraft $\frac{N}{\sigma_p b d} \cong 0{,}5$ (s. Fig. 7 (a)) erreicht.

2. Die Krümmung im Bruchzustand $B'_{Br.}$ bei einer bestimmten Bewehrungsstärke $\beta_s \mu$ vermindert sich bei Vergrößerung der Normalkraft sehr stark (s. Fig. 7 (b) und 7 (c)).

3. Der Biegemoment-Krümmungsverlauf wendet sich stark im Punkt $[S_{Z.\,Fl.}]$, d. h. beim Erreichen der Fließspannung in der Zugbewehrung. Dabei entsteht ein plastisches Gelenk (s. Fig. 7 (c)). Die Krümmungsdifferenz $\Delta\Phi = (\Phi_{B'_{Br.}} -$

$\Phi_{Sz.Fl.}$) zwischen der Krümmung $\Phi_{Sz.Fl.}$ im Punkt [$S_{Z.Fl.}$] (Fließbeginn der Zugbewehrung) und der Krümmung $\Phi_{B'Br.}$ im Punkt [$B'_{Br.}$] (Zerstörung des Betons am Druckrand), vermindert sich mit zunehmender Normalkraft sehr stark. Unter der Axiallast $\frac{N}{\sigma_p b d} \cong 0{,}5$, d. h. im Schnittpunkt der [$B'_{Br.}$]-Kurve (Bedingung der Zerstörung des Betons am Druckrand) und der [$S_{Z.Fl.}$]-Kurve (Bedingung für Fließbeginn der Zugbewehrung) wird diese Differenz $\Delta\Phi$ Null (s. Fig. 7 (a)). Für eine über diesem Wert liegende Axiallast entsteht kein plastisches Gelenk im obenerwähnten Sinn mehr, da der Betonbruch vor dem Fließen der Zugbewehrung eintritt.

Für $\frac{N}{\sigma_p b d} > 0{,}5$ wird der Krümmungszuwachs im Punkt [$S'_{D.Fl.}$] (Fließbeginn der Druckbewehrung) etwas vergrößert; man spricht daher vom Entstehen eines pseudo-plastischen Gelenkes (s. Fig. 7 (c)). Unter konstanter Normalkraft N/N_0 ist eine starke Verminderung der Krümmung mit zunehmender Bewehrungsstärke $\beta_s \mu$ feststellbar. Die Beziehung zwischen dem Wert $\Delta\Phi d = (\Phi_{B'Br.} - \Phi_{Sz.Fl.})$ und der Bewehrungsstärke $\beta_s \mu$ ist in Funktion des Parameters N/N_0 aus Fig. 8 ersichtlich.

4. Den Drehwinkel, den ein Stahlbetonstab infolge der Bildung eines plastischen Gelenkes erhält, kann man näherungsweise durch das Produkt des Wertes $\Delta\Phi$ mit der Länge des Gelenkbereiches darstellen. Wenn für die Länge des Gelenkbereiches der Wert der Stabhöhe d angenommen wird, zeigt der Wert $\Delta\Phi d$ in Fig. 8 direkt den Drehwinkel des plastischen Gelenkes des Stahlbetonstabes. Nach den bisherigen Versuchsergebnissen fließt die Zugbewehrung nicht immer gleichmäßig über die ganze Länge des Gelenkbereiches, sondern nur örtlich, auf eine begrenzte kleinere Länge konzentriert. Für die Umrechnung dieser konzentrierten Fließdehnung in eine über eine bestimmte Länge verteilte mittlere Dehnung wurde die Länge des Gelenkbereiches (oder die imaginäre Fließlänge der Zugbewehrung) gleich wie in den bisherigen Aufsätzen [1] [2] [3] angenommen. Der sich daraus ergebende Drehwinkel $k\Delta\Phi d$ des Stahlbetonstabes ist in Fig. 8 durch gestrichelte Linien dargestellt.

4. Beziehungen zwischen Lasten und Durchbiegungen

4.1. Vorbemerkungen zur Analyse

Die Beziehung zwischen einer Querbelastung P und der Durchbiegung δ eines einfach gelagerten Stahlbetonstabes unter konstanter Normalkraft N (Fig. 9) kann nach der Theorie zweiter Ordnung mittels der oben beschriebenen Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung abgeleitet werden.

Zuerst wird die Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung durch einen Streckenzug (Fig. 10) angenähert. Für jede Stufe besteht zwischen Biegemoment und Krümmung ein linearer Zusammenhang. Auf der letzten Stufe

entsteht ein plastisches Gelenk, wobei angenommen wird, daß sich die Krümmung unter dem konstanten Biegemoment M_u um $\Delta\Phi$ vergrößert.

Ferner wird vorausgesetzt, daß die Differentialgleichung der Durchbiegungskurve ebenfalls linear ist und daß vor der Bildung eines plastischen Gelenkes der Krümmungsradius der Stabachse mit dem Krümmungsradius der Nullinie übereinstimmt. Durchbiegungskurve sowie Neigung und Krümmung der Durchbiegungskurve sollen kontinuierlich verlaufen.

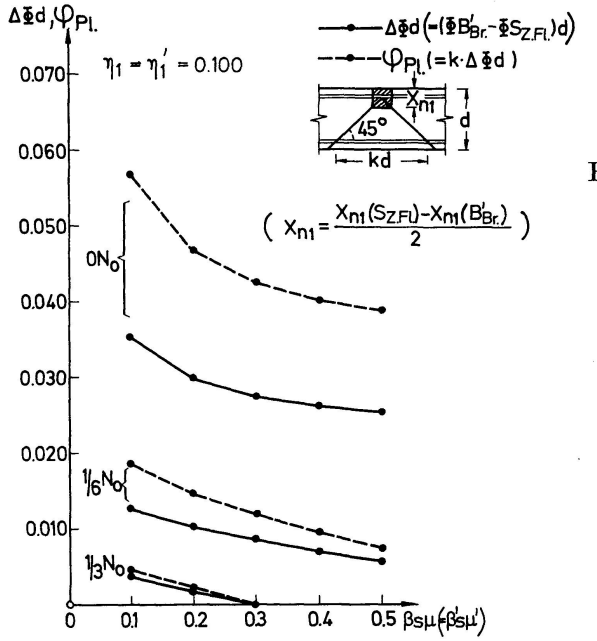


Fig. 8. Beziehung zwischen plastischem Drehwinkel und Bewehrungsstärke $\beta_s\mu$.

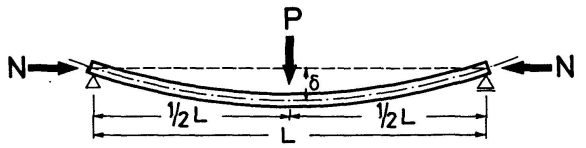


Fig. 9. Querbelasteter Stahlbetonstab unter Normalkraft N.

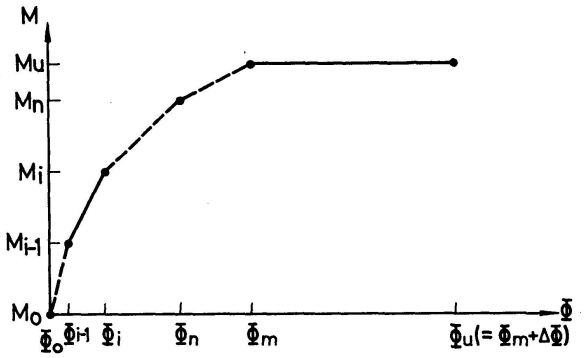


Fig. 10. Angenäherter Biegemoment-Krümmungsverlauf.

Nach der Entstehung des plastischen Gelenkes dreht sich der Gelenkbereich um

$$\varphi_{pl.} = l_Z \Delta\Phi, \tag{10}$$

wobei l_Z die Länge der Zugbewehrung im Gelenkbereich (s. Fig. 8) bedeutet.

4.2. Verfahren für die Berechnung der Durchbiegung

In Fig. 11 ist die Belastungsanordnung des Stahlbetonstabes dargestellt. Im Punkt $[n]$ (Stabmitte) wirkt die Querbelastung P_n; das Moment in diesem Punkt beträgt M_n. Das Moment M_i im beliebigen Punkt $[i]$ ist kleiner als M_n; das folgende Moment M_{i-1} im benachbarten Punkt $[i-1]$ ist kleiner als M_i.

Die Differentialgleichung der Durchbiegungskurve zwischen den Punkten $[i]$ und $[i-1]$ ergibt sich zu

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a_i\left(N y + \frac{P_n}{2}x\right) + b_i, \tag{11}$$

darin bedeuten $x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$,

$y_{i-1} \leqq y \leqq y_i$

und $a_i, b_i > 0$.

Mit $$k_i^2 = a_i N \tag{12}$$

erhält man $$\Phi = A_i \sin(k_i x + B_i) \tag{13}$$

und $$\frac{dy}{dx} = \frac{A_i}{k_i} \cos(k_i + xB_i) - \frac{P_n}{2N}. \tag{14}$$

A_i und B_i sind Integrationskonstanten.

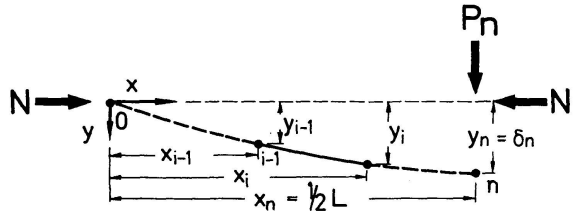


Fig. 11. Durchbiegungskurve.

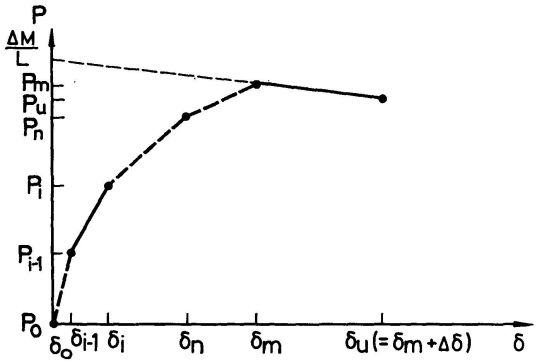


Fig. 12. Beziehung zwischen Querlast P und Durchbiegung δ.

Wenn die Funktionen für Φ und $\frac{dy}{dx}$ an den Stellen [0], [$i-1$] und [n] kontinuierlich verlaufen, ergeben sich folgende Kompatibilitätsbedingungen:

An der Stelle 0: $$x_0 = y_0 = 0, \quad M_0 = 0, \quad \Phi_0 = 0$$

und für $A_1 \neq 0$ muß

$$B_1 = 0 \text{ sein.} \tag{15}$$

An der Stelle [$i-1$] gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_{i-1} &= A_{i-1} \sin(k_{i-1} x_{i-1} + B_{i-1}) \\ &= A_i \sin(k_i x_{i-1} + B_i), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_{i-1}} &= \frac{A_{i-1}}{k_{i-1}} \cos(k_{i-1} x_{i-1} + B_{i-1}) - \frac{P_n}{2N} \\ &= \frac{A_i}{k_i} \cos(k_i x_{i-1} + B_i) - \frac{P_n}{2N}. \end{aligned} \tag{17}$$

An der Stelle [n] gilt:

$$\Phi_n = A_n \sin(k_n x_n + B_n), \tag{18}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_n} = \frac{A_n}{k_n} \cos(k_n x_n + B_n) - \frac{P_n}{2N} = 0, \tag{19}$$

wobei $$x_n = \frac{L}{2}.$$

Zuerst wird die Annahme für P_n getroffen. Damit können die oben abgeleiteten Gleichungen auf iterativem Weg gelöst werden, wobei ein Näherungswert für P_n gewonnen wird. Wenn dieser Wert P_n in die Gleichung

$$M_n = N y_n + \frac{P_n}{2} \frac{L}{2}. \tag{20}$$

eingesetzt wird, erhält man y_n, d.h. δ_n. Führt man diese Berechnung mit n von 1 bis m weiter, so erhält man die Beziehung zwischen P und δ bis zum Entstehen des plastischen Gelenkes.

Nach der Entstehung des plastischen Gelenkes ergibt sich der Zuwachs $\Delta\delta$ der Durchbiegung zu

$$\Delta\delta = \frac{L}{2} \frac{\varphi_{pl.}}{2} = \frac{L}{2} \frac{l_Z \Delta\Phi}{2}. \tag{21}$$

Also wird $$\delta_u = \delta_m + \Delta\delta \tag{22}$$

und P_u aus $$M_u = N\delta_u + \frac{P_u}{2} \frac{L}{2}. \tag{23}$$

Mit der beschriebenen Methode erhält man die Beziehung zwischen P und δ (Fig. 12).

5. Versuche

5.1. Versuchsmethoden

Die Versuche wurden mit einer in die Prüfmaschine eingebauten Belastungseinrichtung (Fig. 13 und 14) durchgeführt.

Die Querbelastung P wird von einer Ölpresse mit elektrischer Meßdose aufgebracht; die von der Prüfmaschine erzeugte Axiallast $X N_0$ wird konstant gehalten. Die Messung der axialen Verkürzung δ_2 und der Durchbiegung δ_1 erfolgte mit Meßuhren. Die Verteilung der Dehnungen und Stauchungen wurde in Säulenmitte durch nebeneinander angeordnete Dehnungsmeßstreifen (Meßlänge 65 mm) gemessen. Diese Dehnungsmeßstreifen wurden, unmittelbar unter der Last P, auf der Seitenoberfläche angebracht. Es wurde große Sorgfalt auf die Ölkontrolle der Hauptprüfmaschine verwendet, um die Axialkraft $X N_0$ stets konstant zu halten.

5.2. Versuchskörper und Versuchsreihe

Der Querschnitt der Versuchssäulen betrug 16×16 cm bei einer Länge von 160 cm (Spannweite 2×70 cm). Fig. 15 zeigt eine Versuchssäule mit der entsprechenden Bewehrungsanordnung. Die Versuchsreihen sind in Tafel 2 zusammengestellt.

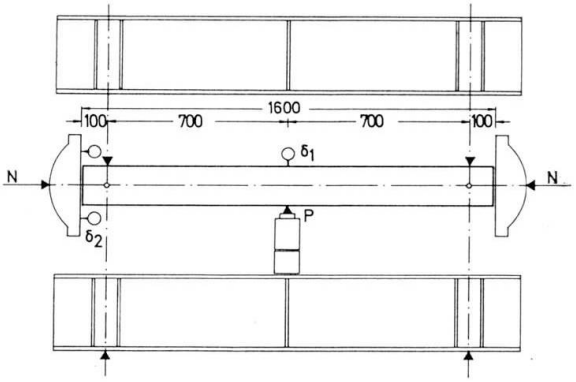


Fig. 13. Versuchseinrichtung.

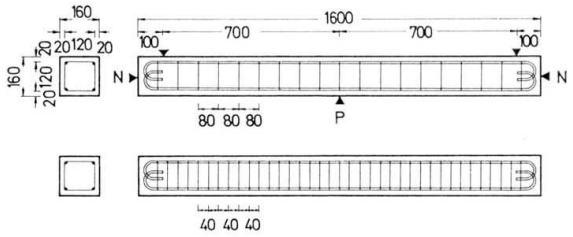


Fig. 15. Versuchssäulen.

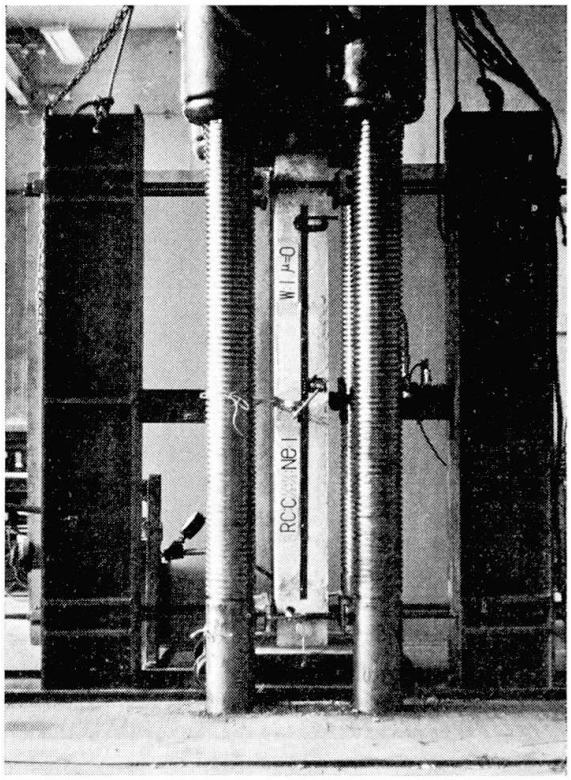


Fig. 14. Versuchseinrichtung (Photo).

Diese Versuchsreihen wurden entsprechend ihrem Bewehrungsanteil μ in vier Reihen unterteilt: $C\,{}^1/_2\,(\mu = 0{,}50\%)$, $C\,1\,(\mu = 1{,}04\%)$, $C\,{}^3/_2\,(\mu = 1{,}57\%)$ und $C\,2\,(\mu = 2{,}22\%)$. μ stellt dabei den Bewehrungsanteil einer Querschnittsseite dar; die gesamte Längsbewehrung beträgt $2\,\mu$.

Jede Reihe wurde, entsprechend der Axialdruckkraft N, in fünf Gruppen unterteilt:

$1\ N_0\,e\ 0$: Säule unter zentrischer Axialkraft ohne Querbelastung ($P = 0$) (mittig gedrückte Säule).

${}^2/_3\,N_0\,e\ 1$: Säule unter konstanter Axialkraft von ${}^2/_3$ der Tragkraft (Bruchlast) bei zentrischem Druck. Einseitige Querbelastung P.

${}^1/_3\,N_0\,e\ 1$: Säule unter konstanter Axialkraft von ${}^1/_3$ der Tragkraft (Bruchlast) bei zentrischem Druck. Einseitige Querbelastung P.

${}^1/_6\,N_0\,e\ 1$: Säule unter konstanter Axialkraft von ${}^1/_6$ der Tragkraft (Bruchlast) bei zentrischem Druck. Einseitige Querbelastung P.

$0\ N_0\,e\ 1$: Säule ohne Axialkraft ($N = 0$). Einseitige Querbelastung P (einfache Biegung).

Ein Teil der Versuchsreihe $C\,1$ diente dazu, den Einfluß der Bügelabstände auf die plastische Verformungsfähigkeit zu untersuchen (in Tafel 2 mit * gekennzeichnet und in Fig. 15 unten gezeigt).

Tafel 2

Säule	Beton		Stahl			Bewehrungs-stärke		Normal-kraft	
	σ_P kg/cm²	$_B\sigma_{Tr.}$ kg/cm²		$\mu=\mu'$ %	$_S\sigma_{Fl.}$ kg/cm²	$\beta_s\mu=\beta'_s\mu'$	$\eta_1=\eta'_1$	N ton	$\frac{N}{\sigma_P bd}$
$RC:C1/2:1N_0\,e\,0$	220	22,2	4-Φ 9	0,50	3200	0,072	0,153	60,0	1,065
$RC:C1/2:2/3N_0\,e\,1$	220	22,2	4-Φ 9	0,50	3200	0,072	0,153	40,0	0,710
$RC:C1/2:2/3N_0\,e\,w$	265	22,3	4-Φ 9	0,50	3200	0,060	0,153	40,0	0,590
$RC:C1/2:1/3\,N_0\,e\,1$	220	22,2	4-Φ 9	0,50	3200	0,072	0,153	20,0	0,355
$RC:C1/2:1/3N_0ew$	265	22,3	4-Φ 9	0,50	3200	0,060	0,153	20,0	0,295
$RC:C1/2:1/6N_0e\,1$	218	23,4	4-Φ 9	0,50	3200	0,073	0,153	10,0	0,179
$RC:C1/2:1/6N_0ew$	236	26,6	4-Φ 9	0,50	3200	0,067	0,153	10,0	0,166
$RC:C1/2:0\,N_0\,e\,1$	218	23,4	4-Φ 9	0,50	3200	0,073	0,153	0	0
$RC:C\,1:1\,N_0\,e\,0$	186	21,4	4-Φ 13	1,04	3070	0,172	0,166	66,0	1,390
$RC:C\,1:2/3\,N_0\,e\,1$	186	21,4	4-Φ 13	1,04	3070	0,172	0,166	44,0	0,925
$RC:C\,1:2/3\,N_0\,e\,w$	208	21,6	4-Φ 13	1,04	3070	0,154	0,166	44,0	0,828
$RC:C\,1:1/3\,N_0\,e\,1$	186	21,4	4-Φ 13	1,04	3070	0,172	0,166	22,0	0,462
$RC:C\,1:1/3\,N_0\,e\,w$	208	21,6	4-Φ 13	1,04	3070	0,154	0,166	22,0	0,414
$RC:C\,1:1/6\,N_0\,e\,1$	218	23,4	4-Φ 13	1,04	3070	0,147	0,166	11,0	0,198
$RC:C\,1:1/6\,N_0\,e\,w$	218	23,4	4-Φ 13	1,04	3070	0,147	0,166	11,0	0,198
$RC:C\,1:0\,N_0\,e\,1$	218	23,4	4-Φ 13	1,04	3070	0,147	0,166	0	0
$RC:C3/2:1/3\,N_0\,e\,1$	256	20,4	4-Φ 16	1,57	3205	0,197	0,175	30,0	0,458
$RC:C3/2:1/6N_0\,e\,1$	256	20,4	4-Φ 16	1,57	3205	0,197	0,175	15,0	0,229
$RC:C2:1/3N_0\,e\,1$	256	20,4	4-Φ 19	2,22	3166	0,274	0,185	33,0	0,504
$RC:C2:1/6N_0\,e\,1$	256	20,4	4-Φ 19	2,22	3166	0,274	0,185	16,5	0,252
$RC:C1:2/3N_0\,e\,1^*$	256	20,4	4-Φ 13	1,04	3070	0,124	0,166	44,0	0,671
$RC:C1:1/3N_0\,e\,1^*$	249	25,5	4-Φ 13	1,04	3070	0,128	0,166	22,0	0,345
$RC:C1:1/6N_0\,e\,1^*$	249	25,5	4-Φ 13	1,04	3070	0,128	0,166	11,0	0,173

Die Festigkeitseigenschaften der Baustoffe sind ebenfalls aus Tafel 2 ersichtlich. Es wurde eine Betonmischung 1 : 2,55 : 3,34 mit $W/C = 0{,}60$ verwendet. Für die Bewehrung wurde Rundstahl verwendet.

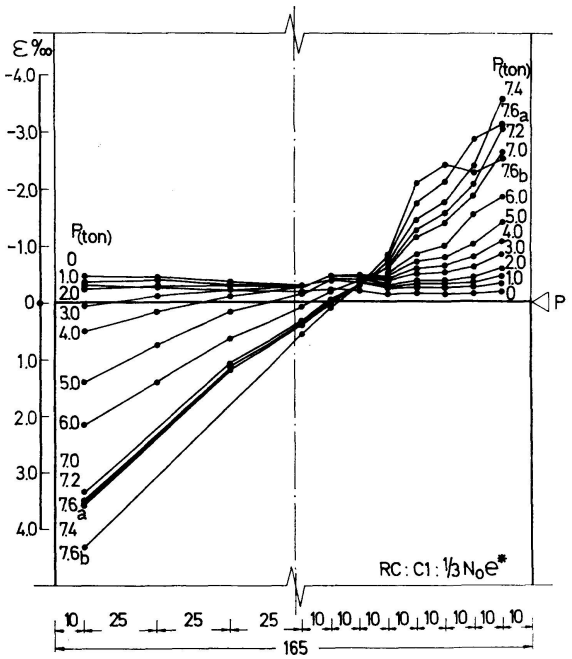


Fig. 16 (a). Dehnungsverteilungen in Axialrichtung, Versuchsergebnis von $RC : C\,1 : {}^1/_3\, N_0\, e\, 1^*$.

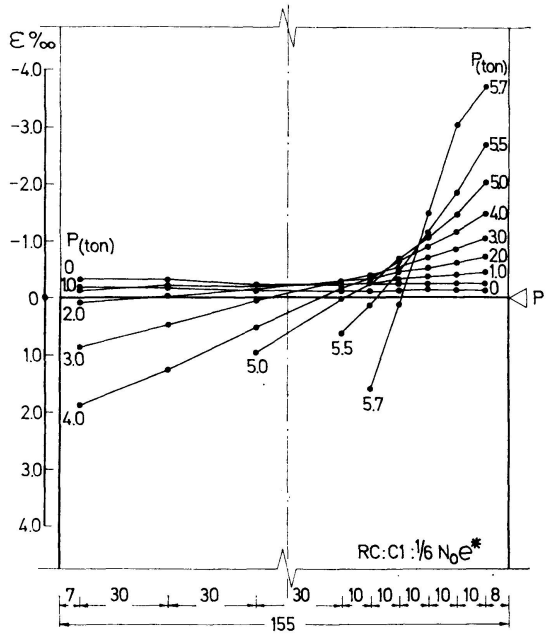


Fig. 16 (b). Dehnungsverteilungen in Axialrichtung, Versuchsergebnis von $RC : C\,1 : {}^1/_6\, N_0\, e\, 1^*$.

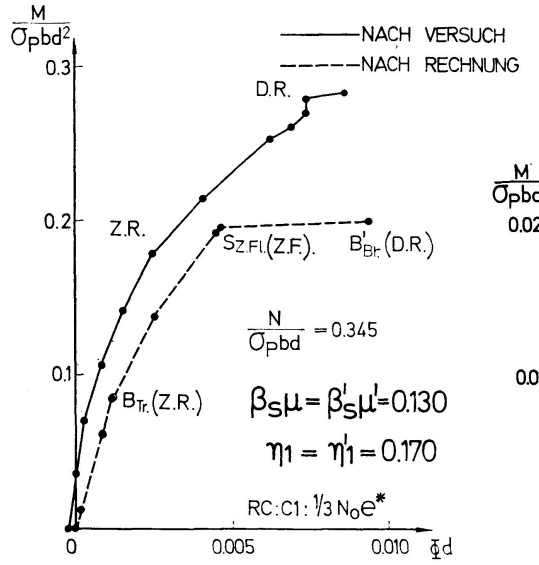


Fig. 17 (a). Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung der aus Fig. 16 (a) erhaltenen Versuchswerte im Vergleich zu den analytischen (gerechneten) Werten von $RC : C\,1 : {}^1/_3\, N_0\, e\, 1^*$.

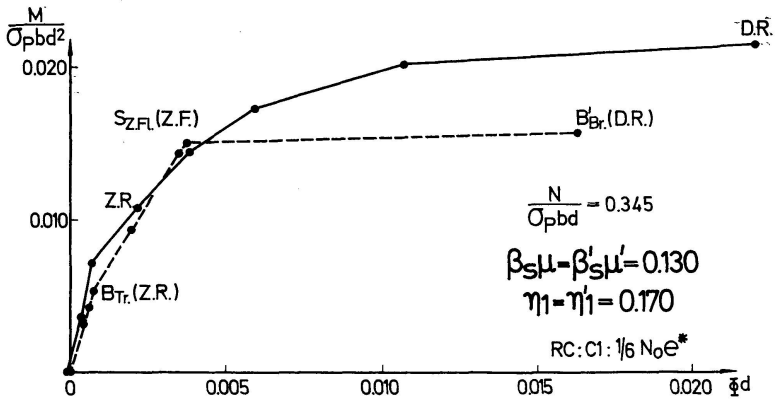


Fig. 17 (b). Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung der aus Fig. 16 (b) erhaltenen Versuchswerte im Vergleich zu den analytischen (gerechneten) Werten von $RC : C\,1 : {}^1/_6\, N_0\, e\, 1^*$.

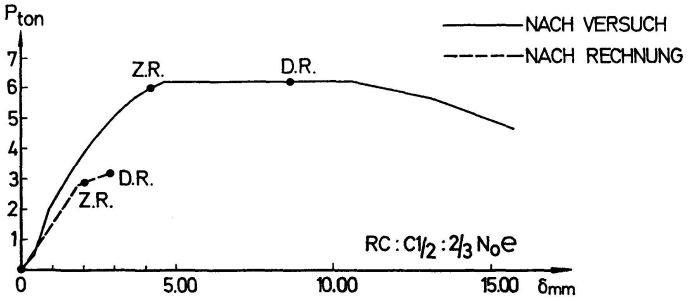


Fig. 18.1 (a).

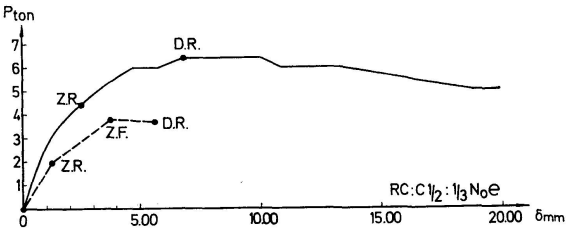


Fig. 18.1 (b).

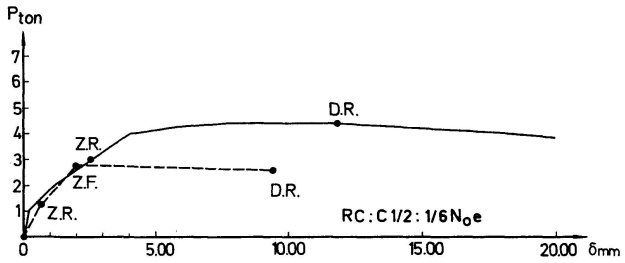


Fig. 18.1 (c).

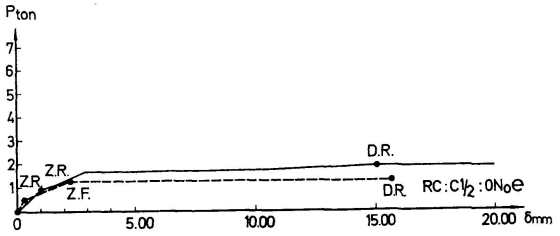


Fig. 18.1 (d).

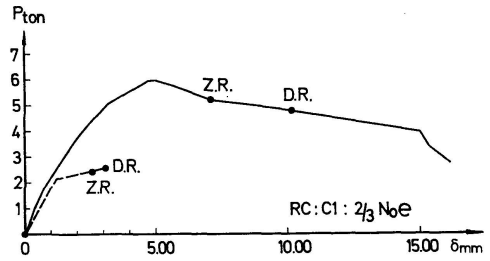


Fig. 18.2 (a).

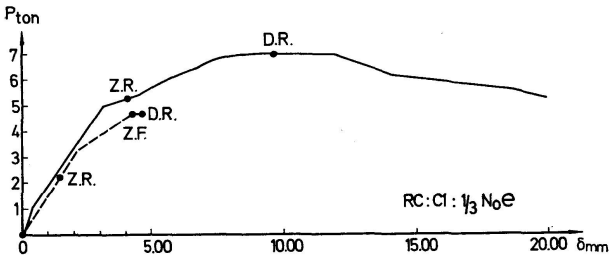


Fig. 18.2 (b).

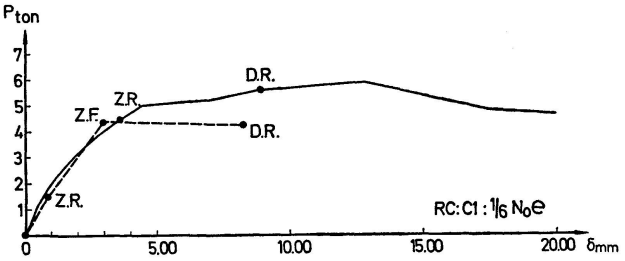


Fig. 18.2 (c).

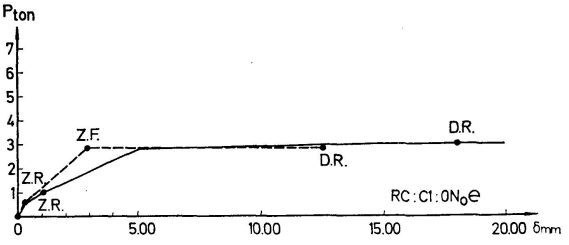


Fig. 18.2 (d).

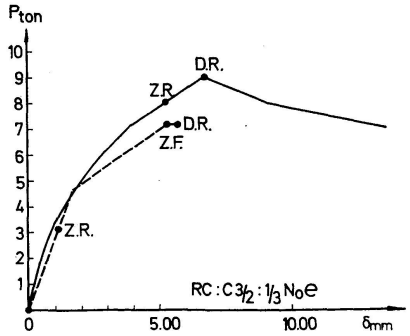


Fig. 18.3 (a).

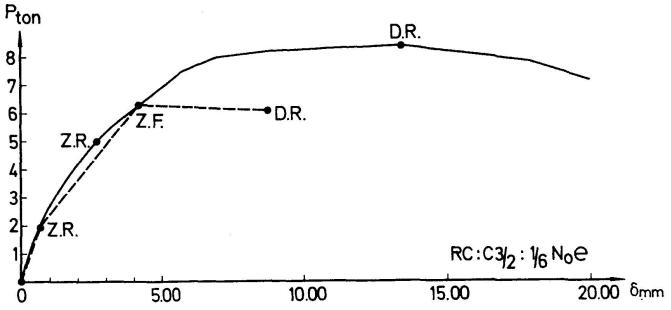


Fig. 18.3 (b).

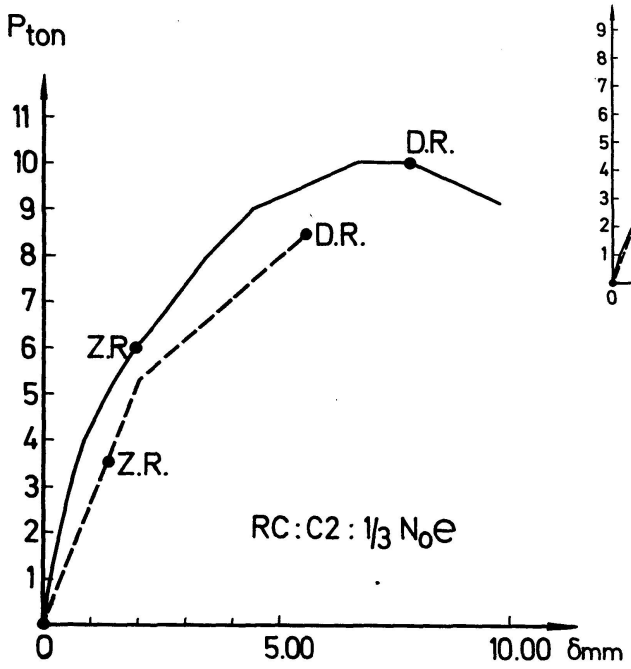


Fig. 18.4 (a).

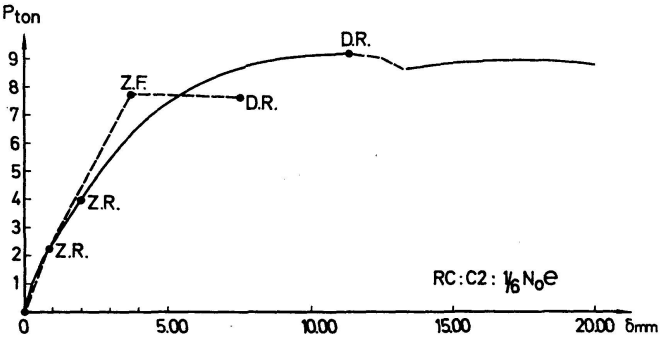


Fig. 18.4 (b).

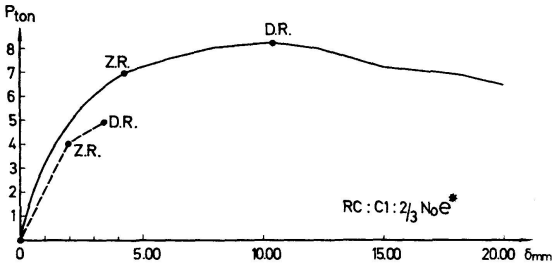


Fig. 18.5 (a).

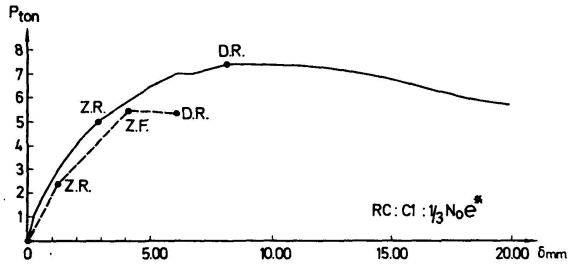


Fig. 18.5 (b).

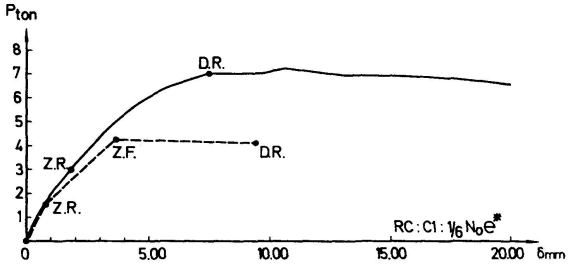


Fig. 18.5 (c).

Fig. 18. Meßergebnisse der Beziehungen zwischen Querbelastung P und Durchbiegung δ im Vergleich zu den analytischen (gerechneten) Werten (Z. R.: Entstehung der ersten Zugrisse auf der Betonoberfläche, D.R.: Entstehung der ersten Druckrisse (lamellenartig) auf der Betondruckoberfläche).

5.3. Versuchsergebnisse

Die Meßergebnisse der Dehnungs- und Stauchungsverteilung in Axialrichtung (Dehnungsmeßstreifen auf der Seitenoberfläche des Betons) sind für die Versuche $RC:C1:{}^1/_3 N_0 e1$ * und $RC:C1:{}^1/_6 N_0 e1$ * in den Fig. 16 (a) und 16 (b) dargestellt. Die Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung, die aus den Dehnungs- und Stauchungsmessungen durch Ausgleich mit der Methode der kleinsten Quadrate gefunden wurde, ist in den Fig. 17 (a) und 17 (b) dargestellt. Die gestrichelte Linie stellt die, nach Abschnitt 3 dieses Aufsatzes, analytisch ermittelte Beziehung dar ($\eta_1 = \eta_1' = 0{,}170$).

Fig. 18 zeigt die Meßergebnisse der Beziehung zwischen Querbelastung P und Durchbiegung δ_1. An der Stelle Z.R. sind die ersten, von Auge sicht-

baren, Zugrisse an der Betonoberfläche entstanden (Haarrisse) und im Punkt D. R. bildeten sich die ersten lamellenartigen Druckrisse an der Betondruckoberfläche (s. Fig. 20).

Die gestrichelte Linie in Fig. 18 stellt die analytisch ermittelte Beziehung zwischen P und δ dar. Zuerst wurde die Beziehung zwischen $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ und Φd (für $\eta_1 = \eta_1' = 0{,}170$), nach Abschnitt 3, berechnet und anschließend mit der in Abschnitt 4 dargestellten Methode die Beziehung zwischen P und δ berechnet. Z. R. entspricht dem Punkt, in dem die Betondehnung an der Oberfläche den Wert ${}_B\epsilon_{Tr.} = 0{,}00015$ erreicht; im Punkt Z. F. erreicht die Zugbewehrung den Wert ${}_S\epsilon_{Fl.} = 0{,}0015$ und im Punkt D. R. wird die Betonbruchstauchung ${}_B\epsilon'_{Br.} = 0{,}0040$ erreicht. Fig. 19 zeigt den elasto-plastischen Verformungsvorgang der Stahlbetonsäule $RC : C\,{}^1/_2 : {}^1/_3\, N_0\, e\, 1$.

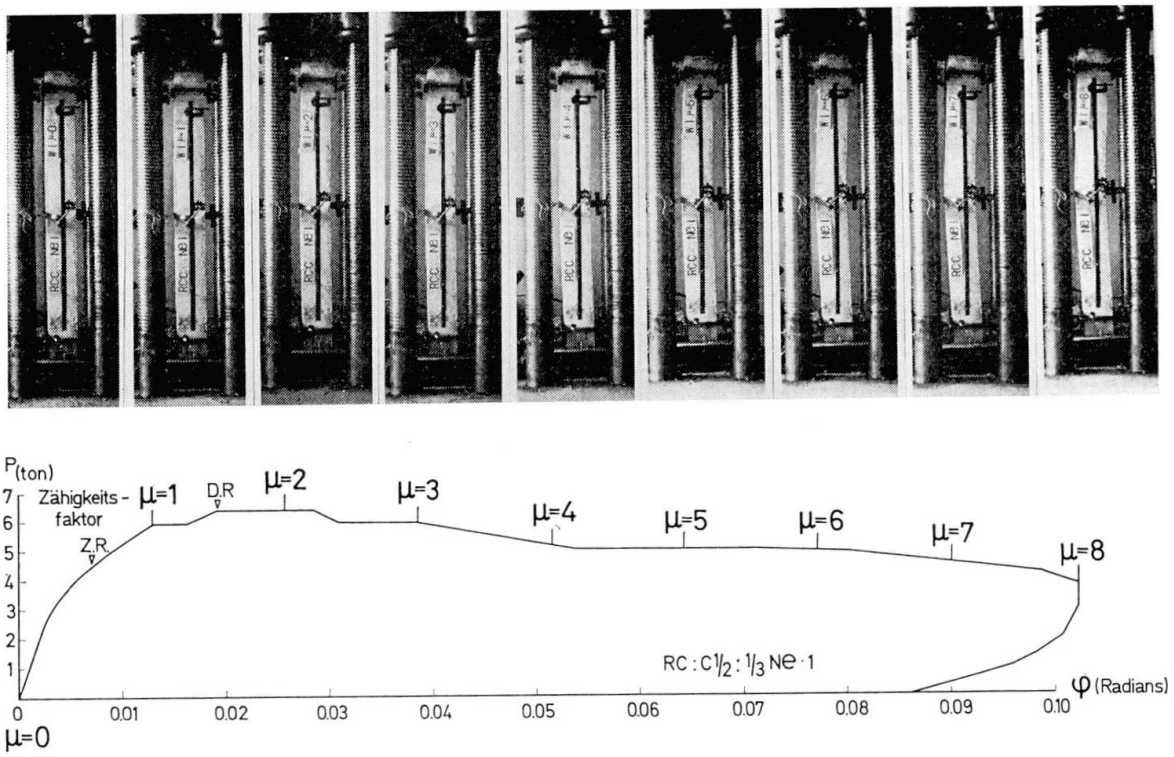


Fig. 19.

5.4. Überlegungen zu den Versuchsergebnissen

Die nach den Abschnitten 3 und 4 analytisch ermittelten Werte (gestrichelte Linien) stimmen mit den Versuchsergebnissen (ausgezogene Linien) für die Beziehung zwischen Querbelastung und Durchbiegung ziemlich gut überein. Sie entsprechen den Eigenschaften eines elasto-plastischen Verhaltens.

Nur die Versuchswerte aus der Querbelastung (Biegewiderstand) waren ziemlich größer als die entsprechenden theoretischen Werte. Möglicherweise wurde diese Vergrößerung durch den Reibungswiderstand der Kugelauflager

verursacht, deren Durchmesser ziemlich groß gewählt wurde, um die Einführung der großen Normalkraft N zu erleichtern und um den Drehmittelpunkt mit den Seitenbiegeauflagern gut übereinstimmen zu lassen. Darüber haben die Verfasser noch weitere Versuche mit kleinen Rollenauflagern und kleinem Reibungswiderstand durchgeführt. Darüber wird in einem späteren Aufsatz berichtet.

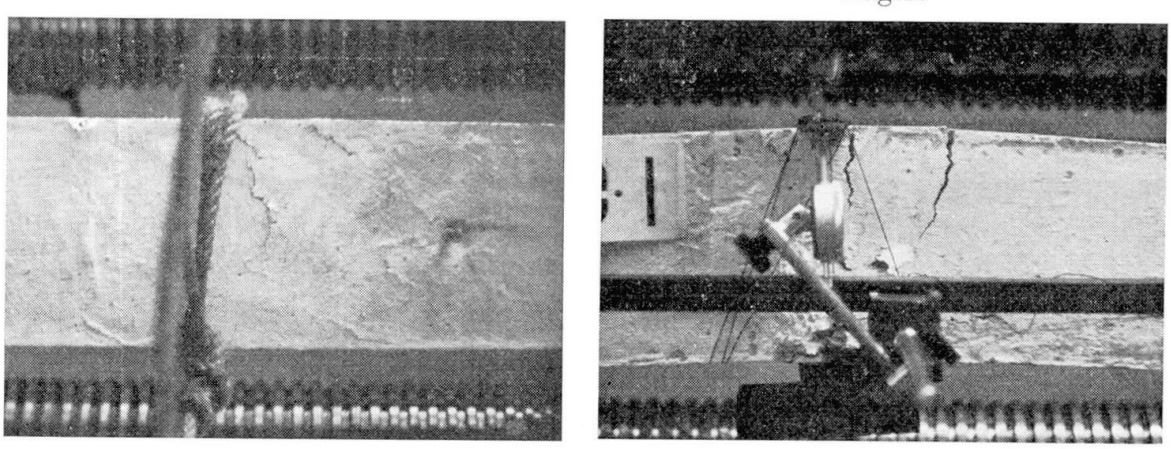


Fig. 20.

6. Schlußbemerkungen

Um die elasto-plastischen Biegeformänderungseigenschaften querbelasteter Stahlbetonsäulen unter konstanter Axialbelastung zu erklären, wurde zuerst gezeigt, daß der Zusammenhang zwischen Biegemoment M, Normalkraft N und Krümmung Φ eines Stahlbetonquerschnittes als räumliche Fläche (Fig. 6) (abhängig vom Parameter $\beta_s \mu$) im Koordinatensystem $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$, $\frac{N}{\sigma_p b d}$ und Φd dargestellt werden kann. Fig. 7 (a) zeigt die Projektion dieser Fläche auf die $\frac{M}{\sigma_p b d^2} - \frac{N}{\sigma_p b d}$-Ebene, Fig. 7 (b) zeigt die Projektion auf die $\frac{N}{\sigma_p b d}$-Φd-Ebene und Fig. 7 (c) zeigt die Projektion auf die $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$-Φd-Ebene. Für den Parameter $\beta_s \mu$ wurden Werte von 0,10 bis 0,50 gewählt. Das elasto-plastische Verhalten an den Spannungsgrenzpunkten (Fig. 4 und 5) ist besonders gut aus Fig. 7 (a) für beliebig kombinierte Belastungszustände M und N ersichtlich.

Mit der dadurch erhaltenen Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung ($\frac{M}{\sigma_p b d^2}$-Φd) wurde eine analytische Methode zur Berechnung der Beziehung zwischen Querbelastung und Durchbiegung entwickelt. Die Versuche wurden mit der in den Fig. 13 und 14 dargestellten Versuchseinrichtung durchgeführt. Es wurden vier Versuchsreihen mit den einseitigen Bewehrungsanteilen 0,50%, 1,04%, 1,57% und 2,22% geprüft. Jede Reihe wurde — entsprechend der Größe der wirkenden Normalkraft ($N = N_0$, $^2/_3 N_0$, $^1/_3 N_0$,

$^1/_6 N_0$, 0) — in fünf Gruppen unterteilt. Die Fig. 17 und 18 zeigen eine ziemlich gute Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit den analytischen Werten. Diese Figuren zeigen, daß die analytische Methode dem elastoplastischen Biegeverformungsvorgang ziemlich gut zu folgen vermag.

Aus der Beziehung zwischen $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ und Φd ist klar ersichtlich, daß eine Vergrößerung der Normalkraft und der Bewehrungsstärke die Drehfähigkeit plastischer Gelenke stark vermindert (s. Fig. 8). Diese Tatsache spielt eine wichtige Rolle bei der Bruchanalyse von Stahlbetonbauwerken, insbesondere bei der Anwendung des Traglastverfahrens *) ([1] bis [15]).

Diese Untersuchungen bilden die Grundlagen eines später erscheinenden Aufsatzes über wechselseitige Biegung unter Axiallast.

Für die freundlicherweise gelieferten Versuchsmaterialien sowie für die Unterstützung der Lehrstuhlangehörigen möchten die Verfasser der YAWATA Eisen & Stahl AG, Tokio, und der OSAKA-Zement AG, Osaka, ihren herzlichen Dank aussprechen.

Schrifttum

1. YAMADA, M.: Drehfähigkeit plastischer Gelenke in Stahlbetonbalken, Beton- und Stahlbetonbau, 53. Jahrg., H. 4, April 1958, S. 85/91.
2. YAMADA, M.: Verhalten plastischer Gelenke in Stahlbetonbalken, Vorbericht des 7. Kongresses der IVBH, Rio de Janeiro, Aug. 1964, S. 963/970.
3. YAMADA, M.: Verhalten plastischer Gelenke in Stahlbetonsäulen, Schlußbericht des 7. Kongresses der IVBH, Rio de Janeiro, 1966, S. 481/488.
4. BAKER, A. L. L., AMARAKONE, A. M. N.: Inelastic Hyperstatical Frames, Institution of Structural Engineers, London 1965; Hyperstatic Symposium of the European Concrete Committee, Ankara, Sept. 1964; A C I Symposium, Miami, Nov. 1964.
5. BACHMANN, H., THÜRLIMANN, B.: Versuche über das plastische Verhalten von zweifeldrigen Stahlbetonbalken, Serie A, Bericht Nr. 6203-1, Institut für Baustatik, ETH, Zürich, Juli 1965.
6. BORGES, J. F., OLIVEIRA, E. R. A.: Non-Linear Analysis of Reinforced Concrete Structures, Publ. I.A.B.S.E., Vol. 23, 1963, p. 51/70.
7. Comité Européen du Béton:
   Bulletin d'Information N° 21, 1960, Janvier, GUYON, Y.: p. 1/14, MACCHI, G.: p. 15/39.
   Bulletin d'Information N° 24, 1960, Juin, MOENAERT, P.: p. 23/43, SORETZ, S.: p. 62/78.
8. GRANHOLM, H.: A General Flexural Theory of Reinforced Concrete, with particular emphasis on the inelastic behavior of concrete and reinforcement, Almqvist & Wiksell, Stockholm und John Wiley & Sons, New York, 1965.

*) Die Fachwelt schenkt diesen Problemen allmählich große Beachtung. So wurde beispielsweise vom Comité Européen du Béton (CEB) ein spezieller Ausschuß zur Behandlung dieser Fragen gebildet. Kürzlich wurden einige Untersuchungen darüber veröffentlicht. In den USA ist das Traglastverfahren vor einiger Zeit — neben dem Stahlbau — auch im Stahlbetonbau in die Bestimmungen aufgenommen und praktisch angewandt [10] worden.

9. CHAMBAUD, R.: Le Calcul du Béton Arme a la Rupture, Eyrolles, Paris, 1965.
10. EVERARD, N. J., COHEN, E.: Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete Columns, ACI Committee 340, ACI, SP-7, 1964.
11. PFRANG, E. O., SIESS, C. P., SOZEN, M. A.: Load-Moment-Curvature Characteristics of Reinforced Concrete Cross Sections, ACI, Jul. 1964, p. 763/778.
12. PFRANG, E. O., SIESS, C. P.: Predicting Structural Behavior Analytically, ASCE, Oct. 1964, ST 5, p. 99/110.
13. PFRANG, E. O., SIESS, C. P.: Behavior of Restrained Reinforced Concrete Columns, ASCE, Oct. 1964, ST 5, p. 113/136.
14. MALDAGUE, J. C.: Essais de poutres en béton armé en phase plastique, Publication Préliminaire, A.I.P.C., Rio de Janeiro, 1964, p. 951/961.
15. SAILLARD, Y.: L'épuisement du béton armé en flexion simple, CEB 1955.

Zusammenfassung

Für den Stahlbetonrechteckquerschnitt wurde der Zusammenhang zwischen Biegemoment, Normalkraft und Krümmung analytisch ermittelt. Dieser Zusammenhang ist abhängig von den Festigkeitseigenschaften von Stahl und Beton, vom Armierungsgehalt und der geometrischen Lage der Bewehrung. Die analytisch gefundenen Momenten-Krümmungsbeziehungen wurden für die Berechnung der Durchbiegungen querbelasteter, axial gedrückter Stahlbetonsäulen verwendet. Die Berechnung zeigt ziemlich gute Übereinstimmung mit den Versuchsmessungen.

Summary

An analytical study has been made of the relationship between bending moment, normal force and curvature for a rectangular section of reinforced concrete. This relationship is dependent upon the strength characteristics of the steel and the concrete, and upon the steel content and the position of the reinforcement. The relationships found between the moments and the curvatures were used for calculating the deflections of reinforced concrete columns under lateral loading and subjected to an axial stress. The calculation shows remarkable agreement with the results of measurements.

Résumé

On a étudié analytiquement la relation entre moment de flexion, force normale et courbure pour une section rectangulaire de béton armé. Cette relation est fonction des propriétés de résistance de l'acier et du béton, de la teneur en acier et de la situation de l'armature. On a utilisé les relations trouvées entre les moments et les courbures pour le calcul des flèches de colonnes en béton armé chargées latéralement et soumises à un effort axial. Le calcul montre une concordance remarquable avec les résultats des mesures.