

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 26 (1966)

**Artikel:** Sur la torsion des cylindres de révolution en béton, armés de cerces et de tirants

**Autor:** Robinson, J.R.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-20887>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Sur la torsion des cylindres de révolution en béton, armés de cercles et de tirants

*Über die Torsion an längs- und ringbewehrten Kreiszylin dern aus Beton*

*Torsion of Concrete Cylinders of Circular Cross-section, Reinforced with Hoops and Longitudinal Ties*

J. R. ROBINSON

Paris

O. GRAF et E. MÖRSCH ont soumis à l'essai par torsion un certain nombre de cylindres de révolution en béton armé (Réf. 1). Parmi ces cylindres, trois d'entre eux, portant les numéros 42, 47 et 52 étaient armés d'acières longitudinaux ancrés dans leurs têtes, ou tirants, et de cercles transversales fermées par soudure. La fig. 1 indique les caractéristiques de ces cylindres.

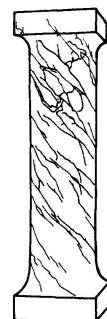
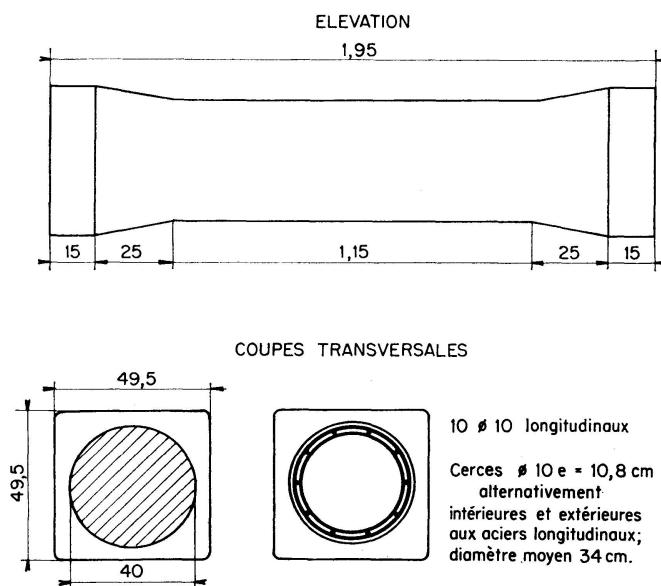


Fig. 2.

La résistance de leur béton à l'âge de l'essai (91 jours) était de 151 kg/cm<sup>2</sup> mesurée sur cubes (9 cubes de 30 cm d'arête).

Les aciers utilisés furent des aciers ronds de 10 mm de diamètre dont les

Tableau I-A. Cylindre 42

| Couples<br>(kgm) | déformations de torsion<br>(rad. $10^{-4}/\text{cm}$ ) |             | Observations  |
|------------------|--|-------------|---|
|                  | totales  | résiduelles |   |
| 250              | 0,008  | —           |   |
| 500              | 0,016  | 0           |   |
| 1000             | 0,033  | 0,0007      |   |
| 1500             | 0,052  | 0,0028      |   |
| 2000             | 0,074  | 0,0064      |   |
| 2250             | 0,088  | —           |   |
| 2400             | 0,099  | —           | Pas de fissures   |
| 2500             | 0,109  | 0,018       | Fissuration observée  |
| 2750             | 0,80   | —           |   |
| 3000             | 1,81   | 0,72        |   |
| 3500             | 4,58   | 2,18        |   |
| 3900             | —  | —           | Croissance rapide des déformations.<br>La rupture survient au bout d'une minute |

Tableau I-B. Cylindre 47

| Couples<br>(kgm) | déformations de torsion<br>(rad. $10^{-4}/\text{cm}$ ) |             | Observations   |
|------------------|--|-------------|--|
|                  | totales  | résiduelles |  |
| 250              | 0,008  | —           |  |
| 500              | 0,016  | 0,0007      |  |
| 1000             | 0,034  | 0,0014      |  |
| 1500             | 0,055  | 0,0043      |  |
| 2000             | 0,081  | 0,0078      |  |
| 2400             | 0,112  | —           |  |
| 2500             | { 0,125<br>0,41  | —<br>0,13   | Déformation mesurée à 2 minutes de chargement. La fissuration se produit à 3 minutes de chargement<br>Déformations mesurées à 10 minutes de chargement |
| 3000             | 2,33   | 0,94        |  |
| 3500             | 5,38   | 2,52        |  |
| ↗                |  |             | Accompagné de déformations croissantes le couple s'élève jusqu'à 3950 kgm à la rupture   |

Tableau I-C. Cylindre 52

| Couples<br>(kgm) | déformations de torsion<br>(rad. $10^{-4}/\text{cm}$ ) |             | Observations   |
|------------------|--|-------------|--|
|                  | totales  | résiduelles |  |
| 250              | 0,008  | —           |  |
| 500              | 0,016  | 0           |  |
| 1000             | 0,034  | 0,0014      |  |
| 1500             | 0,055  | 0,043       |  |
| 2000             | 0,071  | 0,078       |  |
| 2400             | 0,106  | —           | La fissuration apparaît  |
| 2500             | 0,120  | 0,20        |  |
| 3000             | 1,66   | 0,65        |  |
| 3500             |  |             | Augmentation continue de la déformation et rupture après 6 minutes |

limites de rupture varièrent de 5880 à 8530 kg/cm<sup>2</sup>, mais dont les limites d'élasticité ne furent point mesurées parce que les diagrammes de traction de ces aciers ne présentaient pas de palier. D'après les deux diagrammes de traction fournis, il semble que l'on puisse estimer que la limite d'élasticité conventionnelle à 0,2% de ces aciers variait de 4100 à 4800 kg/cm<sup>2</sup>.

Les couples furent appliqués par paliers croissants avec déchargement partiel à 250 kgm à chaque palier.

Les apparences observées ont été les suivantes. Pour chaque cylindre la première fissure est apparue sous un couple sensiblement égal au couple de rupture des cylindres témoins non armés. Puis les fissures, de tracé hélicoïdal et inclinées à 45° sur les génératrices, se sont multipliées avec l'augmentation du couple de torsion jusqu'à couvrir la surface d'un réseau serré et elles se sont élargies progressivement jusqu'à la rupture. Peu avant cette dernière quelques fissures atteignaient 3 mm de largeur. Les ruptures sont survenues de la même manière: une plaque, ou écaille de béton a sauté laissant les armatures à nu à son emplacement. La fig. 2 montre les apparences du cylindre n° 52 après sa rupture, les écailles de béton sautées ayant été remises en place.

Les tableaux I-A, I-B et I-C résument pour chacun des cylindres essayés les résultats des mesures effectuées et les principales observations.

Nous nous proposons d'analyser les phénomènes observés.

Lorsque la fissuration s'est produite, les apparences de l'essai suggèrent à l'évidence l'hypothèse de la formation de bielles hélicoïdales de béton inclinées à 45° et susceptibles d'équilibrer des efforts de compression. Sur une section droite du cylindre, les composantes normales à l'axe de ces efforts de com-

pression équilibrer le couple de torsion. Les composantes parallèles à l'axe sont équilibrées par la traction des tirants. Quant aux cercles, leur rôle est d'équilibrer la poussée au vide que développent les bielles hélicoïdales en raison de leur courbure.

Cercles et tirants, indispensables à l'équilibre ne peuvent entrer en action qu'à la condition de s'allonger. Le cylindre fissuré accuse la même dilatation transversale que les cercles et le même allongement longitudinal que les tirants. Les éléments de béton découpés par les fissures tendent ainsi à se séparer. Il est donc hautement improbable qu'il puisse subsister un noyau axial de béton susceptible d'équilibrer une partie de la poussée au vide des bielles par traction radiale ou une partie de leur poussée axiale et a fortiori un couple de torsion notable. Nous supposerons que le noyau n'exerce aucune de ces actions.

Par raison de symétrie, il y a conservation des sections planes avant et après fissuration.

Nous ferons l'hypothèse que partout où il est sollicité par les efforts nés de la torsion le béton est fissuré à  $45^\circ$  sur la direction de l'axe et plus précisément qu'il est découpé en bielles à  $45^\circ$  n'équilibrant que des efforts de compression sur toute surface cylindrique coaxiale au cylindre-éprouvette.

Repérons les points du cylindre en coordonnées semi-polaires par leur cote  $z$  mesurée sur l'axe, leur angle de site  $\varphi$  et leur distance à l'axe ou rayon vecteur  $r$ . Une couche cylindrique de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$  subit la même déformation angulaire  $\frac{d\theta}{dz}$  et la même dilatation longitudinale relative  $\epsilon_t$  que l'ensemble du cylindre. L'accroissement absolu de son rayon  $\delta r$  est le même que celui du rayon des cercles puisque le béton s'appuie radialement sur ces cercles. Si donc  $D$  désigne le diamètre de ces dernières et  $\epsilon_t$  leur allongement relatif,  $\delta r$  est égal à  $D \epsilon_t / 2$  et la dilatation transversale relative de la couche cylindrique est égale à :

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{D \epsilon_t}{2r}. \quad (\text{a})$$

Considérons au point  $z, \varphi, r$  l'élément de bille découpé dans la couche précédente, de base  $rd\varphi, dr$ , et limité par les plans de cote  $z$  et  $z+dz$  (fig. 3).

Les déformations d'une telle bille en fonction de celles de la couche cylindrique à laquelle elle appartient se calculent aisément en développant sur un

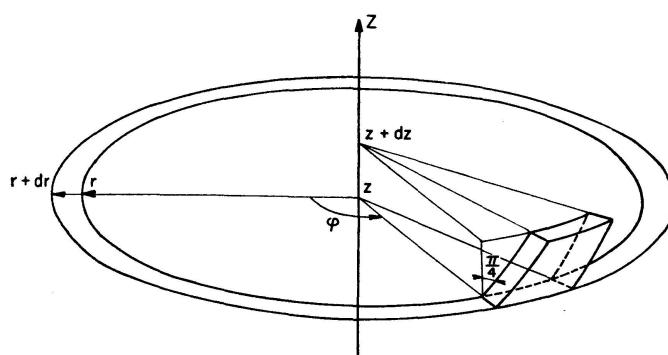


Fig. 3.

plan une tranche de hauteur  $dz$  de la couche (fig. 4). L'axe hélicoïdal de la bielle se développe en une droite  $A B$ . Dans la déformation par rotation (fig. 4a) le rectangle suivant lequel s'était développée la tranche se transforme en un parallélogramme, les côtés normaux à  $Oz$  se décalant de  $r d\theta$ . La variation de longueur absolue de  $A B$  est égale à la projection de  $BB'$  sur  $AB$ , soit  $-r d\theta / \sqrt{2}$ , et comme la longueur de  $AB$  est égale à  $dz \sqrt{2}$  la variation relative de longueur de  $AB$  est égale à  $-\frac{1}{2} r \frac{d\theta}{dz}$ . Par des raisonnements analogues sur les figures b et c, l'on trouve que les variations relatives de longueur de  $AB$  sous l'effet des dilatations relatives  $\epsilon_t$  et  $\delta r/r$  sont égales à  $\epsilon_t/2$  et à  $dr/2r$ . La déformation relative de la bielle est égale à la somme de ces trois variations relatives de longueur de  $AB$ .

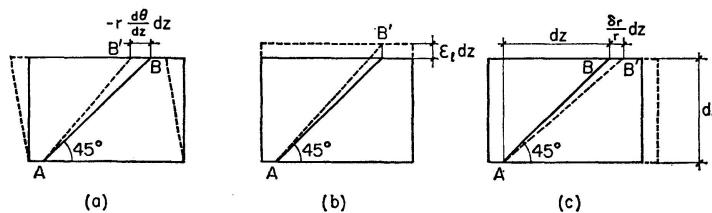


Fig. 4.

Par ailleurs cette déformation relative est égale à la somme de son retrait  $\rho$  et de sa déformation relative mécanique.

$$\epsilon' = \frac{\sigma}{E_b} \quad (1)$$

en appelant  $\sigma$  la contrainte de compression du béton et  $E_b$  son module sécant (fonction de  $\sigma$ ). Nous considérons comme positifs la contrainte de compression et les raccourcissements  $\rho$  et  $\epsilon'$  du béton.

En égalant les déformations géométriques d'une part, mécanique et de retrait d'autre part et en tenant compte de la relation (a), nous obtenons

$$\epsilon' + \rho = \frac{1}{2} r \frac{d\theta}{dz} - \frac{\epsilon_t}{2} - \frac{D \epsilon_t}{4r}, \quad (b)$$

qui se met sous la forme:

$$\epsilon' = \frac{1}{2r} \left[ r^2 \frac{d\theta}{dz} - r (\epsilon_t + 2\rho) - \frac{D \epsilon_t}{2} \right]. \quad (2)$$

Le raccourcissement  $\epsilon'$  et la contrainte  $\sigma$  atteignent leurs maximums  $\epsilon'_b$  et  $\sigma_b$  à la paroi où ils sont liés par l'équation (1) sous la forme:

$$\epsilon'_b = \frac{\sigma_b}{E_b} \quad (1')$$

et où  $\epsilon'_b$  est donné par l'équation

$$\epsilon'_b = \frac{1}{2R} \left[ R^2 \frac{d\theta}{dz} - R (\epsilon_t + 2\rho) - \frac{D \epsilon_t}{2} \right] \quad (2')$$

obtenue en remplaçant dans l'équation (2) la variable  $r$  par  $R$ , rayon du cylindre. De la paroi vers l'intérieur du cylindre,  $\epsilon'$  et  $\sigma$  décroissent avec  $r$  jusqu'à s'annuler pour une valeur  $r_0$ , racine positive de l'équation

$$r_0^2 \frac{d\theta}{dz} - r_0 (\epsilon_l + 2\rho) - \frac{D \epsilon_t}{2} = 0. \quad (3)$$

Ainsi, seule participe à l'équilibre, une couche périphérique du béton du cylindre. Les bielles qui s'y forment sont donc comparables dans leur action à celles qui se forment dans la paroi d'un tube et elles s'associent aux aciers d'une manière analogue. Il semble ainsi que l'on puisse, à titre de première approximation, se servir de la théorie du tube pour évaluer les contraintes des aciers.

Rappelons que dans un tube dont l'épaisseur de la paroi est supposée petite par rapport au diamètre, la contrainte  $\sigma_{at}$  des cercles est donnée par la relation:

$$\sigma_{at} = \frac{2tC}{A_t \pi D^2} \quad (c)$$

et celle des tirants  $\sigma_{al}$  par la relation:

$$\sigma_{al} = \frac{2C}{D \sum A_l} \quad (d)$$

relations où:

$C$  représente le couple de torsion.

$D$  le diamètre des cercles, égal au diamètre à mi-paroi du tube.

$t$  l'espacement de deux cercles consécutives.

$A_t$  l'aire de la section droite de l'acier constitutif d'une cerce.

$\sum A_l$  la somme des aires des sections droites des tirants.

Pour l'un des couples mesurés aux essais nous obtiendrons, en utilisant les formules (c) et (d), des valeurs approchées des contraintes des aciers dont nous pourrions déduire leur allongements par les équations classiques

$$\epsilon_t = \frac{\sigma_{at}}{E_a}, \quad (4)$$

$$\epsilon_l = \frac{\sigma_{al}}{E_a}. \quad (5)$$

$E_a$  étant le module d'Young de l'acier auquel on peut attribuer la valeur  $2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

Ces allongements nous permettraient de calculer la racine  $r_0$  de l'équation (3), puisque nous connaissons la déformation mesurée  $\frac{d\theta}{dz}$ , si nous connaissons la valeur  $\rho$  du retrait. Mais devant les valeurs élevées que prend  $\epsilon_l$ , la valeur de  $\rho$  apparaît comme un terme correctif qu'il n'est pas nécessaire d'évaluer avec précision. Les cylindres ont bien été soumis à une cure prolongée (4)

semaines), ce qui justifierait une basse valeur de  $\rho$ . Cependant ce n'est pas le retrait moyen des cylindres qui intervient dans le calcul, mais bien le retrait de leurs couches superficielles. Dans ces conditions il semble raisonnable de prendre

$$\rho = 3 \cdot 10^{-4}.$$

Nous pouvons alors calculer  $r_0$  et aussi  $\epsilon'_b$ , déformation du béton à la paroi, par l'équation (2) en y faisant  $r = R$ . Mais la connaissance de cette déformation ne nous renseigne pas sur la contrainte du béton parce que le diagramme déformation contrainte du béton en compression simple n'a été déterminé que jusqu'à  $4 \cdot 10^{-4}$  et  $75 \text{ kg/cm}^2$ .

Pour obtenir une évaluation de la contrainte  $\sigma_b$  du béton à la paroi, nous chercherons à calculer cette contrainte à partir du couple appliqué et du rayon intérieur  $r_0$  du tube de béton comprimé. Une bielle de béton à  $45^\circ$  s'appuyant sur l'élément d'aire  $r d\varphi dr$  de la section droite du cylindre a pour section  $r d\varphi dr / \sqrt{2}$ . Si sa contrainte de compression est  $\sigma$ , la projection de l'effort qu'elle supporte sur la section droite, dirigée suivant la direction tangentielle a pour valeur

$$\sigma r d\varphi dr / 2. \quad (\text{e})$$

Il s'ensuit que le couple  $C$  a pour valeur

$$C = \pi \int_{r_0}^R \sigma r^2 dr. \quad (\text{f})$$

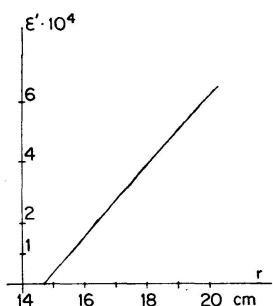


Fig. 5. Diagramme  $r, \epsilon'$  d'après l'équation (2) pour le cylindre 42 sous le couple de 3000 kgm.

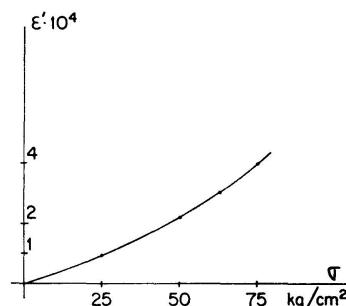


Fig. 6. Diagramme de compression du béton d'après O. GRAF.

Les diagrammes représentatifs de la déformation  $\epsilon'$  du béton évaluée en fonction du rayon  $r$  d'après l'équation (2) d'une part, et de cette même déformation en fonction de la contrainte dans l'essai de compression simple d'autre part (fig. 5 et 6) semblent autoriser à titre de première approximation à supposer que la contrainte  $\sigma$  varie linéairement de 0 à  $\sigma_b$  en fonction du rayon  $r$  quant ce dernier vaire de  $r_0$  à  $R$ :

$$\sigma = \frac{r - r_0}{R - r_0} \sigma_b. \quad (6)$$

Des équations (f) et (6) on tire

$$C = \frac{\pi}{12} \sigma_b (R - r_0) (3R^2 + 2Rr_0 + r_0^2) \quad (7)$$

équation qui fournit une valeur de  $\sigma_b$ .

Cependant, les équations utilisées ne sont pas parfaitement cohérentes, les relations (c) et (d) n'étant strictement applicables qu'à un tube dont l'épaisseur de la paroi peut être négligée par rapport au rayon, ce qui n'est pas le cas. Cherchons donc des expressions des contraintes des aciers qui soient en accord avec l'hypothèse (6).

Le rayon de courbure de l'hélice à  $45^\circ$  tracée sur un cylindre de rayon  $r$  étant égal à  $2r$ , la poussée au vide, ou poussée radiale d'une bielle d'épaisseur  $dr$  située sur ce cylindre est égale à  $\sigma dr/2r$  par unité de sa surface. Pour l'élément de surface  $dr dz$  cette poussée est égale à  $\sigma dr d\varphi dz/2$ . Par unité d'angle de site,  $\varphi$ , et par unité de hauteur  $z$ , elle est égale à  $\sigma dr/2$ . Pour l'ensemble des bielles comprimées, par unité d'angle de site et de hauteur, la poussée au vide est égale à

$$p_v = \frac{1}{2} \int_{r_0}^R \sigma dr \quad (g)$$

soit en tenant compte de (4)

$$p_v = \frac{\sigma_b}{4} (R - r_0). \quad (h)$$

D'autre part la poussée radiale d'un élément de cercle sous-tendu par l'angle  $d\varphi$  est égale à  $A_t \sigma_{at} d\varphi$ . Par unité d'angle de site et de hauteur la poussée radiale des cercles est ainsi égale à

$$p_{at} = \frac{A_t \sigma_{at}}{t} \quad (i)$$

En égalant  $p_v$  et  $p_{at}$  et en tenant compte de (7) on obtient:

$$\sigma_{at} = \frac{3tC}{\pi A_t (3R^2 + 2Rr_0 + r_0^2)}. \quad (8)$$

La projection sur l'axe du cylindre de l'effort de compression d'une bielle a même valeur que sa projection sur la section droite, soit la valeur (e). D'où la poussée axiale sur l'ensemble du béton comprimé

$$P_{bl} = \pi \int_{r_0}^R \sigma r dr \quad (j)$$

ou en tenant compte de (6):

$$P_{bl} = \frac{\pi \sigma_b}{6} (R - r_0) (2R + r_0). \quad (k)$$

En égalant à l'effort de traction des tirants

$$P_l = \sigma_{al} \sum A_l \quad (l)$$

Tableau II

| Couple appliqué: 3000 kgm |   |  |  |  |                               |                               |               |                                     |                                |
|---------------------------|---|--|--|--|-------------------------------|-------------------------------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------|
| Cylindre                  | $\frac{d\theta}{dz}$<br>( $10^{-4}$ rad/cm) | calcul<br>de<br>$\sigma_{at}$ et $\sigma_{al}$ | $\sigma_{at}$<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | $\sigma_{al}$<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | $\epsilon_t$<br>( $10^{-3}$ ) | $\epsilon_l$<br>( $10^{-3}$ ) | $r_0$<br>(cm) | $\sigma_b$<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | $\epsilon'_b$<br>( $10^{-3}$ ) |
| 42                        | 1,81  | (c) et (d)                                     | 2260                                   | 2240                                   | 1,08                          | 1,07                          | 14,3          | 128                                 | 0,52                           |
|                           |   | (8) et (9)                                     | 1960                                   | 2080                                   | 0,94                          | 0,99                          | 14,7          | 108                                 | 0,64                           |
| 47                        | 2,33  | (c) et (d)                                     | 2260                                   | 2240                                   | 1,08                          | 1,07                          | 13,1          | 88                                  | 1,04                           |
|                           |   | (8) et (9)                                     | 2100                                   | 2150                                   | 1,00                          | 1,03                          | 12,8          | 85                                  | 1,09                           |
| 52                        | 1,66  | (c) et (d)                                     | 2260                                   | 2240                                   | 1,08                          | 1,07                          | 16,7          | 161                                 | 0,37                           |
|                           |   | (8) et (9)                                     | 1900                                   | 2060                                   | 0,91                          | 0,98                          | 15,6          | 126                                 | 0,40                           |

Tableau III

| Couple appliqué: 3500 kgm |   |  |  |  |                               |                               |               |                                     |                                |
|---------------------------|---|--|--|--|-------------------------------|-------------------------------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------|
| Cylindre                  | $\frac{d\theta}{dz}$<br>( $10^{-4}$ rad/cm) | calcul<br>de<br>$\sigma_{at}$ et $\sigma_{al}$ | $\sigma_{at}$<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | $\sigma_{al}$<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | $\epsilon_t$<br>( $10^{-3}$ ) | $\epsilon_l$<br>( $10^{-3}$ ) | $r_0$<br>(cm) | $\sigma_b$<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | $\epsilon'_b$<br>( $10^{-3}$ ) |
| 42                        | 4,58  | (c) et (d)                                     | 2650                                   | 2620                                   | 1,26                          | 1,25                          | 9,1           | 75                                  | 3,1                            |
|                           |   | (8) et (9)                                     | 2770                                   | 2650                                   | 1,32                          | 1,26                          | 9,4           | 76                                  | 3,1                            |
| 47                        | 5,38  | (c) et (d)                                     | 2650                                   | 2620                                   | 1,26                          | 1,25                          | 8,3           | 71                                  | 3,9                            |
|                           |   | (8) et (9)                                     | 2860                                   | 2690                                   | 1,38                          | 1,28                          | 8,4           | 70                                  | 3,9                            |

et en tenant compte de (7) il vient:

$$\sigma_{al} = \frac{2(2R + r_0)C}{(3R^2 + 2Rr_0 + r_0^2)\sum A_l}. \quad (9)$$

On calcule aisément la racine  $r_0$  du second membre de l'équation (1) qui est cohérente avec les contraintes et les allongements des aciers déduits des équations (8), (9), (4) et (5) par le moyen d'approximations successives, en employant  $r_0$  comme paramètre et en utilisant comme valeurs de départ les valeurs données par les équations (c) et (d) du tube mince. La contrainte du béton à la paroi peut être alors calculée au moyen de l'équation (7), et la déformation  $\epsilon'_b$  du béton à la paroi par l'équation (2) où  $r = R$ . Nous donnons aux tableaux suivants les résultats de ces calculs. Nous nous limitons aux valeurs des couples appliqués pour lesquels la fissuration était complète — hypothèse de base de la théorie développée — et pour lesquels les déformations ont été mesurées.

Rappelons les données géométriques des essais:

$$D = 35 \text{ cm}; \quad \sum A_l = 7,85 \text{ cm}^2; \quad t = 10,8 \text{ cm}; \quad A_t = 0,785 \text{ cm}^2$$

et les hypothèses adoptées:

$$E_a = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2; \quad \rho = 3 \cdot 10^{-4}.$$

Il est possible d'apprécier les résultats portés aux tableaux II et III en calculant les valeurs du module sécant  $E_b$  du béton auxquels ils conduisent et en les comparant aux valeurs obtenues par O. GRAF dans l'essai de compression simple du béton employé. Rappelons tout d'abord ces valeurs:

| $\sigma_b$             | $E_b$                      |
|------------------------|----------------------------|
| 6,2 kg/cm <sup>2</sup> | 304 000 kg/cm <sup>2</sup> |
| 25 kg/cm <sup>2</sup>  | 260 000 kg/cm <sup>2</sup> |
| 50 kg/cm <sup>2</sup>  | 221 000 kg/cm <sup>2</sup> |
| 75 kg/cm <sup>2</sup>  | 187 000 kg/cm <sup>2</sup> |

Fixons maintenant notre attention sur le tableau II, relatif au palier de couple 3000 kgm, et calculons les valeurs de  $E_b$  qui résultent de la théorie

Tableau IV

| Couple appliqué 3000 kgm |                                     |                                      |                                |                             |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| Cylindre                 | $\sigma_b$<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | $\epsilon'_b$<br>(10 <sup>-3</sup> ) | $E_b$<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | Appréciation<br>sur $E_b$   |
| 42                       | 108                                 | 0,64                                 | 170 000                        | Valeur plausible            |
| 47                       | 85                                  | 1,09                                 | 78 000                         | Valeur trop basse           |
| 52                       | 126                                 | 0,40                                 | 315 000                        | Valeur nettement trop haute |

développée (éq. 8 et 9). Nous groupons au tableau IV les résultats de ces calculs et les appréciations qui semblent pouvoir être portées sur eux.

Les causes physiques de dispersion que néglige la théorie développée, l'intervention de l'adhérence et celle de la résistance à la traction du béton, nous paraissent avoir des effets plus importants que l'arbitraire de l'hypothèse de la variation linéaire de la contrainte du béton avec le rayon (équation 6) ou que l'arbitraire du choix de la valeur du retrait  $\rho$ . Dans ces conditions il nous semble possible de conclure que cette théorie décrit convenablement, sous la réserve d'une large dispersion, l'équilibre interne des cylindres sous le couple de torsion de 3000 kgm.

Si maintenant nous examinons le tableau III relatif au couple de torsion de 3500 kgm, nous constatons d'abord que la contrainte  $\sigma_b$  du béton  $y$  est moins élevée qu'au tableau II, relatif au couple de 3000 kgm, ce qui est hautement anormal. D'autre part les valeurs du module sécant  $E_b$  qu'on peut déduire du tableau:

$$\text{pour le cylindre 42: } 76/3,1 \cdot 10^{-3} = 24\,500 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{pour le cylindre 47: } 70/3,9 \cdot 10^{-3} = 18\,000 \text{ kg/cm}^2$$

sont absurdes.

De plus les déformations angulaires totales sous charge sont devenues considérables et les déformations résiduelles après déchargement sont devenues de l'ordre de la moitié de ces déformations totales.

Les ancrages des tirants n'auraient-ils pas glissé?

Si l'on suppose que pour le cylindre 42 ce glissement équivaut à un allongement de  $4 \cdot 10^{-3}$  c'est-à-dire si l'on pose

$$\epsilon_l = \frac{\sigma_{al}}{E_a} + 4 \cdot 10^{-3}$$

on trouve  $r_0 = 15,1$  cm,  $\sigma_b = 134$  kg/cm<sup>2</sup>,  $\epsilon'_b = 1,25 \cdot 10^{-3}$  et  $E_b = 107\,000$  kg/cm<sup>2</sup>, toutes valeurs plausibles.

Si de même pour le cylindre 47 on suppose

$$\epsilon_l = \frac{\sigma_{al}}{E_a} + 5,5 \cdot 10^{-3}$$

on trouve  $r_0 = 15,6$  cm,  $\sigma_b = 147$  kg/cm<sup>2</sup>,  $\epsilon'_b = 1,3 \cdot 10^{-3}$  et  $E_b = 113\,000$  kg/cm<sup>2</sup> valeur plausible.

Ces résultats de calcul confirment qu'il y a bien eu glissement des ancrages des tirants dont l'examen confirme que leurs dispositions n'étaient pas parfaites. C'est ce glissement qui a provoqué les ruptures.

Le groupe des huit équations (1'), (2'), (3), (4), (5), (7), (8) et (9) aux huit inconnues,

$$\epsilon'_b, \frac{d\theta}{dz}, \epsilon_l, \epsilon_t, r_0, \sigma_b, \sigma_{at}, \sigma_{al}$$

fournit une théorie des cylindres armés de cercles et de tirants dans l'état fissuré. De nouveaux essais sont nécessaires pour juger de sa validité.

### Référence

1. O. GRAF, E. MÖRSCH: Verdrehungsversuche zur Klärung der Schubfestigkeit von Eisenbeton. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Heft 258. Berlin, 1922.

### Résumé

O. GRAF et E. MÖRSCH ont essayé en 1921 à la torsion des cylindres de révolution en béton, armés de cercles et de tirants. Une théorie est développée pour décrire le comportement des cylindres fissurés. Elle conduit à la conclusion que les ruptures des cylindres sont survenues par le glissement des ancrages des tirants.

### Zusammenfassung

O. GRAF und E. MÖRSCH stellten 1921 an längs- und ringbewehrten Kreiszylindern aus Beton Torsionsversuche an. Es wird eine Theorie entwickelt, welche das Verhalten der gerissenen Zylinder beschreibt. Sie führt zum Schluß, daß die Brüche der Zylinder durch das Gleiten der Längseisen in den Verankerungen eintreten.

### Summary

In 1921 O. GRAF and E. MÖRSCH tested in torsion concrete cylinders of circular cross-section, reinforced with hoops and longitudinal ties. A theory is developed in order to describe the behaviour of the cracked cylinders. This theory leads to the conclusion that failures occurred as a result of yielding of the anchorages of the longitudinal ties.