

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 27 (1967)

Artikel: Zur praktischen Kippberechnung von I-Trägern, belastet durch Endmomente, Streckenlast und Axialkraft
Autor: Loos, W. / Goeben, H.-E. / Franke, H.-W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21543>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur praktischen Kippberechnung von I-Trägern, belastet durch Endmomente, Streckenlast und Axialkraft

*Practical Calculation of the Lateral Instability of I Beams Subjected
to Terminal Moments, Distributed Load and Axial Load*

*Sur le calcul pratique de la stabilité des poutres en I soumises à des moments
appliqués aux extrémités, à des charges linéaires et à des efforts axiaux*

W. LOOS

Dr.-Ing.

H.-E. GOEBEN

Dipl.-Ing.

Hochschule für Bauwesen Leipzig

H.-W. FRANKE

Dipl.-Ing.

1. Problemstellung

Im folgenden wird ein Näherungsverfahren zur praktischen Kippberechnung doppelsymmetrischer I-Träger, belastet durch ungleiche Endmomente, Gleichstreckenlast und Axialdruckkraft, angegeben. Dieses Problem tritt beispielsweise beim Nachweis der seitlichen Stabilität von Rahmentragwerken und durchlaufenden Trägern auf.

Seine Lösung bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten. So geben CHWALLA [1] und davon ausgehend WITTE [2] eine Lösung mit der Energiemethode an. Der eingliedrige Ansatz liefert die Beziehungen nach [3]. Wechseln die Endmomente das Vorzeichen, ist ein zweigliedriger und für bestimmte Belastungsverhältnisse sogar ein dreigliedriger Ansatz notwendig, um einigermassen genaue Ergebnisse zu erhalten. Damit wächst aber der Aufwand in einem Maße, daß er in keinem Verhältnis mehr zum zu lösenden Problem steht.

Man erhält ein relativ einfaches Näherungsverfahren, wenn man Momenten- und Axialdruckbelastung getrennt behandelt und anschließend überlagert. Diese Methode wurde für das vorliegende Problem erstmalig von STÜSSI [4] gezeigt. Er behandelt die Lastfälle « $M(z) = \text{const}$ », «Einzellast in Feldmitte» und «Einseitiges Randmoment». SALVADORI [5] löste den Lastfall «Ungleiche Randmomente» (s. a. BÜRGERMEISTER-STEUP [6]). Die Druckkraft ist dabei stets konstant über die Trägerlänge.

Die vorliegende Arbeit benutzt die gleiche Methode und stellt damit im Prinzip eine Erweiterung des Verfahrens von SALVADORI dar.

2. Voraussetzungen

Es gelten die gewöhnlichen Annahmen der klassischen Kipptheorie

Gabellagerung beider Stabenden,
Belastung nach Fig. 1 (richtungstreu).

3. Bezeichnungen

$B_y^* = B_y k_3^2;$	
$C^* = C - N_{Ki} i_p^2;$	
$B_y = E I_y$	Querbiegesteifigkeit;
$C = G I_D$	St. Venantsche Drillsteifigkeit;
$D = E C_M$	Wölbsteifigkeit;
y_A	Abstand Lastangriffspunkt-Schubmittelpunkt (s. Fig. 2; Vorzeichen beachten!);
$a^{*2} = \frac{4 C^* l^2}{B_y h^2};$	
k_1, k_2, k_3	Koeffizienten nach Fig. 3, 4, 5;
$r = \frac{M_1}{M_2};$	
$s = \frac{M_p}{M_2} \left(M_p = \frac{p_y l^2}{8} \right);$	
$t = \nu_{Ki} N_{vorh} \frac{l^2}{\pi^2 B_y};$	
ν_{Ki}	ideelle Sicherheit.

4. Allgemeine Grundlagen

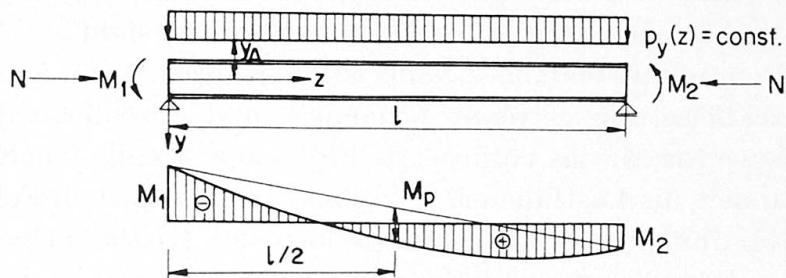


Fig. 1. Belastungsbild des untersuchten einfeldrigen doppeltsymmetrischen I-Trägers.

Bei Erreichen der Stabilitätsgrenze weist der Träger nach Fig. 1 folgenden Verformungszustand an der Stelle z auf:

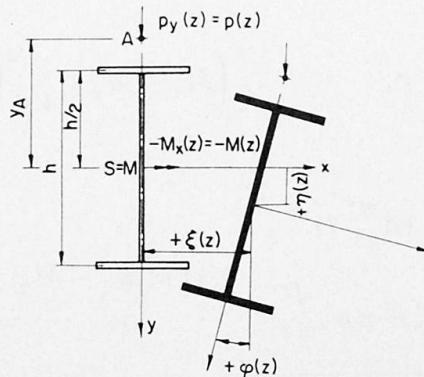


Fig. 2. Querschnitt des ausgekippten Trägers an der Stelle z .

Die beiden gekoppelten Differentialgleichungen für das Kräftegleichgewicht am verformten System lauten:

$$B_y \xi''' = -N \xi'' - (M \varphi)'', \quad (1)$$

$$D \varphi''' - C \varphi'' = -N i_p^2 \varphi'' - M \xi'' - p y_A \varphi. \quad (2)$$

Eine exakte Lösung ist möglich für den Fall $M(z) = \text{const}$ («Biegedrillknicken planmäßig außermittig gedrückter Stäbe»).

Bei der Wahl eines Näherungsverfahrens ist zu beachten, daß im allgemeinen Belastungsfall nach Fig. 1 die Eigenfunktionen ξ und φ über die Trägerlänge l recht ungleichmäßig verlaufen. Bei Annäherung durch Reihenansätze sind eine größere Anzahl von Gliedern, bei einem Differenzenverfahren eine enge Intervallteilung notwendig. Dabei soll aber das Ergebnis in allgemeiner und möglichst einfacher Form erhalten werden.

Für die Lösung des Problems ist deshalb die Anwendung eines energetischen Verfahrens, beispielsweise nach RITZ oder GALERKIN (siehe WITTE [2]; beide Verfahren stellen für den vorliegenden Fall nur verschiedene Schreibweisen dar und liefern die gleichen Ergebnisse), sinnvoll.

Nähert man sowohl ξ als auch φ an durch die Reihe

$$f(z) = \sum_n a_i \sin \frac{\pi i z}{l}, \quad (3)$$

so erhält man als Stabilitätskriterium für den eingliedrigen Ansatz (s. [2])

$$D_K = \frac{\left| \begin{array}{c} C + \frac{\pi^2}{l^2} D - N i_p^2 \\ + p y_A \frac{l^2}{\pi^2} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} \frac{l}{2} \left(M_1 + M_2 + \frac{p l^2}{4,6} \right) \\ \pi^2 B_y - N l^2 \end{array} \right|} = 0 \quad (4)$$

und für den zweigliedrigen Ansatz

Die Anwendbarkeit des eingliedrigen Ansatzes bleibt bis auf wenige Ausnahmen beschränkt auf den Fall, daß das Vorzeichen der Biegemomente $M(z)$ über die Trägerlänge nicht wechselt. Für bestimmte Belastungsverhältnisse — die Maxima der Kurven in Fig. 3 — entstehen auch beim zweigliedrigen Ansatz größere Fehler (ca. 30%; die entsprechenden Folgerungen WITTES [2] sind nicht richtig). Da die Energieverfahren stets zu hohe kritische Werte liefern, ist also einer allgemeingültigen Lösung mindestens der dreigliedrige Ansatz zugrunde zu legen. Der Aufwand wird damit unerträglich hoch.

Die Rechnung vereinfacht sich beträchtlich, wenn man die Axialkraft N zunächst außer acht läßt, d. h. das Problem für $N = 0$ löst und anschließend die Lösung gemäß dem jeweils vorliegenden Einfluß von N korrigiert. Dieses Verfahren wird auch der Tatsache gerecht, daß in vielen Fällen N tatsächlich gleich Null ist. Das gilt zum Beispiel oft für Durchlaufträger.

5. Lastfall A. M_1, M_2, p_y nach Fig. 1, $N=0$

Um eine einfache Näherungslösung für diesen Fall zu finden, soll ein Weg beschritten werden, wie er im Prinzip von STÜSSI [4], SALVADORI [5] u. a. schon gezeigt wurde.

Zunächst wird angenommen, daß der Querschnitt wölf frei und die Lastausmitte $y_4 = 0$ sind.

Die exakte Lösung der sich aus (1) und (2) ergebenden Differentialgleichung

$$-C\varphi'' = \frac{M^2}{B_u}\varphi \quad (6)$$

lautet für $M(z) = \text{const}$

$$M_{Ki} = \frac{\pi}{l} \sqrt{B_y C}. \quad (7)$$

Diese Beziehung bleibt exakt allgemeingültig, wenn man für π einen nur vom Lastfall, d. h. vom Verlauf der Funktion $M(z)$ über die Länge l , abhängigen Koeffizienten k_1 einführt.

$$M_{2, Ki} = \frac{k_1}{l} \sqrt{B_y C}.^1 \quad (8)$$

Die Genauigkeit dieser Formel hängt also nur von der Genauigkeit des Wertes k_1 ab. Ein dreigliedriger Ritz-Ansatz ergab in Abhängigkeit von den Belastungsparametern die k_1 -Werte nach Fig. 3.

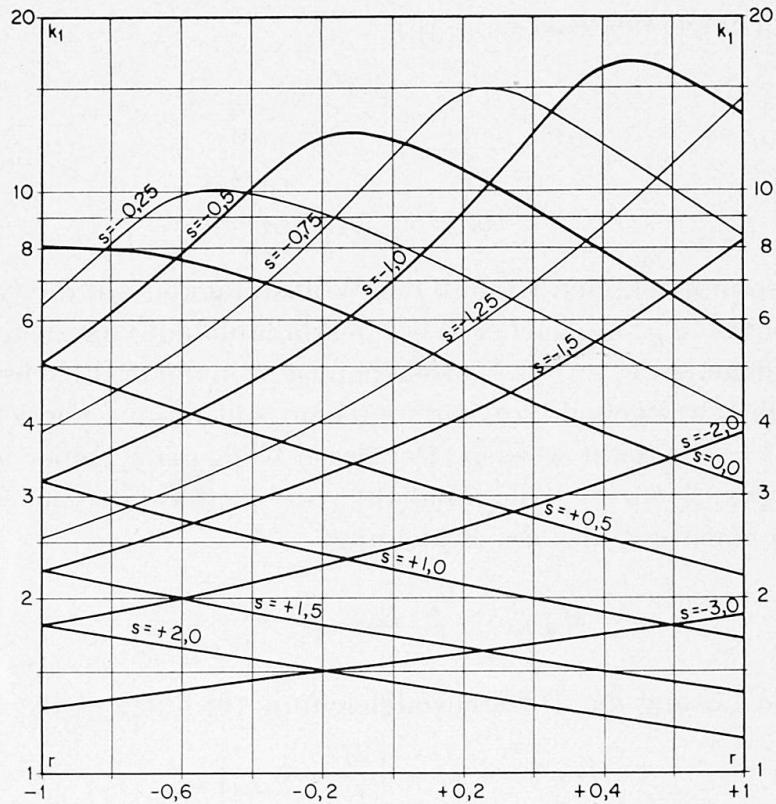


Fig. 3. Koeffizienten k_1 .

Für nicht wölbefreie Querschnitte lautet die Differentialgleichung

$$D \varphi''' - C \varphi'' = \frac{M^2}{B_y} \varphi \quad (9)$$

und ihre Lösung für $M(z) = \text{const}$ ist

$$M_{Ki} = \frac{\pi}{l} \sqrt{B_y C} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{a^2}} \quad (10)$$

¹⁾ Die Berechnung des kritischen Belastungszustandes wird willkürlich auf M_2 bezogen.

mit

$$a^2 = \frac{C l^2}{D} \quad (11)$$

und für das I-Profil

$$a^2 = \frac{4 C l^2}{B_y h^2}. \quad (12)$$

Eine Verallgemeinerung der Gleichung (10) für $M(z) \neq \text{const}$ ist in ähnlicher Weise möglich, wie das für wölbfreie Querschnitte gezeigt wurde: Für π^2 in der rechten Wurzel wird ein lastfallabhängiger Koeffizient k eingeführt (s. [4]). Diese Lösung ist nicht mehr allgemeingültig, sondern hängt ab vom Anteil der Wölbsteifigkeit an der Gesamtdrillsteifigkeit des Trägers. Der entsprechende Koeffizient k wächst mit steigenden Werten a^2 . Die möglichen Fehler sind jedoch unbedeutend, wenn man der Ermittlung dieser Koeffizienten ein sinnvolles a^2 zugrunde legt. Zum Beispiel ergibt sich für den Belastungsfall $r = -1$, $s = 0$ und $a^2 = 1$ folgendes Bild (s. a. [5])

$\Delta M_{2,Ki}$ [%]	
$a^2 = 1$	+ 0
$= 10$	+ 2,5
$= 100$	+ 2,9

(13)

Es wäre also möglich, den Einfluß der Wölbsteifigkeit auf die Größe des kritischen Momentes M_{Ki} in gleicher Weise lastfallabhängig darzustellen, wie das mit dem Koeffizienten k_1 in Fig. 3 geschehen ist. Um die praktische Berechnung jedoch möglichst weitgehend zu vereinfachen, soll darauf verzichtet und für alle Lastfälle $k = \pi^2$ gesetzt werden. Der dabei begangene Fehler ist relativ gering. Er beträgt z. B. für $s = 0$ maximal 10% und liegt auf der sicheren Seite.

Für $M(z) \neq \text{const}$ gilt also die Beziehung

$$M_{2,Ki} = \frac{k_1}{l} \sqrt{B_y C} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{a^2}}. \quad (14)$$

Eine exakte Lösung der Differentialgleichung (9) mit $y_A \neq 0$

$$D\varphi''' - C\varphi'' = \left(\frac{M^2}{B_y} - p y_A \right) \varphi \quad (15)$$

für einen praktisch realisierbaren Lastfall existiert nicht. Exakt lösbar ist die Differentialgleichung (15) nur für den fiktiven Fall $M(z) = \text{const}$, $p(z) = \text{const}$. Es ergibt sich dann mit

$$M = \frac{l^2}{2 \bar{k}_2} p, \quad (16)$$

$$M_{Ki} = \frac{\bar{k}_2}{l^2} B_y y_A + \sqrt{\left(\frac{\bar{k}_2}{l^2} B_y y_A \right)^2 + \frac{\pi^2}{l^2} B_y C \left(1 + \frac{\pi^2}{a^2} \right)}. \quad (17)$$

Analog dem Vorangegangenen kann auch diese Lösung auf $M(z) \neq \text{const}$ erweitert werden. Mit Gleichung (14) ergibt sich

$$M_{2,Ki} = \frac{k_2}{l^2} B_y y_A + \sqrt{\left(\frac{k_2}{l^2} B_y y_A\right)^2 + \frac{k_1^2}{l^2} B_y C \left(1 + \frac{\pi^2}{a^2}\right)}. \quad (18)$$

Da die beiden Belastungsanteile in (15) verschiedene Funktionen von z darstellen, wird der Verlauf der Eigenfunktion φ über die Länge l auch vom Verhältnis dieser beiden Werte zueinander, letztlich also vom Verhältnis der Drillsteifigkeit des Trägers zu seiner Querbiegesteifigkeit und von der Größe der Ausmitte y_A bestimmt.

Damit ist k_2 außer von den beiden Belastungsparametern r und s noch von einem dritten Freiwert abhängig.

Im vorliegenden Fall, bei gleichmäßig verteilter Streckenlast, sind beide Belastungsanteile stetige Funktionen über die Trägerlänge. Dadurch wird der obengenannte Einfluß relativ klein. Es genügt deshalb, die Koeffizienten k_2 nur in Abhängigkeit von den Verhältnissen r und s unter Zugrundelegung eines bestimmten Trägers und einer bestimmten Ausmitte y_A zu ermitteln. Für die Berechnung der Koeffizienten k_2 nach Fig. 4 wird gewählt:

I 30 (TGL 0-1025), $l = 6,0$ m, $y_A = -15$ cm,

$$\begin{aligned} B_y &= 9,47 \cdot 10^5 \text{ Mpcm}^2, \\ C &= 4,94 \cdot 10^4 \text{ Mpcm}^2, \\ D &= 0 (!). \end{aligned} \quad (19)$$

Eine willkürliche Annahme $D=0$ vereinfacht die Berechnung der Koeffizienten k_2 . Die Wölbsteifigkeit hat geringen Einfluß auf diese Werte. Außerdem nehmen die Fehler mit zunehmender Wölbsteifigkeit ab.

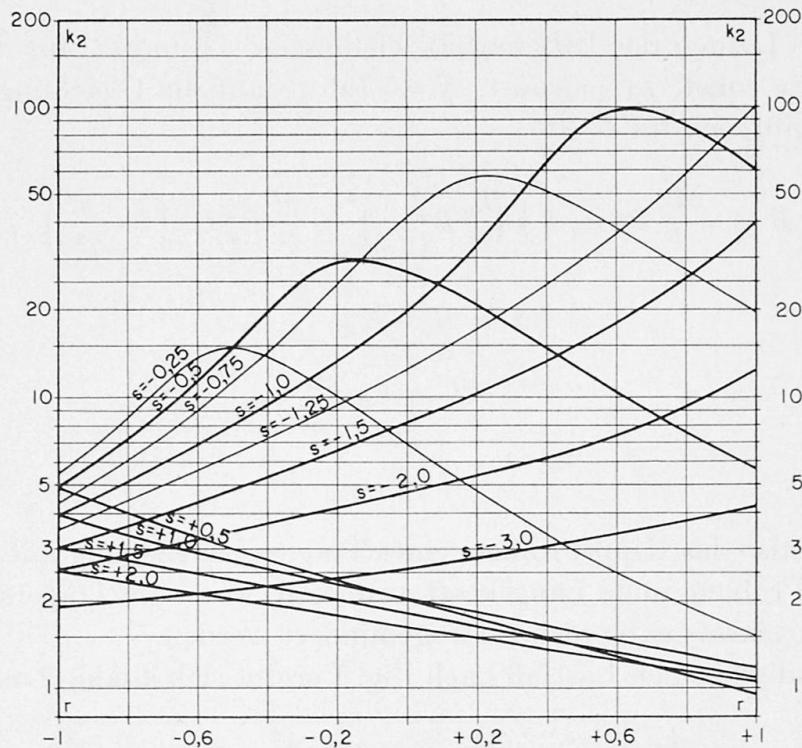


Fig. 4. Koeffizienten k_2 .

Die nach (19) errechneten Werte k_2 liefern bei einer Änderung der Querschnittsparameter und der Lastausmitte folgende Fehler:

a) Beispiel nach (19), jedoch verschiedene Werte y_A :

y_A [cm]	k_2	$M_{2,Ki}$ [%]	(20)
-35	11,48	-1,0	
-25	11,33	-0,4	
-15	11,14	0	
+15	10,43	-1,0	
+25	10,17	-2,3	
+35	9,90	-3,9	

b) Beispiel nach (19), jedoch verschiedene Werte B_y :

B_y [Mpcm ²]	k_2	$M_{2,Ki}$ [%]
$9,47 \cdot 10^5$	11,14	0
$19,94 \cdot 10^5$	11,26	-0,2

Eine Anwendung dieses Verfahrens auf unstetige Querbelastung (z. B. Einzellast in Feldmitte) ist in der angegebenen Weise nur für kleine Ausmitten noch möglich (s. a. [7]).

6. Lastfall B. M_1, M_2, p_y, N nach Fig. 1

Die exakte Lösung der Differentialgleichungen (1) und (2) für den fiktiven Lastfall $M(z) = \text{const}$, $p(z) = \text{const}$, $N = 0$ führte auf die Gleichung (17). Entsprechend ergibt sich für $N \neq 0$

$$M_{Ki} = \frac{\bar{k}_2}{l^2} \bar{B}_y^* y_A + \sqrt{\left(\frac{\bar{k}_2}{l^2} \bar{B}_y^* y_A\right)^2 + \frac{\pi^2}{l^2} \bar{B}_y^* \bar{C}^* \left(1 + \frac{\pi^2}{\bar{a}^{*2}}\right)}, \quad (21)$$

$$\text{mit } \bar{B}_y^* = B_y - N_{Ki} \frac{l^2}{\pi^2}, \quad (22)$$

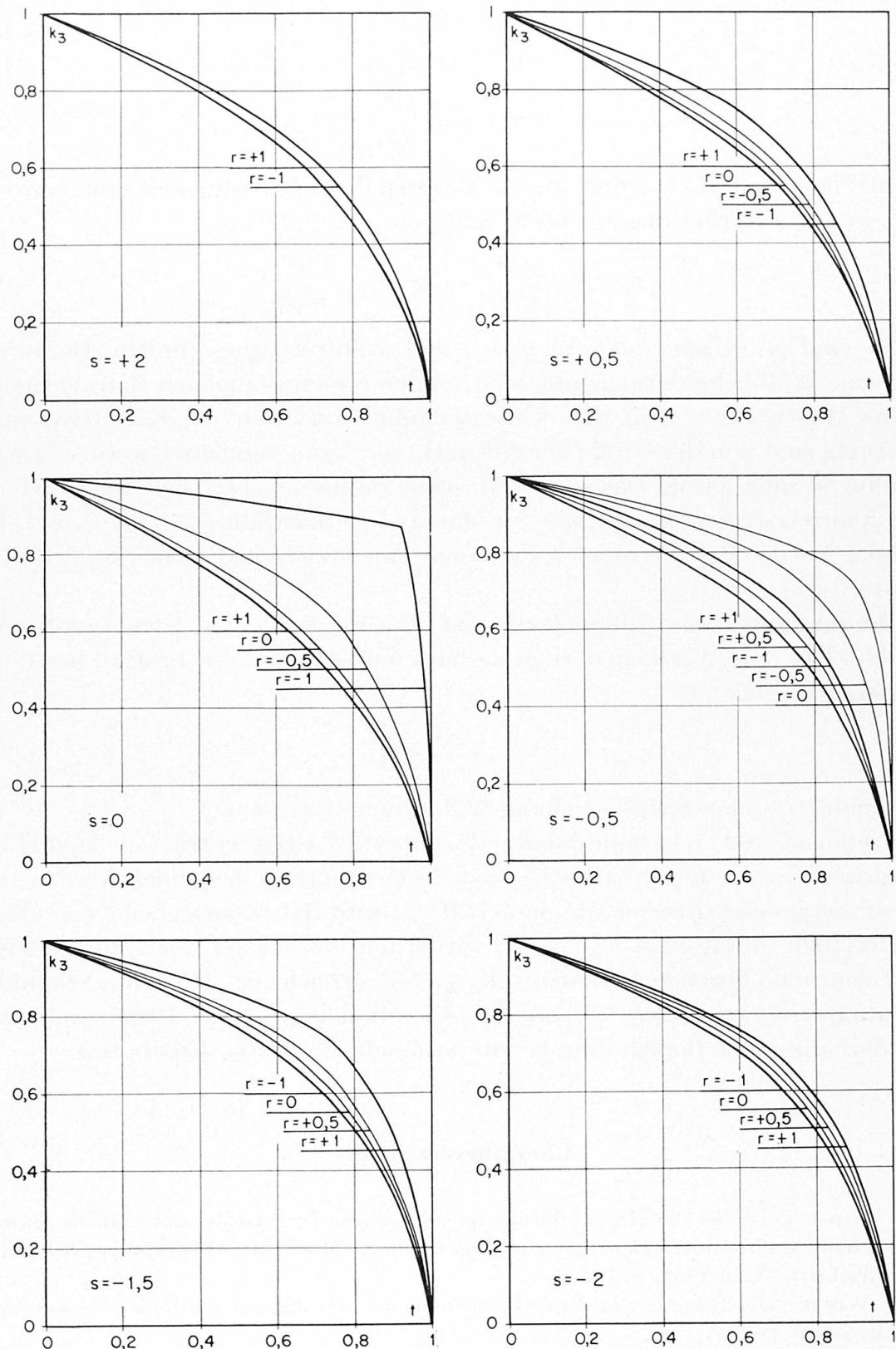
$$\bar{C}^* = C - N_{Ki} i_p^2, \quad (23)$$

$$\bar{a}^{*2} = a^2 \frac{\bar{C}^*}{C}. \quad (24)$$

Man kann also das Kipp-Problem eines Trägers bei Biegung mit Längskraft als ein Kipp-Problem ohne Längskraft auffassen, wenn die Trägersteifigkeiten durch die Längskraft entsprechend abgemindert werden.

Für einen allgemeinen Lastfall nach Fig. 1 ergibt sich analog Lastfall A

$$M_{2,Ki} = \frac{k_2}{l^2} B_y^* y_A + \sqrt{\left(\frac{k_2}{l^2} B_y^* y_A\right)^2 + \frac{k_1^2}{l^2} B_y^* C^* \left(1 + \frac{\pi^2}{a^{*2}}\right)}, \quad (25)$$

Fig. 5. Koeffizienten k_3 .

mit

$$B_y^* = B_y k_3^2, \quad (26)$$

$$C^* = C k_4, \quad (27)$$

$$a^{*2} = a^2 \frac{C^*}{C}. \quad (28)$$

In Fig. 5 sind die Koeffizienten k_3 dargestellt in Abhängigkeit vom Lastfall, d. h. von den Verhältnissen r und s und von

$$t = N_{Ki} \frac{l^2}{\pi^2 B_y} = \nu_{Ki} N_{vorh} \frac{l^2}{\pi^2 B_y}. \quad (29)$$

Sie sind praktisch exakt für $y_A = 0$ und wölfreie Querschnitte. Daran ändert eine Wölbbehinderung entsprechend den vorangegangenen Betrachtungen nichts Wesentliches. Auf eine Untersuchung, inwieweit die Koeffizienten k_3 abhängig sind von der Größe der Ausmitte y_A , kann verzichtet werden. Dieser Einfluß ist sehr gering. Das kann man schon daraus ersehen, daß die Kurven in Fig. 5 in relativ geringem Maße von der Art des Lastfalles abhängig sind. Errechnet wurden die Werte nach Fig. 5 mit einem zweigliedrigen Ansatz für das Beispiel (19).

Der «Einfluß des Drillknickens» auf M_{Ki} ist in den meisten praktischen Fällen klein. Die Werte k_4 werden deshalb unabhängig vom Lastfall bestimmt und ergeben sich zu

$$k_4 = 1 - N_{Ki} \frac{i_p^2}{C}, \quad (30)$$

das heißt, C^* kann nach Gleichung (23) ermittelt werden.

Treten M und N in kombinierter Form auf (z. B. exzentrischer Angriff der Längskraft), so muß die kritische Last durch Iteration gewonnen werden. Die Berechnung des kritischen Momentes $M_{2,Ki}$ wird dabei, ausgehend von einem geschätzten Anfangswert N_{Ki} , so oft wiederholt, bis das der Rechnung als Festwert zugrunde liegende Verhältnis $M_{2,Ki}/N_{Ki}$ erreicht ist. Mit Hilfe bekannter Iterationsverbesserungen (siehe z. B. [8]) erhält man in der Regel nach einer Wiederholung der Berechnung bereits ausreichend genaue Ergebnisse.

Literaturverzeichnis

1. E. CHWALLA: Über die Kippstabilität querbelasteter Druckstäbe mit einfach-symmetrischem Querschnitt. Beiträge zur angewandten Mechanik. Federhofer-Girkmann-Festschrift, Wien 1950, S. 125.
2. H. WITTE: Die Lösung von Kipp-Problemen mit der Energiemethode. Dissertation, Darmstadt 1959.
3. Stahlbau — Ein Handbuch für Studium und Praxis, Teil 1. Köln 1961, S. 362.
4. F. STÜSSI: Die Stabilität des auf Biegung beanspruchten Trägers. Abhandlungen der IVBH 3/1935, S. 401.
5. M. SALVADORI: Lateral Buckling of Eccentrically Loaded I-COLUMNS. Proc. ASCE, 81 (1955), S. 1163.

6. G. BÜRGERMEISTER, H. STEUP: Stabilitätstheorie, Teil 1. Berlin 1957, S. 308.
7. W. Loos: Beitrag zur Gesamtstabilität quersteifenloser I-Träger im Kippbereich. Dissertation, Leipzig 1965.
8. R. ZURMÜHL: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.

Zusammenfassung

Untersucht wird das Problem der Kippstabilität doppeltsymmetrischer, gabelgelagerter I-Träger, die durch ungleiche Endmomente, Gleichstreckenlast und axiale Druckkraft belastet sind.

Eine Lösung mit der Energiemethode und einem Sinusreihenansatz für die Eigenfunktion ist für die praktische Berechnung zu aufwendig, da für den allgemeinen Belastungsfall mindestens drei Reihenglieder berücksichtigt werden müssen.

Mit relativ geringem Aufwand und guter Näherung kann die kritische Last aus einer Beziehung ermittelt werden, die sich durch Einführung lastfallabhängiger Koeffizienten aus der exakten Lösung des Problems für $M_x(z) = \text{const}$, $N = 0$ ergibt. Bei Vorhandensein einer Axialkraft werden nur die Trägersteifigkeiten B_y und C in der Lösung für $N = 0$, dem Einfluß der Axialkraft beim jeweiligen Lastfall entsprechend, abgemindert.

Summary

The problem of the lateral instability of doubly-symmetrical I beams with fork bearings and which are subject to unequal terminal moments, uniform distributed load and axial pressure is considered.

A solution using the energy method and a sine series formula for the characteristic function is too expensive for practical calculation purposes, since at least three series elements must be considered for the general type of loading.

A satisfactory approximation of the critical load can be made relatively cheaply by using an equation obtained by inserting coefficients, which are a function of the type of loading, from the precise solution of the problem when $M_x(z) = \text{const}$ and $N = 0$. Where an axial load exists, only the beam rigidities B_y and C in the solution where $N = 0$ are reduced in accordance with the effect of the axial load of the relevant type of loading.

Résumé

Le problème étudié est celui de la stabilité latérale des poutres en I à double symétrie reposant sur des fourches, soumises à des moments inégaux aux extrémités, à des charges uniformément réparties et à des compressions axiales.

La méthode de l'énergie et le développement de la fonction propre en une série de sinus représentent un procédé trop laborieux dans la pratique, étant donné que, dans un cas de charge général, il faut retenir au moins trois termes du développement en série.

On peut déterminer la charge critique avec une bonne précision et d'une manière relativement simple en partant d'une relation qui s'établit à partir de la solution particulière exacte correspondant à $M_x(z) = \text{cste}$ et $N = 0$ en introduisant des coefficients caractérisant l'état de charge. En présence d'un effort axial, seules sont réduites, conformément à l'influence de l'effort axial pour chaque état de charge, les rigidités B_y et C de la poutre intervenant dans la solution correspondant à $N = 0$.