

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 26 (1966)

**Artikel:** Le calcul matriciel des structures continues par la méthode des déplacements  
**Autor:** Correia de Araújo, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-20864>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Le calcul matriciel des structures continues par la méthode des déplacements**

*Matrizenberechnung kontinuierlicher Tragwerke mit der Deformationsmethode*

*The Matricial Calculation of Continuous Structures by the Method of Displacements*

F. CORREIA DE ARAÚJO

Prof. Dr. Ing., Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto (Portugal)

1. Il est bien connu que le problème général du calcul des structures résistantes consiste dans la détermination de l'état de tension et de l'état de déformation, en chacun de leurs points, quand elles sont soumises à l'action des sollicitations extérieures. Cela implique la considération d'un certain nombre de grandeurs inconnues, en chaque point, qui sont les variables du problème. Mais ces variables ne sont pas toutes indépendantes: si les déformations sont élastiques — comme nous le supposons — les composantes de la tension sont en rapport avec les composantes de la déformation et celles-ci avec les composantes du déplacement.

Il s'en suit que l'on peut toujours dire que le problème se réduit à la seule détermination de l'état de tension (ou de l'état de déformation), duquel il est possible d'obtenir l'état de déformation (ou l'état de tension) en chaque point.

On procède à l'aide d'équations aux dérivées partielles qui conditionnent les composantes de la tension (équations d'équilibre) et les composantes de la déformation (équations de compatibilité) en tous les points de l'intérieur des corps; et des équations qui imposent certaines restrictions aux déformations, ou aux tensions, ou aux déformations et aux tensions, dans les points de la surface du contour où se font les liaisons avec l'extérieur (équations de liaison).

En considérant que ces dernières équations traduisent les conditions aux limites du problème, on peut donc énoncer celui-ci comme consistant: ou dans la détermination des composantes de la tension, introduites comme inconnues, dans les équations de compatibilité; ou dans la détermination des composantes

de la déformation, en les faisant intervenir, par un changement de variables, dans les équations d'équilibre. En tous cas, les composantes de la tension doivent satisfaire aux équations d'équilibre et les composantes de la déformation aux équations de compatibilité, tout en respectant les équations de liaison.

Si l'on se limite à l'étude des structures réticulées, le problème devient plus simple, puisque l'état de tension et l'état de déformation de ces structures sont complètement définis par la seule connaissance des composantes des efforts (efforts normal et tranchant, moments de flexion et de torsion) et des déplacements (translations, rotations) dans un nombre limité de sections transversales des pièces linéaires ou barres dont elles sont constituées. Comme dans le cas général, on peut poser ici le problème de deux façons différentes: ou en considérant des équations de compatibilité des déplacements, avec, comme inconnues, des systèmes de forces en équilibre; ou en considérant comme inconnues des déplacements compatibles, introduits, par un chargement de variables, dans les équations d'équilibre.

Dans les deux cas, nous envisageons des *forces généralisées* et des *déplacements généralisés* et nous appelons *coordonnées généralisées du système* les forces et les déplacements généralisés se correspondant et constituant un ensemble cohérent de *variables généralisées*.

Tout ce qui suit se rapporte seulement à des structures réticulées planes, une généralisation aux structures spatiales ne comportant pas de difficulté. Nous supposons, en plus, que ces structures sont dotées de liaisons en excès, extérieures ou intérieures, relativement aux liaisons pour lesquelles elles seraient strictement stables. Cela permet de les définir comme étant des *structures hyperstatiques* ou *hypergéométriques* selon qu'on considère comme inconnues les réactions des liaisons en excès ou les déplacements correspondants. On voit aussitôt l'existence de deux méthodes de calcul de ces structures, la *méthode des forces* et la *méthode des déplacements*. Une méthode mixte, se révélant parfois avantageuse, comporte des inconnues forces et déplacements à la fois.

2. Considérons une structure réticulée, plane, dotée de liaisons en excès, et soit  $n$  le nombre de ses *degrés de liberté*, c'est-à-dire le nombre fini de paramètres nécessaires et suffisants pour définir toutes les positions ou configurations que la structure peut prendre et qui soient compatibles avec ses liaisons. Nous supposons que ces paramètres sont variables avec continuité dans certains intervalles et qu'on peut passer d'une configuration donnée de la structure à une autre, définie par des accroissements infinitésimaux, arbitraires, des mêmes paramètres: la structure constitue, par définition, un système holonome à  $n$  degrés de liberté.

Si l'on prend comme inconnues les forces ou inconnues hyperstatiques  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), la détermination de ces inconnues peut être conduite comme suit:

- on décompose la structure en structures élémentaires, en supprimant les liaisons dont les réactions sont les inconnues hyperstatiques, la structure ainsi modifiée étant la *structure principale* ou *système de base*;
- on considère, dans la structure principale, la configuration d'équilibre correspondant à la sollicitation extérieure et l'on détermine les déplacements  $\delta_{i0}$  correspondant aux inconnues hyperstatiques;
- on considère encore, dans la structure principale, les  $n$  configurations d'équilibre, indépendantes, correspondant à une force 1 remplaçant chacune des inconnues hyperstatiques  $X_j$ , et l'on détermine les déplacements  $\delta_{ij}$  correspondant à toutes les inconnues hyperstatiques;
- les déplacements correspondant à chaque inconnue hyperstatique devant être compatibles, on écrit le système des *équations de compatibilité*:

$$\{\delta_i\} = \{\delta_{i0}\} + [\delta_{ij}] \{X_j\} = 0, \quad (1)$$

dont les inconnues sont les inconnues hyperstatiques  $X_j$ .

C'est la *méthode des forces*.

De l'expression (1) on peut naturellement déduire la signification rapportée à chacune des lettres, laquelle justifie les désignations suivantes:

- $\delta_{i0}$  sont les déplacements correspondant aux inconnues hyperstatiques, dans la structure principale, pour la *sollicitation*  $X=0$ , c'est-à-dire, dus à la seule sollicitation extérieure. Ces déplacements, comme il est bien connu, sont donnés par des expressions du type:

$$\delta_{i0} = \int_{s_0}^{\bar{s}} \frac{\bar{M}_i M_0}{EI} ds + \int_{s_0}^{\bar{s}} \frac{\bar{N}_i N_0}{EA} ds + \int_{s_0}^{\bar{s}} \frac{\bar{T}_i T_0}{GA'} ds + \int_{s_0}^{\bar{s}} \bar{N}_i \alpha t ds + \delta_{i ap}. \quad (2)$$

- $\delta_{ij} = \delta_{ji}$  sont les déplacements correspondant aux inconnues hyperstatiques, dans la structure principale, pour la *sollicitation*  $X_j=1$ , qui sont donnés par des expressions du type:

$$\delta_{ij} = \int_{s_0}^{\bar{s}} \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} ds + \int_{s_0}^{\bar{s}} \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EA} ds + \int_{s_0}^{\bar{s}} \frac{\bar{T}_i \bar{T}_j}{GA'} ds. \quad (3)$$

Les intégrales sont prises tout le long de la structure principale et les lettres y intervenant ont une signification qu'il ne semble pas nécessaire de rappeler.

La matrice-colonne:

$$\delta_0 = -\{\delta_{i0}\} \quad (4)$$

est nommée *matrice de sollicitation* ou *vecteur de sollicitation*; la matrice carré symétrique:

$$\delta = [\delta_{ij}] \quad (5)$$

est la *matrice de flexibilité* de la structure; la matrice-colonne:

$$X = \{X_j\} \quad (6)$$

est le *vecteur des forces* hyperstatiques.

On peut donc écrire plus simplement le système des équations de compatibilité:

$$\delta X = \delta_0. \quad (7)$$

Dans le cas où les inconnues du problème sont les déplacements élémentaires  $\Delta_i$ , correspondant aux degrés de liberté de la structure, on peut procéder d'une façon tout à fait analogue:

- on modifie la structure en lui imposant les contraintes ou forces de fixation capables d'empêcher la production des déplacements  $\Delta_i$ , la structure modifiée étant, de même, la structure principale ou système de base;
- on considère la configuration de la structure principale, compatible avec ses liaisons, due à l'action de la sollicitation extérieure, et on détermine les forces de fixation correspondantes  $x_{i0}$ ;
- on considère aussi chacune des configurations compatibles du système principal, indépendantes, correspondant à un déplacement 1 à la place de  $\Delta_j$ , les autres  $\Delta_i (i \neq j)$  étant nuls, et on détermine toutes les forces de fixations  $x_{ij}$ ;
- l'équilibre devant se maintenir en correspondance avec chacun des déplacements de la structure réelle, on peut écrire le système des *équations d'équilibre*:

$$\{x_i\} = \{x_{i0}\} + [x_{ij}] \{\Delta_j\} = 0, \quad (8)$$

dont les inconnues sont les déplacements  $\Delta_j$ .

C'est la *méthode des déplacements*.

De l'expression (8) on peut naturellement déduire la signification rapportée à chacune des lettres, laquelle justifie les désignations suivantes:

- $x_{i0}$  sont les forces de fixations correspondant aux inconnues hypergéométriques, dans la structure principale, pour la *configuration*  $\Delta = 0$ , c'est-à-dire, dues à la sollicitation extérieure;
- $x_{ij} = x_{ji}$  sont les forces de fixation correspondant aux inconnues hypergéométriques, dans la structure principale, pour la *configuration*  $\Delta_j = 1$ .

La matrice-colonne:

$$x_0 = -\{x_{i0}\} \quad (9)$$

est maintenant le vecteur de sollicitation; la matrice carré symétrique:

$$x = [x_{ij}] \quad (10)$$

est nommée la *matrice de rigidité* de la structure; la matrice-colonne:

$$\Delta = \{\Delta_j\} \quad (11)$$

est le *vecteur des déplacements* hypergéométriques.

Le système des équations d'équilibre peut donc être écrit:

$$x \Delta = x_0. \quad (12)$$

Si les forces et les déplacements généralisés, qu'on vient de considérer comme inconnues, appartiennent au même système de coordonnées généralisées, les

matrices de flexibilité et de rigidité sont en rapport l'une avec l'autre, pourvu qu'elles ne soient pas des matrices singulières.

En effet, puisqu'on a, par définition:

$$\Delta = \delta X,$$

$$X = x \Delta,$$

si l'on porte  $X$  dans la première de ces expressions, on a:

$$\Delta = \delta x \Delta$$

et,  $\Delta$  étant un vecteur arbitraire, on peut déduire:

$$\delta x = I,$$

$I$  étant la matrice unitaire du même ordre que  $\delta$  et  $x$ . Il s'en suit que chacune de ces matrices est l'inverse de l'autre:

$$\delta = x^{-1},$$

$$x = \delta^{-1},$$

ce qui peut seulement se produire dans le cas de matrices régulières.

3. Comme on vient de le vérifier, le calcul d'une structure réticulée aux liaisons en excès dépend, quand on a choisi la nature des inconnues, ou bien de la connaissance des matrices  $\delta$  et  $\delta_0$  dans la méthode des forces, ou de celle des matrices  $x$  et  $x_0$  dans la méthode des déplacements.

On a déjà remarqué que les matrices  $\delta$  et  $\delta_0$  peuvent être déterminées par des procédés connus qui, d'ailleurs, sont d'application très facile grâce à de nombreuses interprétations divulguées dans la littérature spécialisée.

Pour ce qui est des matrices  $x$  et  $x_0$ , nous allons montrer comment on peut les obtenir dans le cas des *structures continues*, c'est-à-dire des structures dont les liaisons des barres sont faites de telle manière que les angles formés par ses axes, aux nœuds, restent invariables pendant la déformation. Et, si l'on observe que ces matrices interviennent dans les équations d'équilibre des nœuds de la structure (où justement on a considéré les déplacements  $\Delta_i$ ) qui sont les points de croisement des axes des barres, ou extrémités des barres, nous devons commencer par établir les relations existant entre les forces appliquées en ces points et les déplacements correspondants, pour une barre isolée.

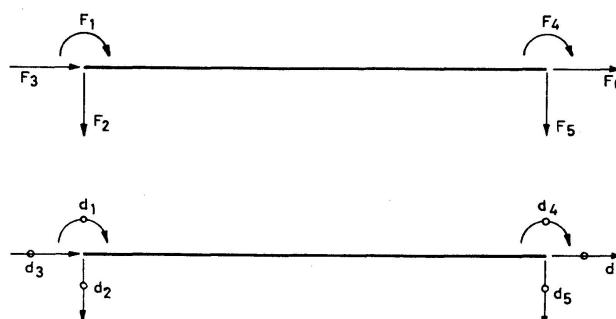


Fig. 1.

Dans la fig. 1, on a indiqué les sens positifs des forces et des déplacements correspondants et aussi leurs désignations respectives, en prenant comme axes de coordonnées un axe parallèle à l'axe de la barre et un autre perpendiculaire.

On remarquera que les forces généralisées sont représentées par des flèches simples (droites ou courbes selon qu'il s'agit vraiment de forces ou de moments), tandis que les déplacements correspondants sont indiqués par des flèches (droites ou courbes selon qu'il s'agit de translations ou de rotations) coupées par de petits cercles.

Par définition, on aura:

$$\mathbf{F} = k \mathbf{d}, \quad (13)$$

où:

$$\mathbf{F} = \{\mathbf{F}_i\} \quad (14)$$

est le vecteur de sollicitation,

$$\mathbf{k} = [\mathbf{k}_{ij}] \quad (15)$$

la matrice de rigidité, et

$$\mathbf{d} = \{\mathbf{d}_j\} \quad (16)$$

le vecteur des déplacements (les indices  $i$  et  $j$  pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6).

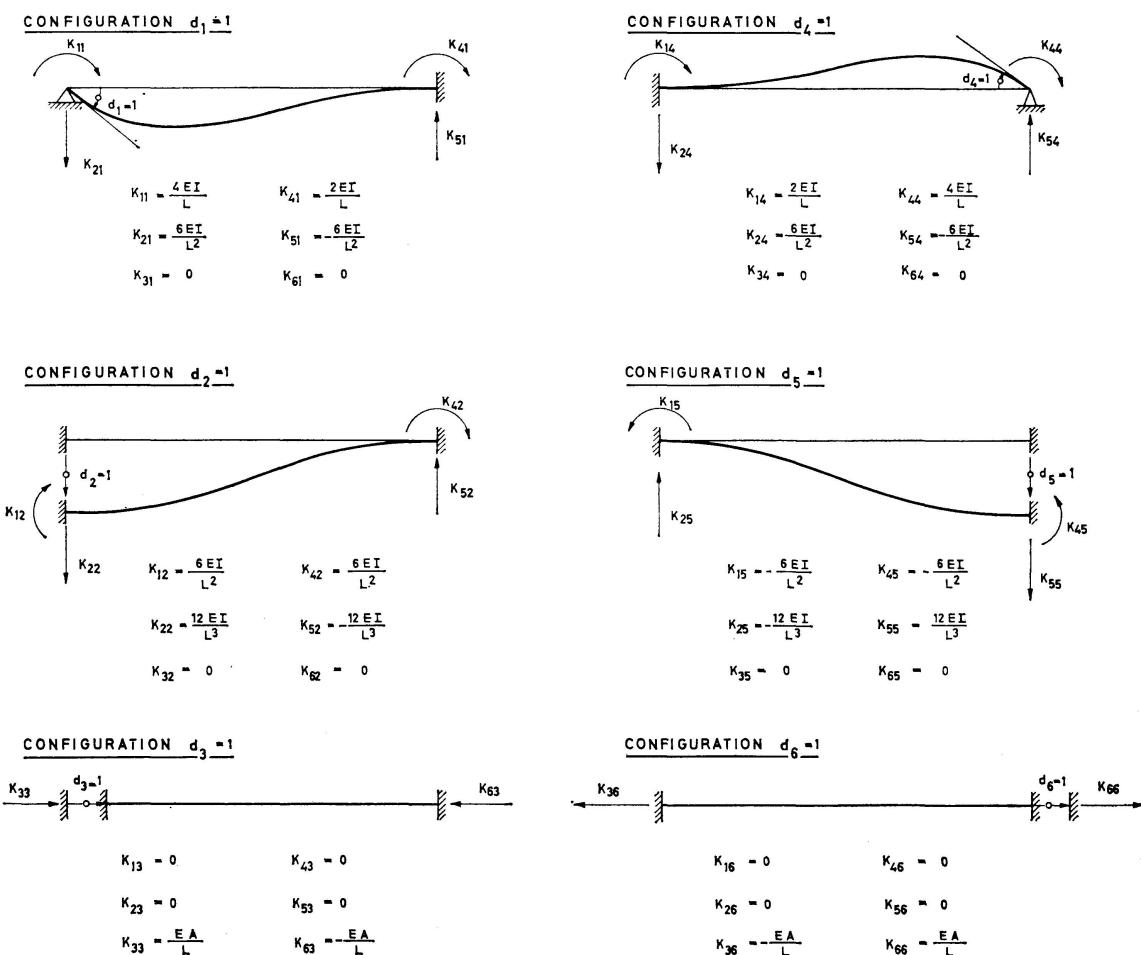


Planche I

Les éléments  $k_{ij}$  de la matrice de rigidité sont les *coefficients de rigidité* de la barre, pour les diverses configurations indépendantes  $d_j = 1$ . Ci-joint (Pl. I) on peut voir la signification mécanique de ces coefficients et leurs valeurs particulières, dans le cas où la section  $A$  de la barre et son moment d'inertie  $I$  sont constants.

La matrice de rigidité de la barre est donc:

$$k = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ \hline k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{array} \right] \quad (17)$$

et peut être fractionnée en quatre sous-matrices:

$$k = \left[ \begin{array}{c|c} [k]_{ee} & [k]_{ed} \\ \hline [k]_{de} & [k]_{dd} \end{array} \right] \quad (18)$$

lesquelles, quand elles ont des indices égaux, représentent l'influence dans une des extrémités, de déplacements dans la même extrémité et sont appelées *sous-matrices de rigidité directes*:

$$\begin{aligned} [k]_{ee} &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}, \\ [k]_{dd} &= \begin{bmatrix} k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (19)$$

et, quand elles ont des indices différents, représentent l'influence, dans une des extrémités, de déplacements dans l'autre extrémité et sont appelées *sous-matrices de rigidité croisées ou de transmission*, chacune de ces sous-matrices étant la transposée de l'autre (ce qui résulte de la symétrie de la matrice  $k$ ):

$$\begin{aligned} [k]_{ed} &= \begin{bmatrix} k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{34} & k_{35} & k_{36} \end{bmatrix} = [k]_{de}^*, \\ [k]_{de} &= \begin{bmatrix} k_{41} & k_{42} & k_{43} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} \end{bmatrix} = [k]_{ed}^*. \end{aligned} \quad (20)$$

Dans le cas particulier où  $A$  et  $I$  sont constants, on obtient:

$$k = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} 4I & \frac{6I}{L} & 0 & 2I & -\frac{6I}{L} & 0 \\ \frac{6I}{L} & \frac{12I}{L^2} & 0 & \frac{6I}{L} & -\frac{12I}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 & -A \\ \hline 2I & \frac{6I}{L} & 0 & 4I & -\frac{6I}{L} & 0 \\ -\frac{6I}{L} & -\frac{12I}{L^2} & 0 & -\frac{6I}{L} & -\frac{12I}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & -A & 0 & 0 & A \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Si les axes de coordonnées font un angle  $\alpha$  avec ceux que nous venons de considérer, la matrice de rigidité peut être obtenue de (17) ou, le cas échéant, de (21), par une simple transformation orthogonale. Dans la fig. 2 sont indiqués les désignations et les sens positifs des coordonnées généralisées correspondant à ce cas.

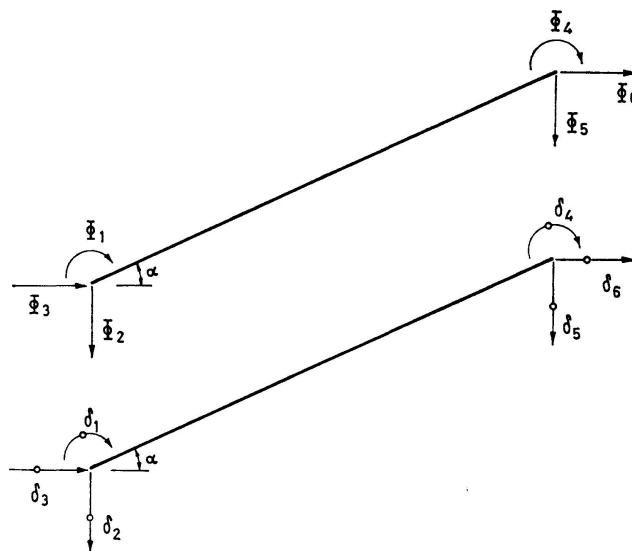


Fig. 2.

On peut facilement se rendre compte que ces coordonnées peuvent être déduites des précédentes par les transformations:

$$\delta = T d, \quad \Phi = T F,$$

$T$  étant la matrice de transformation:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & [0] \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & \\ \hline [0] & & & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Il s'agit d'une matrice orthogonale qui, de ce fait, a son inverse égale à sa transposée:

$$T^{-1} = T^*.$$

Mais nous avons déjà vu qu'on a:

$$F = k d$$

et comme, d'autre part, on a:

$$d = T^{-1} \delta = T^* \delta,$$

il en résulte:

$$F = k T^* \delta.$$

On peut donc écrire:

$$\Phi = T k T^* \delta,$$

ce qui représente la relation de dépendance entre les nouvelles forces et les nouveaux déplacements. Il en résulte que la matrice de rigidité de la barre, rapportée aux nouveaux axes, est:

$$\rho = T k T^*. \quad (23)$$

Tout comme  $k$ , elle est clairement une matrice symétrique:

$$\rho_{ij} = \rho_{ji},$$

et en la décomposant en ses sous-matrices directes et croisées, on peut écrire

$$\rho = \begin{bmatrix} [\rho]_{ee} & [\rho]_{ed} \\ \hline [\rho]_{de} & [\rho]_{dd} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Le développement des sous-matrices de  $\rho$  s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} [\rho]_{ee} &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \cos \alpha & k_{12} \sin \alpha \\ k_{21} \cos \alpha & k_{22} \cos^2 \alpha + k_{33} \sin^2 \alpha & (k_{22} - k_{33}) \sin \alpha \cos \alpha \\ k_{21} \sin \alpha & (k_{22} - k_{33}) \sin \alpha \cos \alpha & k_{22} \sin^2 \alpha + k_{33} \cos^2 \alpha \end{bmatrix}, \\ [\rho]_{ed} &= \begin{bmatrix} k_{14} & k_{15} \cos \alpha & k_{15} \sin \alpha \\ k_{24} \cos \alpha & k_{35} \cos^2 \alpha + k_{36} \sin^2 \alpha & (k_{35} - k_{36}) \sin \alpha \cos \alpha \\ k_{24} \sin \alpha & (k_{35} - k_{36}) \sin \alpha \cos \alpha & k_{35} \sin^2 \alpha + k_{36} \cos^2 \alpha \end{bmatrix} = [\rho]_{de}^*, \quad (25) \\ [\rho]_{dd} &= \begin{bmatrix} k_{44} & k_{45} \cos \alpha & k_{45} \sin \alpha \\ k_{54} \cos \alpha & k_{55} \cos^2 \alpha + k_{66} \sin^2 \alpha & (k_{55} - k_{66}) \sin \alpha \cos \alpha \\ k_{54} \sin \alpha & (k_{55} - k_{66}) \sin \alpha \cos \alpha & k_{55} \sin^2 \alpha + k_{66} \cos^2 \alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sur la planche II on peut voir la signification mécanique et la déduction directe des coefficients de rigidité  $\rho_{ij}$ , aussi bien que les valeurs de ces coefficients dans le cas où  $A$  et  $I$  sont constants.

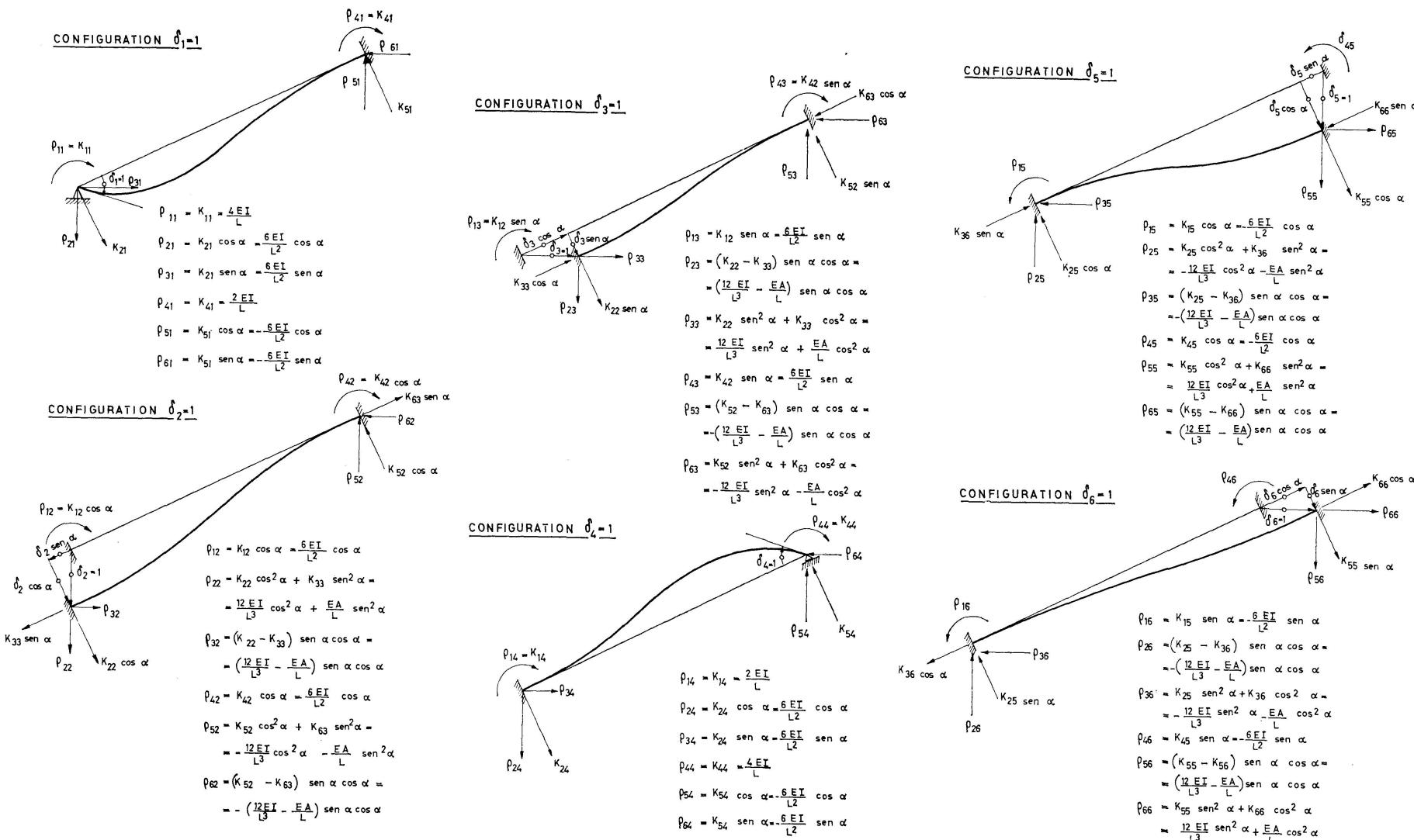


Planche II

Les forces généralisées  $\Phi$  aux extrémités de la barre sont données par:

$$\Phi = \Phi_0 + \rho \delta, \quad (26)$$

où

$$\Phi_0 = T F_0$$

sont les forces de fixation dans la configuration  $\delta = 0$ , c'est-à-dire, les forces aux extrémités de la barre résultant de la sollicitation extérieure, ces extrémités étant encastrées et sans affaissements.

Dans le cas où l'on a  $\alpha = 0$ ,  $A$  et  $I$  étant constants, on arrive sans difficulté aux formules de Gehler:

$$\begin{aligned} M_e &= M_{0e} + \frac{4EI}{L} \varphi_e + \frac{2EI}{L} \varphi_d + \frac{6EI}{L^2} v_e - \frac{6EI}{L^2} v_d, \\ M_d &= M_{0d} + \frac{2EI}{L} \varphi_e + \frac{2EI}{L} \varphi_d + \frac{6EI}{L^2} v_e - \frac{6EI}{L^2} v_d, \end{aligned} \quad (27)$$

les lettres ayant des significations évidentes. Dans ce cas, les moments aux extrémités,  $M_e$  et  $M_d$ , sont accompagnés d'efforts tranchants,  $T_e$  et  $T_d$ , et d'efforts axiaux,  $N_e$  et  $N_d$ , donnés par:

$$\begin{aligned} T_e &= T_{0e} + \frac{6EI}{L^2} \varphi_e + \frac{6EI}{L^2} \varphi_d + \frac{12EI}{L^3} v_e - \frac{12EI}{L^3} v_d, \\ T_d &= T_{0d} - \frac{6EI}{L^2} \varphi_e - \frac{6EI}{L^2} \varphi_d - \frac{12EI}{L^3} v_e - \frac{12EI}{L^3} v_d, \\ N_e &= N_{0e} + \frac{EA}{L} u_e - \frac{EA}{L} u_d, \\ N_d &= N_{0d} - \frac{EA}{L} u_e + \frac{EA}{L} u_d. \end{aligned} \quad (28)$$

4. Pour écrire les équations d'équilibre d'une structure réticulée continue, il faut commencer par établir un rapport entre les déplacements et les forces aux extrémités des barres, respectivement, et les déplacements et les forces correspondants du système de coordonnées généralisées envisagé pour la structure.

Si en chaque nœud, et pour chaque barre y concourant, on connaît déjà les forces et les déplacements rapportés à ce système de coordonnées, la matrice de rigidité de la structure résulte immédiatement des sous-matrices qui traduisent l'influence des déplacements de tous les autres nœuds dans chaque nœud: nous verrons que la sous-matrice directe d'un nœud est la somme des sous-matrices directes de ce nœud, pour chacune des barres s'y joignant; et que chaque sous-matrice croisée d'un nœud est la sous-matrice croisée du même nœud pour chacune des barres y concourant.

Soit, par exemple, la structure représentée dans la fig. 3<sup>1</sup>). Elle a sept

<sup>1)</sup> Exemple extrait de Lighfoot, «Moment Distribution» (Ed. Spon. Londres, 1961), où il est résolu par une autre méthode.

degrés de liberté et on peut choisir comme variables indépendantes les trois rotations et les quatre translations indiquées, lesquelles sont désignées par  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_7$ .

Les équations d'équilibre, chacune correspondant à un de ses déplacements, constituent un système linéaire du type (12):

$$x\Delta = x_0.$$

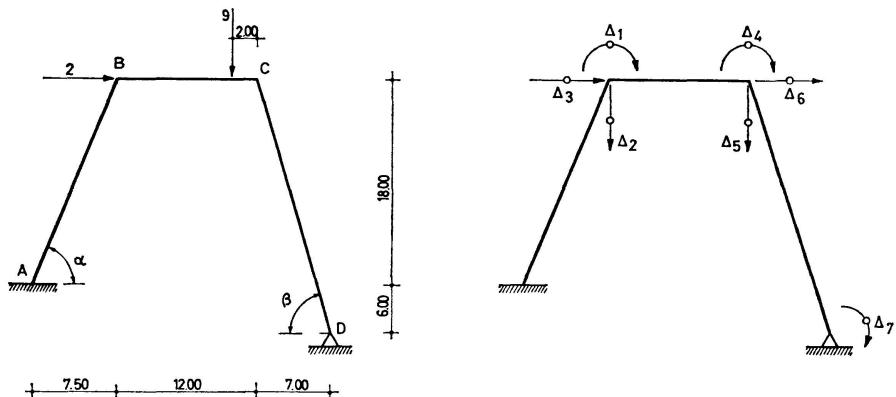


Fig. 3.

La matrice de rigidité de la structure peut être décomposée dans les sous-matrices qui traduisent l'influence, en chaque nœud, des déplacements unitaires en chacun d'eux:

$$x = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} \\ \hline x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} & x_{67} \\ \hline x_{71} & x_{72} & x_{73} & x_{74} & x_{75} & x_{76} & x_{77} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} [x]_{BB} & [x]_{BC} & [x]_{BD} \\ [x]_{CB} & [x]_{CC} & [x]_{CD} \\ [x]_{DA} & [x]_{DC} & [x]_{DD} \end{array} \right].$$

Considérons, par exemple, la sous-matrice  $[x]_{BB}$ . Ses éléments sont les forces généralisées en  $B$  (moment de flexion, force verticale, force horizontale), produites quand chacun des déplacements généralisés en  $B$  a la valeur unité, tous les autres étant nuls, c'est-à-dire, produites dans les configurations  $\Delta_1=1, \Delta_2=1, \Delta_3=1$ . Mais le nœud  $B$  est l'extrémité droite de la barre  $AB$  et l'extrémité gauche de la barre  $BC$ : il s'en suit que chacun de ces éléments est la somme des éléments correspondants des barres  $AB$  et  $BC$ , rapportés à un même système d'axes. Et il vient:

$$[x]_{BB} = [\rho]_{dd}^{AB} + [\rho]_{ee}^{BC}.$$

De la même façon:

$$[x]_{CC} = [\rho]_{dd}^{BC} + [\rho]_{ee}^{CD}, \\ [x]_{DD} = [\rho]_{dd}^{CD}.$$

Pour ce qui est des sous-matrices croisées, il est facile de vérifier que chacune de ces sous-matrices est la sous-matrice croisée de la barre qui la concerne, dans l'extrémité coïncidant avec le nœud considéré, les sous-matrices traduisant l'influence des déplacements *au delà* de chaque barre étant nulles:

$$[x]_{BC} = [\rho]_{ed}^{BC}, \\ [x]_{BD} = 0, \\ [x]_{CB} = [x]_{BC}^*, \\ [x]_{CD} = [\rho]_{ed}^{CD}, \\ [x]_{DB} = 0, \\ [x]_{DC} = [x]_{CD}^*.$$

Tout se résume donc à la détermination des matrices  $\rho$  des barres, rapportées à un même système d'axes, par exemple l'horizontal et le vertical.

Comme application numérique, supposons que  $A$  et  $I$  sont constants et prenons:

$$A = 1,00 \times 1,00 = 1 \text{ et } I = \frac{1,00^4}{12} = \frac{1}{12} \times 10^5.$$

Pour la barre  $AB$  on déduit facilement de la figure:

$$L = 19,5, \\ \sin \alpha = 0,923, \\ \cos \alpha = 0,385.$$

L'extrémité  $A$  étant fixe, il y a seulement intérêt à déterminer les sous-matrices relatives aux déplacements de cette barre en  $B$ :

$$[k]_{ed} = \begin{bmatrix} \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} 10256 & -1578 & 0 \\ 1578 & -162 & 0 \\ 0 & 0 & -61539 \end{bmatrix},$$

$$[k]_{dd} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} 20513 & -1578 & 0 \\ -1578 & 162 & 0 \\ 0 & 0 & 61539 \end{bmatrix},$$

Les sous-matrices de  $\rho$  s'en déduisent:

$$[\rho]_{ed}^{AB} = \begin{bmatrix} \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \cos \alpha & -\frac{6EI}{L^2} \sin \alpha \\ \frac{6EI}{L^2} \cos \alpha & -\left(\frac{12EI}{L^3} \cos^2 \alpha + \frac{EA}{L} \sin^2 \alpha\right) & -\frac{12EI}{L^3} - \frac{EA}{L} \sin \alpha \cos \alpha \\ \frac{6EI}{L^2} \sin \alpha & -\left(\frac{12EI}{L^3} - \frac{EA}{L}\right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{12EI}{L^3} \sin \alpha + \frac{EA}{L} \cos^2 \alpha \end{bmatrix}$$

$$\propto \begin{bmatrix} 10256 & -607 & -1457 \\ 607 & -52461 & 21789 \\ 1457 & 21789 & -9239 \end{bmatrix},$$

$$[\rho]_{dd}^{AB} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \cos \alpha & -\frac{6EI}{L^2} \sin \alpha \\ -\frac{6EI}{L^2} \cos \alpha & \frac{12EI}{L^3} \cos^2 \alpha + \frac{EA}{L} \sin^2 \alpha & \left(\frac{12EI}{L^3} - \frac{EA}{L}\right) \sin \alpha \cos \alpha \\ -\frac{6EI}{L^2} \sin \alpha & \left(\frac{12EI}{L^3} - \frac{EA}{L}\right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \alpha + \frac{EA}{L} \cos^2 \alpha \end{bmatrix}$$

$$\propto \begin{bmatrix} 20513 & -607 & -1457 \\ -607 & 52461 & -21789 \\ -1457 & -21789 & 9239 \end{bmatrix}.$$

Pour la barre  $BC$ , on a:

$$L = 12,0,$$

$$\alpha = 0,$$

$$\rho = k.$$

Par suite on obtient les sous-matrices de  $\rho$ :

$$[\rho]_{ee}^{BC} = [k]_{ee}^{BC} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} 33333 & 4167 & 0 \\ 4167 & 694 & 0 \\ 0 & 0 & 100000 \end{bmatrix},$$

$$[\rho]_{ed}^{BC} = [k]_{ed}^{BC} = \begin{bmatrix} \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} 16667 & -4167 & 0 \\ 4167 & -694 & 0 \\ 0 & 0 & -100000 \end{bmatrix},$$

$$[\rho]_{de}^{BC} = [\rho]_{ed}^{*BC} \propto \begin{bmatrix} 16667 & 4167 & 0 \\ -4167 & -694 & 0 \\ 0 & 0 & -100000 \end{bmatrix},$$

$$[\rho]_{dd}^{BC} = [k]_{dd}^{BC} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} 33333 & -4167 & 0 \\ -4167 & 694 & 0 \\ 0 & 0 & 100000 \end{bmatrix},$$

Pour la barre  $CD$ , on a  $\alpha = -\beta$  et:

$$\begin{aligned} L &= 25,0, \\ \sin \alpha &= -\sin \beta = -0,960, \\ \cos \alpha &= \cos \beta = 0,280. \end{aligned}$$

En supposant l'extrémité gauche en  $C$ , on a:

$$\begin{aligned} [k]_{ee}^{CD} &= \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} 16000 & 960 & 0 \\ 960 & 77 & 0 \\ 0 & 0 & 48000 \end{bmatrix}, \\ [k]_{ed}^{CD} &= [k]_{de}^{*CD} = \left\{ \frac{2EI}{L} \quad \frac{6EI}{L^2} \quad 0 \right\} \propto \{8000 \ 960 \ 0\}. \\ [k]_{dd}^{CD} &= \left[ \frac{4EI}{L} \right] \propto [16000]. \end{aligned}$$

D'où les sous-matrices de  $\rho$ :

$$\begin{aligned} [\rho]_{ee}^{CD} &= \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \cos \alpha & \frac{6EI}{L^2} \sin \alpha \\ \frac{6EI}{L^2} \cos \alpha & \frac{12EI}{L^3} \cos^2 \alpha + \frac{EA}{L} \sin^2 \alpha & \left( \frac{12EI}{L^3} - \frac{EA}{L} \right) \sin \alpha \cos \alpha \\ \frac{6EI}{L^2} \sin \alpha & \left( \frac{12EI}{L^3} - \frac{EA}{L} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \alpha + \frac{EA}{L} \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \\ &\propto \begin{bmatrix} 16000 & 269 & -922 \\ 269 & 44243 & 12882 \\ -922 & 12882 & 3834 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$[\rho]_{ed}^{CD} = [\rho]_{de}^{*CD} = \left\{ \frac{2EI}{L} \quad \frac{6EI}{L^2} \cos \alpha \quad \frac{6EI}{L^2} \sin \alpha \right\} \propto \{8000 \ 269 \ -922\},$$

$$[\rho]_{dd}^{CD} = \left[ \frac{4EI}{L} \right] \propto [16000].$$

Les sous-matrices de la matrice de rigidité de la structure seront donc:

$$[x]_{BB} = [\rho]_{dd}^{AB} + [\rho]_{ee}^{BC} \propto \begin{bmatrix} 20513 & -607 & -1457 \\ -607 & 52461 & -21789 \\ -1457 & -21789 & 9239 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 33333 & 4167 & 0 \\ 4167 & 694 & 0 \\ 0 & 0 & 100000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53846 & 3560 & -1457 \\ 3560 & 53155 & -21789 \\ -1457 & -21789 & 109239 \end{bmatrix},$$

$$[x]_{BC} = [\rho]_{ed}^{BC} \propto \begin{bmatrix} 16667 & -4167 & 0 \\ 4167 & -694 & 0 \\ 0 & 0 & -100000 \end{bmatrix},$$

$$[x]_{BD} = 0,$$

$$[x]_{CB} = [x]_{BC}^* = [\rho]_{ed}^{BC} \propto \begin{bmatrix} 16667 & 4167 & 0 \\ -4167 & -694 & 0 \\ 0 & 0 & -100000 \end{bmatrix},$$

$$[x]_{CC} = [\rho]_{dd}^{BC} + [\rho]_{ee}^{CD} \propto \begin{bmatrix} 33333 & -4167 & 0 \\ -4167 & 694 & 0 \\ 0 & 0 & 100000 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 16000 & 269 & -922 \\ 269 & 44243 & 12882 \\ -922 & 12882 & 3834 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49333 & -3898 & -922 \\ -3898 & 44937 & 12882 \\ -922 & 12882 & 103834 \end{bmatrix},$$

$$[x]_{CD} = [\rho]_{ed}^{CD} \propto \{ 8000 \quad 269 \quad -922 \},$$

$$[x]_{DB} = 0,$$

$$[x]_{DC} = [x]_{CD}^* \propto [ 8000 \quad 269 \quad -922 ],$$

$$[x]_{DD} = [\rho]_{dd}^{CD} \propto [ 16000 ].$$

D'où la matrice de rigidité de la structure:

$$x \propto \left[ \begin{array}{ccc|ccc|c} 53846 & 3560 & -1457 & 16667 & -4167 & 0 & 0 \\ 3560 & 53155 & -21789 & 4167 & -694 & 0 & 0 \\ -1457 & -21789 & 109239 & 0 & 0 & -100000 & 0 \\ \hline 16667 & 4167 & 0 & 49333 & -3898 & -922 & 8000 \\ -4167 & -694 & 0 & -3898 & 44937 & 12882 & 269 \\ 0 & 0 & -100000 & -922 & 12882 & 103834 & -922 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 8000 & 269 & -922 & 16000 \end{array} \right]$$

La matrice de sollicitation est obtenue sans difficulté:

$$x_{10} = -\frac{9 \times 10 \times 2^2}{12^2} = -2,50,$$

$$x_{20} = -\frac{9 \times 2}{12} + \frac{12,5 - 2,5}{12} = -0,67,$$

$$\begin{aligned}
 x_{30} &= -2,00, \\
 x_{40} &= \frac{9 \times 10^2 \times 2}{12^2} = 12,50, \\
 x_{50} &= \frac{9 \times 10}{12} - \frac{12,5 - 2,5}{12} = -8,33, \\
 x_{60} &= 0, \\
 x_{70} &= 0.
 \end{aligned}$$

En prenant:

$$x_0 = \{ 250 \quad 67 \quad 200 \quad -1250 \quad 833 \quad 0 \quad 0 \},$$

la résolution du système:

$$x \Delta = x_0$$

fournit:

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01496 \\ 0,05313 \\ 0,12220 \\ -0,03826 \\ -0,01705 \\ 0,11970 \\ 0,02631 \end{bmatrix}.$$

Les moments dans les extrémités des barres sont donnés par l'expression:

$$M = M_0 + \rho_M \Delta,$$

$\rho_M$  étant la matrice formée avec les premières lignes des sous-matrices de  $\rho$  de toutes les barres. On a donc:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 10256 & -607 & -1457 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20513 & -607 & -1457 & 0 & 0 & 0 \\ -250 & 33333 & 4167 & 0 & 16667 & -4167 & 0 \\ 1250 & 16667 & 4167 & 0 & 33333 & -4167 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16000 & 269 & -922 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8000 & 269 & -922 \end{bmatrix}. \\
 &\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0,01496 \\ 0,05313 \\ 0,12220 \\ -0,03826 \\ -0,01705 \\ 0,11970 \\ 0,02631 \end{bmatrix} \times 10^{-2} = \begin{bmatrix} -0,569 \\ 0,966 \\ -0,966 \\ 5,165 \\ -5,165 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

5. L'influence de la déformation axiale des barres des structures réticulées continues, sur la valeur des efforts, étant généralement très petite, il est habituel de ne pas la considérer. De l'invariabilité de la longueur des barres, ainsi supposée, découlent des relations de dépendance entre les déplacements qui définissaient les degrés de liberté de la structure et le nombre de ces degrés de liberté diminué.

Soit, par exemple, la structure dont nous venons de nous occuper et supposons que toutes ses barres sont incompressibles et inextensibles. En désignant par  $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_7$  les déplacements généralisés représentés auparavant par  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_7$ , le diagramme des déplacements de la structure, pour le déplacement indépendant  $\Delta'_3$  (fig. 4), permet de déduire:

$$\begin{bmatrix} \Delta'_1 \\ \Delta'_5 \\ \Delta'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cotg \alpha \\ -\cotg \beta \\ 1 \end{bmatrix} \Delta'_3.$$

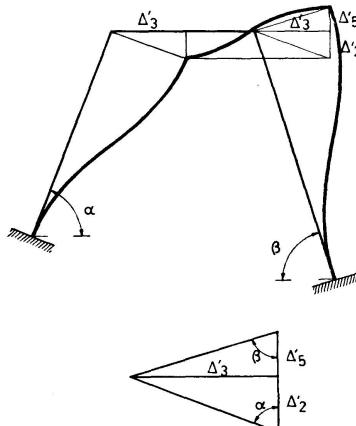


Fig. 4.

Les relations de dépendance entre les déplacements étant donc trois, il s'en suit qu'il y a seulement  $7 - 3 = 4$  déplacements indépendants. Et en adoptant la notation (fig. 5):

$$\Delta_1 = \Delta'_1,$$

$$\Delta_2 = \Delta'_4,$$

$$\Delta_3 = \Delta'_3,$$

$$\Delta_4 = \Delta'_7,$$

tous les anciens déplacements peuvent être exprimés en fonction des nouveaux:

$$\begin{bmatrix} \Delta'_1 \\ \Delta'_2 \\ \Delta'_3 \\ \Delta'_4 \\ \Delta'_5 \\ \Delta'_6 \\ \Delta'_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cotg \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cotg \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix}.$$

Le problème n'a donc que quatre inconnues au lieu de sept. Pour les déterminer, il faut, tout comme auparavant, résoudre un système d'équations linéaires:

$$x\Delta = x_0,$$

$x$  étant la nouvelle matrice de rigidité et  $x_0$  le nouveau vecteur de sollicitation.

Les déplacements des extrémités des barres étant  $d$ , et  $F$  représentant les forces correspondantes (fig. 1), les déplacements  $\Delta$  des noeuds de la structure

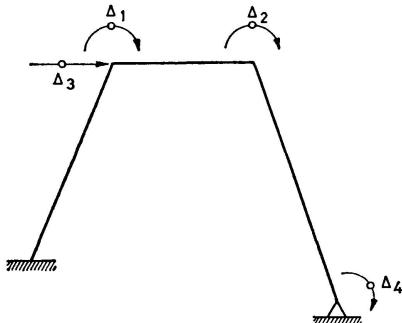


Fig. 5.

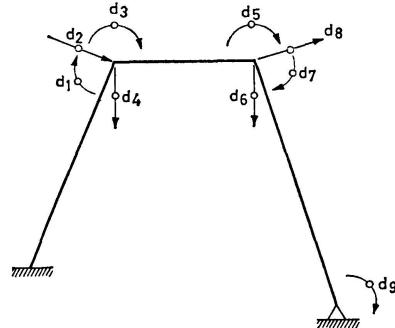


Fig. 6.

sont en rapport avec les déplacements  $d$ :

$$d = \Theta \Delta, \quad (29)$$

$\Theta$  étant une matrice de transformation la *matrice de liaison*, dont les colonnes sont constituées par les composantes  $d$  de chacune des configurations  $\Delta_i = 1$ .

Le travail virtuel produit par les forces  $F$ , en raison des déplacements  $d$ , est donné par:

$$U = F^* d.$$

Ce travail étant égal au travail virtuel produit par les forces  $Q$ , correspondant aux déplacements  $\Delta$ , en raison de ces derniers déplacements:

$$U = Q^* \Delta,$$

on aura:

$$Q^* \Delta = F^* d = F^* \Theta \Delta.$$

Comme cette égalité doit être vérifiée pour toute valeur de  $\Delta$ , il en résulte:

$$Q^* = F^* \Theta$$

ou:

$$Q = \Theta^* F.$$

Mais, entre les forces  $Q$  et les déplacements correspondants  $\Delta$ , il y a, par définition, la relation:

$$Q = x \Delta, \quad (30)$$

tout comme entre les forces  $F$  et les déplacements  $d$  on a la relation:

$$F = k d. \quad (31)$$

En portant la valeur de  $Q$  en (30), on trouve:

$$x\Delta = \Theta * F$$

et en prenant la valeur de  $F$ :

$$x\Delta = \Theta * k d$$

ou, en tenant compte de (29):

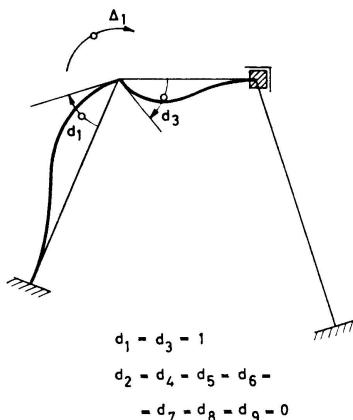
$$x\Delta = \Theta * k \Theta \Delta.$$

Cette expression étant valable pour toute valeur de  $\Delta$ , il s'en suit:

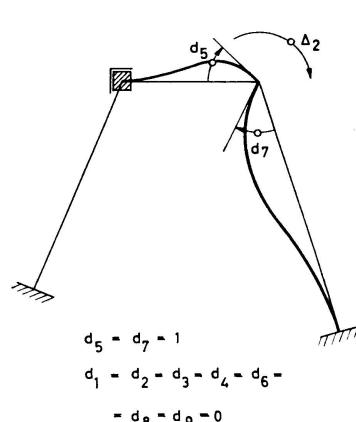
$$x = \Theta * k \Theta, \quad (32)$$

ce qui fournit l'expression de la matrice de rigidité de la structure. La matrice de rigidité  $k$  des barres étant connue, tout se résume donc à déterminer la

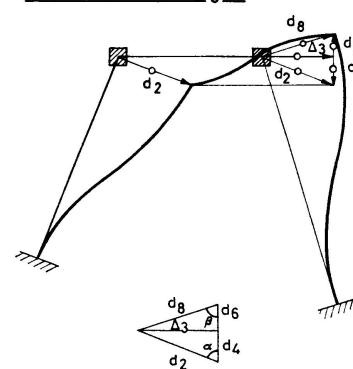
CONFIGURATION  $\Delta_1 = 1$



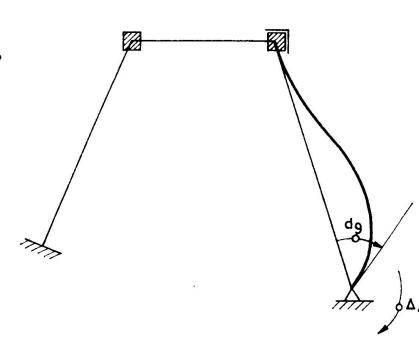
CONFIGURATION  $\Delta_2 = 1$



CONFIGURATION  $\Delta_3 = 1$



CONFIGURATION  $\Delta_4 = 1$



matrice  $\Theta$ , de transformation des déplacements  $\Delta$  de la structure, en déplacements  $d$  des barres.

Pour ce qui est du vecteur de sollicitation  $x_0$ , sa détermination est évidente.

L'expression (32) est tout-à-fait générale et nous allons la développer pour la structure que nous avons considérée.

Soient  $d_1, d_2, \dots, d_8, d_9$  les déplacements des extrémités des barres (fig. 6). La matrice de transformation  $\Theta$  peut être obtenue, colonne à colonne, en considérant successivement les configurations  $\Delta_i = 1$ , lesquelles sont représentées sur la planche III.

Pour  $\Delta_1 = 1$ , il n'y a que  $d_1$  et  $d_3$  différents de zero:

$$d_1 = d_3 = 1.$$

Pour  $\Delta_2 = 1$ , il y a seulement:

$$d_5 = d_7 = 1.$$

Pour  $\Delta_3 = 1$ :

$$d_2 = \operatorname{cosec} \alpha = 1,082,$$

$$d_4 = \operatorname{cotg} \alpha = 0,417,$$

$$d_6 = -\operatorname{cotg} \beta = -0,292,$$

$$d_8 = -\operatorname{cosec} \beta = -1,041.$$

Pour  $\Delta_4 = 1$ :

$$d_9 = 1.$$

D'où la matrice  $\Theta$ :

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,082 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,417 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,292 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,041 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice de rigidité des barres s'écrit:

$$k = \left[ \begin{array}{c|c|c} [k]_{AB} & [0] & [0] \\ \hline [0] & [k]_{BC} & [0] \\ \hline [0] & [0] & [k]_{CD} \end{array} \right],$$

ses sous-matrices étant:

$$[k]_{AB} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} 20513 & -1578 \\ -1578 & 162 \end{bmatrix},$$

$$[k]_{BC} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ \hline \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

$$\propto \begin{bmatrix} 33333 & 4167 & 16667 & -4167 \\ 4167 & 694 & 4167 & -694 \\ 16667 & 4167 & 33333 & -4167 \\ -4167 & -694 & -4167 & 694 \end{bmatrix},$$

$$[k]_{CD} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \hline \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} 16000 & 960 & 8000 \\ 960 & 77 & 960 \\ 8000 & 960 & 16000 \end{bmatrix}.$$

Il s'en suit:

$$k = \begin{bmatrix} 20513 & -1578 & & & \\ -1578 & 162 & & & \\ \hline & & 33333 & 4167 & 16667 & -4167 \\ & & 4167 & 694 & 4167 & -694 \\ & & 16667 & 4167 & 33333 & -4167 \\ & & -4167 & -694 & -4167 & 694 \\ & & & & & 16000 & 960 & 8000 \\ & & & & & 960 & 77 & 960 \\ & & & & & 8000 & 960 & 16000 \end{bmatrix},$$

La matrice de rigidité de la structure est obtenue par la double-multiplication (32):

$$x = \Theta^* k \Theta \propto \begin{bmatrix} 53846 & 16667 & 1247 & 0 \\ 16667 & 49333 & 1955 & 8000 \\ 1247 & 1955 & 620 & -999 \\ 0 & 8000 & -999 & 160000 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur de sollicitation est composé par:

$$x_{10} = -\frac{9 \times 10 \times 2^2}{12^2} = -2,5,$$

$$x_{20} = \frac{9 \times 10^2 \times 2}{12^2} = 12,5,$$

$$x_{30} = -2 - \left( \frac{9 \times 2}{12} - \frac{12,5 - 2,5}{12} \right) \times 0,417 - \left( \frac{9 \times 10}{12} + \frac{12,5 - 2,5}{12} \right) \times -0,292 = 0,15,$$

$$x_{40} = 0.$$

En posant:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 250 \\ -1250 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

les équations d'équilibre s'écrivent:

$$\begin{bmatrix} 53846 & 16667 & 1247 & 0 \\ 16667 & 49333 & 1955 & 8000 \\ 1247 & 1955 & 620 & -999 \\ 0 & 8000 & -999 & 16000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ -1250 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et fournissent:

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01406 \\ -0,03884 \\ 0,11263 \\ 0,02645 \end{bmatrix}.$$

Les déplacements des extrémités des barres sont donnés par (29):

$$d = \Theta \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,082 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,417 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,292 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,041 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,01406 \\ -0,03884 \\ 0,11263 \\ 0,02645 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01406 \\ 0,12187 \\ 0,01406 \\ 0,04697 \\ -0,03884 \\ -0,03289 \\ -0,03884 \\ -0,11725 \\ 0,02645 \end{bmatrix}$$

et les moments dans ces extrémités, par:

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10256 & -1578 & & & & \\ 20513 & -1578 & & & & \\ -250 & & 33333 & 4167 & 16667 & -4167 \\ 1250 & & 16667 & 4167 & 33333 & -4167 & \\ & & & & & 16000 & 960 & 8000 \\ & & & & & 8000 & 960 & 16000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0,01406 \\ 0,12187 \\ 0,01406 \\ 0,04697 \\ -0,03884 \\ -0,03289 \\ -0,03884 \\ -0,11725 \\ 0,02645 \end{bmatrix} \times 10^{-2},$$

6. Dans les structures continues, formées de barres orthogonales, quand on ne considère pas l'effet de la déformation axiale des barres, la détermination formelle de la matrice de rigidité est simplifiée, spécialement dans le cas où le moment d'inertie de chaque barre est constant ou s'il a une loi de variation symétrique en relation au milieu de la barre.

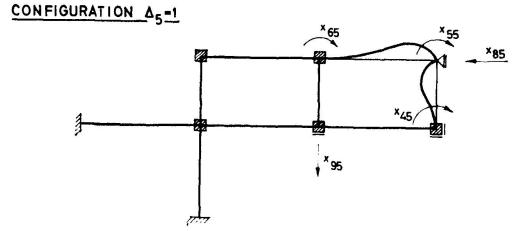
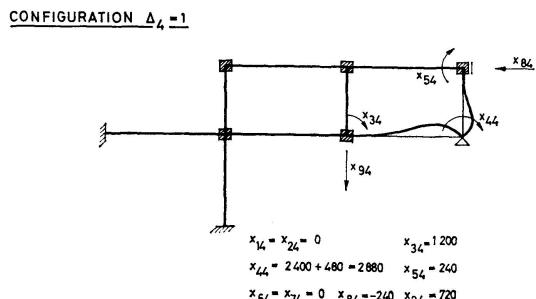
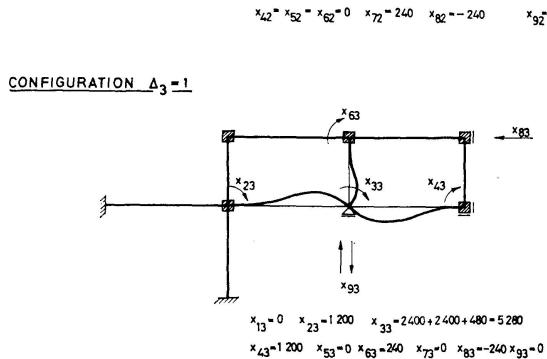
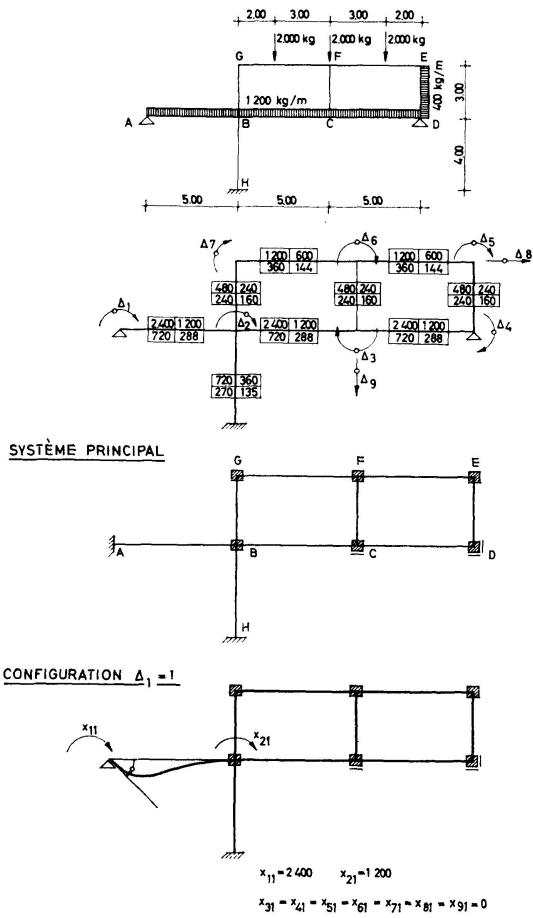
Soit la structure représentée sur la planche IV, ayant neuf degrés de liberté. On choisit comme déplacements indépendants les sept rotations  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_7$ , et les deux translations  $\Delta_8, \Delta_9$  indiquées.

En supposant que les barres sont de moment d'inertie constant, incompressibles et inextensibles, les coefficients de rigidité des deux extrémités de chaque barre ont les modules:

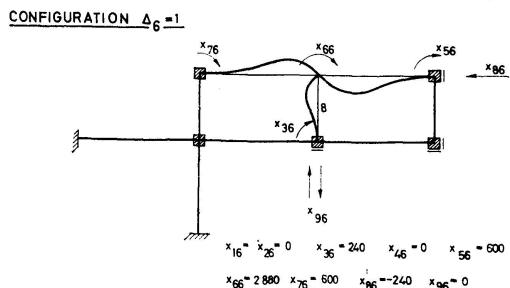
$$\frac{4 EI}{L}, \quad \frac{2 EI}{L}, \quad \frac{6 EI}{L^2}, \quad \frac{12 EI}{L^3}.$$

Ayant calculé les valeurs numériques de ces coefficients, on les inscrit (ou des valeurs qui leurs soient proportionnelles) dans le schéma de la structure, sur l'axe de la barre les concernant, avec la disposition suivante, que cet axe soit horizontal ou vertical:

axe	$\frac{4 EI}{L}$	$\frac{2 EI}{L}$	axe
	$\frac{6 EI}{L^2}$	$\frac{12 EI}{L^3}$	
axe	$\frac{4 EI}{L}$	$\frac{2 EI}{L}$	axe
	$\frac{6 EI}{L^2}$	$\frac{12 EI}{L^3}$	

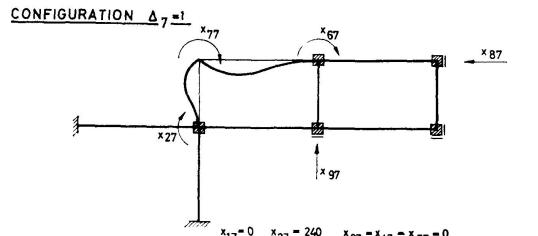


$$x_{15} = x_{25} = x_{35} = 0 \quad x_{45} = 240 \quad x_{55} = 1200 + 480 = 1680 \\ x_{65} = 600 \quad x_{75} = 0 \quad x_{85} = -240 \quad x_{95} = 360$$



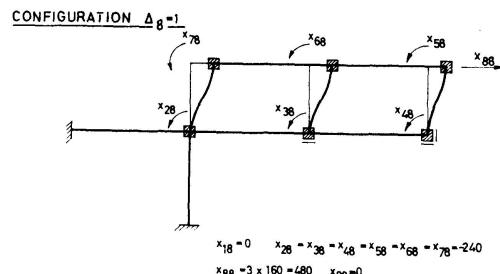
$$x_{16} = x_{26} = 0 \quad x_{36} = 240 \quad x_{46} = 0 \quad x_{56} = 600$$

$$x_{66} = 2880 \quad x_{76} = 600 \quad x_{86} = -240 \quad x_{96} = 0$$



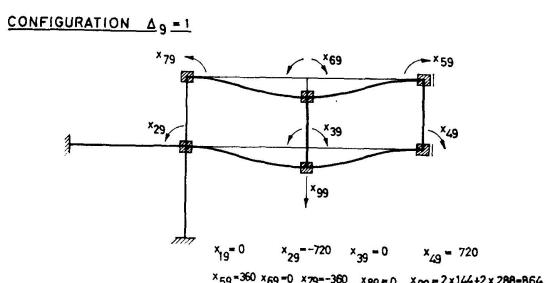
$$x_{17} = 0 \quad x_{27} = 240 \quad x_{37} = x_{47} = x_{57} = 0$$

$$x_{67} = 600 \quad x_{77} = 480 + 1200 = 1680 \quad x_{87} = -240 \quad x_{97} = -360$$



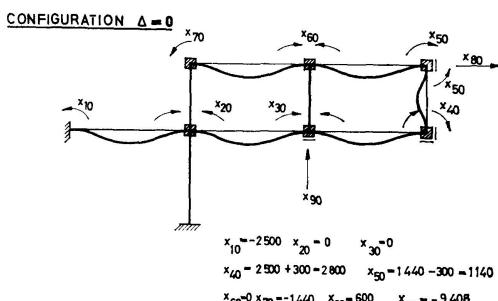
$$x_{18} = 0 \quad x_{28} = x_{38} = x_{48} = x_{58} = x_{68} = x_{78} = -240$$

$$x_{88} = 3 \times 160 = 480 \quad x_{98} = 0$$



$$x_{19} = 0 \quad x_{29} = -720 \quad x_{39} = 0 \quad x_{49} = 720$$

$$x_{59} = 360 \quad x_{69} = 0 \quad x_{79} = -360 \quad x_{89} = 0 \quad x_{99} = 2 \times 144 + 2 \times 288 - 864$$



$$x_{10} = -2500 \quad x_{20} = 0 \quad x_{30} = 0$$

$$x_{40} = 2500 + 300 = 2800 \quad x_{50} = 1440 - 300 = 1140$$

$$x_{60} = 0 \quad x_{70} = -1440 \quad x_{80} = 600 \quad x_{90} = -9408$$

Planche IV

Pour déterminer la matrice de rigidité  $x = [x_{ij}]$ , de la structure, on considère successivement les configurations  $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1, \dots, \Delta_9 = 1$ , en les représentant graphiquement par des schémas sur lesquels on indique les forces de fixation correspondantes, avec les sens imposés par la déformée particulière de chaque configuration. Il convient de rappeler que, dans la configuration  $\Delta_i = 1$ , tous les déplacements  $\Delta_j$ , pour  $j \neq i$ , sont interdits par des forces de fixation  $x_{ji}$ .

Ainsi, dans la configuration  $\Delta_1 = 1$ , puisqu'on a  $\Delta_j = 0$  ( $j \neq 1$ ), la déformée du système principal est manifestement celle qui est représentée dans le schéma correspondant: elle concerne seulement la barre  $AB$ , en raison du blocage de tous les nœuds à l'exception du nœud  $A$  où justement le déplacement  $\Delta_1 = 1$  se produit. Dans ces conditions, la déformation n'étant pas transmise au delà de  $B$ , il n'y a forces de fixation qu'aux extrémités de  $AB$  et on peut écrire:

$$x_{11} = \left( \frac{4EI}{L} \right)_{AB} \propto 2400,$$

$$x_{21} = \left( \frac{2EI}{L} \right)_{AB} \propto 1200,$$

$$x_{31} = x_{41} = x_{51} = x_{61} = x_{71} = x_{81} = x_{91} = 0.$$

Dans la configuration  $\Delta_2 = 1$ , les seules quatre barres convergeant en  $B$  se déforment et il est évident que l'on a:

$$x_{12} = \left( \frac{2EI}{L} \right)_{AB} \propto 1200,$$

$$\begin{aligned} x_{22} &= \left( \frac{4EI}{L} \right)_{AB} + \left( \frac{4EI}{L} \right)_{BC} + \left( \frac{4EI}{L} \right)_{BG} + \left( \frac{4EI}{L} \right)_{BH} \\ &\propto 2400 + 480 + 2400 + 720 = 6000, \end{aligned}$$

$$x_{32} = \left( \frac{2EI}{L} \right)_{BC} \propto 1200,$$

$$x_{42} = x_{52} = x_{62} = 0,$$

$$x_{72} = \left( \frac{2EI}{L} \right)_{BG} \propto 240,$$

$$x_{82} = -\left( \frac{6EI}{L^2} \right)_{BG} \propto -240,$$

$$x_{92} = -\left( \frac{6EI}{L^2} \right)_{BC} \propto -720.$$

Et ainsi successivement pour toutes les configurations  $\Delta_i = 1$  correspondant à des rotations de nœuds.

Pour la configuration  $\Delta_8 = 1$ , les seuls barres  $BG$ ,  $CF$  et  $DE$  se déforment, en raison de la translation horizontale des nœuds  $E$ ,  $F$ ,  $G$  et l'on a:

$$\begin{aligned}
x_{18} &= 0, \\
x_{28} &= -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_{BG} \propto -240, \\
x_{38} &= -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_{CF} \propto -240, \\
x_{48} &= -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_{DE} \propto -240, \\
x_{58} &= -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_{DE} \propto -240, \\
x_{68} &= -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_{CF} \propto -240, \\
x_{78} &= -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_{BG} \propto -240, \\
x_{88} &= \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_{BG} + \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_{CF} + \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_{DE} \propto 3 \times 160 = 480, \\
x_{98} &= 0.
\end{aligned}$$

Dans la configuration  $\Delta_9 = 1$ , seules les quatre barres  $BC$ ,  $CD$ ,  $EF$ ,  $FG$  se déforment, en raison de la translation verticale des nœuds  $C$ ,  $F$  et l'on a:

$$\begin{aligned}
x_{19} &= 0, \\
x_{29} &= -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_{BC} \propto -720, \\
x_{39} &= -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_{BC} + \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_{CD} \propto -720 + 720 = 0, \\
x_{49} &= \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_{CD} \propto 720, \\
x_{59} &= \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_{EF} \propto 360, \\
x_{69} &= -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_{EF} + \left(\frac{6EI}{L^2}\right)_{FG} \propto -720 + 720 = 0, \\
x_{79} &= -\left(\frac{6EI}{L^2}\right)_{BG} \propto -360, \\
x_{89} &= 0, \\
x_{99} &= \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_{BC} + \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_{CD} + \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_{EF} + \left(\frac{12EI}{L^3}\right)_{FG} \\
&\propto 2 \times 144 + 2 \times 288 = 864.
\end{aligned}$$

Toutes ces valeurs peuvent être obtenues facilement du simple examen des schémas des différentes configurations  $\Delta_i = 1$  et l'on doit confirmer au fur et à mesure la loi de réciprocité  $x_{ij} = x_{ji}$ .

On peut donc écrire la matrice de rigidité:

$$x = \left[ \begin{array}{cccccc|cc} 2400 & 1200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1200 & 6000 & 1200 & 0 & 0 & 0 & 240 & -240 & -720 \\ 0 & 1200 & 5280 & 1200 & 0 & 240 & 0 & -240 & 0 \\ 0 & 0 & 1200 & 2880 & 240 & 0 & 0 & -240 & 720 \\ 0 & 0 & 0 & 240 & 1680 & 600 & 0 & -240 & 360 \\ 0 & 0 & 240 & 0 & 600 & 2880 & 600 & -240 & 0 \\ 0 & 240 & 0 & 0 & 0 & 600 & 1680 & -240 & -360 \\ \hline 0 & -240 & -240 & -240 & -240 & -240 & -240 & 480 & 0 \\ 0 & -720 & 0 & 720 & 360 & 0 & -360 & 0 & 864 \end{array} \right].$$

Le vecteur de sollicitation  $x_0 = -\{x_{i0}\}$ , correspondant à la configuration  $\Delta=0$ , peut être obtenu sans difficulté:

$$x_{10} = -\frac{1200 \times 5^2}{12} = -2500,$$

$$x_{20} = \frac{1200 \times 5^2}{12} - \frac{1200 \times 5^2}{12} = 0,$$

$$x_{30} = \frac{1200 \times 5^2}{12} - \frac{1200 \times 5^2}{12} = 0,$$

$$x_{40} = \frac{1200 \times 5^2}{12} + \frac{400 \times 3^2}{12} = 2800,$$

$$x_{50} = \frac{2000 \times 2 \times 3^2}{5^2} - \frac{400 \times 3^2}{12} = 1140,$$

$$x_{60} = \frac{2000 \times 2^2 \times 3}{5^2} - \frac{2000 \times 2^2 \times 3}{5^2} = 0,$$

$$x_{70} = -\frac{2000 \times 2 \times 3^2}{5^2} = -1440,$$

$$x_{80} = \frac{400 \times 3}{2} = 600,$$

$$x_{90} = -2000 - 2 \times \frac{2000 \times 2}{5} + 2 \times \frac{1440 - 960}{5} - 1200 \times 5 = -9408.$$

On a donc:

$$x_0 = \{ 2500 \quad 0 \quad 0 \quad -2800 \quad -1140 \quad 0 \quad 1440 \quad -600 \quad 9408 \}.$$

La résolution du système

$$x \Delta = x_0$$

fournirait les valeurs de  $\Delta_i$ , la détermination des forces généralisées aux extrémités des barres étant obtenue en poursuivant comme auparavant.

### Résumé

On présente une systématisation de la méthode des déplacements pour le calcul des structures réticulées hyperstatiques, analogue à la systématisation classique qui est généralement adoptée dans la méthode des forces, ce qui met en évidence la loi de dualité existant entre ces deux méthodes. On en fait l'application au calcul des structures continues, en général, tenant compte ou non des effets des déformations axiales, et l'on considère ensuite le cas particulier des portiques formés de barres orthogonales.

Le calcul est présenté sous la forme matricielle, ce qui le rend approprié aussi bien à l'utilisation des computateurs automatiques comme à l'emploi des simples calculatrices de bureau.

### Zusammenfassung

Die Anwendung der Deformationsmethode bei der Berechnung statisch unbestimmter Stabwerke wird systematisch dargestellt, wie dies analog für die Kraftmethode normalerweise geschieht. Die Dualität der beiden Verfahren wird somit hervorgehoben. Die Methode wird allgemein auf die Berechnung kontinuierlicher Tragwerke angewendet, mit oder ohne Berücksichtigung der Verformungen infolge der Längskräfte. Als Sonderfall werden rechtwinklige Rahmen untersucht.

Die Berechnung ist in Matrizenform dargestellt; sie eignet sich daher sowohl für Rechenautomaten als auch für einfache Rechenmaschinen.

### Summary

A systematisation of the method of displacements for the calculation of hyperstatic reticulated structures is presented, which is similar to the conventional systematisation which is generally adopted in the method of forces and shows the law of duality subsisting between these two methods. The method is applied to the calculation of continuous structures, in general, taking into account, or omitting, the effects of axial deformations. Thereafter, the special case of portal frames with orthogonal bars is considered.

The calculation is presented in the matricial form which makes it suitable for use either with automatic computers or with simple office calculating machines.

**Leere Seite**  
**Blank page**  
**Page vide**