

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 27 (1967)  
  
**Artikel:** Comportement postcritique d'une plaque carrée raidie cisailée uniformément: première partie: solution générale et déformée de la plaque  
**Autor:** Škaloud, M. / Donea, J. / Massonnet, Ch.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21549>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Comportement postcritique d'une plaque carrée raidie cisailée uniformément

## Première partie: Solution générale et déformée de la plaque

*Überkritisches Verhalten einer ausgesteiften quadratischen Platte unter  
gleichmäßigem Schub*

*Teil I: Allgemeine Lösung und Formänderung der Platte*

*Post-critical Behaviour of a Stiffened Square Plate Subjected to Uniform Shear  
First Part: General Solution and Buckled Pattern of the Plate*

M. ŠKALOUD

Doc., Ing., C. Sc., Institut de Mécanique  
Théorique et Appliquée de l'Académie des  
Sciences, Prague

J. DONEA

Aspirant F.N.R.S., Université de Liège

CH. MASSONNET

Professeur à l'Université de Liège

## Liste des principaux symboles

$2a$	longueur de la plaque
$b$	largeur de la plaque
$e$	épaisseur de la plaque
$\alpha = a/b$	Rapport de la demi-longueur et de la largeur de la plaque
$E$	module d'élasticité
$\nu$	coefficient de Poisson
$D = \frac{E e^3}{12(1-\nu^2)}$	rigidité flexionnelle de la plaque
$I_r$	moment d'inertie du raidisseur
$\Omega_r$	section droite du raidisseur
$\gamma = \frac{E I_r}{D b}$	rigidité relative du raidisseur
$\gamma^*$	rigidité optimum théorique provenant de la théorie linéaire du voilement

$\gamma_0$	rigidité du raidisseur quasi-rigide dans tout le domaine post-critique de la plaque
$\delta = \frac{\Omega_r}{b e}$	rapport de la section du raidisseur et de la plaque
$\tau$	tension de cisaillement
$\Phi$	fonction d'Airy
$\sigma_{xm}, \sigma_{ym}, \tau_m$	tensions de membrane
$\tau_{cr}^*$	tension critique de la plaque non-raïdie de référence
$w$	déformation transversale de la plaque
$f_1, \dots, f_6$	paramètres de la déformée
$e_x, e_y$	rapprochements unitaires des bords opposés de la plaque
$R_e$	limite d'élasticité
$\theta$	déformation de cisaillement
$\sigma_E = \frac{\pi^2 D}{b^2 e} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{e}{b}\right)^2$	tension critique d'Euler
$k = \tau_{cr}/\sigma_E$	coefficient de voilement
$K = \frac{\tau_{cr} b^2}{\pi^2 E e^2} = \frac{k}{10,92}$	variable auxiliaire (pour $E = 21\,000 \text{ kg/mm}^2$ et $\nu = 0,3$ )

## 1. Position du problème

La seule base théorique dont nous disposons actuellement pour dimensionner les raidisseurs de l'âme d'une poutre à âme pleine est la notion de raidisseur strictement rigide. Ce raidisseur est le plus léger de tous les raidisseurs rigides; c'est pourquoi on désigne la rigidité relative  $\gamma^*$  de ce raidisseur sous le nom de rigidité optimum.

La notion de rigidité optimum est une notion purement théorique, basée sur la théorie linéaire des plaques. Cette théorie dit bien qu'un raidisseur de rigidité  $\gamma^*$  reste rectiligne sous la charge critique théorique de voilement, mais elle ne nous donne aucun renseignement sur ce qui se passera dans le domaine postcritique.

C'est pourquoi il nous a paru indispensable de revoir la notion de raidisseur strictement rigide à la lumière de la théorie non-linéaire des grandes déformations et en particulier d'étudier de près le comportement postcritique des âmes raidies cisillées uniformément dans leur plan.

Considérons donc une plaque rectangulaire de longueur  $2a$  de largeur  $b$  cisillée uniformément dans son plan et renforcée par un raidisseur vertical médian.

Nous rapportons la plaque aux axes coordonnés  $x, y, z$  définies par la fig. 1.

Nous admettrons que la plaque est fabriquée d'un matériau élastique, parfaitement plastique dont le comportement est régi par le diagramme de PRANDTL représenté à la fig. 2. Nous supposerons en outre que les champs de tension et de déformation apparaissant dans la plaque appartiennent au domaine élastique.



Nous nous bornerons dans ce travail à rechercher l'influence de la rigidité flexionnelle du raidisseur sur le comportement hypercritique de la plaque. Nous supposons donc que le raidissage de la plaque est réalisé de manière telle qu'on puisse négliger les phénomènes de torsion pure et de déversement du raidisseur pendant le voilement de la plaque.

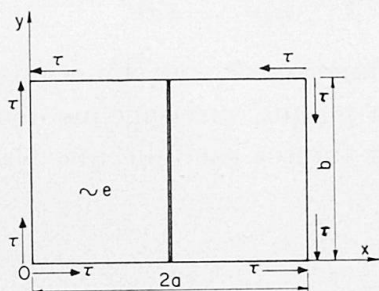


Fig. 1.

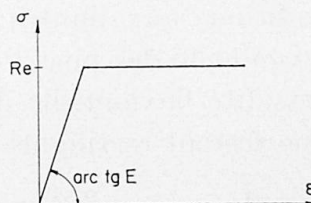


Fig. 2.

## 2. Solution générale du problème

### 2.1. Equations différentielles et conditions aux limites

Les équations du voilement non-linéaire des plaques ont été établies par von Kármán en 1910.

On définit l'état de tension de membrane existant dans la plaque par une fonction de tension d'Airy  $\Phi$ .

Les tensions de membrane s'en déduisent par double dérivation:

$$\sigma_{xm} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{ym} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_m = \frac{-\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (2.1)$$

La condition de compatibilité des déformations du feuillet moyen s'exprime par l'équation:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (2.2 a)$$

D'autre part, la condition d'équilibre d'un élément de plaque s'écrit:

$$\frac{D}{e} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.2 b)$$

Les symboles  $w$ ,  $\Phi$ ,  $D$ ,  $e$ ,  $E$  ont été définis dans la liste des notations. Les équations (2.2) forment un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires à deux fonctions inconnues,  $\Phi$  et  $w$ .

Les conditions aux limites du problème sont fonctions des conditions de support de la plaque.

Nous supposons que la plaque est simplement appuyée sur son contour ce qui donne pour la fonction  $w$  les conditions aux limites suivantes:



$$\text{A. pour } x = 0, \quad x = 2a, \quad w = 0, \quad (2.3 \text{ a})$$

$$y = 0, \quad y = b, \quad w = 0, \quad (2.3 \text{ b})$$

$$\text{B. pour } x = 0, \quad x = 2a, \quad M_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (2.4 \text{ a})$$

$$y = 0, \quad y = b, \quad M_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.4 \text{ b})$$

Les conditions aux limites relatives à la fonction  $\Phi$  sont fonctions de la rigidité flexionnelle des pièces de support de la plaque; envisageons deux cas:

A. La rigidité flexionnelle des éléments aux limites est telle que les bords de la plaque restent rectilignes

pour  $x = 0, \quad x = 2a :$

$$e_x = \frac{1}{2a} \int_0^{2a} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{1}{2a} \int_0^{2a} \left[ \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \text{constante}, \quad (2.5 \text{ a})$$

pour  $y = 0, \quad y = b :$

$$e_y = \frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy = \frac{1}{b} \int_0^b \left[ \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy = \text{constante}. \quad (2.5 \text{ b})$$

A<sub>1</sub>. Les bords opposés de la plaque restent rectilignes et ne se rapprochent pas:

$$\text{pour } x = 0, \quad x = 2a: \quad e_x = 0, \quad (2.6 \text{ a})$$

$$\text{pour } y = 0, \quad y = b: \quad e_y = 0. \quad (2.6 \text{ b})$$

A<sub>2</sub>. Les bords opposés de la plaque restent rectilignes et se rapprochent librement:

$$\text{pour } x = 0, \quad x = 2a: \quad p_x = 0, \quad (2.7 \text{ a})$$

$$\text{pour } y = 0, \quad y = b: \quad p_y = 0, \quad (2.7 \text{ b})$$

où  $p_x, p_y$  désignent les valeurs moyennes des sollicitations normales aux bords de la plaque.

B. Les pièces de support de la plaque sont parfaitement flexibles

$$\text{pour } x = 0, \quad x = 2a: \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad (2.8 \text{ a})$$

$$\text{pour } y = 0, \quad y = b: \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \quad (2.8 \text{ b})$$

La fonction  $\Phi$  doit en outre satisfaire la condition de contour

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \tau \quad \text{pour } x = 0, \quad x = 2a, \quad (2.9 \text{ a})$$

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \tau \quad \text{pour } y = 0, \quad y = b. \quad (2.9 \text{ b})$$

### 2.2. Supposition relative à la déformée de la plaque

Parmi les fonctions admissibles  $w_{ij}$  satisfaisant aux conditions aux limites (2.3) (2.4) et dont les dérivées partielles sont continues jusqu'au quatrième ordre, nous faisons choix des fonctions particulières

$$\bar{w}_{ij} = \sin \frac{i\pi x}{2a} \sin \frac{j\pi y}{b} \quad \text{pour } i, j = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Si la longueur  $2a$  de la plaque n'est pas très différente de sa longueur  $b$ , la déformée dans le domaine postcritique correspond à un simple champ diagonal. Il s'agit de déterminer les fonctions coordonnées  $\bar{w}_{ij}$  aptes à décrire ce comportement.

Etant donné la difficulté de l'étude analytique du voilement non linéaire des plaques, il faut se limiter à un nombre relativement petit de fonctions coordonnées  $\bar{w}_{ij}$ .

Les résultats de l'étude linéaire du problème nous ont permis de déterminer les fonctions  $\bar{w}_{ij}$  qui jouent le rôle le plus important dans le processus du voilement de la plaque. Ceci nous a conduit à choisir pour la déformée  $w$  l'expression à six paramètres:

$$\begin{aligned} w = & f_1 \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi y}{b} + f_2 \sin \frac{3\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{b} + f_3 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + f_4 \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ & + f_5 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + f_6 \sin \frac{3\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

où les  $f_i$  sont des paramètres provisoirement indéterminés.

### 2.3. Fonction de tension d'Airy et tensions de membrane

La fonction d'Airy  $\Phi$  définissant l'état de tension de membrane existant dans la plaque satisfait l'équation biharmonique (2.2a) où l'on aura remplacé les dérivées partielles figurant dans le second membre par leurs valeurs déduites de l'expression (2.11).

Nous avons recherché une solution de l'équation (2.2a) du type

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

où  $\Phi_1$  est solution de l'équation homogène correspondant à (2.2a) et  $\Phi_2$  une intégrale particulière de l'équation non-homogène. L'équation homogène

$$\frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial y^4} = 0$$

correspondant à l'équation (2.2a) admet comme solution un polynôme du second degré de la forme

$$\Phi_1 = -\frac{p_x y^2}{2} - \frac{p_y x^2}{2} + \tau xy, \quad (2.12)$$

où  $p_x$  et  $p_y$  sont les valeurs moyennes des réactions des éléments aux limites et  $\tau$  le cisaillement uniforme de la plaque.

On peut adopter comme intégrale particulière de l'équation non-homogène une expression  $\Phi_2$  contenant les mêmes lignes trigonométriques que celles qui figurent dans le second membre de l'équation (2.2a). Cette expression  $\Phi_2$  fait intervenir un certain nombre de constantes que l'on détermine par identification. En introduisant le rapport  $\alpha = a/b$ , il apparaît, tous calculs faits, que la fonction d'Airy  $\Phi$  peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi = E & \left[ f_1^2 \left( \frac{\alpha^2}{32} \cos \frac{2\pi x}{a} + \frac{1}{32\alpha^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + f_2^2 \left( \frac{\alpha^2}{32} \cos \frac{4\pi x}{a} + \frac{1}{32\alpha^2} \cos \frac{4\pi y}{b} \right) \right. \\ & + f_3^2 \left( \frac{\alpha^2}{32} \cos \frac{6\pi x}{a} + \frac{1}{32\alpha^2} \cos \frac{6\pi y}{b} \right) + f_4^2 \left( \frac{\alpha^2}{8} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{128\alpha^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \\ & + f_5^2 \left( \frac{\alpha^2}{8} \cos \frac{2\pi x}{a} + \frac{1}{128\alpha^2} \cos \frac{4\pi y}{b} \right) + f_6^2 \left( \frac{\alpha^2}{8} \cos \frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{128\alpha^2} \cos \frac{6\pi y}{b} \right) \\ & + f_1 f_2 \left( \frac{4\alpha^2}{1+18\alpha^2+81\alpha^4} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b} + \frac{4\alpha^2}{81+18\alpha^2+\alpha^4} \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right) \\ & + f_1 f_3 \left( \frac{9\alpha^2}{16+128\alpha^2+256\alpha^4} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{4\pi y}{b} \right. \\ & \quad \left. + \frac{9\alpha^2}{256+128\alpha^2+16\alpha^4} \cos \frac{4\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \\ & + f_1 f_4 \left( -\alpha^2 \cos \frac{\pi x}{2a} + \frac{\alpha^2}{9} \cos \frac{3\pi x}{2a} + \frac{9\alpha^2}{1+32\alpha^2+256\alpha^4} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{2\pi y}{b} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\alpha^2}{81+288\alpha^2+256\alpha^4} \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \\ & + f_1 f_5 \left( -\frac{1}{4\alpha^2} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{32\alpha^2} \cos \frac{3\pi y}{b} + \frac{9}{4} \frac{\alpha^2}{16+8\alpha^2+\alpha^4} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{16+72\alpha^2+81\alpha^4} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \\ & + f_1 f_6 \left( -\frac{9\alpha^2}{1+32\alpha^2+256\alpha^4} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \frac{81\alpha^2}{1+128\alpha^2+4096\alpha^4} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{4\pi y}{b} \right. \\ & \quad + \frac{81\alpha^2}{625+800\alpha^2+256\alpha^4} \cos \frac{5\pi x}{2a} \cos \frac{2\pi y}{b} \\ & \quad \left. - \frac{9\alpha^2}{625+3200\alpha^2+4096\alpha^4} \cos \frac{5\pi x}{2a} \cos \frac{4\pi y}{b} \right) \\ & + f_2 f_3 \left( \frac{36\alpha^2}{1+50\alpha^2+625\alpha^4} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{5\pi y}{b} + \frac{36\alpha^2}{625+50\alpha^2+\alpha^4} \cos \frac{5\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right) \\ & + f_2 f_4 \left( \frac{-4\alpha^2}{81+72\alpha^2+16\alpha^4} \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{4}{9} \frac{\alpha^2}{1+8\alpha^2+16\alpha^4} \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{b} \right. \\ & \quad \left. + \frac{36\alpha^2}{625+200\alpha^2+16\alpha^4} \cos \frac{5\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{b} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{4 \alpha^2}{625 + 1800 \alpha^2 + 1296 \alpha^4} \cos \frac{5 \pi x}{2 a} \cos \frac{3 \pi y}{b} \Bigg) \\
& + f_2 f_5 \left( - \alpha^2 \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{\alpha^2}{9} \cos \frac{3 \pi x}{a} + \frac{9 \alpha^2}{1 + 32 \alpha^2 + 256 \alpha^4} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{4 \pi y}{b} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\alpha^2}{81 + 288 \alpha^2 + 256 \alpha^4} \cos \frac{3 \pi x}{a} \cos \frac{4 \pi y}{b} \right) \\
& + f_2 f_6 \left( - \frac{36 \alpha^2}{1 + 8 \alpha^2 + 16 \alpha^4} \cos \frac{\pi x}{2 a} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{324 \alpha^2}{1 + 200 \alpha^2 + 10000 \alpha^4} \cos \frac{\pi x}{2 a} \cos \frac{5 \pi y}{b} \right. \\
& \quad + \frac{324 \alpha^2}{2401 + 392 \alpha^2 + 16 \alpha^4} \cos \frac{7 \pi x}{2 a} \cos \frac{\pi y}{b} \\
& \quad \left. - \frac{36 \alpha^2}{2401 + 9800 \alpha^2 + 10000 \alpha^4} \cos \frac{7 \pi x}{2 a} \cos \frac{5 \pi y}{b} \right) \\
& + f_3 f_4 \left( - \frac{9 \alpha^2}{625 + 800 \alpha^2 + 256 \alpha^4} \cos \frac{5 \pi x}{2 a} \cos \frac{2 \pi y}{b} \right. \\
& \quad + \frac{81 \alpha^2}{625 + 3200 \alpha^2 + 4096 \alpha^4} \cos \frac{5 \pi x}{2 a} \cos \frac{4 \pi y}{b} \\
& \quad + \frac{81 \alpha^2}{2401 + 1568 \alpha^2 + 256 \alpha^4} \cos \frac{7 \pi x}{2 a} \cos \frac{2 \pi y}{b} \\
& \quad \left. - \frac{9 \alpha^2}{2401 + 6272 \alpha^2 + 4096 \alpha^4} \cos \frac{7 \pi x}{2 a} \cos \frac{4 \pi y}{b} \right) \\
& + f_3 f_5 \left( - \frac{9}{4} \frac{\alpha^2}{16 + 8 \alpha^2 + \alpha^4} \cos \frac{2 \pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right. \\
& \quad + \frac{81}{4} \frac{\alpha^2}{16 + 200 \alpha^2 + 625 \alpha^4} \cos \frac{2 \pi x}{a} \cos \frac{5 \pi y}{b} \\
& \quad + \frac{81}{4} \frac{\alpha^2}{256 + 32 \alpha^2 + \alpha^4} \cos \frac{4 \pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \\
& \quad \left. - \frac{9}{4} \frac{\alpha^2}{256 + 800 \alpha^2 + 625 \alpha^4} \cos \frac{4 \pi x}{a} \cos \frac{5 \pi y}{b} \right) \\
& + f_3 f_6 \left( - \alpha^2 \cos \frac{3 \pi x}{2 a} + \frac{\alpha^2}{9} \cos \frac{9 \pi x}{2 a} + \frac{\alpha^2}{1 + 32 \alpha^2 + 256 \alpha^4} \cos \frac{3 \pi x}{2 a} \cos \frac{6 \pi y}{b} \right. \\
& \quad \left. - \frac{9 \alpha^2}{81 + 288 \alpha^2 + 256 \alpha^4} \cos \frac{9 \pi x}{2 a} \cos \frac{6 \pi y}{b} \right) \\
& + f_4 f_5 \left( \frac{16 \alpha^2}{1 + 72 \alpha^2 + 1296 \alpha^4} \cos \frac{\pi x}{2 a} \cos \frac{3 \pi y}{b} + \frac{16 \alpha^2}{81 + 72 \alpha^2 + 16 \alpha^4} \cos \frac{3 \pi x}{2 a} \cos \frac{\pi y}{b} \right) \\
& + f_4 f_6 \left( \frac{9}{4} \frac{\alpha^2}{1 + 32 \alpha^2 + 256 \alpha^4} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{4 \pi y}{b} + \frac{9}{4} \frac{\alpha^2}{16 + 32 \alpha^2 + 16 \alpha^4} \cos \frac{2 \pi x}{a} \cos \frac{2 \pi y}{b} \right) \\
& + f_5 f_6 \left( \frac{144 \alpha^2}{1 + 200 \alpha^2 + 10000 \alpha^4} \cos \frac{\pi x}{2 a} \cos \frac{5 \pi y}{b} \right. \\
& \quad \left. + \frac{144 \alpha^2}{625 + 200 \alpha^2 + 16 \alpha^4} \cos \frac{5 \pi x}{2 a} \cos \frac{\pi y}{b} \right) \Bigg] - \frac{p_x y^2}{2} - \frac{p_y x^2}{2} + \tau x y. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Les tensions de membrane s'obtiennent par double dérivation de l'expression précédente de la fonction d'Airy:

$$\sigma_{xm} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{ym} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_m = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (2.14)$$

L'écriture de ces expressions étant très lourde, nous ne l'avons pas reprise ici.

#### 2.4. Rapprochements $e_x$ , $e_y$ des bords de la plaque, déplacements $u$ et $v$ , déformation tangentielle $\theta$

Les rapprochements des bords de la plaque sont fournis par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \text{— pour les bords } x=0, x=2a: \quad \Delta_x &= u_{x=0} - u_{x=2a} = \int_0^{2a} \frac{\partial u}{\partial x} dx, \\ \text{— pour les bords } y=0, y=b: \quad \Delta_y &= v_{y=0} - v_{y=b} = \int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

Les rapprochements unitaires s'écrivent dès lors

$$\begin{aligned} \text{— pour les bords } x=0, x=2a: \quad e_x &= \frac{\Delta x}{2a} = \frac{1}{2a} \int_0^{2a} \frac{\partial u}{\partial x} dx, \\ \text{— pour les bords } y=0, y=b: \quad e_y &= \frac{\Delta y}{b} = \frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

En tenant compte des relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \epsilon_x - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_{xm} - \nu \sigma_{ym}), \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \epsilon_y - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, & \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_{ym} - \nu \sigma_{xm}) \end{aligned}$$

on peut écrire:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{2a} \int_0^{2a} \left[ \frac{1}{E} (\sigma_{xm} - \nu \sigma_{ym}) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \\ e_y &= \frac{1}{b} \int_0^b \left[ \frac{1}{E} (\sigma_{ym} - \nu \sigma_{xm}) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy. \end{aligned}$$

En remplaçant dans ces expressions  $\sigma_{xm}$ ,  $\sigma_{ym}$  et  $w$  par leurs valeurs (2.14) et (2.11), on obtient après quelques calculs:

$$e_x = -f_1^2 \frac{\pi^2}{8a^2} - f_2^2 \frac{\pi^2}{2a^2} - f_3^2 \frac{9\pi^2}{8a^2} - f_4^2 \frac{\pi^2}{32a^2} - f_5^2 \frac{\pi^2}{8a^2} - f_6^2 \frac{9\pi^2}{32a^2} - \frac{p_x - \nu p_y}{E}, \quad (2.15 a)$$

$$e_y = -f_1^2 \frac{\pi^2}{8b^2} - f_2^2 \frac{\pi^2}{2b^2} - f_3^2 \frac{9\pi^2}{8b^2} - f_4^2 \frac{\pi^2}{8b^2} - f_5^2 \frac{\pi^2}{2b^2} - f_6^2 \frac{9\pi^2}{8b^2} - \frac{p_y - \nu p_x}{E}. \quad (2.15 b)$$

On constate ainsi que les bords de la plaque restent rectilignes, le signe négatif montre qu'ils se rapprochent.

Il en résulte qu'en acceptant la solution simple (2.12) de l'équation biharmonique homogène correspondant à l'équation (2.2a), on ne peut satisfaire que les seules conditions aux limites  $A_1$ ,  $A_2$  relatives à la fonction  $\Phi$ . Seule une solution beaucoup plus élaborée de l'équation (2.2a) homogène permettrait de satisfaire la condition  $B$ .

En ce qui concerne les déplacements  $u$  et  $v$  dans le plan de la plaque, ils sont solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Les deux premières équations sont données par les relations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_{xm} - \nu \sigma_{ym}) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (2.16 a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_{ym} - \nu \sigma_{xm}) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2. \quad (2.16 b)$$

En tenant compte des formules (2.14), (2.11), les équations précédentes prennent la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = I_1(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = I_2(x, y).$$

Les expressions de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  et  $\frac{\partial v}{\partial x}$  s'obtiennent à partir de la relation

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_m. \quad (2.17)$$

Cette dernière expression fournit, en effet, la valeur de  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ . L'expression (2.16b) fournissant la valeur de  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ , on aura:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial \tau_m}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

En dérivant l'équation (2.16a), on obtient  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ . Connaissant  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ , on détermine  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (à une constante  $C_1$  près). On trouve de la même manière  $\frac{\partial v}{\partial x}$ , la constante d'intégration étant  $C_2$ . On détermine les valeurs des constantes  $C_1$  et  $C_2$  en substituant les expressions de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  et  $\frac{\partial v}{\partial x}$  dans l'équation (2.17).

Finalement, le système d'équations en  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  fournit les déplacements  $u$  et  $v$ . Les nouvelles constantes d'intégration  $C_3$ ,  $C_4$  apparaissant dans les expressions de  $u$  et  $v$  sont déterminées par les conditions



$$u(0,0) = 0,$$

$$v(0,0) = 0.$$

Nous ne reprendrons pas ici le détail du calcul des déplacements  $u$  et  $v$  dont l'écriture est très pénible. Nous nous contenterons de montrer comment on obtient à partir de  $u$  et  $v$  l'expression de la déformation tangentielle  $\theta$ . On calcule en premier lieu la valeur moyenne du déplacement  $u$  sur le bord  $y=b$ :

$$\bar{u}_{y=b} = \frac{1}{2a} \int_0^{2a} (u_{y=b}) dx.$$

De manière analogue, on détermine la valeur moyenne du déplacement  $u$  sur le bord  $y=0$ :

$$\bar{u}_{y=0} = \frac{1}{2a} \int_0^{2a} (u_{y=0}) dx.$$

L'angle de cisaillement correspondant au déplacement relatif des bords  $y=0$ ,  $y=b$  est donné par

$$\theta_1 = \frac{\bar{u}_{y=b} - \bar{u}_{y=0}}{b}.$$

De même, on calcule à l'aide des relations

$$\bar{v}_{x=2a} = \frac{1}{b} \int_0^b (v_{x=2a}) dy, \quad \bar{v}_{x=0} = \frac{1}{b} \int_0^b (v_{x=0}) dy$$

les valeurs moyennes du déplacement  $v$  aux bords  $x=0$ ,  $x=2a$ . L'angle de cisaillement consécutif au déplacement relatif des bords  $x=0$ ,  $x=2a$  est donné par

$$\theta_2 = \frac{\bar{v}_{x=2a} - \bar{v}_{x=0}}{2a}.$$

La déformation de cisaillement  $\theta$  est la somme  $\theta_1 + \theta_2$

$$\begin{aligned} \theta = f_1 f_3 \left[ -\frac{32a}{b^3} \left( \frac{\alpha^2}{25(1+8\alpha^2+16\alpha^4)} - \frac{49\alpha^2}{25(625+200\alpha^2+16\alpha^4)} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1225\alpha^2}{9(81+1800\alpha^2+10000\alpha^4)} + \frac{25\alpha^2}{9(81+72\alpha^2+16\alpha^4)} \right) - \frac{2b}{a^3} \right. \\ \cdot \left( \frac{\alpha^2}{25(1+8\alpha^2+16\alpha^4)} - \frac{1225\alpha^2}{625+200\alpha^2+16\alpha^4} - \frac{441\alpha^2}{25(81+1800\alpha^2+10000\alpha^4)} \right. \\ \left. + \frac{225\alpha^2}{81+72\alpha^2+16\alpha^4} \right) + \frac{16\nu}{ab} \left( \frac{\alpha^2}{25(1+8\alpha^2+16\alpha^4)} - \frac{49\alpha^2}{625+200\alpha^2+16\alpha^4} \right. \\ \left. \left. - \frac{49\alpha^2}{81+1800\alpha^2+10000\alpha^4} + \frac{25\alpha^2}{81+72\alpha^2+16\alpha^4} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f_1 f_5 \left[ -\frac{32a}{b^3} \left( \frac{100\alpha^2}{9(81+1800\alpha^2+10000\alpha^4)} - \frac{16\alpha^2}{9(81+72\alpha^2+16\alpha^4)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{400\alpha^2}{1+200\alpha^2+10000\alpha^4} + \frac{4\alpha^2}{1+8\alpha^2+16\alpha^4} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{2b}{a^3} \left( \frac{36\alpha^2}{25(81+1800\alpha^2+10000\alpha^4)} - \frac{144\alpha^2}{81+72\alpha^2+16\alpha^4} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{16\alpha^2}{25(1+200\alpha^2+10000\alpha^4)} + \frac{4\alpha^2}{1+8\alpha^2+16\alpha^4} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{64\nu}{ab} \left( \frac{\alpha^2}{81+1800\alpha^2+10000\alpha^4} - \frac{4\alpha^2}{81+72\alpha^2+16\alpha^4} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{4\alpha^2}{1+200\alpha^2+10000\alpha^4} + \frac{\alpha^2}{1+8\alpha^2+16\alpha^4} \right) \right] \\
& + f_2 f_3 \left[ -\frac{32a}{b^3} \left( \frac{-225\alpha^2}{1+72\alpha^2+1296\alpha^4} + \frac{\alpha^2}{1+8\alpha^2+16\alpha^4} \right. \right. \\
& \quad \left. + \frac{9\alpha^2}{49(2401+3528\alpha^2+1296\alpha^4)} - \frac{25\alpha^2}{49(2401+392\alpha^2+16\alpha^4)} \right) - \frac{2b}{a^3} \cdot \\
& \quad \cdot \left( \frac{-25\alpha^2}{9(1+72\alpha^2+1296\alpha^4)} + \frac{\alpha^2}{1+8\alpha^2+16\alpha^4} + \frac{49\alpha^2}{9(2401+3528\alpha^2+1296\alpha^4)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1225\alpha^2}{2401+392\alpha^2+16\alpha^4} \right) + \frac{16\nu}{ab} \left( \frac{-25\alpha^2}{1+72\alpha^2+1296\alpha^4} + \frac{\alpha^2}{1+8\alpha^2+16\alpha^4} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\alpha^2}{2401+3528\alpha^2+1296\alpha^4} - \frac{25\alpha^2}{2401+392\alpha^2+16\alpha^4} \right) \Big] \\
& + f_2 f_5 \left[ -\frac{32a}{b^3} \left( \frac{4\alpha^2}{1+8\alpha^2+16\alpha^4} - \frac{144\alpha^2}{1+72\alpha^2+1296\alpha^4} \right. \right. \\
& \quad \left. + \frac{36\alpha^2}{25(625+1800\alpha^2+1296\alpha^4)} - \frac{16\alpha^2}{25(625+200\alpha^2+16\alpha^4)} \right) - \frac{2b}{a^3} \cdot \\
& \quad \cdot \left( \frac{4\alpha^2}{1+8\alpha^2+16\alpha^4} - \frac{16\alpha^2}{9(1+72\alpha^2+1296\alpha^4)} + \frac{100\alpha^2}{9(625+1800\alpha^2+1296\alpha^4)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{400\alpha^2}{625+200\alpha^2+16\alpha^4} \right) + \frac{64\nu}{ab} \left( \frac{\alpha^2}{1+8\alpha^2+16\alpha^4} - \frac{4\alpha^2}{1+72\alpha^2+1296\alpha^4} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\alpha^2}{625+1800\alpha^2+1296\alpha^4} - \frac{4\alpha^2}{625+200\alpha^2+16\alpha^4} \right) \Big] \\
& + f_3 f_4 \left[ -\frac{32a}{b^3} \left( \frac{\alpha^2}{9(81+72\alpha^2+16\alpha^4)} - \frac{\alpha^2}{9(1+8\alpha^2+16\alpha^4)} \right. \right. \\
& \quad \left. - \frac{9\alpha^2}{25(625+200\alpha^2+16\alpha^4)} + \frac{9\alpha^2}{25(625+1800\alpha^2+1296\alpha^4)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{2b}{a^3} \left( \frac{9\alpha^2}{81+72\alpha^2+16\alpha^4} - \frac{\alpha^2}{9(1+8\alpha^2+16\alpha^4)} - \frac{225\alpha^2}{625+200\alpha^2+16\alpha^4} \right. \right. \\
& \quad \left. + \frac{25\alpha^2}{9(625+1800\alpha^2+1296\alpha^4)} + \frac{16\nu}{ab} \left( \frac{\alpha^2}{81+72\alpha^2+16\alpha^4} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\alpha^2}{9(1+8\alpha^2+16\alpha^4)} - \frac{9\alpha^2}{625+200\alpha^2+16\alpha^4} + \frac{\alpha^2}{625+1800\alpha^2+1296\alpha^4} \Big) \Big] \\
& + f_3 f_6 \left[ - \frac{32a}{b^3} \left( \frac{9\alpha^2}{1+8\alpha^2+16\alpha^4} - \frac{2025\alpha^2}{1+200\alpha^2+10000\alpha^4} \right. \right. \\
& \quad - \frac{81\alpha^2}{49(2401+392\alpha^2+16\alpha^4)} + \frac{225\alpha^2}{49(2401+9800\alpha^2+10000\alpha^4)} \Big) \\
& \quad - \frac{2b}{a^3} \left( \frac{9\alpha^2}{1+8\alpha^2+16\alpha^4} - \frac{81\alpha^2}{25(1+200\alpha^2+10000\alpha^4)} \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{3969\alpha^2}{2401+392\alpha^2+16\alpha^4} + \frac{441\alpha^2}{25(2401+9800\alpha^2+10000\alpha^4)} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{16\nu}{ab} \left( \frac{9\alpha^2}{1+8\alpha^2+16\alpha^4} - \frac{81\alpha^2}{1+200\alpha^2+10000\alpha^4} - \frac{81\alpha^2}{2401+392\alpha^2+16\alpha^4} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{9\alpha^2}{2401+9800\alpha^2+10000\alpha^4} \right) \right] \\
& + f_4 f_5 \left[ - \frac{4a}{b^3} \left( \frac{-288\alpha^2}{1+72\alpha^2+1296\alpha^4} - \frac{32}{9} \frac{\alpha^2}{81+72\alpha^2+16\alpha^4} \right) \right. \\
& \quad + \frac{2b}{a^3} \left( \frac{4}{9} \frac{\alpha^2}{1+72\alpha^2+1296\alpha^4} + \frac{36\alpha^2}{81+72\alpha^2+16\alpha^4} \right) \\
& \quad \left. + \frac{4\nu}{ab} \left( - \frac{16\alpha^2}{1+72\alpha^2+1296\alpha^4} - \frac{-16\alpha^2}{81+72\alpha^2+16\alpha^4} \right) \right] \\
& + f_5 f_6 \left[ - \frac{4a}{b^3} \left( \frac{-7200\alpha^2}{1+200\alpha^2+10000\alpha^4} - \frac{288}{25} \frac{\alpha^2}{625+200\alpha^2+16\alpha^4} \right) \right. \\
& \quad + \frac{2b}{a^3} \left( \frac{36}{25} \frac{\alpha^2}{1+200\alpha^2+10000\alpha^4} + \frac{900\alpha^2}{625+200\alpha^2+16\alpha^4} \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{4\nu}{ab} \left( \frac{-144\alpha^2}{1+200\alpha^2+10000\alpha^4} - \frac{144\alpha^2}{625+200\alpha^2+16\alpha^4} \right) \right) \right] + \frac{2(1+\nu)}{E} \tau. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

### 2.5. Détermination des paramètres $f_i$ par la méthode énergétique

Nous avons obtenu l'expression  $\Phi$  de la fonction d'Airy génératrice des tensions de membrane et celles des déplacements  $e_x$ ,  $e_y$  des bords opposés de la plaque. Ces quantités sont fonctions des paramètres  $f_i$  caractérisant la déformée (2.11) de la plaque.

Nous allons déterminer ces paramètres à l'aide de la méthode énergétique de Rayleigh-Ritz.

Cette méthode consiste à calculer la variation que subit l'énergie potentielle totale de la plaque par suite du voilement. Pour la déformée de voilement réelle  $w(x, y)$ , la variation de l'énergie totale atteint une valeur minimum.

Pour trouver le développement de la forme (2.11) qui représente la déformée réelle, on doit donc choisir les paramètres  $f_i$  de manière à rendre l'énergie minimum; les conditions à remplir sont, d'après le calcul différentiel,



$$\frac{\partial E}{\partial f_i} = 0 \quad \text{quel que soit } i. \quad (2.19)$$

Les équations (2.19) remplacent l'équation d'équilibre (2.2b).

L'énergie totale emmagasinée dans la plaque peut s'écrire sous la forme

$$E = V + T, \quad (2.20)$$

où  $V$  est l'énergie des forces intérieures et  $T$  l'énergie des forces extérieures. La composante  $V$  est la somme de l'énergie potentielle  $V_m$  de déformation du feuillet moyen de la plaque, de l'énergie  $V_f$  de flexion et de l'énergie  $V_r$  emmagasinée dans le raidisseur:

$$V = V_m + V_r^f + V_m^f. \quad (2.21)$$

Les trois composantes de l'énergie des forces intérieures sont données par les relations

$$V_m = \frac{e}{2E} \int_0^{2a} \int_0^b [(\sigma_{xm} + \sigma_{ym})^2 + 2(1+\nu)(\sigma_{xm}\sigma_{ym} - \tau_m^2)] dx dy, \quad (2.22a)$$

où  $\sigma_{xm}$ ,  $\sigma_{ym}$ ,  $\tau_m$  sont les tensions de membrane.

$$V_f = \frac{D}{2} \int_0^{2a} \int_0^b \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy, \quad (2.22b)$$

où  $D = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)}$  est la rigidité flexionnelle de la plaque.

$$V_r = V_r + V_m, \quad (2.22c)$$

où l'énergie de flexion du raidisseur vaut

$$V_r^f = \frac{1}{2} E I_r \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} \right]^2 dy \quad (2.22d)$$

tandis que l'énergie de déformation axiale du raidisseur vaut

$$V_r^m = \frac{\Omega_r}{E} \int_0^b [\sigma_r]^2 dy. \quad (2.22e)$$

$E I_r$  et  $\Omega_r$  étant respectivement la rigidité flexionnelle et l'aire de la section droite du raidisseur.  $\sigma_r$  désigne la sollicitation axiale du raidisseur, dont la détermination exacte ne peut se faire qu'en tenant compte de l'interaction entre la plaque et le raidisseur.

Dans le cas particulier des plaques appuyées ou encastrées sur leur contour, on sait par le théorème de Gauss que

$$\int_0^{2a} \int_0^b \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0,$$

ce qui permet de simplifier l'écriture de  $V_f$ :

$$V_f = \frac{D}{2} \int_0^{2a} \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy. \quad (2.22 f)$$

L'énergie  $T$  des forces extérieures a pour expression:

$$\begin{aligned} T = & - \left\{ e \int_0^b \left[ p_x u + \tau v + \left( p_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau \frac{\partial w}{\partial y} \right) w \right] dy \right\}_{x=0}^{x=2a} \\ & - \left\{ e \int_0^{2a} \left[ p_y v + \tau u + \left( p_y \frac{\partial w}{\partial y} + \tau \frac{\partial w}{\partial x} \right) w \right] dx \right\}_{y=0}^{y=b}. \end{aligned} \quad (2.22 g)$$

Dans le cas d'une plaque appuyée sur son contour, on a

$$w = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, \quad 2a \quad \text{et pour} \quad y = 0, \quad b,$$

ce qui permet d'écrire l'expression (2.22g) sous la forme

$$T = - \left[ e \int_0^b (p_x u + \tau v) dy \right]_{x=0}^{x=2a} - \left[ e \int_0^{2a} (p_y v + \tau u) dx \right]_{y=0}^{y=b}. \quad (2.22 h)$$

Tous calculs faits, cette dernière expression se réduit à

$$T = -2ab e (p_x e_x + p_y e_y + \tau \theta), \quad (2.22 i)$$

où  $e_x, e_y$  représentent les rapprochements des bords et  $\theta$  la déformation tangentielle de la plaque.

Les composantes de l'énergie emmagasinée dans la plaque par suite du voilement sont fonctions des quantités  $e_x, e_y, p_x, p_y$  dont la valeur dépend des conditions aux limites pour le déplacement des bords de la plaque. Nous allons considérer deux cas:

1. Les bords se rapprochent librement:

$$p_x = p_y = 0. \quad (2.23)$$

2. Les bords ne peuvent pas se rapprocher:

$$e_x = e_y = 0. \quad (2.24)$$

Dans le cas (2.24), les expressions (2.15) égalées à zéro fournissent les valeurs suivantes de  $p_x$  et  $p_y$ :

$$p_x = - \frac{\pi^2 E}{2(1-\nu^2)} \left[ \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \left( \frac{f_1^2}{4} + f_2^2 + \frac{9f_3^2}{4} \right) + \left( \frac{1}{4a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \left( \frac{f_4^2}{4} + f_5^2 + \frac{9f_6^2}{4} \right) \right], \quad (2.25 a)$$

$$p_y = - \frac{\pi^2 E}{2(1-\nu^2)} \left[ \left( \frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \left( \frac{f_1^2}{4} + f_2^2 + \frac{9f_3^2}{4} \right) + \left( \frac{\nu}{4a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \left( \frac{f_4^2}{4} + f_5^2 + \frac{9f_6^2}{4} \right) \right]. \quad (2.25 b)$$

Les conditions aux limites une fois précisées, on calcule l'énergie potentielle de déformation de la plaque à l'aide des formules (2.20) (2.21) (2.22). Les équations  $\frac{\partial E}{\partial f_i} = 0$  fournissent un système de 6 équations à 6 inconnues du 3e degré permettant de déterminer les 6 paramètres  $f_i$  en fonction de la charge et du raidissage de la plaque.

Nous caractériserons la charge de la plaque par le rapport  $\tau/\tau_{cr}^*$  où  $\tau_{cr}^*$  est la charge critique de la plaque non-raïdie.

On supposera le raidisseur fixé par moitiés symétriquement de part et d'autre de la plaque. Si on désigne par  $I_r$  son moment d'inertie relatif à la flexion normale au plan de la plaque, on peut caractériser le raidisseur par sa rigidité relative:

$$\gamma = \frac{\text{rigidité du raidisseur}}{\text{rigidité de la plaque}} = \frac{E I_r}{b D}$$

ou encore par le rapport  $\gamma/\gamma^*$  où  $\gamma^*$  est la rigidité relative du raidisseur strictement rigide<sup>1)</sup> ou rigidité optimale.

Dans le cas d'une plaque cisaillée uniformément dans son plan, et munie d'un raidisseur médian, la rigidité optimale de troisième espèce vaut:

$$\gamma^* = 5,4 \beta^2 (2 \beta + 2,5 \beta^2 - \beta^3 - 1),$$

où  $\beta$  désigne le rapport  $\frac{2a}{b}$  des côtés de la plaque.

<sup>1)</sup> On sait que, quand le raidisseur coïncide avec une ligne nodale de la deuxième forme du voilement, on peut définir une rigidité (relative) optimum de première espèce  $\gamma^*$  (E. Chwalla, Stahlbau, Vol. 17, p. 84—88, 1944) qui est la rigidité pour laquelle le coefficient de voilement du panneau raidi est égale à celui du demi-panneau supposé librement appuyé sur son contour.

Si l'on néglige la rigidité torsionnelle du raidisseur, la courbe du coefficient de voilement  $k$  en fonction de  $\gamma$  a, dans ce cas, la forme de la figure ci-contre et l'on voit qu'il n'y a aucun intérêt à augmenter  $\gamma$  au-delà de  $\gamma^*$ .

Au contraire, dans le cas actuel, la ligne nodale de la deuxième forme de voilement ne coïncide pas avec l'axe du raidisseur et, par conséquent, on ne peut définir qu'une rigidité optimum  $\gamma^*$  de troisième espèce; c'est la rigidité relative du raidisseur pour laquelle le coefficient de voilement de la plaque raidie devient égal à celui du demi-panneau supposé librement appuyé sur ses bords. En réalité, le diagramme fig. 3 montre que  $k$  continue encore à augmenter quand  $\gamma$  excède  $\gamma^*$ . Cette augmentation de  $k$  au delà de  $k_{max}$  est faible et est toujours inférieure à 20 pour cent. C'est pourquoi elle est généralement négligée, de manière à pouvoir déterminer  $k_{max}$  aisément dans une plaque munie de plusieurs raidisseurs, comme étant le coefficient de voilement du panneau partiel le moins stable, supposé indépendant des autres panneaux et librement appuyé sur ses quatre bords. Ce principe sert, par exemple, de base aux abaques publiés par Klöppel et Scheer (Beulwerte ausgesteifter Rechteckplatten, W. Ernst & Sohn, Berlin, 1960).

Néanmoins, nous devons évidemment tenir compte, dans la présente étude, du comportement réel de la plaque raidie et, en particulier de l'augmentation de  $k$  au delà de la valeur arbitraire  $k_{max}$  correspondant à la rigidité optimum de troisième espèce  $\gamma^*$ .



Dans le cas d'une plaque carrée ( $\beta = 1$ ), on a  $\gamma^* = 13,5$ . Comme le raidisseur n'est pas sollicité axialement, son second paramètre caractéristique, à savoir le rapport  $\delta = \frac{\Omega_r}{bE}$  de la section droite du raidisseur à la section droite de la plaque, ne joue aucun rôle dans les calculs.

### 3. Etude numérique du comportement postcritique d'une plaque carrée raidie cisailée uniformément

En vue de simplifier au maximum les calculs numériques, nous admettons les hypothèses suivantes:

- Les bords opposés de la plaque restent rectilignes pendant le voilement et se rapprochent librement ( $p_x = p_y = 0$ ).
- La section droite  $\Omega_r$  du raidisseur est nulle. Le but de notre étude étant d'étudier l'effet de la rigidité flexionnelle du raidisseur, cette simplification est admissible.

#### 3.1. Tensions critiques de voilement en fonction de la rigidité relative du raidisseur

En linéarisant le système d'équations du 3e degré

$$\frac{\partial E}{\partial f_i} = 0$$

traduisant le minimum de l'énergie potentielle de la plaque, on obtient un système linéaire et homogène de 6 équations à 6 inconnues où les coefficients des  $f_i$  sont fonctions du cisaillement  $\tau$ , de la géométrie de la plaque et du rapport  $\gamma/\gamma^*$  caractéristique du raidissage.

Ce système s'écrit pour le cas qui nous occupe

$$\begin{aligned} & \left(2,289377 + 50,0715 \frac{\gamma}{\gamma^*}\right) f'_1 + (0,259380 k) f'_3 + (0,648457 k) f'_5 - \left(50,0715 \frac{\gamma}{\gamma^*}\right) f'_6 = 0, \\ & \left(2,289377 + 0,618156 \frac{\gamma}{\gamma^*}\right) f'_2 - (0,926366 k) f'_3 - \left(0,618156 \frac{\gamma}{\gamma^*}\right) f'_4 \\ & \quad + (0,648457 k) f'_5 = 0, \\ & (0,259380 k) f'_1 - (0,926366 k) f'_2 + 9,157509 f'_3 - (0,144095 k) f'_4 + (1,667458 k) f'_6 = 0, \\ & - \left(0,618156 \frac{\gamma}{\gamma^*}\right) f'_2 - (0,144095 k) f'_3 + \left(0,091575 + 0,618156 \frac{\gamma}{\gamma^*}\right) f'_4 \\ & \quad - (0,360253 k) f'_5 = 0, \\ & (0,648457 k) f'_1 + (0,648457 k) f'_2 - (0,360253 k) f'_4 + 1,465164 f'_5 - (1,167220 k) f'_6 = 0, \\ & - \left(50,0715 \frac{\gamma}{\gamma^*}\right) f'_1 + (1,667458 k) f'_3 - (1,167220 k) f'_5 \\ & \quad + \left(7,417582 + 50,0715 \frac{\gamma}{\gamma^*}\right) f'_6 = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

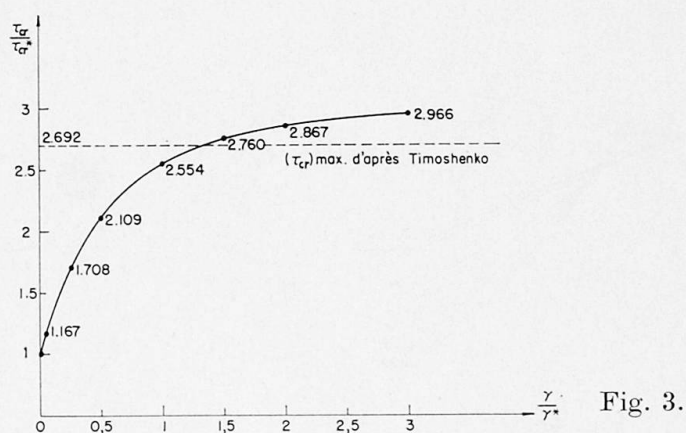
Le système précédent n'a de solutions non nulles qu'à la condition que le déterminant des coefficients des inconnues  $f_i$  soit égal à zéro.

L'annulation du déterminant en question fournit la valeur de la charge critique de voilement de la plaque en fonction du raidissage  $\gamma/\gamma^*$ .

Les calculs ont été faits à l'aide de la calculatrice électronique Bull Gamma ET de l'Université de Liège et ont donné les résultats consignés au tableau suivant:

$\gamma/\gamma^*$	$k$	$\tau/\tau_{cr}^*$
0	0,86253	1,000
0,125	1,2140	1,167
0,25	1,4733	1,708
0,5	1,8101	2,109
1	2,2027	2,554
1,5	2,3808	2,760
2	2,4720	2,867
3	2,5583	2,966

La courbe de la fig. 3 montre la variation du rapport  $\tau_{cr}/\tau_{cr}^*$  en fonction de  $\gamma/\gamma^*$ .



### 3.2. Calcul des paramètres caractérisant la déformée de voilement

Les valeurs des paramètres  $f_i$  caractérisant la déformée sont les solutions du système du 3e degré à 6 inconnues

$$\frac{\partial E}{\partial f_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, 6).$$

Nous avons résolu ce système pour différentes valeurs de la charge  $\tau/\tau_{cr}^*$  et du raidissage  $\gamma/\gamma^*$ .

Ces calculs ont été faits à l'aide de la calculatrice Bull Gamma ET par une méthode d'approximations successives analogue à la méthode des tangentes de Newton.

Les résultats obtenus ont été consignés sous forme de graphiques (fig. 4) où l'on porte, pour chaque valeur de  $\gamma/\gamma^*$ , et en fonction de  $\tau/\tau_{cr}^*$  la valeur du rapport  $f'_i = f_i/e$  ( $e$  étant l'épaisseur de la plaque).

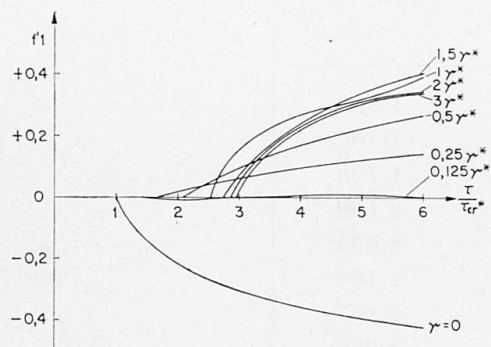


Fig. 4a.

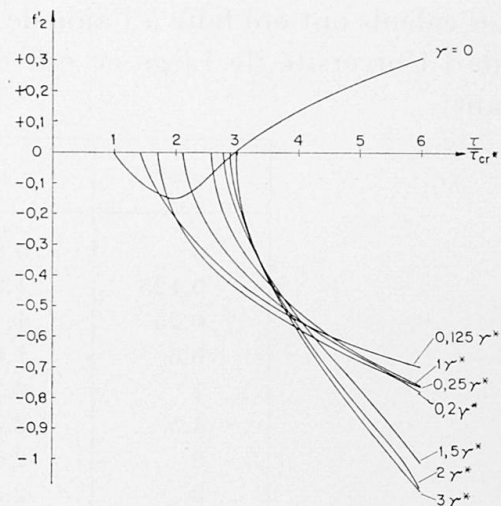


Fig. 4b.

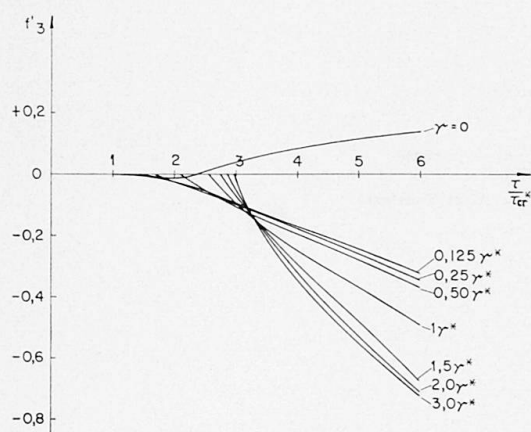


Fig. 4c.

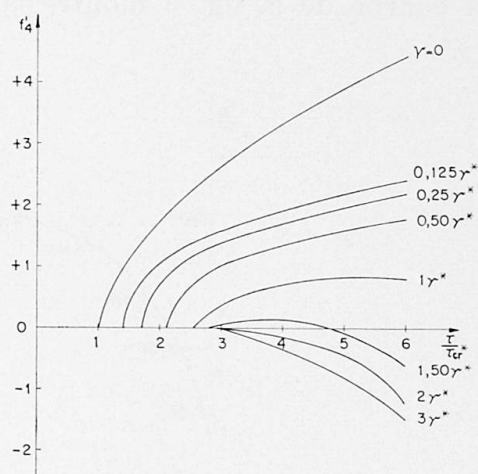


Fig. 4d.

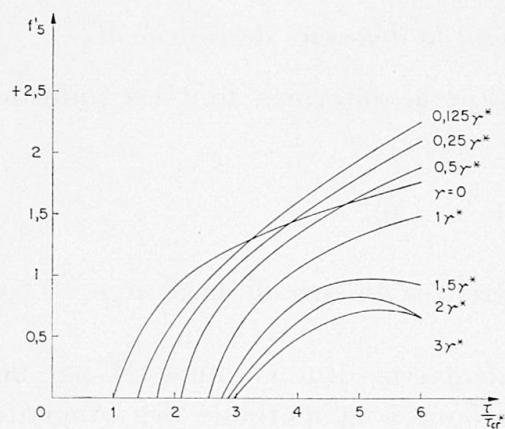


Fig. 4e.

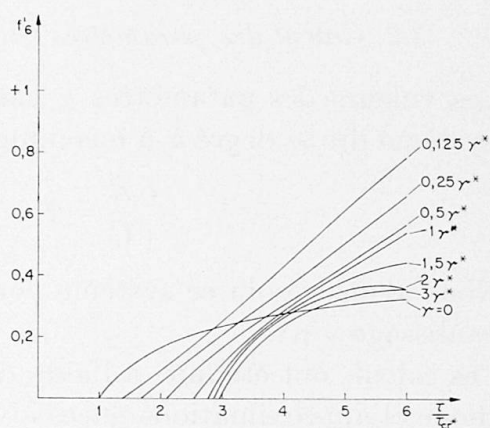


Fig. 4f.



#### 4. Etat de déformation de la plaque dans le domaine postcritique

##### 4.1. Déformée postcritique de la plaque

La déformée de la plaque dans le domaine postcritique s'obtient immédiatement en introduisant dans l'expression (2.11) les valeurs des paramètres  $f_i$  résultant des figures 4.

Nous avons calculé en fonction de la charge  $\tau/\tau_{cr}^*$  le déplacement transversal de la plaque aux différents points définis par les coordonnées

$$\frac{x}{a} = 0, 0,25, 0,50, 0,75, 1, 1,25, 1,50, 1,75, 2;$$

$$\frac{y}{b} = 0, 0,125, 0,250, 0,375, 0,500, 0,625, 0,750, 0,875, 1.$$

Les valeurs du raidissage considérées sont

$$\frac{\gamma}{\gamma^*} = 0, 0,125, 0,25, 0,5, 1, 1,5, 2, 3.$$

De ces résultats, nous retiendrons:

- a) L'évolution, en fonction de  $\tau/\tau_{cr}^*$ , de la flèche du raidisseur

$$\frac{f_{raid}}{e} = -f'_1 - f'_2 + f'_4 + f'_6.$$

C'est ce que traduisent les courbes de la figure (5a) cotées en valeur de  $\gamma/\gamma^*$ .

- b) Le déplacement transversal du centre de chacun des panneaux encadrant le raidisseur (Fig. 5b). Conformément à la figure 6, nous désignerons ce déplacement par  $w_p$  avec

$$\frac{w_p}{e} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-f'_1 + f'_2 + f'_4 - f'_6).$$

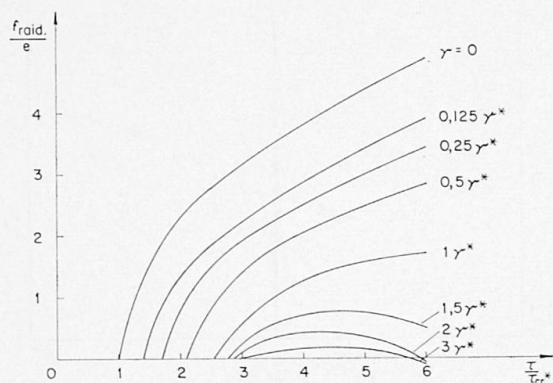


Fig. 5a.

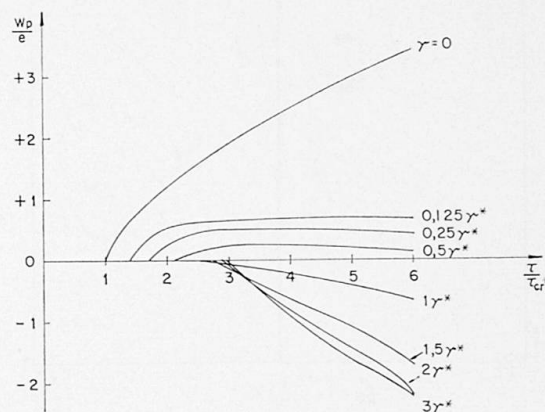


Fig. 5b.



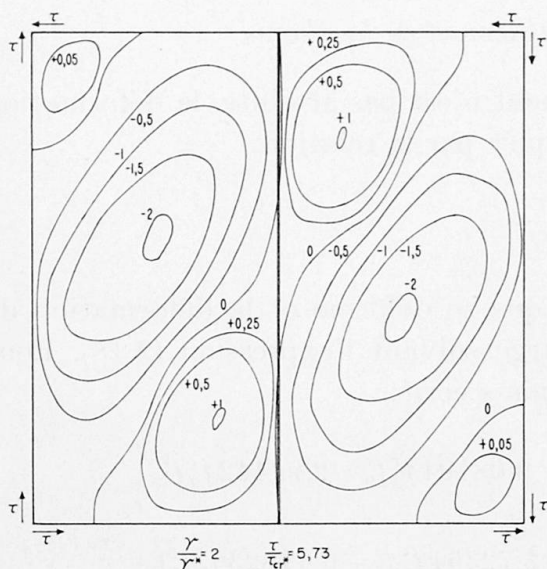


Fig. 7e.

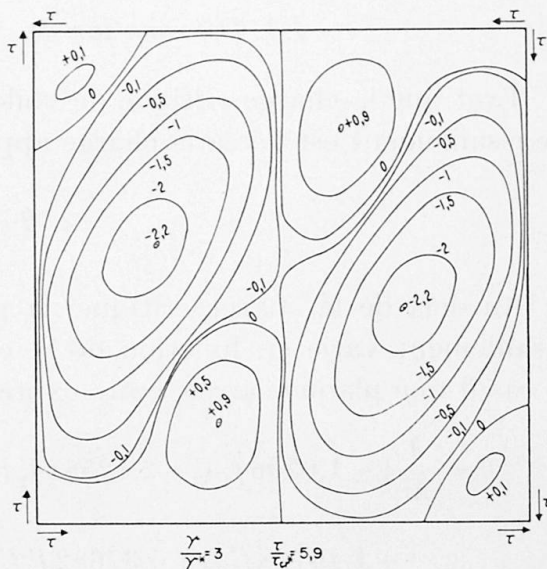


Fig. 7f.

L'examen de ces figures permet déjà de se rendre compte du degré d'efficacité de chacun des raidisseurs, notion que nous allons préciser quelque peu.

#### 4.2. Efficacité du raidissage

En ce qui concerne le comportement du raidisseur dans le domaine post-critique, la figure 5a montre clairement qu'il existe une similitude avec le diagramme  $(P, f)$  d'une barre comprimée idéale avec grandes déformations (fig. 8).

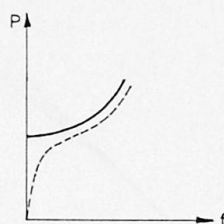


Fig. 8.

Par analogie avec cette barre, nous pouvons prévoir (malgré que les calculs correspondants n'aient pas été faits) que le comportement d'une plaque raidie à courbure initiale sera représenté par les courbes pointillées de la fig. 9 analogue à celle de la fig. 8.

Ainsi donc, le raidisseur de rigidité  $\gamma > \gamma^*$  ne reste pas rectiligne dans le domaine postcritique. Sa loi déformation-charge est hyperbolique au début de la déformation, et est ensuite freinée par le développement de tensions de membrane stabilisantes, la grandeur de la flèche du raidisseur dépendant de sa rigidité flexionnelle.



### 4.3. Déformation de cisaillement de la plaque

Tant que la charge critique de voilement n'est pas atteinte, la déformation de cisaillement est liée à la charge appliquée par la relation

$$\theta = \frac{\tau}{G}.$$

Au delà de la charge critique, la plaque se déforme et la déformation de cisaillement varie en fonction de la charge suivant l'expression (2.18). Pour le cas d'une plaque carrée, cette expression s'écrit:

$$\begin{aligned} \theta = \frac{1}{\lambda^2} [ & -1,0506 f'_1 f'_3 + 2,12582 f'_1 f'_5 + 9,08194 f'_2 f'_3 + 2,94442 f'_2 f'_5 \\ & + 1,46728 f'_3 f'_4 + 5,37682 f'_3 f'_6 + 2,72354 f'_4 f'_5 + 6,41823 f'_5 f'_6 ] + \frac{\tau}{G}. \end{aligned}$$

Les courbes de la figure 9 donnent la valeur du rapport  $\theta/\theta_{cr}^*$  en fonction de  $\tau/\tau_{cr}^*$ ,  $\theta_{cr}^*$  étant défini par

$$\theta_{cr}^* = \frac{\tau_{cr}^*}{G}.$$

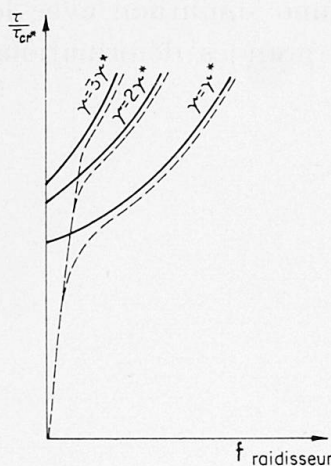


Fig. 9.

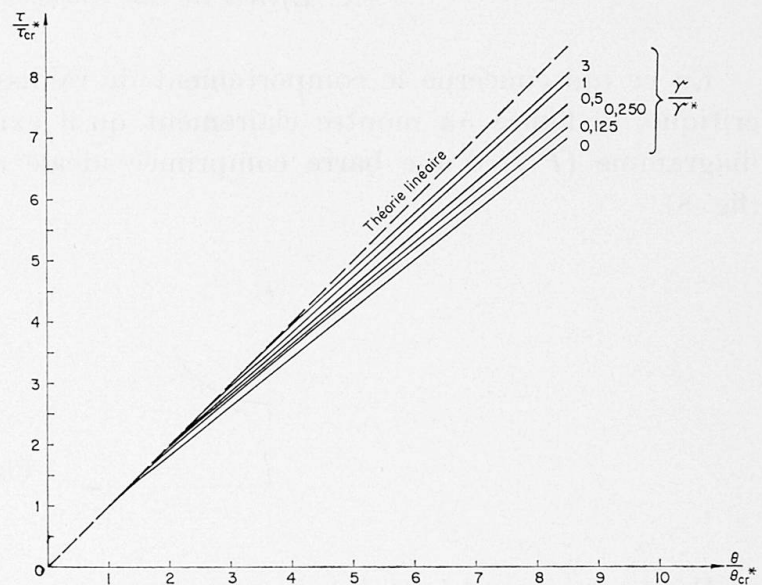


Fig. 10.

## 5. Conclusions

Il ressort d'une analyse des figures 5—9 que l'efficacité du raidisseur vertical, dont la rigidité flexionnelle égale la valeur optimum théorique  $\gamma^*$ , est limitée, en ce sens qu'un tel raidisseur fléchit dès le début du domaine post-

critique et n'apporte pas à la plaque le même soutien qu'un raidisseur de rigidité relative  $\gamma$  plus grande, qui reste quasi-rectiligne jusqu'à la ruine d'ensemble de la poutre à âme pleine.

Cette conclusion est en parfait accord avec les résultats expérimentaux obtenus antérieurement par l'un des auteurs. Afin que le raidisseur reste quasi-rectiligne dans tout le domaine hypercritique, il faut augmenter sa rigidité flexionnelle selon la formule

$$\gamma_0 = 3\gamma^*.$$

### Résumé

Ce mémoire étudie théoriquement le comportement d'un panneau d'acier carré appuyé sur ses quatre bords, renforcé par un raidisseur médian et soumis dans son plan au cisaillement pur, en intégrant les équations couplées non-linéaires de von Kármán à l'aide de la méthode énergétique. Les calculs numériques sont exécutés sur ordinateur.

L'analyse montre que l'efficacité du raidisseur vertical, dont la rigidité flexionnelle égale la valeur optimum théorique  $\gamma^*$ , est limitée, en ce sens qu'un tel raidisseur fléchit dès le début du domaine post-critique et n'apporte pas à la plaque le même soutien qu'un raidisseur de rigidité relative  $\gamma$  plus grande, qui reste quasi-rectiligne jusqu'à la ruine d'ensemble de la poutre à âme pleine.

### Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird das Verhalten einer quadratischen Stahlplatte, die an ihren vier Kanten unterstützt, durch eine Mittelaussteifung verstärkt und in ihrer Ebene reinem Schub unterworfen wird, rechnerisch untersucht, indem die gekoppelten, nichtlinearen Kármánschen Gleichungen mit Hilfe der energetischen Methode integriert werden. Die Zahlenrechnungen sind auf einem Rechengesetz durchgeführt worden.

Die Untersuchung zeigt, daß der Wirkungsgrad der vertikalen Aussteifung, deren Biegefestigkeit dem theoretischen optimalen Wert  $\gamma^*$  gleich ist, insofern begrenzt ist, als eine solche Aussteifung sich mit Beginn des überkritischen Bereichs biegt und der Platte nicht dieselbe Stützung bringt wie eine Aussteifung der relativen Steifigkeit  $\gamma$ , die bis zum totalen Bruch des vollwandigen Balkens quasi geradlinig bleibt.

### Summary

This paper is a theoretical study of the behaviour of a square steel plate supported on its four edges, strengthened by a median stiffener and subjected,

in its plane, to pure shearing stress, by integrating the coupled, non-linear von Kármán equations by means of energy method. The numerical calculations are carried out with a computer.

The analysis shows that the efficiency of the vertical stiffener, the flexural rigidity of which is equal to the theoretical optimum value  $\gamma^*$ , is limited, in that a stiffener of this kind buckles at the commencement of the post-critical range and does not provide the plate with the same support as a stiffener of greater relative rigidity  $\gamma$ , which remains practically rectilinear until the failure of the entire plate girder.