

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 28 (1968)  
  
**Artikel:** Elasto-plastische Biegeformänderungen der Stahlbetonsäulen und -  
balken: einseitige Biegung unter Axialast  
**Autor:** Yamada, M. / Kawamura, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-22177>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Elasto-plastische Biegeformänderungen der Stahlbetonsäulen und -balken (einseitige Biegung unter Axiallast)**

*Elasto-plastic Bending Deflections of Reinforced Concrete Columns and Beams  
(One Way Bending under Axial Force)*

*Déformations élasto-plastiques de flexion de colonnes et de poutres en béton armé  
(Flexion uniaxiale soumise à force axiale)*

M. YAMADA

Prof. Dr. Ing., Univ. Kobe, Japan

H. KAWAMURA

Dipl. Ing., Univ. Kobe, Japan

## **1. Einleitung**

Der Verfasser hat die plastische Formänderungsfähigkeit des Stahlbetons schon früher versuchsmäßig nachgewiesen und für die Berechnung eine Näherungsmethode entwickelt [1] [2] [3].

In diesem Aufsatz werden, um die elasto-plastischen Biegeformänderungseigenschaften der Stahlbetonsäulen noch genauer und ausführlicher zu erfassen, zuerst die verallgemeinerten Interaktionskurven (Interaction-Curve) zwischen Biegemoment und Normalkraft eines Stahlbetonquerschnittes dargestellt und die diesen Kurven entsprechenden Krümmungen erläutert. Es wird dadurch möglich, den elasto-plastischen Biegemoment-Krümmungszusammenhang unter beliebiger Normalkraft zu finden. Der Einfluß der Normalkraft und der Bewehrungsstärke  $\beta_s \mu \left( = \frac{s \sigma_{Fl.}}{\sigma_p} \mu \right)$  auf das Krümmungsverhalten ist daraus ersichtlich. Dieses Vorgehen ermöglicht die elasto-plastischen Durchbiegungen zu erfassen. Es wurde eine Reihe von Versuchen durchgeführt und die in der beschriebenen Weise analytisch ermittelten Werte mit den entsprechenden Versuchsmeßwerten verglichen.

## **2. Vorbemerkungen**

### *2.1. Annahmen*

Zur Vereinfachung werden folgende Annahmen getroffen:

1. Gültigkeit der Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte (Hypothese von Bernoulli-Navier). Streng genommen ist diese Hypothese für den Stahl-

betonquerschnitt unter höheren Spannungen nicht mehr zutreffend, da der Haftwiderstand zwischen Beton und Bewehrung teilweise verloren geht (Rißbildung). Wenn der Verformungszustand des Stahlbetons aber nicht örtlich an einzelnen Stellen, sondern durchschnittlich über eine größere Länge betrachtet wird, darf diese Annahme getroffen werden. Der Einfluß der Schubspannungen und den dadurch entstehenden Schubverformungen wird vernachlässigt. Spannungsverteilung und Dehnungs- (Stauchungs-) Verteilung werden gemäß Fig. 1 angenommen.

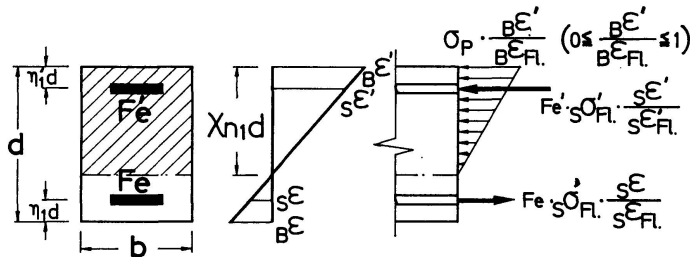


Fig. 1. Spannungs-Dehnungsverteilung im Stahlbetonquerschnitt.

2. Die Spannungs-Dehnungsbeziehung des Betons wird, die Fig. 2 zeigt, durch ein elasto-plastisches (bi-lineares) Verhalten vereinfacht. Als Betonfestigkeit des Querschnittes wird die Prismenfestigkeit — in diesem Fall mit  $\sigma_p \cong 200 \text{ kg/cm}^2$  — angenommen. Die übrigen Kenngrößen werden wie folgt angenommen:

$$\text{Betonfließstauchung } B\epsilon'_{FL} = 0,0015,$$

$$\text{Betonbruchstauchung } B\epsilon'_{Br} = 0,0040,$$

$$\text{Betontrenndehnung } B\epsilon_{Tr} = \frac{1}{10} B\epsilon'_{FL} = 0,00015,$$

$$\text{Betontrennfestigkeit (Betonzugfestigkeit) } B\sigma_{Tr} = \frac{1}{10} \sigma_p.$$

Der Betonzugwiderstand wird bis zum Erreichen der Betondehnung  $B\epsilon_{Tr} = 0,00015$  am Zugrand berücksichtigt und nachher vernachlässigt.

Fig. 2. Spannungs-Dehnungsverlauf des Betons.

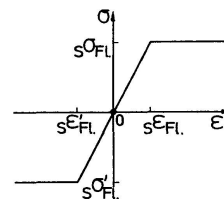
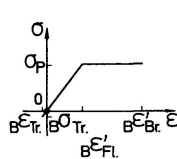


Fig. 3. Spannungs-Dehnungsverlauf des Stahls.

3. Der angenommene Spannungs-Dehnungsverlauf des Stahls verläuft ideal elasto-plastisch (Fig. 3). Als Zug- bzw. Druckfließspannung der Bewehrung werden  $s\sigma_{FL} = s\sigma'_{FL} \cong 3000 \text{ kg/cm}^2$  angenommen. Die Zug- bzw. Druckfließdehnungen betragen  $s\epsilon_{FL} = s\epsilon'_{FL} = 0,0015$ .

4. Als Bruchkriterium wird die Betonstauchung am Druckrand  $B\epsilon'_{Br} = 0,0040$  betrachtet. Eine Instabilität der Druckbewehrung vor dem Eintreten dieser Randstauchung wird ausgeschlossen. In diesem Aufsatz wird mit folgenden Werten für Lage und Größe der Bewehrung gerechnet:

Lage der Bewehrung  $\eta_1 = \eta/d = \eta'_1 = \eta'_1/d = 0,1$ ,

Bewehrungsstärke  $\beta_s \mu = \beta'_s \mu' = 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5$ .

## 2.2. Bezeichnungen (s. Fig. 1)

$d$	Höhe des Stahlbetonquerschnittes
$b$	Breite des Stahlbetonquerschnittes
$\eta = \eta_1 d$	Lage der Zugbewehrung
$\eta' = \eta'_1 d$	Lage der Druckbewehrung
$x_n = x_{n1} d$	Lage der Nulllinie
$F_e$	Zugbewehrungsfläche
$F'_e$	Druckbewehrungsfläche
$\mu = \frac{F_e}{b d}$	Zugbewehrungsanteil
$\mu' = \frac{F'_e}{b d}$	Druckbewehrungsanteil
$B^{\sigma D.} (= \sigma_p)$	Betondruckfestigkeit (Prismenfestigkeit)
$B^{\sigma Z.}$	Betonzugfestigkeit (Trennungsfestigkeit)
$S^{\sigma Fl.}$	Fließ- oder Streckspannung der Zugbewehrung
$S^{\sigma' Fl.}$	Fließ- oder Streckspannung der Druckbewehrung
$B^{\epsilon' Fl.}$	Betonfließstauchung
$B^{\epsilon' Br.}$	Betonbruchstauchung
$B^{\epsilon Tr.}$	Betontrenndehnung
$S^{\epsilon Fl.}$	Fließ- oder Streckdehnung der Zugbewehrung
$S^{\epsilon' Fl.}$	Fließ- oder Streckdehnung der Druckbewehrung
$B^{\epsilon}$	Betondehnung am Zugrand
$B^{\epsilon'}$	Betonstauchung am Druckrand
$S^{\epsilon}$	Dehnung der Zugbewehrung
$S^{\epsilon'}$	Stauchung der Druckbewehrung
$\beta_s \mu = \frac{S^{\sigma Fl.}}{\sigma_p} \mu$	Zugbewehrungsstärke
$\beta'_s \mu' = \frac{S^{\sigma' Fl.}}{\sigma_p} \mu'$	Druckbewehrungsstärke
$M$	Biegemoment um die Schwerachse des Querschnittes
$N$	Normalkraft (in Schwerachse wirkend)
$M_0$	Bruchmoment unter $N = 0$
$N_0$	Bruchnormalkraft unter $M = 0$
$\Phi \left( = \frac{1}{\rho} \right)$	Krümmung
$\varphi_{pl.} (= k d \Delta \Phi)$	Drehfähigkeit des plastischen Gelenkes

## 2.3. Spannungsgrenzpunkte

Am Druck- bzw. Zugrand des Betons und auf der Höhe der Druck- bzw. Zugbewehrung können bezüglich der Baustoffe folgende Spannungsgrenzpunkte unterschieden werden (s. Fig. 4):



$B_0, S_0, S'_0, B'_0$	Ursprungsstellen (Dehnungsnullpunkte)
$B_{Tr.}$	Trenndehnungsstelle des Betons am Zugrand
$B'_{Tr.}$	Trenndehnungsstelle des Betons am Druckrand
$B_{Fl.}$	Fließstauchungsstelle des Betons am Zugrand
$B'_{Fl.}$	Fließstauchungsstelle des Betons am Druckrand
$S_{Z. Fl.}$	Zugfließ- (Zugstreck-) Dehnungsstelle der Zugbewehrung auf der Zugseite
$S'_{Z. Fl.}$	Zugfließ- (Zugstreck-) Dehnungsstelle der Druckbewehrung auf der Druckseite
$S_{D. Fl.}$	Druckfließ- (Druckstreck-) Stauchungsstelle der Zugbewehrung auf der Zugseite
$S'_{D. Fl.}$	Druckfließ- (Druckstreck-) Stauchungsstelle der Druckbewehrung auf der Druckseite
$B'_{Br.}$	Druckbruchstauchungsstelle des Betons am Druckrand
$B_{1/3 Fl.}$	Die Stelle der Betonstauchung am Zugrand, bei der $1/3$ der Betonfließstauchung erreicht wird
$B'_{1/3 Fl.}$	Die Stelle der Betonstauchung am Druckrand, bei der $1/3$ der Betonfließstauchung erreicht wird
$B_{2/3 Fl.}$	Die Stelle der Betonstauchung am Zugrand, bei der $2/3$ der Betonfließstauchung erreicht wird
$B'_{2/3 Fl.}$	Die Stelle der Betonstauchung am Druckrand, bei der $2/3$ der Betonfließstauchung erreicht wird

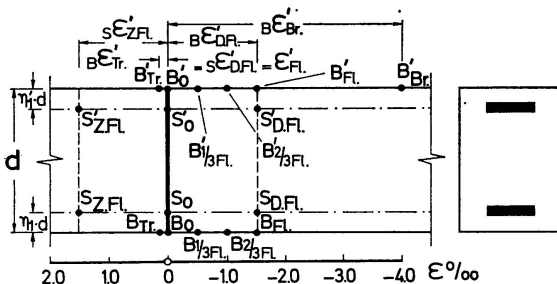


Fig. 4. Spannungsgrenzpunkte der Baustoffe in einem Stahlbetonquerschnitt.

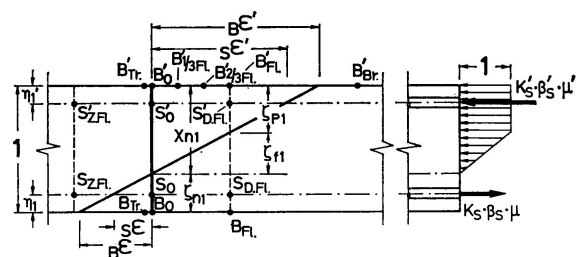


Fig. 5. Dehnungsverlauf, entsprechende Spannungsverteilung und Spannungsgrenzpunkte in einem Stahlbetonquerschnitt.

### 3. Beziehungen zwischen Biegemoment $M$ , Normalkraft $N$ und Krümmung $\Phi$

#### 3.1. Verallgemeinerte Interaktionsfläche zwischen $M$ , $N$ und $\Phi$

Um die verallgemeinerte Interaktionskurve zwischen Biegemoment  $M$  und Normalkraft  $N$  und die Beziehungen dieser Kurve zu den Krümmungen zu veranschaulichen, wurde in Fig. 5 an einem Stahlbetonquerschnitt eine beliebige Dehnungsverteilung angenommen. Die Spannungsgrenzpunkte sind ebenfalls aus Fig. 5 ersichtlich. Die Normalkraft  $N$  und das Biegemoment  $M$  sind

nun von der Krümmung  $\Phi$  abhängig. Für  $M$  und  $N$  ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\frac{N}{\sigma_p b d} = K'_s \beta'_s \mu' + K_s \beta_s \mu + K'_B \frac{1}{2} x_{n1} - K''_B \frac{1}{2} \zeta_{p1} - K_B \frac{1}{2} \zeta_{n1}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{\sigma_p b d^2} = & \left(\frac{1}{2} - \eta'_1\right) K'_s \beta'_s \mu' - \left(\frac{1}{2} - \eta_1\right) K_s \beta_s \mu + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} x_{n1}\right) K'_B \frac{1}{2} x_{n1} \\ & - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \zeta_{p1}\right) K''_B \frac{1}{2} \zeta_{p1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \zeta_{n1}\right) K_B \frac{1}{2} \zeta_{n1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Mit den Vorzeichen (+) für Stauchungen und (−) für Dehnungen.

Es bedeuten:

$$\zeta_{n1} = x_{n1} - 1, \quad (3)$$

$$\zeta_{p1} = x_{n1} - \frac{\epsilon_{Fl}}{\Phi d}, \quad (4)$$

Dehnungsverteilungen gültig  
in (s. Fig. 4):

$$\begin{aligned} K'_s = \frac{s\epsilon'}{s\epsilon'_{Fl}} = \frac{s\epsilon'}{\epsilon_{Fl}} = -1 & : \sim [S'_{Z.Fl.}], \\ & = \frac{1}{\epsilon_{Fl}} (x_{n1} - \eta'_1) \Phi d : [S'_{Z.Fl.}] \sim [S'_{D.Fl.}], \\ & = +1 : [S'_{D.Fl.}] \sim, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} K_s = \frac{s\epsilon'}{s\epsilon_{Fl}} = \frac{s\epsilon}{\epsilon_{Fl}} = -1 & : \sim [S_{Z.Fl.}], \\ & = \frac{1}{\epsilon_{Fl}} (x_{n1} - 1 + \eta_1) \Phi d : [S_{Z.Fl.}] \sim [S_{D.Fl.}], \\ & = +1 : [S_{D.Fl.}] \sim, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} K'_B = \frac{B\epsilon'}{B\epsilon_{Fl}} = \frac{B\epsilon'}{\epsilon_{Fl}} = 0 & : \sim [B'_0], \\ & = \frac{1}{\epsilon_{Fl}} x_{n1} \Phi d : [B'_0] \sim [B'_{Br.}], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} K_B = \frac{B\epsilon}{B\epsilon_{Fl}} = \frac{B\epsilon}{\epsilon_{Fl}} = 0^* & : \sim [B_0], \\ & = \frac{1}{\epsilon_{Fl}} (x_{n1} - 1) \Phi d : [B_0] \sim [B_{Fl.}], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\left( = -\frac{B\epsilon_{Tr.}}{\epsilon_{Fl}} = -0,1 \right) : [B_{Tr.}], \quad (8')$$

$$\begin{aligned} K''_B = K'_B - 1 & = 0 : \sim [B'_{Fl.}], \\ & = K'_B - 1 : [B'_{Fl.}] \sim [B'_{Br.}]. \end{aligned} \quad (9)$$

Die Krümmungen  $\Phi d$ , sowie Nulllinienverhältnis  $x_{n1}$  für den beliebigen Dehnungsverlauf zwischen zwei Spannungsgrenzpunkten, sind in der Tafel 1 zusammengestellt.

Tafel 1

Drehmittel- punkte des Dehnungs- verlaufes	Nulllinien- abstand $x_{n1}$	Krümmung $\Phi d$							
		$B'_0$	$S'_{Z.Fl.}$	$S'_{D.Fl.}$	$S_{Z.Fl.}$	$B_0$	$S_{D.Fl.}$	$B_{Fl.}$	$B'_{Br.}$
$B'_{Br.}$	$\frac{B'\epsilon_{Br.}}{\Phi d}$	$\infty$	$\frac{B'\epsilon_{Br.} + \epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{B'\epsilon_{Br.} - \epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{B'\epsilon_{Br.} + \epsilon_{Fl.}}{1 - \eta_1}$	$B'\epsilon_{Br.}$	$\frac{B'\epsilon_{Br.} - \epsilon_{Fl.}}{1 - \eta_1}$	$B'\epsilon_{Br.} - \epsilon_{Fl.}$	0
$B'_{Fl.}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d}$	$B'_0, B'_{Br.}$	$S'_{Z.Fl.}$	$S'_{Z.Fl.}$	$B_0$	$S'_{D.Fl.}, S_{D.Fl.}, B_{Fl.}$			
		$\infty$	$\frac{2\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{2\epsilon_{Fl.}}{1 - \eta_1}$	$\epsilon_{Fl.}$	0			
$B'_{\frac{2}{3}Fl.}$	$\frac{2\epsilon_{Fl.}}{3\Phi d}$	$B'_0, B'_{Br.}$	$S'_{Z.Fl.}$	$S'_{Z.Fl.}$	$B_0$	$B_{\frac{1}{3}Fl.}$			
		$\infty$	$\frac{\epsilon_{Fl.} + \frac{2}{3}\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.} + \frac{2}{3}\epsilon_{Fl.}}{1 - \eta_1}$	$\frac{2}{3}\epsilon_{Fl.}$	0			
$B'_{\frac{1}{3}Fl.}$	$\frac{1\epsilon_{Fl.}}{3\Phi d}$	$B'_0, B'_{Br.}$	$S'_{Z.Fl.}$	$S'_{Z.Fl.}$	$B_0$	$B_{\frac{1}{3}Fl.}$			
		$\infty$	$\frac{\epsilon_{Fl.} + \frac{1}{3}\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.} + \frac{1}{3}\epsilon_{Fl.}}{1 - \eta_1}$	$\frac{1}{3}\epsilon_{Fl.}$	0			
$B'_0$	0	$B'_{Fl.}, B'_{Br.}$	$S'_{Z.Fl.}$	$S'_{Z.Fl.}$	$B_0, S_0$				
		$\infty$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{1 - \eta_1}$	0				

$S'_0$	$\eta'_1$	$B'_{Br.}$	$B'_{Fl.}$	$B'_{1/3 Fl.}$	$B'_{1/3 Fl.}$	$B'_{1/3 Fl.}$	$S_{Z. Fl.}$	$B'_0, S'_0, B_0$		
		$\frac{B'_{Br.}}{\eta'_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{2}{3} \frac{\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{2}{3} \frac{\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{1}{3} \frac{\epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{1 - \eta'_1 - \eta_1}$	0		
$S'_{D. Fl.}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d} + \eta'_1$	$B'_{Br.}$	$S_{Z. Fl.}$	$B_0$			$B'_{Fl.}, S_{D. Fl.}, B_{Fl.}$			
		$\frac{B'_{Br.} - \epsilon_{Fl.}}{\eta'_1}$	$\frac{2 \epsilon_{Fl.}}{1 - \eta'_1 - \eta_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{1 - \eta'_1}$			0			
$S_{Z. Fl.}$	$1 - \eta_1 - \frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d}$	$B'_{Br.}$	$S'_{D. Fl.}$	$B'_{Fl.}$			$B'_{1/3 Fl.}$	$B'_0$	$S'_{Z. Fl.}$	
		$\frac{\epsilon_{Fl.} + B'_{Br.}}{1 - \eta_1}$	$\frac{2 \epsilon_{Fl.}}{1 - \eta'_1 - \eta_1}$	$\frac{2 \epsilon_{Fl.}}{1 - \eta_1}$			$\frac{\epsilon_{Fl.} + \frac{1}{3} \epsilon_{Fl.}}{1 - \eta_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{1 - \eta_1}$	0	
$S_0$	$1 - \eta_1$	$B'_{Br.}$	$S'_{D. Fl.}$	$B'_{Fl.}$			$B'_{1/3 Fl.}$	$B'_0, S'_0, B_0$		
		$\frac{B'_{Br.}}{1 - \eta_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{1 - \eta'_1 - \eta_1}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{1 - \eta_1}$			$\frac{\frac{1}{3} \epsilon_{Fl.}}{1 - \eta_1}$	0		
$B_0$	1	$B'_{Br.}$	$S'_{D. Fl.}$	$B'_{Fl.}$			$B'_{1/3 Fl.}$	$B'_0, S'_0, B_0$		
		$B'_{Br.}$	$\frac{\epsilon_{Fl.}}{1 - \eta'_1}$	$\epsilon_{Fl.}$			$\frac{2}{3} \frac{\epsilon_{Fl.}}{3}$	0		
$B_{Tr.}$	$1 - \frac{B'_{Tr.}}{\Phi d}$	$B'_{Br.}$	$S'_{D. Fl.}$	$B'_{Fl.}$			$B'_0$	$B'_{Tr.}$		
		$B'_{Br.} + B'_{Tr.}$	$\frac{\epsilon_{Fl.} + B'_{Tr.}}{1 - \eta'_1}$	$\epsilon_{Fl.} + B'_{Tr.}$			0			

Als Beispiel betrachten wir einen Fall, bei dem der Dehnungsverlauf durch den Spannungsgrenzpunkt  $[B'_{Br.}]$  geht, d. h. die Betonstauchung am Druckrand erreicht dabei gerade die Bruchstauchung  ${}_B\epsilon'_{Br.} = 0,004$ .

Wählt man nun den Wert  $\Phi d$  im Bereich  ${}_B\epsilon'_{Br.} \leq \Phi d \leq \frac{{}_B\epsilon'_{Br.} + \epsilon_{Fl.}}{1 - \eta_1}$ , so muß der Dehnungsverlauf durch den Drehmittelpunkt  $[B'_{Br.}]$  gehen und zwischen den Spannungsgrenzpunkten  $[S_{Z.Fl.}]$  und  $[B_0]$  liegen. Die Nulllinie ist angegeben durch  $x_{n1} = \frac{{}_B\epsilon'_{Br.}}{\Phi d}$ . Der Dehnungsverlauf liegt zwischen  $\overline{B'_{Br.} S_{Z.Fl.}}$  und  $\overline{B'_{Br.} B_0}$ .

Aus den Gleichungen (3) und (4) ergibt sich  $\zeta_{n1} = x_{n1} - 1$  und  $\zeta_{p1} = x_{n1} - \frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d}$ . Aus den Gleichungen (5) und (9) ergibt sich

$$K'_s = +1, \quad K_s = \frac{1}{\epsilon_{Fl.}} (x_{n1} - 1 + \eta_1) \Phi d, \quad K'_B = \frac{1}{\epsilon_{Fl.}} x_{n1} \Phi d, \quad K_B = 0$$

und 
$$K''_B = K'_B - 1 = \frac{1}{\epsilon_{Fl.}} x_{n1} \Phi d - 1.$$

Setzt man diese Beziehungen in die Gleichungen (1) und (2) ein, so ergibt sich das Biegemoment  $M$  und die Normalkraft  $N$  als Funktion der Krümmung im oben genannten Bereich:

$$\begin{aligned} \frac{N}{\sigma_p b d} &= \beta'_s \mu' + \frac{1}{\epsilon_{Fl.}} (x_{n1} - 1 + \eta_1) \Phi d \beta_s \mu + \frac{x_{n1} \Phi d}{\epsilon_{Fl.}} \frac{1}{2} x_{n1} \\ &\quad - \left( \frac{1}{\epsilon_{Fl.}} x_{n1} \Phi d - 1 \right) \frac{1}{2} \left( x_{n1} - \frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d} \right), \\ \frac{M}{\sigma_p b d^2} &= \left( \frac{1}{2} - \eta'_1 \right) \beta'_s \mu' - \left( \frac{1}{2} - \eta_1 \right) \frac{1}{\epsilon_{Fl.}} (x_{n1} - 1 + \eta_1) \Phi d \beta_s \mu \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} x_{n1} \right) \frac{1}{\epsilon_{Fl.}} x_{n1} \Phi d \frac{1}{2} x_{n1} \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left( x_{n1} - \frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d} \right) \right\} \left( \frac{1}{\epsilon_{Fl.}} x_{n1} \Phi d - 1 \right) \frac{1}{2} \left( x_{n1} - \frac{\epsilon_{Fl.}}{\Phi d} \right). \end{aligned}$$

Wenn man die Werte von  ${}_B\epsilon'_{Fl.}$ ,  ${}_B\epsilon'_{Br.}$ ,  $s\epsilon_{Fl.}$  und  $s\epsilon'_{Fl.}$  in diese Gleichungen einsetzt, dann sind das Biegemoment  $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$  und die Normalkraft  $\frac{N}{\sigma_p b d}$  des Stahlbetonquerschnittes nur von seinen Kennwerten  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\beta_s \mu$  und  $\beta'_s \mu'$  abhängig. Für gegebene Kennwerte  $\eta_1$ ,  $\eta'_1$ ,  $\beta_s \mu$  und  $\beta'_s \mu'$  ist der Zusammenhang zwischen Biegemoment  $M$ , Normalkraft  $N$  und Krümmung  $\Phi$  des Stahlbetonquerschnittes durch eine kontinuierliche räumliche Kurve im Kartesischen Koordinatensystem mit den Achsen  $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ ,  $\frac{N}{\sigma_p b d}$  und  $\Phi d$  gegeben.

Für alle andern Spannungsgrenzpunkte ergeben sich ähnliche Beziehungen. Im allgemeinen bilden das Biegemoment  $M$ , die Normalkraft  $N$  und die Krümmung  $\Phi$  eines Stahlbetonquerschnittes eine kontinuierliche räumlich

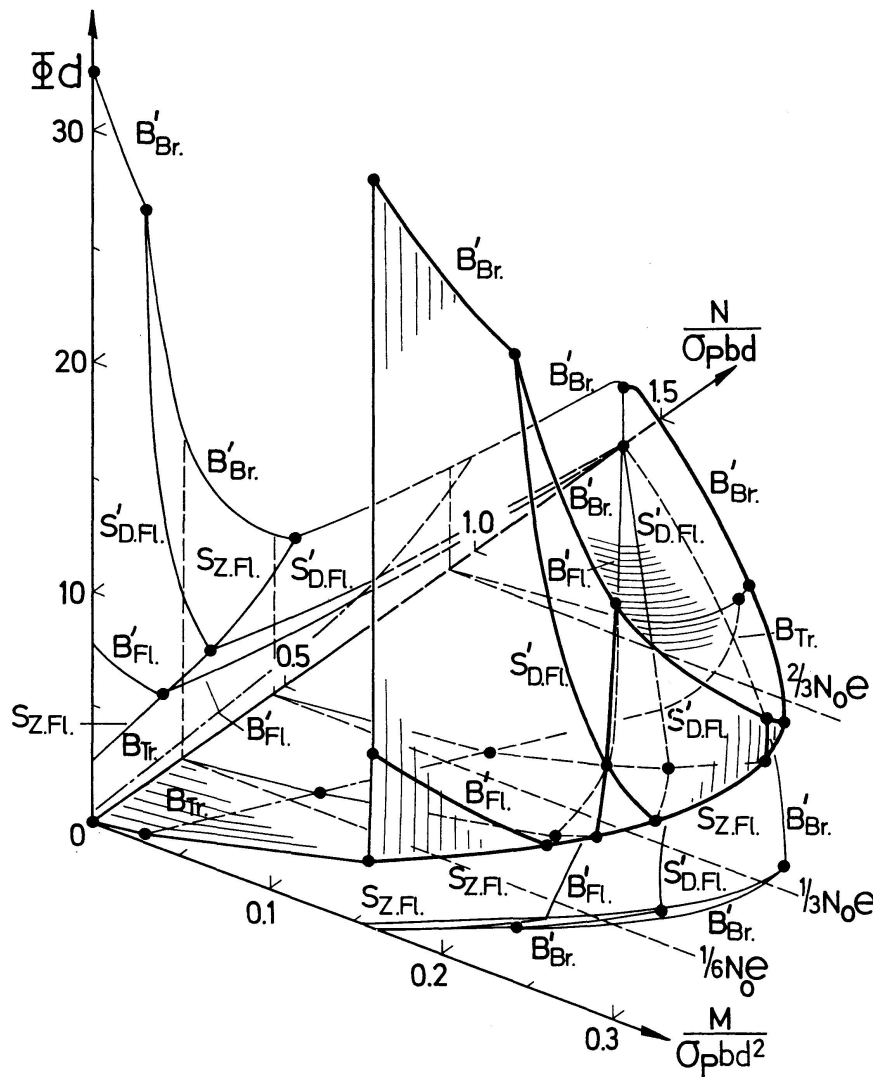


Fig. 6. Interaktionsfläche eines Stahlbetonquerschnittes im Koordinatensystem von Biegemoment, Normalkraft und Krümmung.

gekrümmte Fläche im Koordinatensystem mit den Achsen  $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ ,  $\frac{N}{\sigma_p b d}$  und  $\Phi d$  abhängig von den Kennwerten des Querschnittes  $\eta_1$ ,  $\eta'_1$ ,  $\beta_s \mu$  und  $\beta'_s \mu'$  (s. Fig. 6).

### 3.2. Beziehungen zwischen $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ und $\frac{N}{\sigma_p b d}$

Mit der obenerwähnten Methode können die Werte von  $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ ,  $\frac{N}{\sigma_p b d}$  und  $\Phi d$  an allen Spannungsgrenzpunkten berechnet werden. In Fig. 7 (a) sind diese Beziehungen zwischen  $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$  und  $\frac{N}{\sigma_p b d}$  dargestellt. Diese Kurven sind die Projektionen der oben beschriebenen räumlichen Kurven auf die Ebene mit den Koordinaten  $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$  und  $\frac{N}{\sigma_p b d}$ . Die in dieser Figur eingetragenen Kurvenbezeichnungen entsprechen dem als Drehmittelpunkt des Dehnungsverlaufes benutzten Spannungsgrenzpunkt (Fig. 4 und 5).

Fig. 7.1 (a). Beziehung zwischen Biegemoment  $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$  und Normalkraft  $\frac{N}{\sigma_p b d}$  (Interaktionskurve zwischen Biegemoment und Normalkraft) mit  $\beta_s \mu = 0,10$ .

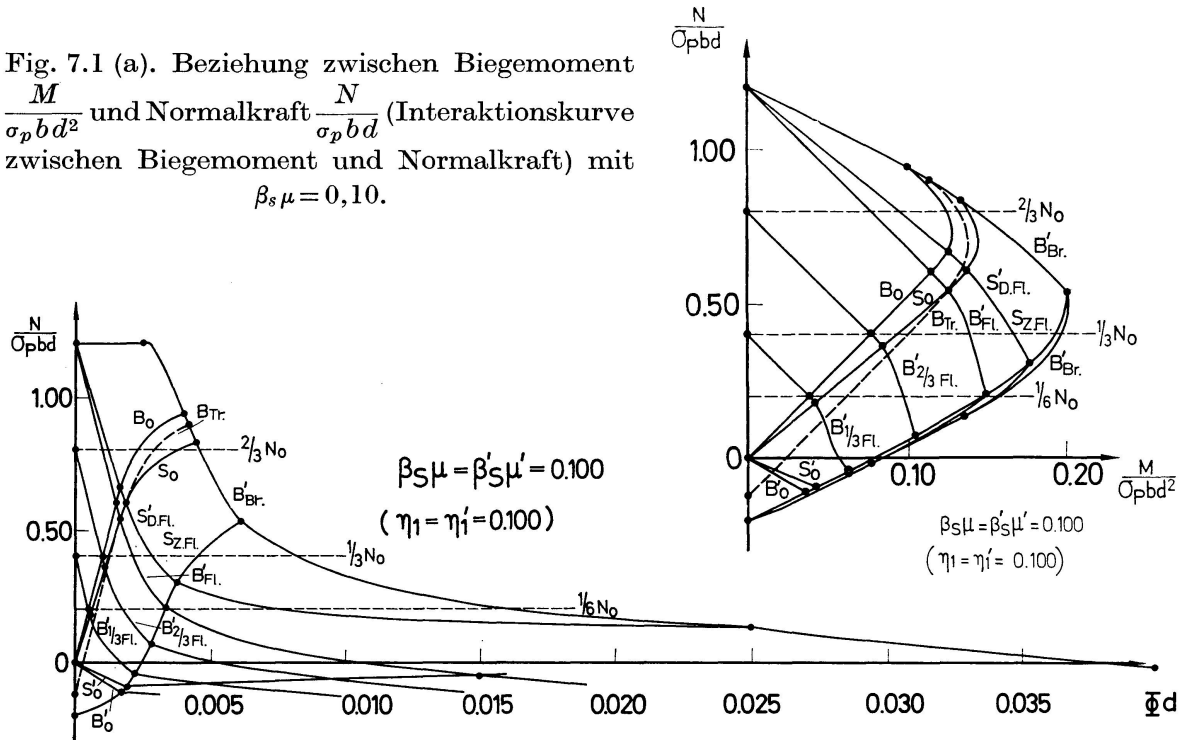


Fig. 7.1 (b). Beziehung zwischen Normalkraft  $\frac{N}{\sigma_p b d}$  und Krümmung  $\Phi d$  mit  $\beta_s \mu = 0,10$ .

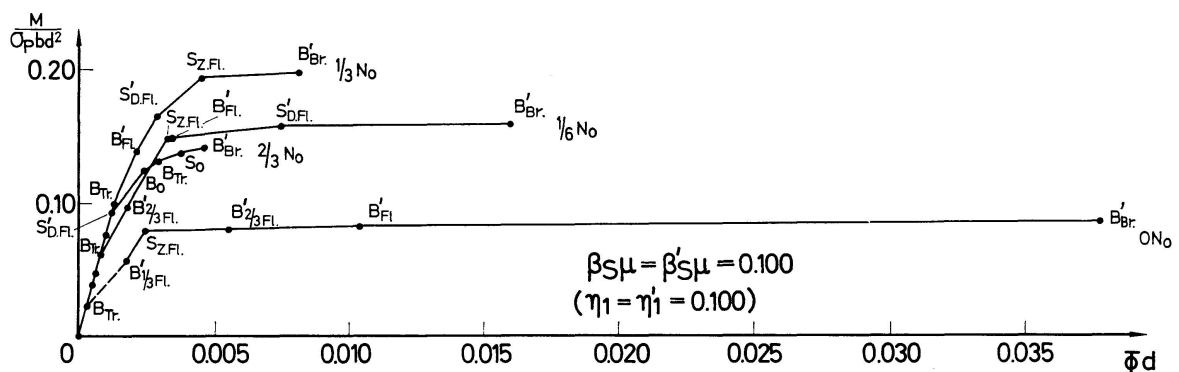
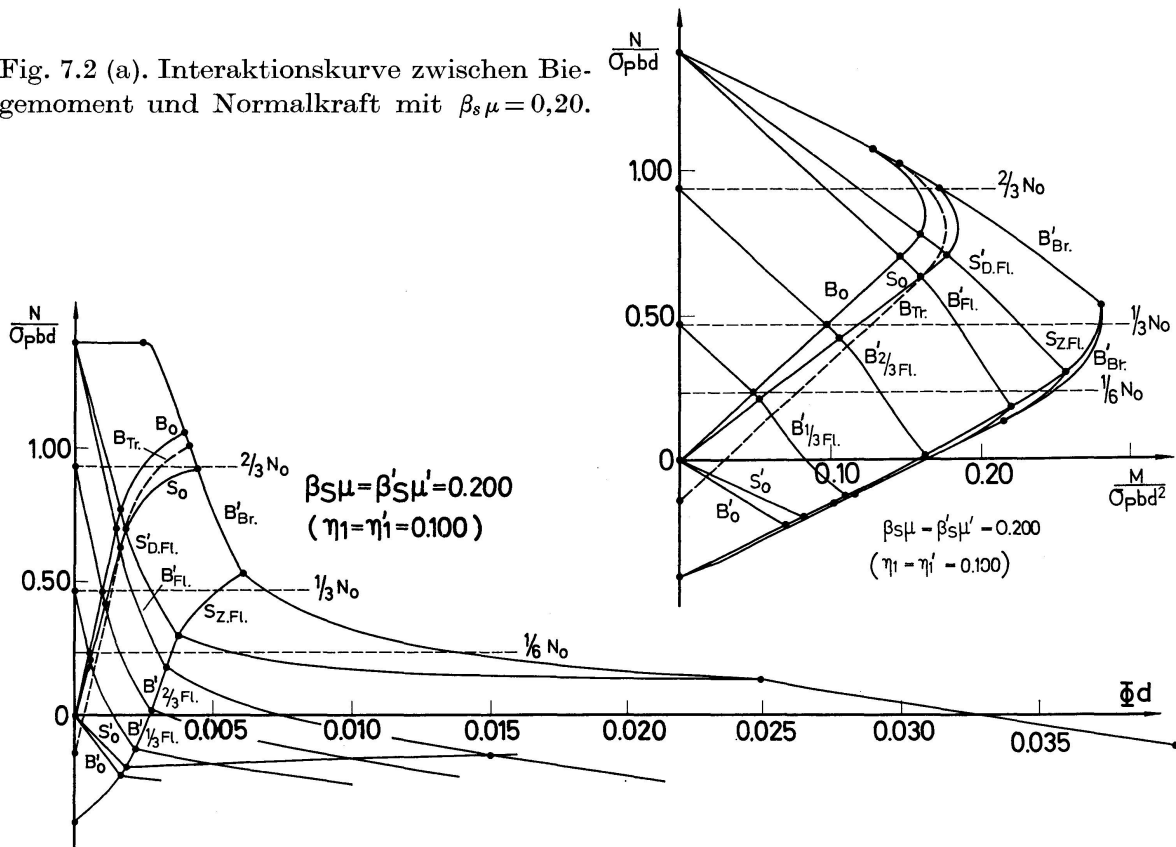
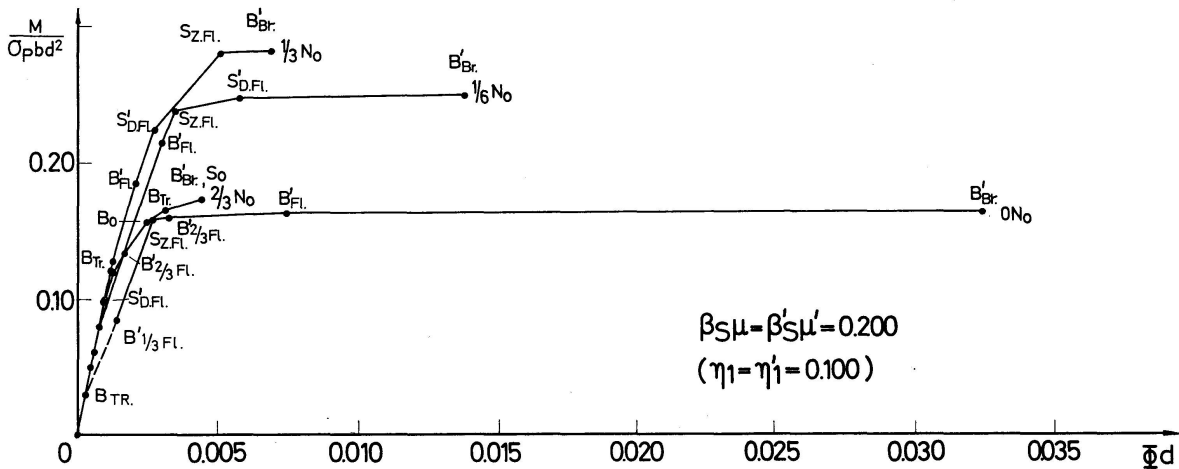


Fig. 7.1 (c). Beziehung zwischen Biegemoment  $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$  und Krümmung  $\Phi d$  mit  $\beta_s \mu = 0,10$ .

Die in der Figur mit gestrichelter Linie dargestellte  $B_{Tr}$ -Kurve zeigt den Zustand, bei dem der Betonzugwiderstand — wie in der Annahme (2) erläutert wurde — bis zur Dehnung  $B\epsilon_{Tr} = \frac{1}{10} B\epsilon'_{Fl} = 0,00015$  wirkend angenommen wird. Nach dem Erreichen des Betonzugtrennbruches wird der Betonzugwiderstand in diesem Aufsatz vernachlässigt. Der Kurvenverlauf wurde daher an diesem Punkt unterbrochen. Die geraden Linien  $\frac{1}{6}N_0$ ,  $\frac{1}{3}N_0$  und  $\frac{2}{3}N_0$  zeigen den Biegebelastungsvorgang unter der bestimmten Normalkraft  $\frac{1}{6}N_0$ ,  $\frac{1}{3}N_0$  und  $\frac{2}{3}N_0$ , wobei  $N_0$  die Bruchlast einer zentrisch gedrückten Stahlbetonsäule bedeutet.

Fig. 7.2 (a). Interaktionskurve zwischen Biegemoment und Normalkraft mit  $\beta_s \mu = 0,20$ .Fig. 7.2 (b). Beziehung zwischen Normalkraft und Krümmung mit  $\beta_s \mu = 0,20$ .Fig. 7.2 (c). Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung mit  $\beta_s \mu = 0,20$ .

### 3.3. Beziehung zwischen $\frac{N}{\sigma_p b d}$ und $\Phi d$

Die Beziehungen zwischen Normalkraft  $\frac{N}{\sigma_p b d}$  und Krümmung  $\Phi d$  werden in Fig. 7 (b) dargestellt. Diese Kurven sind die Projektionen der oben beschriebenen räumlichen Kurven auf die  $\frac{N}{\sigma_p b d} - \Phi d$ -Ebene. Auch hier entsprechen die Kurvenbezeichnungen den zugehörigen, als Drehmittelpunkte benutzten Spannungsgrenzkpunkten gemäß Fig. 4 und 5.



Fig. 7.3 (a). Interaktionskurve zwischen Biegemoment und Normalkraft mit  $\beta_s \mu = 0,30$ .

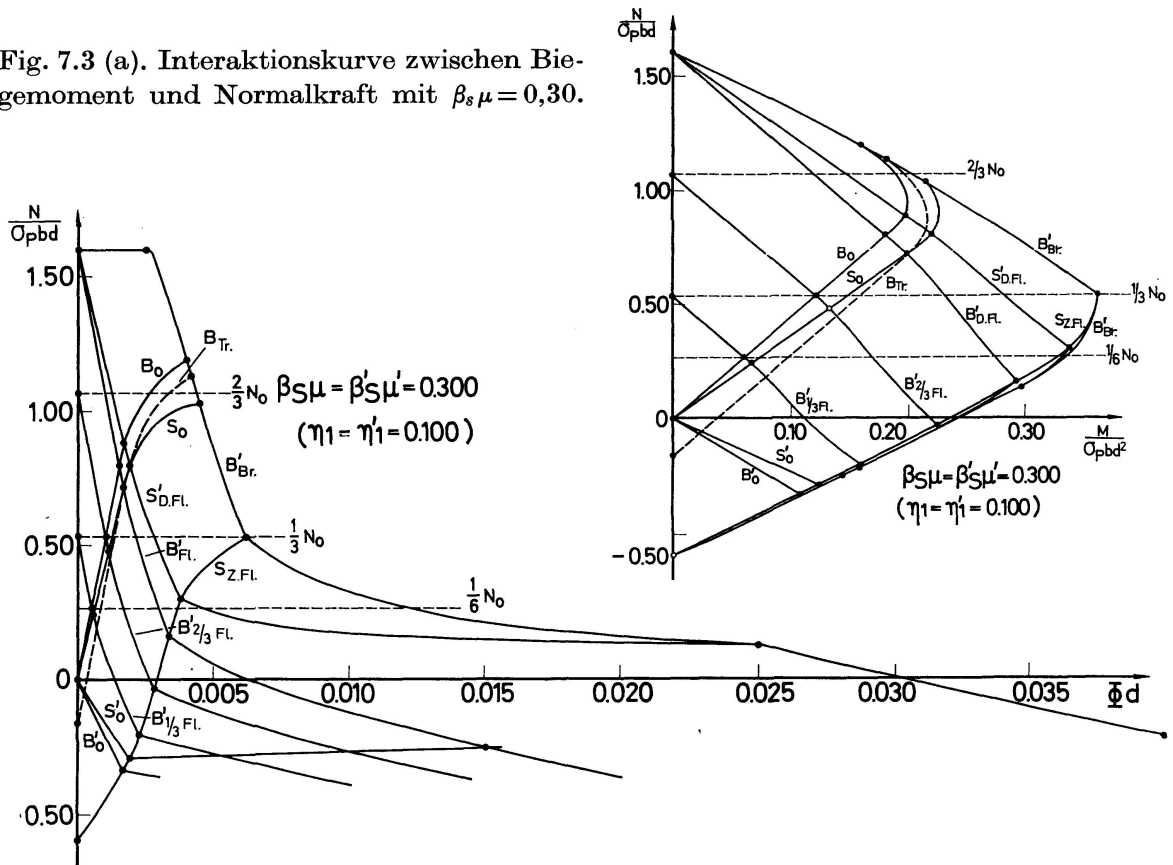


Fig. 7.3 (b). Beziehung zwischen Normalkraft und Krümmung mit  $\beta_s \mu = 0,30$ .

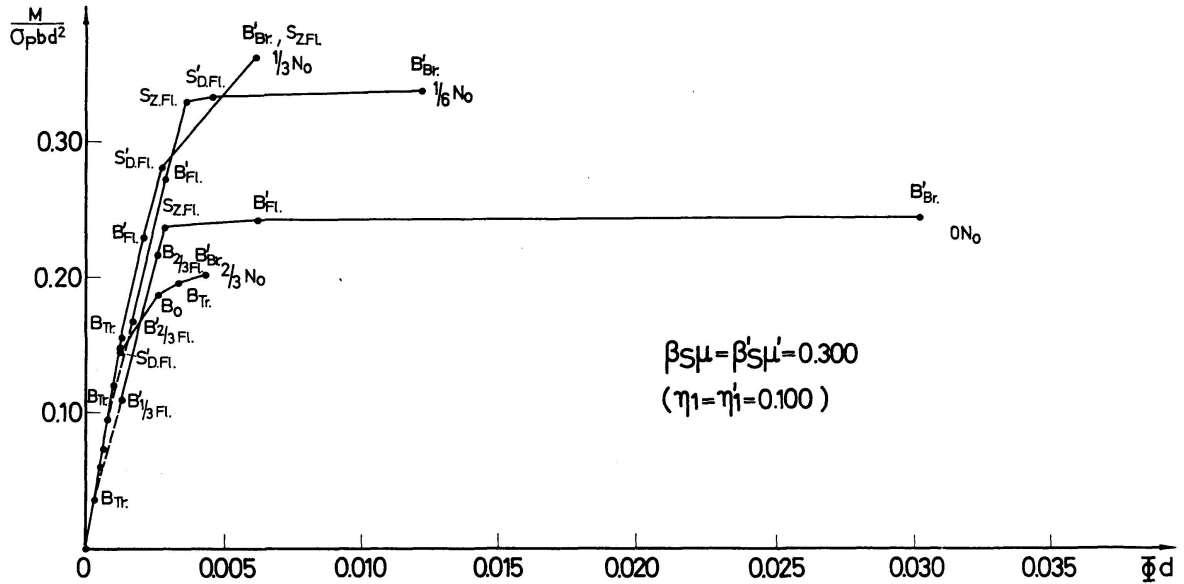


Fig. 7.3 (c). Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung mit  $\beta_s \mu = 0,30$ .

### 3.4. Beziehungen zwischen $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ und $\Phi d$

Aus den Werten von  $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$  in der beschriebenen Beziehung  $\frac{M}{\sigma_p b d^2} - \frac{N}{\sigma_p b d}$  und aus den Werten von  $\Phi d$  in der beschriebenen Beziehung  $\frac{N}{\sigma_p b d} - \Phi d$  wird

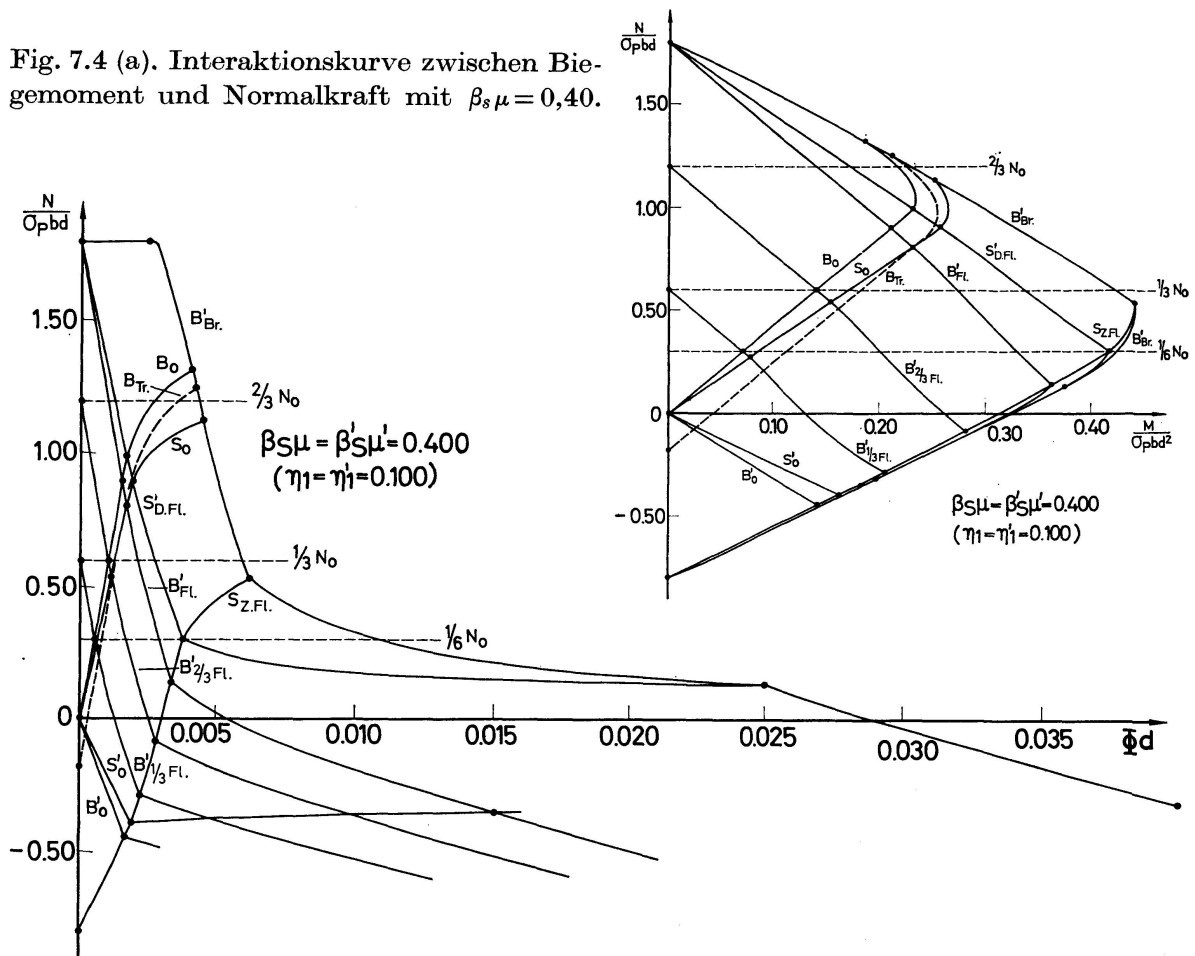
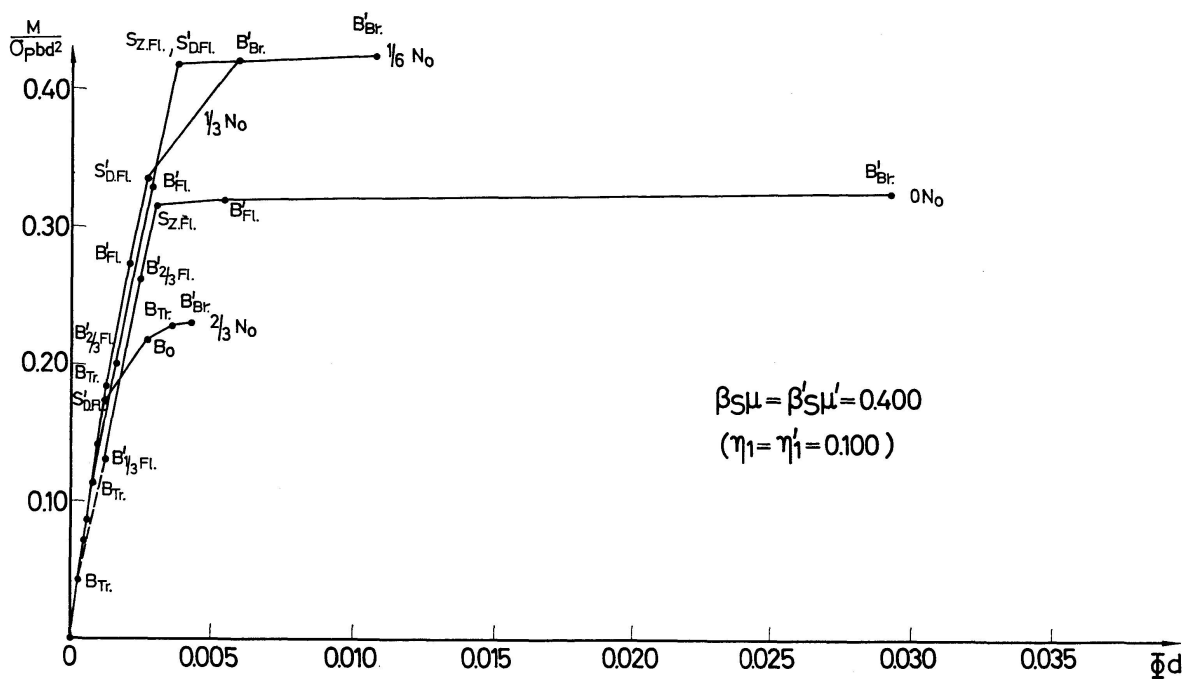
Fig. 7.4 (a). Interaktionskurve zwischen Biegemoment und Normalkraft mit  $\beta_s \mu = 0,40$ .Fig. 7.4 (b). Beziehung zwischen Normalkraft und Krümmung mit  $\beta_s \mu = 0,40$ .Fig. 7.4 (c). Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung mit  $\beta_s \mu = 0,40$ .

Fig. 7.5 (a). Interaktionskurve zwischen Biegemoment und Normalkraft mit  $\beta_s \mu = 0,50$ .

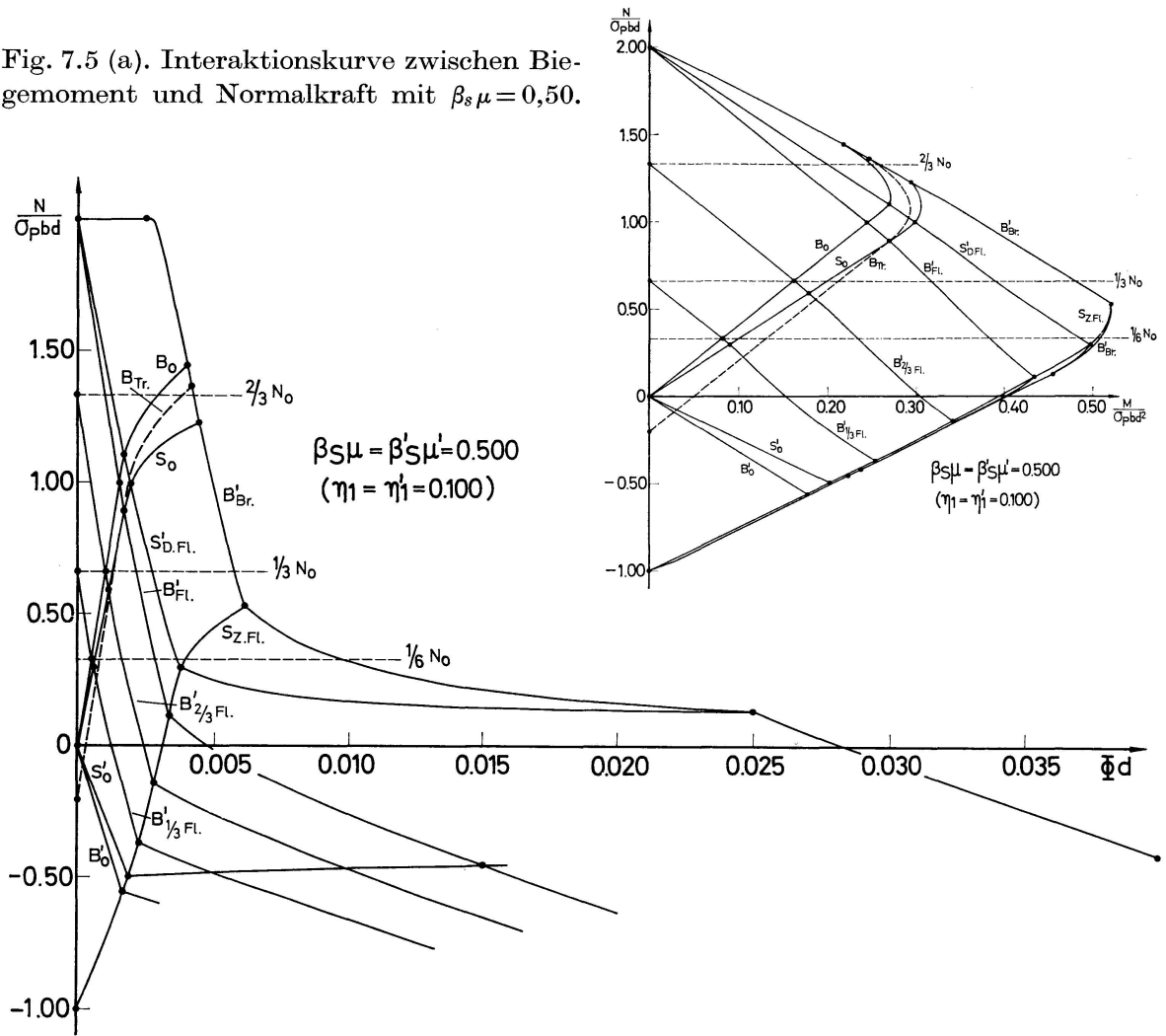


Fig. 7.5 (b). Beziehung zwischen Normalkraft und Krümmung mit  $\beta_s \mu = 0,50$ .

die Beziehung zwischen  $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$  und  $\Phi d$  unter der Bedingung  $\frac{N}{\sigma_p b d} = \text{konst.}$  ( $N = 0, 1/6 N_0, 1/3 N_0, 2/3 N_0$ ) abgeleitet und in Fig. 7 (c) dargestellt.

Die Beziehungen der einzelnen Punkte in dieser Figur weisen darauf hin, daß der Dehnungsverlauf durch den entsprechenden Spannungsgrenzpunkt geht. Beispielsweise erreicht die Betondehnung am Zugrand im Punkt  $[B_{Tr.}]$  den Wert  $B\epsilon_{Tr.} = 0,00015$  (Zugtrennbruch), im Punkt  $[S_{Z, Fl.}]$  erreicht die Zugbewehrung den Fließbeginn  $s\epsilon_{Fl.} = 0,0015$ , im Punkt  $[S'_{D, Fl.}]$  beginnt die Druckbewehrung zu fließen  $s'\epsilon_{Fl.} = 0,0015$  und im Punkt  $[B'_{Br.}]$  wird die Bruchstauchung des Betons  $B\epsilon'_{Br.} = 0,004$  (Zerstörung des Stahlbetonquerschnittes) erreicht.

Die gestrichelte Linie zwischen  $[B_{Tr.}]$  und  $[B'_{Fl. 1/3}]$  zeigt das Vorhandensein einer Unstetigkeit im Krümmungsverhalten zwischen vor und nach der Entstehung des Zugrisses im Punkt  $[B_{Tr.}]$ . Darauf wird im nächsten Abschnitt noch näher eingetreten.

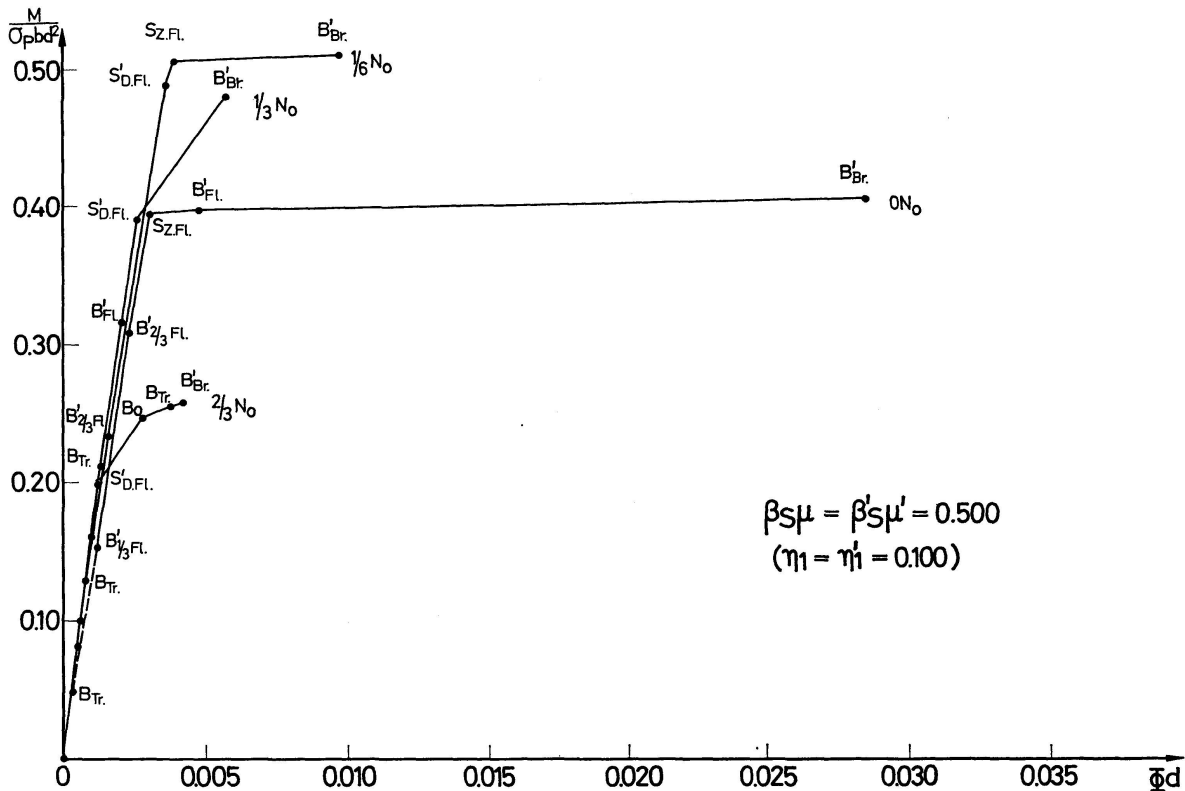


Fig. 7.5 (c). Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung mit  $\beta_s \mu = 0,50$ .

### 3.5. Betrachtungen über die Beziehungen zwischen $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ , $\frac{N}{\sigma_p b d}$ und $\Phi d$

Aus eingehenden Untersuchungen an den in den Fig. 7 (a, b, c) dargestellten Projektionen der räumlichen Flächen (Funktionen von  $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ ,  $\frac{N}{\sigma_p b d}$  und  $\Phi d$ ) sind die Biegemoment-Krümmungseigenschaften eines Stahlbetonquerschnittes und die darauf wirkenden Einflüsse von Normalkraft und Bewehrungsstärke  $\beta_s \mu$  klar ersichtlich. Die infolge des Belastungsprozesses auftretenden Formänderungen des Stahlbetonquerschnittes können ausführlich verfolgt werden:

1. Das Bruchmoment  $[B'_{Br.}]$  unter einer bestimmten Normalkraft vergrößert sich ungefähr proportional zur Vergrößerung des Wertes der Bewehrungsstärke  $\beta_s \mu$ . Im Fall der symmetrischen Bewehrung wird das maximale Bruchmoment — unabhängig von  $\beta_s \mu$  — unter der Normalkraft  $\frac{N}{\sigma_p b d} \cong 0,5$  (s. Fig. 7 (a)) erreicht.

2. Die Krümmung im Bruchzustand  $B'_{Br.}$  bei einer bestimmten Bewehrungsstärke  $\beta_s \mu$  vermindert sich bei Vergrößerung der Normalkraft sehr stark (s. Fig. 7 (b) und 7 (c)).

3. Der Biegemoment-Krümmungsverlauf wendet sich stark im Punkt  $[S_{Z. FL.}]$ , d. h. beim Erreichen der Fließspannung in der Zugbewehrung. Dabei entsteht ein plastisches Gelenk (s. Fig. 7 (c)). Die Krümmungsdifferenz  $\Delta \Phi = (\Phi_{B'_{Br.}} -$

$\Phi_{S_{Z.Fl.}}$ ) zwischen der Krümmung  $\Phi_{S_{Z.Fl.}}$  im Punkt  $[S_{Z.Fl.}]$  (Fließbeginn der Zugbewehrung) und der Krümmung  $\Phi_{B'_{Br.}}$  im Punkt  $[B'_{Br.}]$  (Zerstörung des Betons am Druckrand), vermindert sich mit zunehmender Normalkraft sehr stark. Unter der Axiallast  $\frac{N}{\sigma_p b d} \cong 0,5$ , d. h. im Schnittpunkt der  $[B'_{Br.}]$ -Kurve (Bedingung der Zerstörung des Betons am Druckrand) und der  $[S_{Z.Fl.}]$ -Kurve (Bedingung für Fließbeginn der Zugbewehrung) wird diese Differenz  $\Delta\Phi$  Null (s. Fig. 7(a)). Für eine über diesem Wert liegende Axiallast entsteht kein plastisches Gelenk im obenerwähnten Sinn mehr, da der Betonbruch vor dem Fließen der Zugbewehrung eintritt.

Für  $\frac{N}{\sigma_p b d} > 0,5$  wird der Krümmungszuwachs im Punkt  $[S'_{D.Fl.}]$  (Fließbeginn der Druckbewehrung) etwas vergrößert; man spricht daher vom Entstehen eines pseudo-plastischen Gelenkes (s. Fig. 7(c)). Unter konstanter Normalkraft  $N/N_0$  ist eine starke Verminderung der Krümmung mit zunehmender Bewehrungsstärke  $\beta_s \mu$  feststellbar. Die Beziehung zwischen dem Wert  $\Delta\Phi d = (\Phi_{B'_{Br.}} - \Phi_{S_{Z.Fl.}})$  und der Bewehrungsstärke  $\beta_s \mu$  ist in Funktion des Parameters  $N/N_0$  aus Fig. 8 ersichtlich.

4. Den Drehwinkel, den ein Stahlbetonstab infolge der Bildung eines plastischen Gelenkes erhält, kann man näherungsweise durch das Produkt des Wertes  $\Delta\Phi$  mit der Länge des Gelenkbereiches darstellen. Wenn für die Länge des Gelenkbereiches der Wert der Stabhöhe  $d$  angenommen wird, zeigt der Wert  $\Delta\Phi d$  in Fig. 8 direkt den Drehwinkel des plastischen Gelenkes des Stahlbetonstabes. Nach den bisherigen Versuchsergebnissen fließt die Zugbewehrung nicht immer gleichmäßig über die ganze Länge des Gelenkbereiches, sondern nur örtlich, auf eine begrenzte kleinere Länge konzentriert. Für die Umrechnung dieser konzentrierten Fließdehnung in eine über eine bestimmte Länge verteilte mittlere Dehnung wurde die Länge des Gelenkbereiches (oder die imaginäre Fließlänge der Zugbewehrung) gleich wie in den bisherigen Aufsätzen [1] [2] [3] angenommen. Der sich daraus ergebende Drehwinkel  $k \Delta\Phi d$  des Stahlbetonstabes ist in Fig. 8 durch gestrichelte Linien dargestellt.

## 4. Beziehungen zwischen Lasten und Durchbiegungen

### 4.1. Vorbemerkungen zur Analyse

Die Beziehung zwischen einer Querbelastung  $P$  und der Durchbiegung  $\delta$  eines einfach gelagerten Stahlbetonstabes unter konstanter Normalkraft  $N$  (Fig. 9) kann nach der Theorie zweiter Ordnung mittels der oben beschriebenen Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung abgeleitet werden.

Zuerst wird die Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung durch einen Streckenzug (Fig. 10) angenähert. Für jede Stufe besteht zwischen Biegemoment und Krümmung ein linearer Zusammenhang. Auf der letzten Stufe

entsteht ein plastisches Gelenk, wobei angenommen wird, daß sich die Krümmung unter dem konstanten Biegemoment  $M_u$  um  $\Delta\Phi$  vergrößert.

Ferner wird vorausgesetzt, daß die Differentialgleichung der Durchbiegungskurve ebenfalls linear ist und daß vor der Bildung eines plastischen Gelenkes der Krümmungsradius der Stabachse mit dem Krümmungsradius der Nullinie übereinstimmt. Durchbiegungskurve sowie Neigung und Krümmung der Durchbiegungskurve sollen kontinuierlich verlaufen.

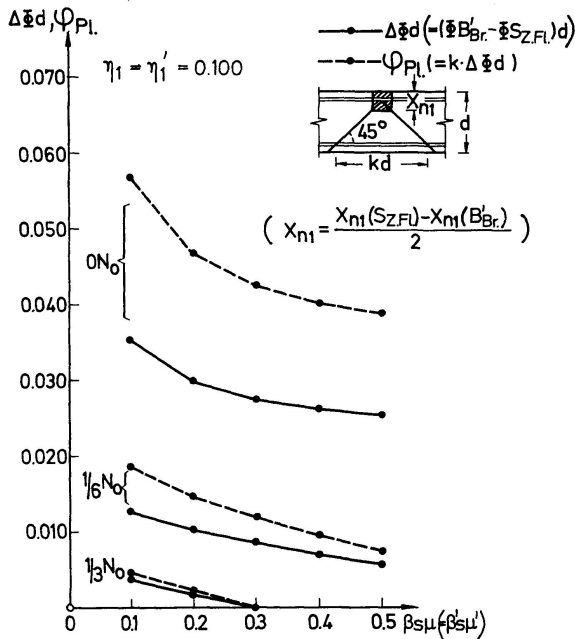


Fig. 8. Beziehung zwischen plastischem Drehwinkel und Bewehrungsstärke  $\beta_s \mu$ .

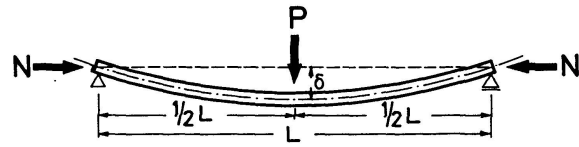


Fig. 9. Querbelteter Stahlbetonstab unter Normalkraft  $N$ .

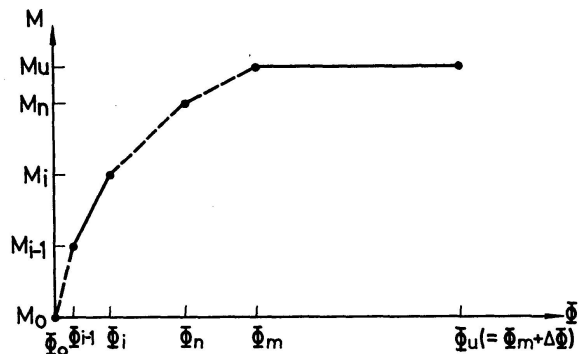


Fig. 10. Angenäherter Biegemoment-Krümmungsverlauf.

Nach der Entstehung des plastischen Gelenkes dreht sich der Gelenkbereich um

$$\varphi_{pl.} = l_z \Delta\Phi, \quad (10)$$

wobei  $l_z$  die Länge der Zugbewehrung im Gelenkbereich (s. Fig. 8) bedeutet.

#### 4.2. Verfahren für die Berechnung der Durchbiegung

In Fig. 11 ist die Belastungsanordnung des Stahlbetonstabes dargestellt. Im Punkt  $[n]$  (Stabmitte) wirkt die Querbeltung  $P_n$ ; das Moment in diesem Punkt beträgt  $M_n$ . Das Moment  $M_i$  im beliebigen Punkt  $[i]$  ist kleiner als  $M_n$ ; das folgende Moment  $M_{i-1}$  im benachbarten Punkt  $[i-1]$  ist kleiner als  $M_i$ .

Die Differentialgleichung der Durchbiegungskurve zwischen den Punkten  $[i]$  und  $[i-1]$  ergibt sich zu

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -a_i \left( N y + \frac{P_n x}{2} \right) + b_i, \quad (11)$$

darin bedeuten

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i,$$

$$y_{i-1} \leq y \leq y_i$$

und

$$a_i, b_i > 0.$$

Mit

$$k_i^2 = a_i N \quad (12)$$

erhält man

$$\Phi = A_i \sin(k_i x + B_i) \quad (13)$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_i}{k_i} \cos(k_i x + B_i) - \frac{P_n}{2N}. \quad (14)$$

$A_i$  und  $B_i$  sind Integrationskonstanten.

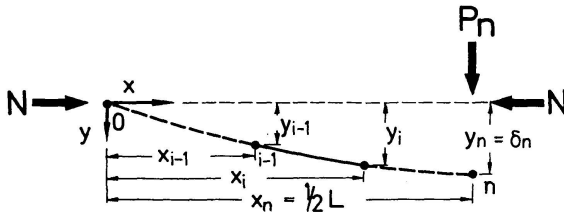


Fig. 11. Durchbiegungskurve.

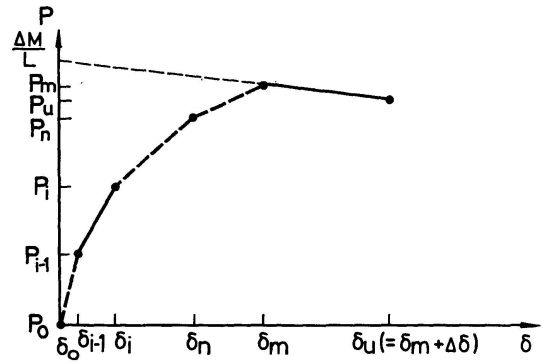


Fig. 12. Beziehung zwischen Querlast  $P$  und Durchbiegung  $\delta$ .

Wenn die Funktionen für  $\Phi$  und  $\frac{dy}{dx}$  an den Stellen  $[0]$ ,  $[i-1]$  und  $[n]$  kontinuierlich verlaufen, ergeben sich folgende Kompatibilitätsbedingungen:

An der Stelle 0:  $x_0 = y_0 = 0, \quad M_0 = 0, \quad \Phi_0 = 0$

und für  $A_1 \neq 0$  muß

$$B_1 = 0 \text{ sein.} \quad (15)$$

An der Stelle  $[i-1]$  gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_{i-1} &= A_{i-1} \sin(k_{i-1} x_{i-1} + B_{i-1}) \\ &= A_i \sin(k_i x_{i-1} + B_i), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_{i-1}} &= \frac{A_{i-1}}{k_{i-1}} \cos(k_{i-1} x_{i-1} + B_{i-1}) - \frac{P_n}{2N} \\ &= \frac{A_i}{k_i} \cos(k_i x_{i-1} + B_i) - \frac{P_n}{2N}. \end{aligned} \quad (17)$$

An der Stelle  $[n]$  gilt:

$$\Phi_n = A_n \sin(k_n x_n + B_n), \quad (18)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_n} = \frac{A_n}{k_n} \cos(k_n x_n + B_n) - \frac{P_n}{2N} = 0, \quad (19)$$

wobei

$$x_n = \frac{L}{2}.$$

Zuerst wird die Annahme für  $P_n$  getroffen. Damit können die oben abgeleiteten Gleichungen auf iterativem Weg gelöst werden, wobei ein Näherungswert für  $P_n$  gewonnen wird. Wenn dieser Wert  $P_n$  in die Gleichung

$$M_n = N y_n + \frac{P_n}{2} \frac{L}{2}. \quad (20)$$

eingesetzt wird, erhält man  $y_n$ , d. h.  $\delta_n$ . Führt man diese Berechnung mit  $n$  von 1 bis  $m$  weiter, so erhält man die Beziehung zwischen  $P$  und  $\delta$  bis zum Entstehen des plastischen Gelenkes.

Nach der Entstehung des plastischen Gelenkes ergibt sich der Zuwachs  $\Delta \delta$  der Durchbiegung zu

$$\Delta \delta = \frac{L}{2} \frac{\varphi_{pl.}}{2} = \frac{L}{2} \frac{l_z \Delta \Phi}{2}. \quad (21)$$

Also wird 
$$\delta_u = \delta_m + \Delta \delta \quad (22)$$

und  $P_u$  aus 
$$M_u = N \delta_u + \frac{P_u}{2} \frac{L}{2}. \quad (23)$$

Mit der beschriebenen Methode erhält man die Beziehung zwischen  $P$  und  $\delta$  (Fig. 12).

## 5. Versuche

### 5.1. Versuchsmethoden

Die Versuche wurden mit einer in die Prüfmaschine eingebauten Belastungseinrichtung (Fig. 13 und 14) durchgeführt.

Die Querbelastung  $P$  wird von einer Ölpresse mit elektrischer Meßdose aufgebracht; die von der Prüfmaschine erzeugte Axiallast  $X N_0$  wird konstant gehalten. Die Messung der axialen Verkürzung  $\delta_2$  und der Durchbiegung  $\delta_1$  erfolgte mit Meßuhren. Die Verteilung der Dehnungen und Stauchungen wurde in Säulenmitte durch nebeneinander angeordnete Dehnungsmeßstreifen (Meßlänge 65 mm) gemessen. Diese Dehnungsmeßstreifen wurden, unmittelbar unter der Last  $P$ , auf der Seitenoberfläche angebracht. Es wurde große Sorgfalt auf die Ölkontrolle der Hauptprüfmaschine verwendet, um die Axialkraft  $X N_0$  stets konstant zu halten.

### 5.2. Versuchskörper und Versuchsreihe

Der Querschnitt der Versuchssäulen betrug  $16 \times 16$  cm bei einer Länge von 160 cm (Spannweite  $2 \times 70$  cm). Fig. 15 zeigt eine Versuchssäule mit der entsprechenden Bewehrungsanordnung. Die Versuchsreihen sind in Tafel 2 zusammengestellt.



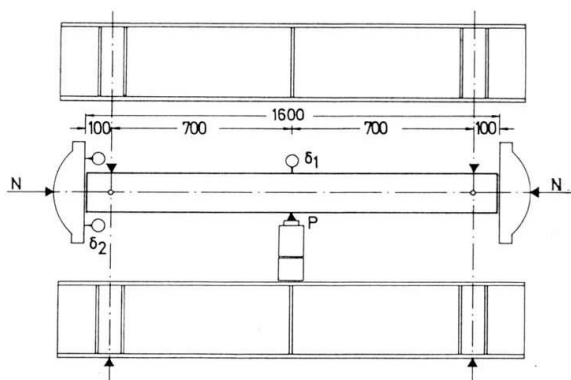


Fig. 13. Versuchseinrichtung.

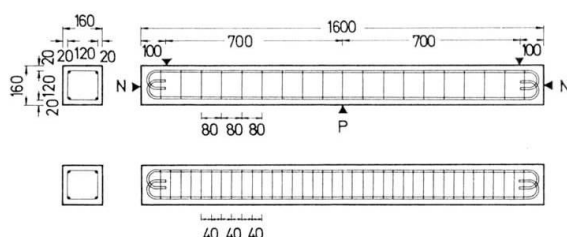


Fig. 15. Versuchssäulen.

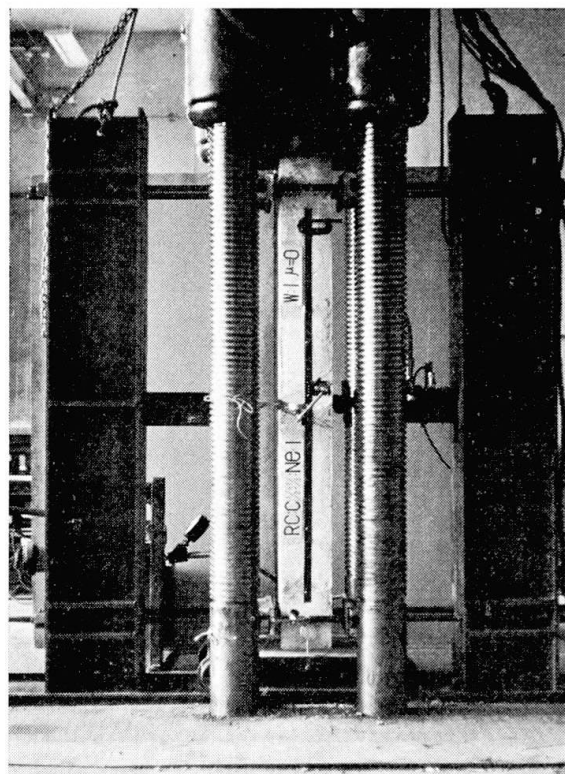


Fig. 14. Versuchseinrichtung (Photo).

Diese Versuchsreihen wurden entsprechend ihrem Bewehrungsanteil  $\mu$  in vier Reihen unterteilt:  $C^{1/2}$  ( $\mu = 0,50\%$ ),  $C^1$  ( $\mu = 1,04\%$ ),  $C^{3/2}$  ( $\mu = 1,57\%$ ) und  $C^2$  ( $\mu = 2,22\%$ ).  $\mu$  stellt dabei den Bewehrungsanteil einer Querschnittsseite dar; die gesamte Längsbewehrung beträgt  $2\mu$ .

Jede Reihe wurde, entsprechend der Axialdruckkraft  $N$ , in fünf Gruppen unterteilt:

- 1  $N_0 e 0$ : Säule unter zentrischer Axialkraft ohne Querbelastung ( $P=0$ ) (mittig gedrückte Säule).
- $2/3 N_0 e 1$ : Säule unter konstanter Axialkraft von  $2/3$  der Tragkraft (Bruchlast) bei zentrischem Druck. Einseitige Querbelastung  $P$ .
- $1/3 N_0 e 1$ : Säule unter konstanter Axialkraft von  $1/3$  der Tragkraft (Bruchlast) bei zentrischem Druck. Einseitige Querbelastung  $P$ .
- $1/6 N_0 e 1$ : Säule unter konstanter Axialkraft von  $1/6$  der Tragkraft (Bruchlast) bei zentrischem Druck. Einseitige Querbelastung  $P$ .
- 0  $N_0 e 1$ : Säule ohne Axialkraft ( $N=0$ ). Einseitige Querbelastung  $P$  (einfache Biegung).

Ein Teil der Versuchsreihe  $C^1$  diente dazu, den Einfluß der Bügelabstände auf die plastische Verformungsfähigkeit zu untersuchen (in Tafel 2 mit \* gekennzeichnet und in Fig. 15 unten gezeigt).

Tafel 2

Säule	Beton		Stahl			Bewehrungs- stärke		Normal- kraft	
	$\sigma_P$ kg/ cm <sup>2</sup>	$B\sigma_{Tr.}$ kg/ cm <sup>2</sup>		$\mu = \mu'$ %	$s\sigma_{Fl.}$ kg/ cm <sup>2</sup>	$\beta_s \mu =$ $\beta'_s \mu'$	$\eta_1 =$ $\eta'_1$	$N$ ton	$\frac{N}{\sigma_P b d}$
$RC : C^{1/2} : 1 N_0 e 0$	220	22,2	4- $\Phi$ 9	0,50	3200	0,072	0,153	60,0	1,065
$RC : C^{1/2} : 2/3 N_0 e 1$	220	22,2	4- $\Phi$ 9	0,50	3200	0,072	0,153	40,0	0,710
$RC : C^{1/2} : 2/3 N_0 e w$	265	22,3	4- $\Phi$ 9	0,50	3200	0,060	0,153	40,0	0,590
$RC : C^{1/2} : 1/3 N_0 e 1$	220	22,2	4- $\Phi$ 9	0,50	3200	0,072	0,153	20,0	0,355
$RC : C^{1/2} : 1/3 N_0 e w$	265	22,3	4- $\Phi$ 9	0,50	3200	0,060	0,153	20,0	0,295
$RC : C^{1/2} : 1/6 N_0 e 1$	218	23,4	4- $\Phi$ 9	0,50	3200	0,073	0,153	10,0	0,179
$RC : C^{1/2} : 1/6 N_0 e w$	236	26,6	4- $\Phi$ 9	0,50	3200	0,067	0,153	10,0	0,166
$RC : C^{1/2} : 0 N_0 e 1$	218	23,4	4- $\Phi$ 9	0,50	3200	0,073	0,153	0	0
$RC : C 1 : 1 N_0 e 0$	186	21,4	4- $\Phi$ 13	1,04	3070	0,172	0,166	66,0	1,390
$RC : C 1 : 2/3 N_0 e 1$	186	21,4	4- $\Phi$ 13	1,04	3070	0,172	0,166	44,0	0,925
$RC : C 1 : 2/3 N_0 e w$	208	21,6	4- $\Phi$ 13	1,04	3070	0,154	0,166	44,0	0,828
$RC : C 1 : 1/3 N_0 e 1$	186	21,4	4- $\Phi$ 13	1,04	3070	0,172	0,166	22,0	0,462
$RC : C 1 : 1/3 N_0 e w$	208	21,6	4- $\Phi$ 13	1,04	3070	0,154	0,166	22,0	0,414
$RC : C 1 : 1/6 N_0 e 1$	218	23,4	4- $\Phi$ 13	1,04	3070	0,147	0,166	11,0	0,198
$RC : C 1 : 1/6 N_0 e w$	218	23,4	4- $\Phi$ 13	1,04	3070	0,147	0,166	11,0	0,198
$RC : C 1 : 0 N_0 e 1$	218	23,4	4- $\Phi$ 13	1,04	3070	0,147	0,166	0	0
$RC : C^{3/2} : 1/3 N_0 e 1$	256	20,4	4- $\Phi$ 16	1,57	3205	0,197	0,175	30,0	0,458
$RC : C^{3/2} : 1/6 N_0 e 1$	256	20,4	4- $\Phi$ 16	1,57	3205	0,197	0,175	15,0	0,229
$RC : C 2 : 1/3 N_0 e 1$	256	20,4	4- $\Phi$ 19	2,22	3166	0,274	0,185	33,0	0,504
$RC : C 2 : 1/6 N_0 e 1$	256	20,4	4- $\Phi$ 19	2,22	3166	0,274	0,185	16,5	0,252
$RC : C 1 : 2/3 N_0 e 1^*$	256	20,4	4- $\Phi$ 13	1,04	3070	0,124	0,166	44,0	0,671
$RC : C 1 : 1/3 N_0 e 1^*$	249	25,5	4- $\Phi$ 13	1,04	3070	0,128	0,166	22,0	0,345
$RC : C 1 : 1/6 N_0 e 1^*$	249	25,5	4- $\Phi$ 13	1,04	3070	0,128	0,166	11,0	0,173

Die Festigkeitseigenschaften der Baustoffe sind ebenfalls aus Tafel 2 ersichtlich. Es wurde eine Betonmischung 1 : 2,55 : 3,34 mit  $W/C = 0,60$  verwendet. Für die Bewehrung wurde Rundstahl verwendet.

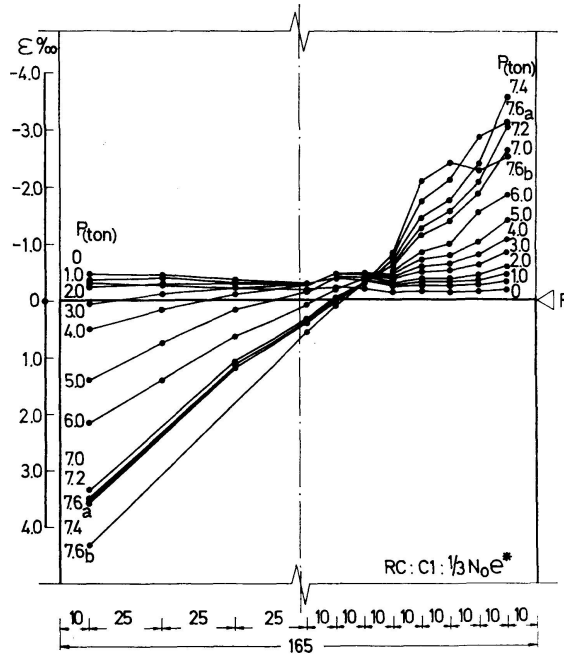


Fig. 16 (a). Dehnungsverteilungen in Axialrichtung, Versuchsergebnis von RC : C 1 :  $\frac{1}{3} N_0 e 1^*$ .

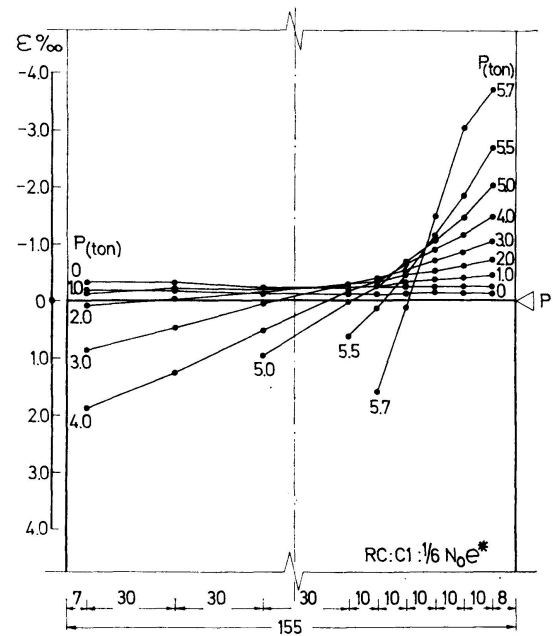


Fig. 16 (b). Dehnungsverteilungen in Axialrichtung, Versuchsergebnis von RC : C 1 :  $\frac{1}{6} N_0 e 1^*$ .

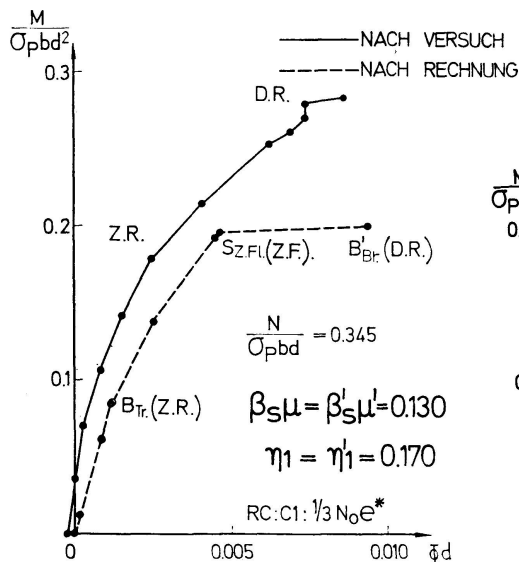


Fig. 17 (a). Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung der aus Fig. 16 (a) erhaltenen Versuchswerte im Vergleich zu den analytischen (gerechneten) Werten von RC : C 1 :  $\frac{1}{3} N_0 e 1^*$ .

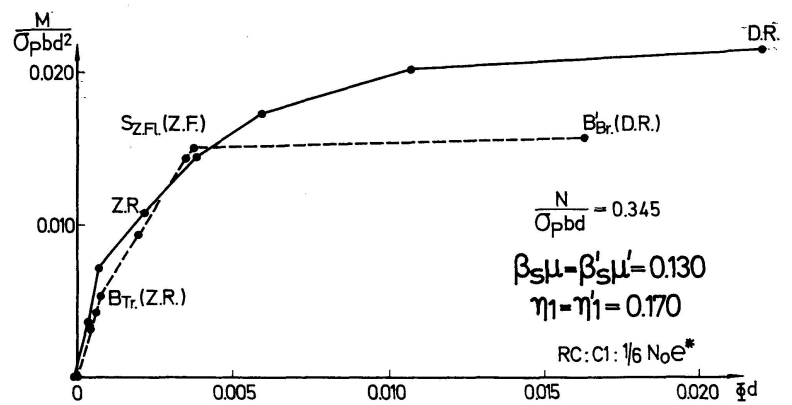


Fig. 17 (b). Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung der aus Fig. 16 (b) erhaltenen Versuchswerte im Vergleich zu den analytischen (gerechneten) Werten von RC : C 1 :  $\frac{1}{6} N_0 e 1^*$ .

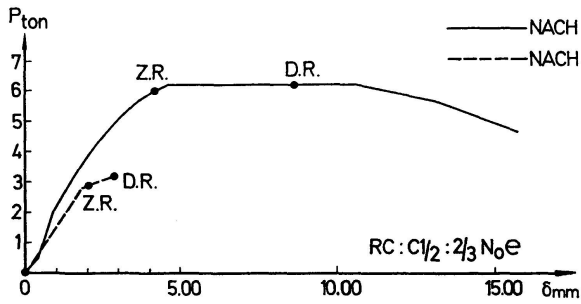


Fig. 18.1 (a).

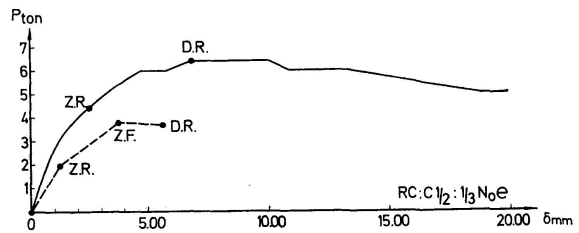


Fig. 18.1 (b).

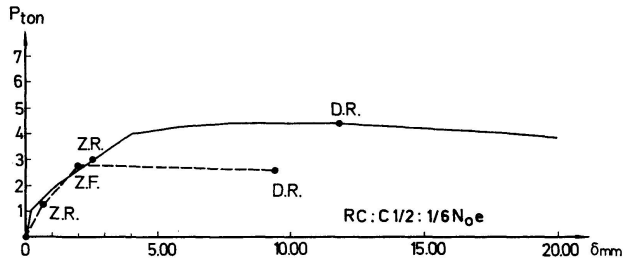


Fig. 18.1 (c).

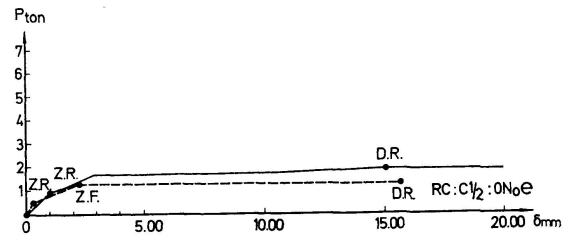


Fig. 18.1 (d).

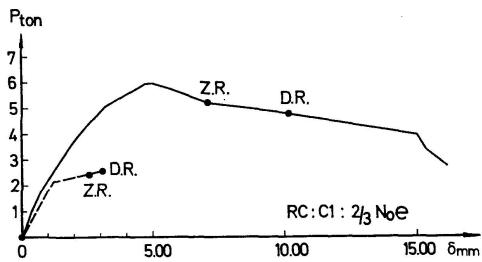


Fig. 18.2 (a).

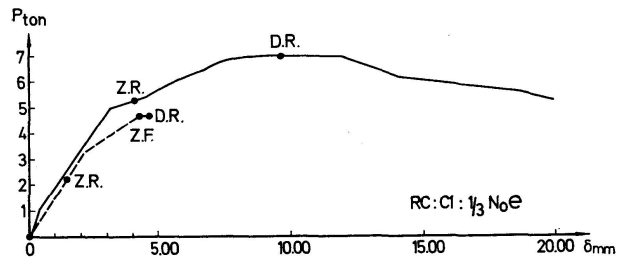


Fig. 18.2 (b).

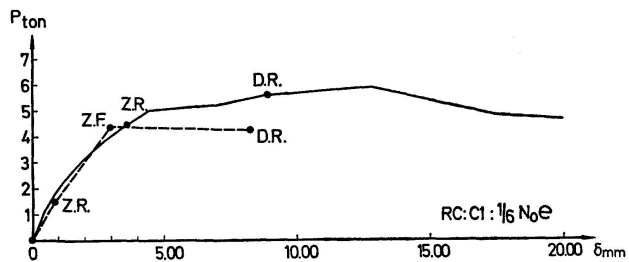


Fig. 18.2 (c).

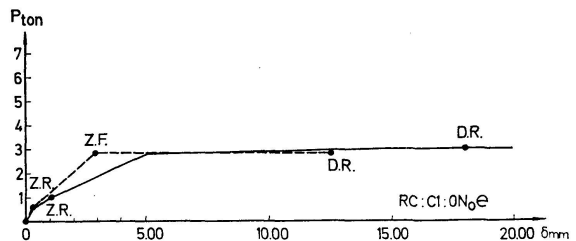


Fig. 18.2 (d).

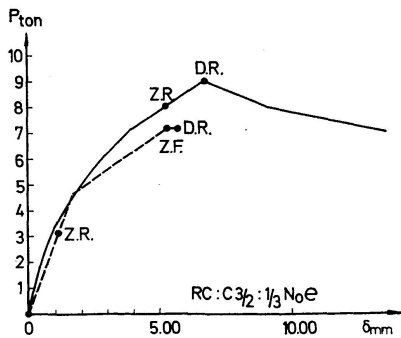


Fig. 18.3 (a).

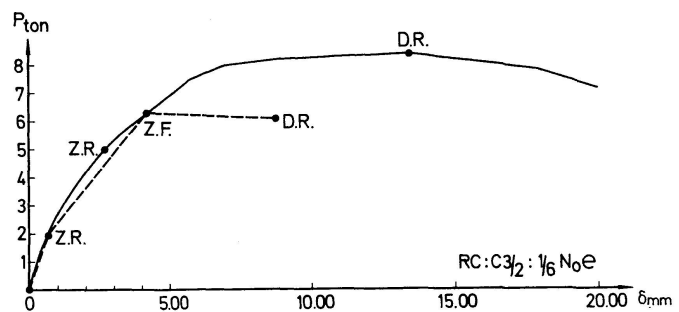


Fig. 18.3 (b).

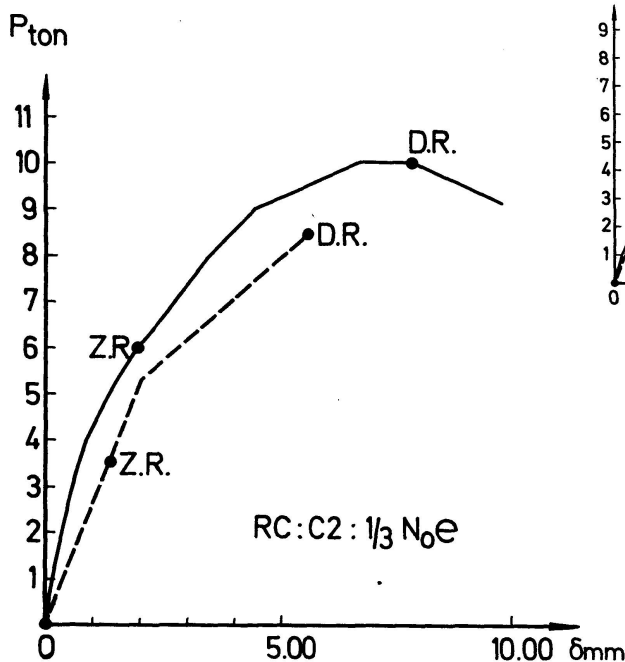


Fig. 18.4 (a).

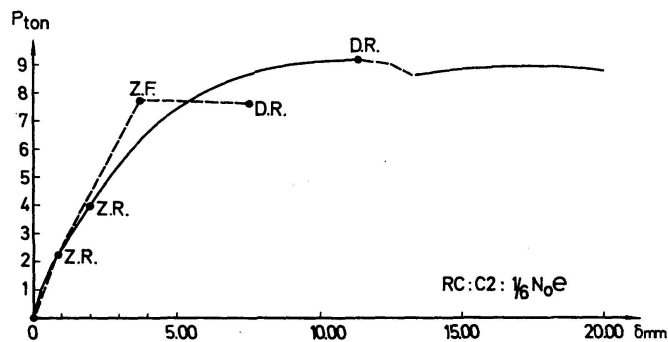


Fig. 18.4 (b).

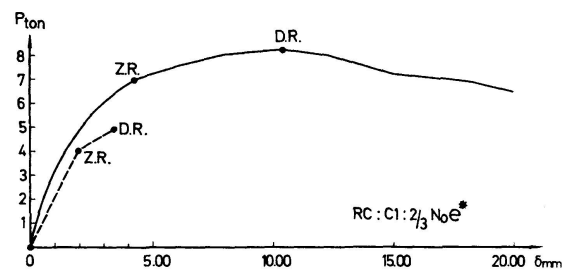


Fig. 18.5 (a).

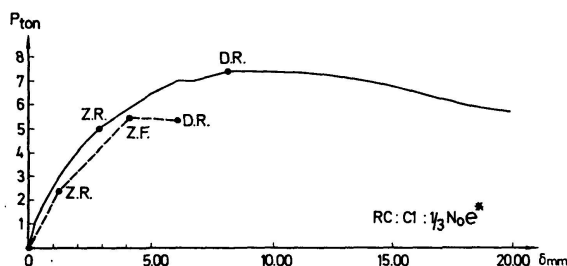


Fig. 18.5 (b).

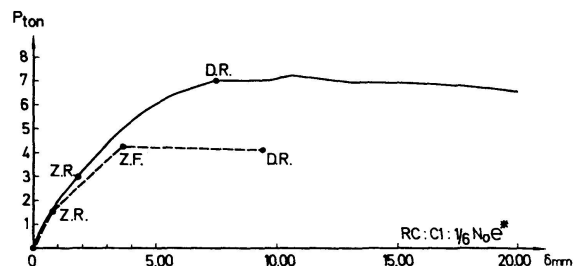


Fig. 18.5 (c).

Fig. 18. Meßergebnisse der Beziehungen zwischen Querbelastrung  $P$  und Durchbiegung  $\delta$  im Vergleich zu den analytischen (gerechneten) Werten (Z. R.: Entstehung der ersten Zugrisse auf der Betonoberfläche, D. R.: Entstehung der ersten Druckrisse (lamellenartig) auf der Betondruckoberfläche).

### 5.3. Versuchsergebnisse

Die Meßergebnisse der Dehnungs- und Stauchungsverteilung in Axialrichtung (Dehnungsmeßstreifen auf der Seitenoberfläche des Betons) sind für die Versuche  $RC:C1:1/3 N_0 e 1 *$  und  $RC:C1:1/6 N_0 e 1 *$  in den Fig. 16 (a) und 16 (b) dargestellt. Die Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung, die aus den Dehnungs- und Stauchungsmessungen durch Ausgleich mit der Methode der kleinsten Quadrate gefunden wurde, ist in den Fig. 17 (a) und 17 (b) dargestellt. Die gestrichelte Linie stellt die, nach Abschnitt 3 dieses Aufsatzes, analytisch ermittelte Beziehung dar ( $\eta_1 = \eta'_1 = 0,170$ ).

Fig. 18 zeigt die Meßergebnisse der Beziehung zwischen Querbelastrung  $P$  und Durchbiegung  $\delta_1$ . An der Stelle Z. R. sind die ersten, von Auge sicht-

baren, Zugrisse an der Betonoberfläche entstanden (Haarrisse) und im Punkt D.R. bildeten sich die ersten lamellenartigen Druckrisse an der Betondruckoberfläche (s. Fig. 20).

Die gestrichelte Linie in Fig. 18 stellt die analytisch ermittelte Beziehung zwischen  $P$  und  $\delta$  dar. Zuerst wurde die Beziehung zwischen  $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$  und  $\Phi d$  (für  $\eta_1 = \eta'_1 = 0,170$ ), nach Abschnitt 3, berechnet und anschließend mit der in Abschnitt 4 dargestellten Methode die Beziehung zwischen  $P$  und  $\delta$  berechnet. Z.R. entspricht dem Punkt, in dem die Betondehnung an der Oberfläche den Wert  $\epsilon_{Tr} = 0,00015$  erreicht; im Punkt Z.F. erreicht die Zugbewehrung den Wert  $\epsilon_{Fl} = 0,0015$  und im Punkt D.R. wird die Betonbruchstauchung  $\epsilon'_{Br} = 0,0040$  erreicht. Fig. 19 zeigt den elasto-plastischen Verformungsvorgang der Stahlbetonsäule  $RC : C^{1/2} : \frac{1}{3} N_0 e 1$ .

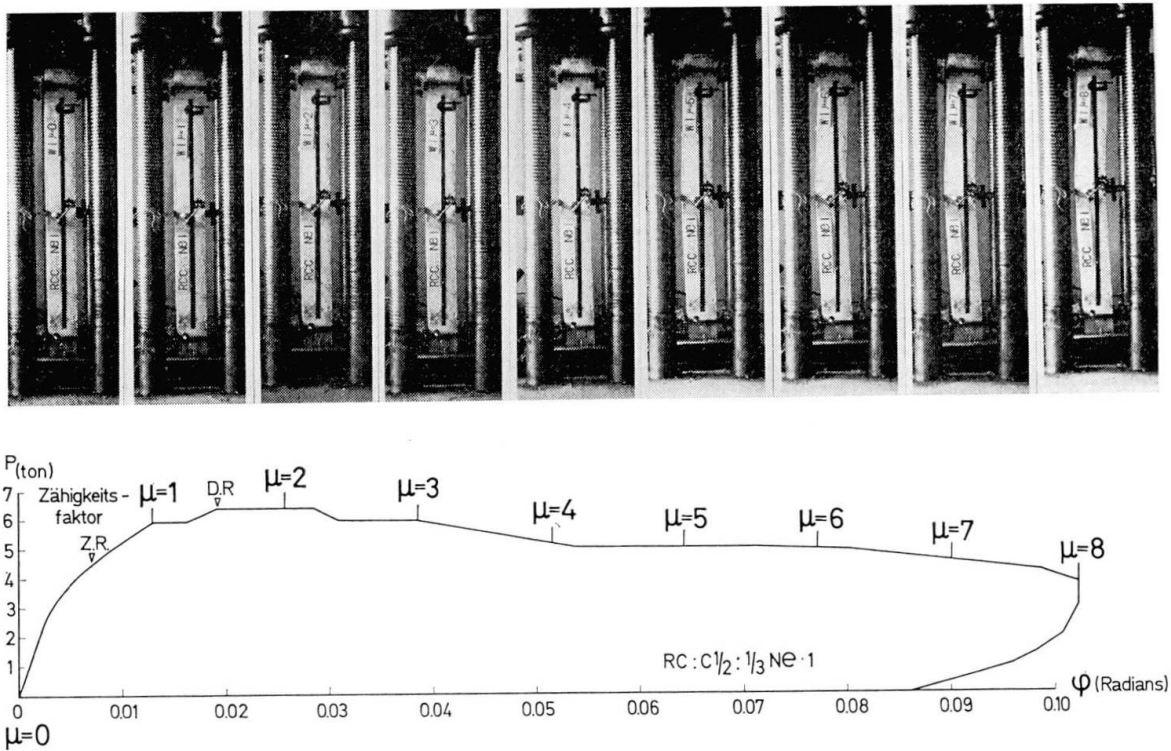


Fig. 19.

#### 5.4. Überlegungen zu den Versuchsergebnissen

Die nach den Abschnitten 3 und 4 analytisch ermittelten Werte (gestrichelte Linien) stimmen mit den Versuchsergebnissen (ausgezogene Linien) für die Beziehung zwischen Querbelastung und Durchbiegung ziemlich gut überein. Sie entsprechen den Eigenschaften eines elasto-plastischen Verhaltens.

Nur die Versuchswerte aus der Querbelastung (Biege widerstand) waren ziemlich größer als die entsprechenden theoretischen Werte. Möglicherweise wurde diese Vergrößerung durch den Reibungswiderstand der Kugelaufleger

verursacht, deren Durchmesser ziemlich groß gewählt wurde, um die Einführung der großen Normalkraft  $N$  zu erleichtern und um den Drehmittelpunkt mit den Seitenbiegeauflagern gut übereinstimmen zu lassen. Darüber haben die Verfasser noch weitere Versuche mit kleinen Rollenauflagern und kleinem Reibungswiderstand durchgeführt. Darüber wird in einem späteren Aufsatz berichtet.

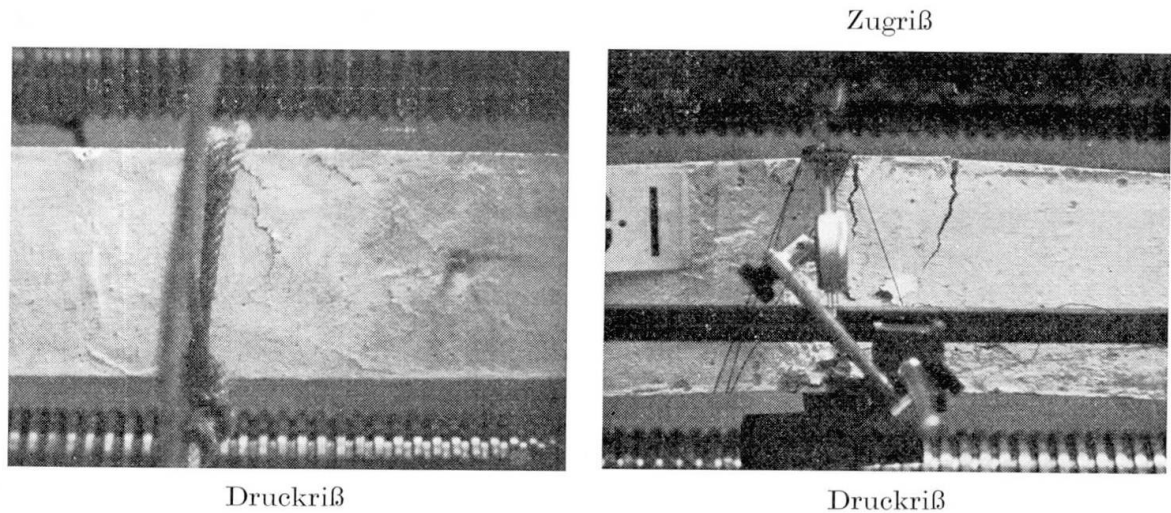


Fig. 20.

## 6. Schlußbemerkungen

Um die elasto-plastischen Biegeformänderungseigenschaften querbelasteter Stahlbetonsäulen unter konstanter Axialbelastung zu erklären, wurde zuerst gezeigt, daß der Zusammenhang zwischen Biegemoment  $M$ , Normalkraft  $N$  und Krümmung  $\Phi$  eines Stahlbetonquerschnittes als räumliche Fläche (Fig. 6) (abhängig vom Parameter  $\beta_s \mu$ ) im Koordinatensystem  $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$ ,  $\frac{N}{\sigma_p b d}$  und  $\Phi d$  dargestellt werden kann. Fig. 7 (a) zeigt die Projektion dieser Fläche auf die  $\frac{M}{\sigma_p b d^2} - \frac{N}{\sigma_p b d}$ -Ebene, Fig. 7 (b) zeigt die Projektion auf die  $\frac{N}{\sigma_p b d} - \Phi d$ -Ebene und Fig. 7 (c) zeigt die Projektion auf die  $\frac{M}{\sigma_p b d^2} - \Phi d$ -Ebene. Für den Parameter  $\beta_s \mu$  wurden Werte von 0,10 bis 0,50 gewählt. Das elasto-plastische Verhalten an den Spannungsgrenzpunkten (Fig. 4 und 5) ist besonders gut aus Fig. 7 (a) für beliebig kombinierte Belastungszustände  $M$  und  $N$  ersichtlich.

Mit der dadurch erhaltenen Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung ( $\frac{M}{\sigma_p b d^2} - \Phi d$ ) wurde eine analytische Methode zur Berechnung der Beziehung zwischen Querbewehrung und Durchbiegung entwickelt. Die Versuche wurden mit der in den Fig. 13 und 14 dargestellten Versuchseinrichtung durchgeführt. Es wurden vier Versuchsreihen mit den einseitigen Bewehrungsanteilen 0,50%, 1,04%, 1,57% und 2,22% geprüft. Jede Reihe wurde — entsprechend der Größe der wirkenden Normalkraft ( $N = N_0$ ,  $\frac{2}{3} N_0$ ,  $\frac{1}{3} N_0$ ,



$1/6 N_0, 0)$  — in fünf Gruppen unterteilt. Die Fig. 17 und 18 zeigen eine ziemlich gute Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit den analytischen Werten. Diese Figuren zeigen, daß die analytische Methode dem elastoplastischen Biegeverformungsvorgang ziemlich gut zu folgen vermag.

Aus der Beziehung zwischen  $\frac{M}{\sigma_p b d^2}$  und  $\Phi d$  ist klar ersichtlich, daß eine Vergrößerung der Normalkraft und der Bewehrungsstärke die Drehfähigkeit plastischer Gelenke stark vermindert (s. Fig. 8). Diese Tatsache spielt eine wichtige Rolle bei der Bruchanalyse von Stahlbetonbauwerken, insbesondere bei der Anwendung des Traglastverfahrens \*) ([1] bis [15]).

Diese Untersuchungen bilden die Grundlagen eines später erscheinenden Aufsatzes über wechselseitige Biegung unter Axiallast.

Für die freundlicherweise gelieferten Versuchsmaterialien sowie für die Unterstützung der Lehrstuhlangehörigen möchten die Verfasser der YAWATA Eisen & Stahl AG, Tokio, und der OSAKA-Zement AG, Osaka, ihren herzlichen Dank aussprechen.

### Schrifttum

1. YAMADA, M.: Drehfähigkeit plastischer Gelenke in Stahlbetonbalken, Beton- und Stahlbetonbau, 53. Jahrg., H. 4, April 1958, S. 85/91.
2. YAMADA, M.: Verhalten plastischer Gelenke in Stahlbetonbalken, Vorbericht des 7. Kongresses der IVBH, Rio de Janeiro, Aug. 1964, S. 963/970.
3. YAMADA, M.: Verhalten plastischer Gelenke in Stahlbetonsäulen, Schlußbericht des 7. Kongresses der IVBH, Rio de Janeiro, 1966, S. 481/488.
4. BAKER, A. L. L., AMARAKONE, A. M. N.: Inelastic Hyperstatical Frames, Institution of Structural Engineers, London 1965; Hyperstatic Symposium of the European Concrete Committee, Ankara, Sept. 1964; A C I Symposium, Miami, Nov. 1964.
5. BACHMANN, H., THÜRLIMANN, B.: Versuche über das plastische Verhalten von zweifeldrigen Stahlbetonbalken, Serie A, Bericht Nr. 6203-1, Institut für Baustatik, ETH, Zürich, Juli 1965.
6. BORGES, J. F., OLIVEIRA, E. R. A.: Non-Linear Analysis of Reinforced Concrete Structures, Publ. I.A.B.S.E., Vol. 23, 1963, p. 51/70.
7. Comité Européen du Béton:  
Bulletin d'Information N° 21, 1960, Janvier, GUYON, Y.: p. 1/14, MACCHI, G.: p. 15/39.  
Bulletin d'Information N° 24, 1960, Juin, MOENAERT, P.: p. 23/43, SORETZ, S.: p. 62/78.
8. GRANHOLM, H.: A General Flexural Theory of Reinforced Concrete, with particular emphasis on the inelastic behavior of concrete and reinforcement, Almqvist & Wiksell, Stockholm und John Wiley & Sons, New York, 1965.

---

\*) Die Fachwelt schenkt diesen Problemen allmählich große Beachtung. So wurde beispielsweise vom Comité Européen du Béton (CEB) ein spezieller Ausschuß zur Behandlung dieser Fragen gebildet. Kürzlich wurden einige Untersuchungen darüber veröffentlicht. In den USA ist das Traglastverfahren vor einiger Zeit — neben dem Stahlbau — auch im Stahlbetonbau in die Bestimmungen aufgenommen und praktisch angewandt [10] worden.



9. CHAMBAUD, R.: *Le Calcul du Béton Armé à la Rupture*, Eyrolles, Paris, 1965.
10. EVERARD, N. J., COHEN, E.: *Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete Columns*, ACI Committee 340, ACI, SP-7, 1964.
11. PFRANG, E. O., SIESS, C. P., SOZEN, M. A.: *Load-Moment-Curvature Characteristics of Reinforced Concrete Cross Sections*, ACI, Jul. 1964, p. 763/778.
12. PFRANG, E. O., SIESS, C. P.: *Predicting Structural Behavior Analytically*, ASCE, Oct. 1964, ST 5, p. 99/110.
13. PFRANG, E. O., SIESS, C. P.: *Behavior of Restrained Reinforced Concrete Columns*, ASCE, Oct. 1964, ST 5, p. 113/136.
14. MALDAGUE, J. C.: *Essais de poutres en béton armé en phase plastique*, Publication Préliminaire, A.I.P.C., Rio de Janeiro, 1964, p. 951/961.
15. SAILLARD, Y.: *L'épuisement du béton armé en flexion simple*, CEB 1955.

### **Zusammenfassung**

Für den Stahlbetonrechteckquerschnitt wurde der Zusammenhang zwischen Biegemoment, Normalkraft und Krümmung analytisch ermittelt. Dieser Zusammenhang ist abhängig von den Festigkeitseigenschaften von Stahl und Beton, vom Armierungsgehalt und der geometrischen Lage der Bewehrung. Die analytisch gefundenen Momenten-Krümmungsbeziehungen wurden für die Berechnung der Durchbiegungen querbelasteter, axial gedrückter Stahlbetonsäulen verwendet. Die Berechnung zeigt ziemlich gute Übereinstimmung mit den Versuchsmessungen.

### **Summary**

An analytical study has been made of the relationship between bending moment, normal force and curvature for a rectangular section of reinforced concrete. This relationship is dependent upon the strength characteristics of the steel and the concrete, and upon the steel content and the position of the reinforcement. The relationships found between the moments and the curvatures were used for calculating the deflections of reinforced concrete columns under lateral loading and subjected to an axial stress. The calculation shows remarkable agreement with the results of measurements.

### **Résumé**

On a étudié analytiquement la relation entre moment de flexion, force normale et courbure pour une section rectangulaire de béton armé. Cette relation est fonction des propriétés de résistance de l'acier et du béton, de la teneur en acier et de la situation de l'armature. On a utilisé les relations trouvées entre les moments et les courbures pour le calcul des flèches de colonnes en béton armé chargées latéralement et soumises à un effort axial. Le calcul montre une concordance remarquable avec les résultats des mesures.