

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 26 (1966)

**Artikel:** Beiträge zur Berechnung der Rißsicherheit  
**Autor:** Palotás, László  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-20886>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Beiträge zur Berechnung der Rißsicherheit

*Contribution to the Calculation of Safety from Cracking*

*Contribution au calcul de la sécurité à la fissuration*

LÁSZLÓ PALOTÁS

Prof. Dr. Ing., Dr. r. techn., Budapest, Technische Universität für Bau- und Verkehrswesen

## 1. Grundlegende Beziehungen zwischen Spannung und Formänderung des Betons

### *a) Allgemeine Bemerkungen*

Bekanntlich gehört der Beton zu den sogenannten *zähelastischen Baustoffen*, in denen *mit zunehmender Belastungsdauer*, im Vergleich zu den primären Formänderungen, *zunehmende Verformungen einhergehen*.

Im folgenden wird nun hauptsächlich von der Berechnung der Formänderungen bei Stahlbetonträgern sowie vom Problem der Berechnung der Risse die Rede sein; deshalb wollen wir — in aller Kürze zurückblickend — die durch kurzzeitige Belastung verursachten sogenannten *momentanen Formänderungen*, dann die durch dauernd wirkende Lasten herbeigeführten sogenannten *Langzeit-Verformungen* des Betons und innerhalb dieser Fragen die Beziehungen zwischen *Spannungen* und *Formänderungen* in Erinnerung bringen.

### *b) Die kurzzeitige Formänderung des Betons*

Die  $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurve und die wichtigeren Begriffe und Bezeichnungen des kurzzeitig auf Druck beanspruchten Betons sind in Fig. 1 wiedergegeben. Die *primäre Formänderungs-Spannungslinie* ist eine nach oben konvexe Kurve. Die primären Verformungen  $\epsilon$  gliedern sich in einen *elastischen*  $\epsilon_r$  und in einen bleibenden  $\epsilon_m$  Teil.

Wird im Zuge unserer Berechnungen eine idealisierte  $\sigma$ - $\epsilon$ -Linie erforderlich, dann kann man, auf Grund der Auswertung der Versuchsergebnisse, von der handlichen *Hartig-Ritter-Formel* ausgehen (Fig. 2). Mit den Bezeichnungen in



Fig. 2 haben wir

$$\sigma = \sigma_p \left(2 - \frac{\epsilon}{\epsilon_p}\right) \frac{\epsilon}{\epsilon_p} = E_x \epsilon \quad (1)$$

beziehungsweise

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_p} = \beta = 1 - \sqrt{1 - \alpha}. \quad (2)$$

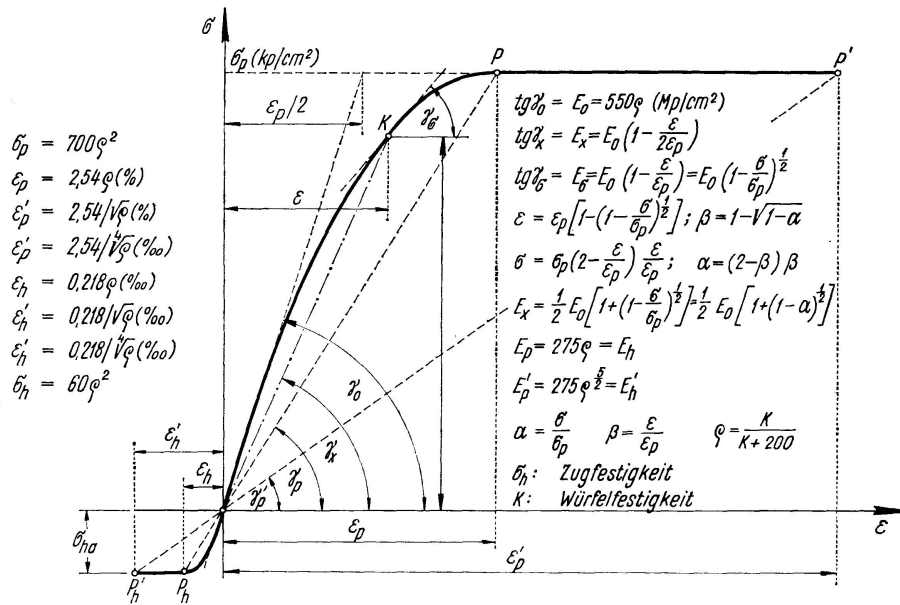
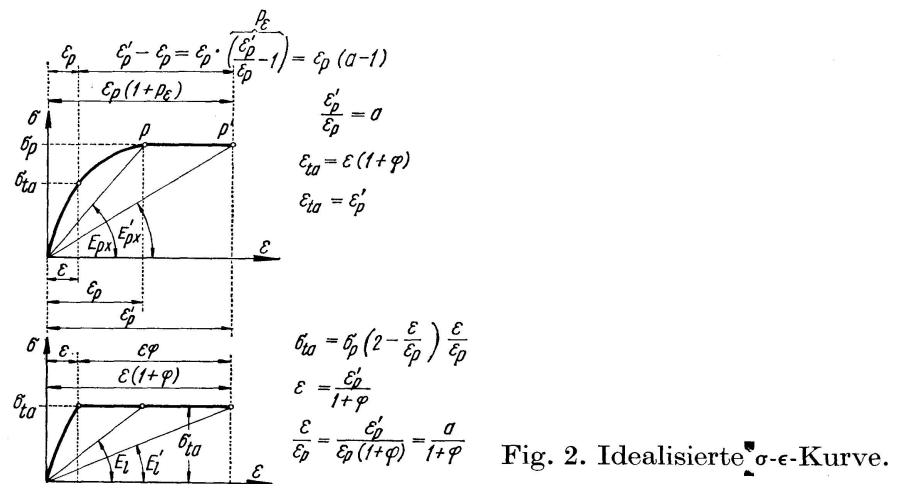


Fig. 1. Jungfräuliche  $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurve.



Für die *Biegedruckfestigkeit* erhält man

$$\sigma_p = 700 \rho^2,$$

wo

$$\rho = K / (K + 200)$$

und  $K$  die Würfelfestigkeit bedeutet.

*Die Bruchstauchung*

$$\epsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_{px}} = \frac{2 \sigma_p}{E_0} = 2,54 \rho^{0/00}. \quad (3)$$

Für die volle Bruchstauchung  $\epsilon'_p$  kann — in Abhängigkeit von der Würfel-festigkeit — bei Biege-Druck die Beziehung

$$\epsilon'_p = \frac{2,54}{\sqrt{\rho}}^{0/00}, \quad (4)$$

für reinen Druck die Formel

$$\epsilon_p = \frac{2,54}{\sqrt[4]{\rho}}^{0/00} \quad (4a)$$

berücksichtigt werden.

Für  $\epsilon'_p$  bringen die Forscher im allgemeinen Festwerte ( $3^{0/00}$ ,  $3,5^{0/00}$ ) in Vorschlag, einige in Abhängigkeit von der Würfel-festigkeit, andere wieder von der Prismenfestigkeit.

Für die Zuglinie  $\sigma - \epsilon$  machen wir die Annahme

$$E_0 = E_{h0}. \quad (5)$$

Die reine Betonzugfestigkeit kann etwa mit dem Wert

$$\sigma_h = 60 \rho^2, \quad (6)$$

die entsprechende Bruchdehnung und volle Bruchdehnung mit den Werten

$$\epsilon_h = \frac{2,60}{550} \rho = 0,218 \rho \quad (7)$$

und für Biegezug

$$\epsilon'_h = \frac{0,218}{\sqrt{\rho}} \quad (8)$$

für reinen Zug

$$\epsilon'_h = \frac{0,218}{\sqrt[4]{\rho}} \quad (8a)$$

berücksichtigt werden.

*c) Die Langzeitverformung des Betons*

Die Dauerverformung  $\epsilon_t$  des Betons infolge von Langzeitlasten (z. B. ständiger Last) setzt sich — unter Annahme einer gleichen Temperatur und Feuchtigkeit — in jedem beliebigen Zeitpunkt  $t$  aus drei Teilen zusammen [1]:

aus der bei der Aufbringung der Last (z. B. bei Entfernung der Rüstung) entstehenden sogenannten *Momentan-Formänderung*  $\epsilon_0$ ,

aus dem *Schwinden* infolge natürlichem Austrocknen des Betons  $\epsilon_{zs}$

und aus dem mit der Zeit erfolgenden sogenannten *Kriechen*  $\epsilon_t$ . Somit gilt also

$$\epsilon_l = \epsilon_t - (\epsilon_0 + \epsilon_{zs}). \quad (9)$$

Das *Kriechen* kann zur Spannung proportional angenommen werden, d. h.

$$\epsilon_l = \varphi \epsilon_0 \quad (10)$$

und

$$\varphi = \varphi_n \delta, \quad (11)$$

worin  $\varphi$  das auf die Einheit der momentanen Formänderung bezogene Kriechen, das sogenannte *Kriechmaß*, bedeutet,  $\varphi_n$  hingegen das zum Zeitpunkt  $t = t_n \rightarrow \infty$  gehörige Kriechmaß und  $\delta$  die *Verlaufsfunktion* der Erscheinung  $\delta(t)$ .

Des weiteren wird bei der Berechnung der Verformungen der Einfachheit halber von der Annahme ausgegangen, daß das End-Kriechmaß proportional zur vollen plastischen Formänderung des Betons ist. Die derart erhaltenen  $\varphi_n$ -Werte entsprechen mit guter Annäherung den Versuchswerten. Unter solcher Bedingung ist

$$\varphi_n = \frac{\epsilon'_p}{\epsilon_p} = \rho^{-5/2}. \quad (12)$$

Für Dauerzug empfehlen wir die Formel

$$\varphi_n = \frac{\epsilon'_p}{\epsilon_p} = \rho^{-5/4}. \quad (12a)$$

Für den zeitlichen Verlauf des Kriechens kann die Formel

$$\varphi = \varphi_n \delta(t) \quad (13)$$

benützt werden, in der

$$\delta(t) = 1 - e^{-t/t_e} \quad \text{oder} \quad 1 - e^{-t/t_e} \quad (14)$$

und  $t_e$  die Dämpfungszeit (Retardationszeit) sind.

#### d) Die Dauerstandfestigkeit des Betons

Die *Dauerstandfestigkeit* kann mit  $(0,7-0,9) \sigma_p$  angesetzt werden.

Zu einer theoretischen Bestimmung der Dauerstandfestigkeit kann man von einer theoretisch wahrscheinlichen Annahme aus gelangen.

Die Annahme lautet: Die durch die *Dauerfestigkeit*  $\sigma_{ta}$  verursachte gesamte spezifische Stauchung  $\epsilon_{ta}$  kann nicht größer sein als die volle Bruchstauchung  $\epsilon_p$ . D. h.

$$\epsilon_{ta} = \epsilon'_p = \epsilon(1 + \varphi). \quad (15)$$

Gemäß Fig. 3 gilt somit

$$\sigma_{ta} = \sigma_p \left[ 2 - \frac{\epsilon'_p}{\epsilon_p(1 + \varphi)} \right] \frac{\epsilon'_p}{\epsilon_p(1 + \varphi)}$$

und mit der Bezeichnung

$$a = \frac{\epsilon'_p}{\epsilon_p},$$

$$\sigma_{ta} = \sigma_p \left( 2 - \frac{a}{1 + \varphi} \right) \frac{a}{1 + \varphi}. \quad (16)$$

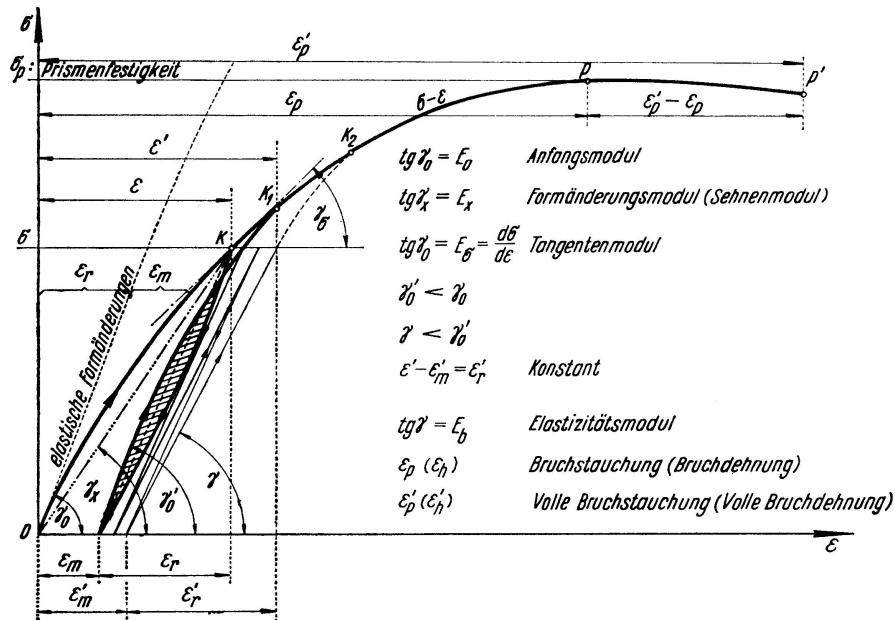


Fig. 3. Angenäherte Bestimmung der Dauerstandfestigkeit.

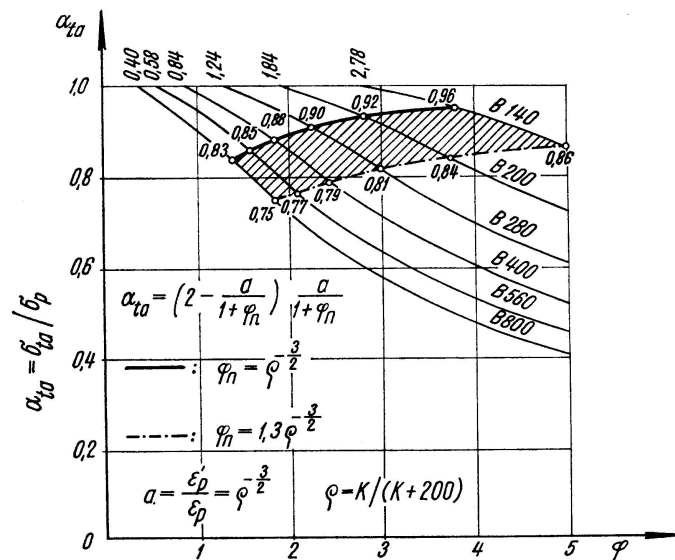


Fig. 4. Dauerstandfestigkeit.

In Fig. 4 haben wir in Funktion von  $\varphi$  für verschiedene Betongüten die Veränderlichkeit der Dauerstandfestigkeit, das Verhältnis

$$\alpha_{ta} = \frac{\sigma_{ta}}{\sigma_p} \quad \text{dargestellt.}$$



gende Beziehungen:  $\epsilon_t = \epsilon_r + \epsilon_m = \epsilon_0 (1 + \varphi),$  (18)

$$\epsilon_m = \epsilon_{0m} + \epsilon_1 = \epsilon_{0m} + \epsilon_0 \varphi. \quad (18a)$$

In der Praxis haben die Lasten zum Teil ständigen und teilweise momentanen Charakter; in diesem Fall stellt das zusammengesetzte Diagramm  $OABDE$  der Fig. 5 die Lösung dar.

Nach Einführung der Bezeichnungen

$$\lambda = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_t}, \quad (19)$$

$$\nu = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_t} = 1 - \lambda, \quad (20)$$

von denen  $\lambda$  das *bleibende Formänderungsmaß*,  $\nu$  hingegen das *elastische Formänderungsmaß* genannt werden kann, da

$$\lambda = 1 - \frac{\alpha}{2(1 - \sqrt{1 - \alpha})(1 + \varphi)} = 1 - \frac{\nu_0}{1 + \varphi} \quad (19a)$$

und 
$$\nu = \frac{\alpha}{2(1 - \sqrt{1 - \alpha})(1 + \varphi)} = \frac{\nu_0}{1 + \varphi} \quad (20a)$$

ist und worin

$$\nu_0 = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_0} = \frac{\alpha}{2(1 - \sqrt{1 - \alpha})} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha}), \quad (21)$$

$$\lambda_0 = \frac{\epsilon_{0m}}{\epsilon_0} = 1 - \nu_0 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha}) \quad (22)$$

bedeutet.

Die Werte  $\nu_0$  schwanken in der Nähe des Bruchzustandes beziehungsweise der Dauerstandfestigkeit zwischen 0,7 bis 0,5, die Werte  $\nu$  hingegen zwischen 0,1 bis 0,3. Praktisch können die  $\nu$ -Werte zwischen 0,2 bis 0,35 angenommen werden (Fig. 6).

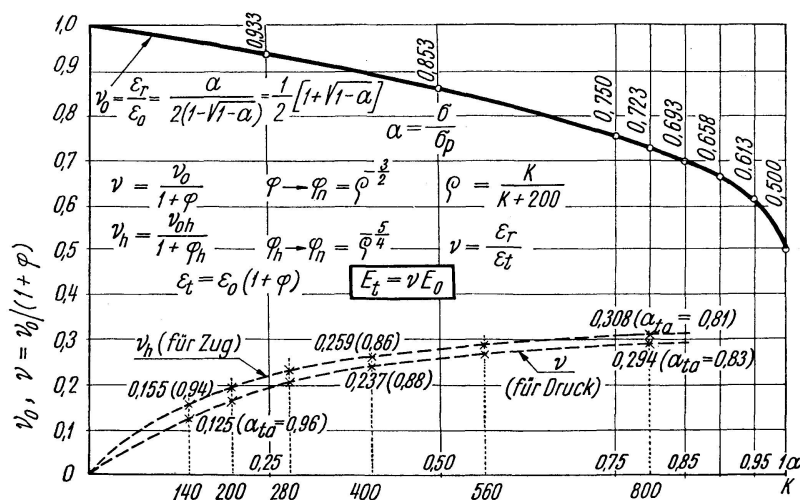


Fig. 6. Elastisches Formänderungsmaß  $\nu$  in Funktion von  $\alpha$ ,  $K$  und  $\varphi$ .

Die Linie der Endwerte  $\epsilon_{tn}$  der Formänderung kann durch eine Gerade ersetzt werden. In Fig. 7 sind die zusammengesetzten Formänderungen in diesem Sinne dargestellt. Nach den Bezeichnungen der Abbildung gilt

$$\epsilon'_{tn} = \frac{\sigma}{E'_{tn}} = \frac{\sigma}{\sigma_{ta}} \epsilon'_p = \frac{\alpha}{\alpha_{ta}} \epsilon'_p, \quad (23)$$

$$E'_{tn} = \frac{\sigma_{ta}}{\epsilon'_p} = \alpha_{ta} \frac{\sigma_p}{\epsilon'_p} = \alpha_{ta} 275 \rho^{5/2}, \quad (24)$$

$$E_r = \frac{\sigma}{E_0} = \alpha \frac{\epsilon_p}{2},$$

$$\nu' = \frac{\epsilon_r}{\epsilon'_{tn}} = \frac{\alpha_{ta}}{2} \frac{\epsilon_p}{\epsilon'_p} = \frac{\alpha_{ta}}{2} \rho^{3/2} = \frac{\alpha_{ta}}{2 \varphi_n}, \quad (25)$$

weil

$$\varphi_n = \frac{1}{\rho^{3/2}}.$$

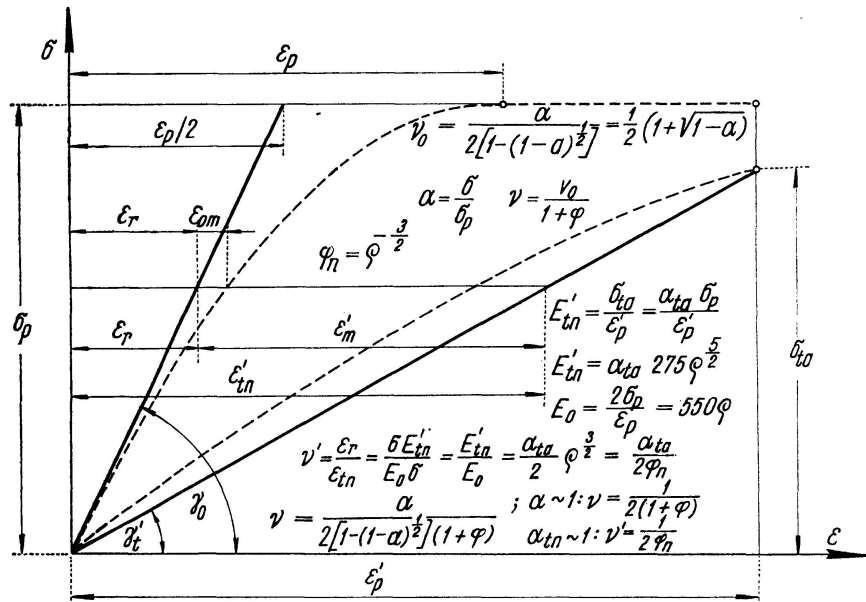


Fig. 7. Vereinfachtes  $\sigma$ - $\epsilon_t$ -Diagramm.

Nimmt man hieraus folgend mit praktischer Annäherung einen Wert  $\alpha_{ta} = 1$  an, dann hat man unabhängig von der Spannung

$$\boxed{\nu' = \frac{1}{2 \varphi_n}}. \quad (26)$$

Diese Beziehungen lassen sich sowohl auf gezogene als auch auf gedrückte Betons anwenden.

Was nun die Beziehung zwischen *Elastizitätsmodul*  $E_0$  und den sogenannten *fiktiven Formänderungsmodulen*  $E_t$  betrifft, gilt mit den Bezeichnungen in Fig. 6

$$E_t = \frac{\sigma}{\epsilon_t} = \frac{\sigma}{\epsilon_r} \nu = \frac{\sigma}{\sigma} E_0 \nu = \nu E_0. \quad (27)$$

## 2. Formänderung des Stahlbeton-Druckstabes

### a) Allgemeine Bemerkungen

Bei der Berechnung der Verformung des Stahlbetonstabes wollen wir die bekannte einfache annähernde Auffassung allgemein anwenden.

Die in einem Zeitpunkt  $t$  eintretenden Formänderungen des Betons aus der Einwirkung der im Zeitpunkt  $t=0$  aufgetragenen Langzeitlast  $P$  erhalten wir gemäß den aus der Festigkeitslehre bekannten Formeln, indem man an Stelle des Elastizitätsmoduls  $E$  einen fiktiven Modul  $E_t$  einsetzt. Also

$$\epsilon_t = \frac{P}{E_t F} = \frac{\sigma}{E_t} = \frac{P}{\nu E_0 F} = \frac{\epsilon_r}{\nu} = \frac{\epsilon_r}{\nu_0} (1 + \varphi) = \epsilon_0 (1 + \varphi). \quad (28)$$

Zwischen den Ablaufkurven des Schwindens  $\epsilon_{zs}$  und des Kriechens können wir eine *Affinität* voraussetzen.

### b) Einfluß der langzeitigen Formänderungen

In erster Annäherung liegt es nahe, für die Berechnung der Schnittkräfte und Spannungen infolge Kriechens beziehungsweise der Langzeitlast unmittelbar den fiktiven Modul  $E_t = \nu E_0$  zu verwenden. Bezeichnet « $n_0$ » das im Zeitpunkt  $t=0$  in Frage kommende Verhältnis  $E_v/E_0$  (laut den Bestimmungsformeln 10 bis 15), dann ist bei diesem Verfahren im beliebigen Zeitpunkt  $t$

$$n_t = \frac{E_v}{E_t} = \frac{E_v}{\nu E_0} = \frac{n_0}{\nu} = \frac{n_0}{\nu_0} (1 + \varphi) = n_{t0} (1 + \varphi), \quad (29)$$

wo

$$n_{t0} = n_0/\nu_0 \quad \text{ist.}$$

Zuerst bestimmen wir den aus der zentrisch wirkenden Belastung  $P$  auf den Beton beziehungsweise auf die Stahleinlage entfallenden Kraftanteil  $P_b$ ,  $P_v$ . Die statische Gleichheit verlangt

$$P = P_b + P_v = \sigma_b F_b + \sigma'_v F_v = \sigma_b F_b \left( 1 + \frac{\sigma'_v F_v}{\sigma_b F_b} \right).$$

Setzt man für Beton und Stahleinlage gleiche Formänderung voraus

$$\epsilon_t = \epsilon_b = \epsilon_v = \frac{\sigma'_v}{E_v} = \frac{P_b}{\nu E_0 F_b} = \frac{P_v}{E_v F_v},$$

dann bekommt man für die Gesamtlast  $P$  die bekannte Formel:

$$P = \sigma_b F_b \left( 1 + \frac{n_0}{\nu} \mu \right) = \sigma_b F_b \left[ 1 + (1 + \varphi) \frac{n_0}{\nu_0} \mu \right] = F_b \sigma_b (1 + n_t \mu), \quad (30)$$

bzw. für die Lastanteile:

$$P_v = a_t P \quad \text{und} \quad P_b = (1 - a_t) P, \quad (31)$$



worin

$$a_t = \frac{b_t}{1+b_t}, \quad 1-a_t = \frac{1}{1+b_t}, \quad b_t = n_t \mu \quad (32)$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \sigma'_v &= \frac{P_v}{F_v} = n_t \sigma_b, \\ \sigma_b &= \frac{P_b}{F_b} = \frac{P}{F_b (1+n_t \mu)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Die Formänderung ist hingegen

$$\epsilon_t = \frac{\sigma_b}{\nu E_0} = \frac{P}{F_b E_0 \nu (1+n_t \mu)} = \frac{P}{F_t E_t} = \frac{P}{B_n}. \quad (34)$$

Der im Nenner figurierende Wert  $B_n = F_t E_t$  wird die *Drucksteife* des mittig gedrückten Stabes genannt, wobei

$$F_t = F_b (1+n_t \mu) \quad \text{und} \quad E_t = \nu E_0 = \nu E_{b0},$$

$$\boxed{B_n = E_t F_t = E_t F_b (1+n_t \mu) = E_{b0} F_b (\nu + n_0 \mu)}. \quad (35)$$

Für die Stahleinlage kann der Wert  $E_v$  im allgemeinen als der auf die anfängliche Strecke bezogene Wert  $E_{v0}$  angenommen werden.

Besteht die Belastung aus Lasten ständigen und Verkehrscharakters  $P_a, P_e$ , also aus langzeitigen und kurzzeitigen Lasten, dann gelten für die Verkehrslasten die angeführten Formeln für den Zeitpunkt  $t=0$ , doch muß der Wert  $\nu$  der entsprechenden Spannung zugeordnet werden.

### 3. Formänderung des Stahlbeton-Zugstabes

#### a) Allgemeine Bemerkungen

Bei der Berechnung der Formänderungen des Stahlbeton-Zugstabes sind zwei Zustände zu untersuchen. Im ersten Zustand ist der Zugstab noch nicht gerissen; dies ist der eigentliche *Formänderungszustand*, dessen Grenzfall entsteht, wenn der Stahlbetonstab — infolge Erschöpfung der Dehnungsfähigkeit des Betons — unmittelbar in den der Rissebildung vorangehenden Grenzzustand gelangt ist. Wir nennen diesen Zustand den *Formänderungszustand* des Zugstabes oder den *Grenzzustand der Rissebildung*.

Auf den Grenzzustand der Rissebildung folgt ein anderer Zustand, in dem der gezogene Beton während der Erhöhung der Lasten nacheinander an mehreren Stellen rissig wird und infolge der Dehnung der Stahleinlagen sich die Risse erweitern. Diesen *Rißzustand* pflegt man durch jenen Grenzzustand einzuschränken, der dem im betriebsmäßigen Gebrauch toleriertem Wert der

Rißweite entspricht. Dieser Grenzzustand ist der *Rißweiten-Grenzzustand*. Im Rißweiten-Grenzzustand wird das zulässige Ausmaß der Aufspaltung der Risse unter Berücksichtigung des Zweckes des Bauwerks, der Umgebung usw. — durch praktische Regeln beziehungsweise durch Bestimmungsformeln eingeschränkt. Diese Werte dürfen jedoch höchstens als Empfehlungen, Richtlinien betrachtet werden, die unter gewissen Einschränkungen Gültigkeit haben. Ähnlich sind auch die verschiedenen Formeln zur Rißberechnung zu werten, die unter Berücksichtigung gewisser Versuchsverhältnisse und Ergebnisse auf Grund einfacher theoretischer Annahmen aufgestellt worden sind.

Der zulässige Wert der Aufspaltung der Risse hängt von den auf die Konstruktion wirkenden Einflüssen und Beanspruchungen ab. So können im allgemeinen, nach einem Vergleich der ausländischen und ungarischen Vorschriften, hinsichtlich der Aufspaltung der Risse oder der Rißweite  $\Delta l$ , folgende Erwägungen und Werte vor Auge gehalten werden:

1. Für gewöhnliche schlaffbewehrte Stahlbetonplatten mit Zugbeanspruchung in stark aggressiver Umgebung oder als Dichtungselement im allgemeinen, oder in feuchten Medien, ferner in freier Luft, jedoch bei Anwendung von hochwertigem Stahl ( $\sigma_{vH} \geq 10\,000 \text{ kp/cm}^2$ ) 0,10 mm.

2. Mit hochwertigem Betonstahl bewehrte Stahlbetonelemente in trockenem Medium 0,15 mm.

3. In feuchten eventuell etwas aggressiven Medien, oder in freier Luft, oder in, als Dichtungselement dienenden, ausmittig gedrückten oder Biegegliedern aus Stahlbeton 0,20 mm.

4. Gewöhnliche Stahlbetonbauteile in trockenem Medium 0,30 mm.

Außer diesen Vorschriften erscheint es im Verlauf der Berechnung der Rißweite noch erforderlich, in den verschiedenen Kategorien die zu beachtenden Beanspruchungen ebenfalls einzuschränken. So wird es zweckmäßig sein, die Konstruktionen in feuchten Medien auf die ganze maßgebende Last zu prüfen, die mit trockenen Medien in Berührung stehenden Bauteile hingegen nur auf die Betriebslast.

Im Zuge der Untersuchung des Grenzzustandes der Rissebildung, also der Rißkraft werden zweckmäßig einige umstrittene Gesichtspunkte und Probleme in Erinnerung gerufen. Die erste derartige Frage ist die zu berücksichtigende *Zugfestigkeit*  $\sigma_h$  des Betons und die zugehörige *Dehnungsfähigkeit*  $\epsilon_h$ ,  $\epsilon'_h$ . Der Einfachheit halber kann man die Beton-Zugfestigkeit in Abhängigkeit von der Würfelfestigkeit mit dem Wert

$$\sigma_h = 60 \rho^2 \quad (36)$$

ansetzen.

Anhand des Biegebruchs von unbewehrten Betonprismen läßt sich die reine Zugfestigkeit annäherungsweise aus der Formel [2]

$$\sigma_h = 0,6 \frac{M}{W} \quad \text{berechnen.} \quad (37)$$

Bei reinem Zug ist die Formel der vollen Bruchdehnung  $\epsilon'_h$ , unter der vereinfachenden Voraussetzung, daß der volle Formänderungsmodul des Betons  $E'_p$  für reinen Druck und Zug identisch ist,

$$\epsilon'_h = \frac{\sigma_h}{E'_p} = \epsilon'_p \frac{\sigma_h}{\sigma_p} = \frac{0,218}{\sqrt[4]{\rho}}. \quad (37a)$$

Ebenfalls der Einfachheit halber nehmen wir auch das Kriechmaß des Zugbetons ähnlich — eventuell kleiner — an als jenes des Druckbetons.

Die Dauerstandfestigkeit fanden wir zwischen den Werten  $\alpha_{ta} \cong 0,94$ — $0,81$  schwankend, das Maß der elastischen Verformung hingegen zwischen  $\nu \cong 0,15$ — $0,30$ .

#### b) Formänderungs-Grenzzustand des Stahlbeton-Zugstabes

Bedingung für die Untersuchung beziehungsweise Lösung dieses Problems ist die Beantwortung jener Frage, ob infolge des Zusammenbaus mit dem Stahl die Dehnungsfähigkeit des Betons eine Veränderung erfährt, beziehungsweise *wie groß jene Dehnung* ist, der der Stahlbeton-Zugstab *im Grenzzustand der Rissebildung* noch ohne zu reißen standzuhalten vermag, *wie groß also die Rißkraft des Stahlbetonzugstabes ist*.

Im Spiegel der Versuche und theoretischen Überlegungen kann diese Frage nicht eindeutig beantwortet werden. Der primäre Grund hierfür liegt offenbar in der Unsicherheit der Wahrnehmung der Risse. Eine andere Ursache ergibt sich daraus, daß der Zugbeton ebenfalls einen gewissen Mehrbetrag an plastischer Dehnungsfähigkeit besitzt. Auf Grund der Versuchsergebnisse wurde auch festgestellt, daß die Betonbettung erst dann wirksam werden kann, wenn zwischen Beton und Stahleinlage in der Betonumhüllung des Betonstahls eine gewisse endliche Verschiebung zustande gekommen ist.

Der erste Riß oder die ersten Risse werden offenbar an Stellen auftreten, an denen die Verschiebung zwischen Stahleinlage und Betonbettung am größten ist, wo also der Betonstahl im Begriff ist, sich von der Betonumhüllung loszulösen.

Allgemein stimmen alle Autoren, die sich mit der Auswertung von Versuchen befaßten, darin überein, daß die Menge und Oberflächenbeschaffenheit der Stahleinlagen, die entsprechende Verteilung der Bewehrungsstäbe und ihre gute Einbettung (Betonumhüllung) auf Erscheinung und Ausbildung des ersten Risses, ja sogar auch im weiteren auf das Öffnen der Risse und auf den Risseabstand, von Einfluß sind.

FAURY [3], L'HERMITE [4], ADAM [5] weisen bei der Auswertung ihrer Versuche darauf hin, daß in der Nähe der Stahleinlagen (in einer Umgebung von etwa 2 cm) eine gewisse Plastifizierung des Betons eintritt.

Die Verbindung zwischen Stahleinlage und umhüllendem Beton, der Flächenverbund, läßt sich im Spiegel der Versuche wohl wahrheitsgerecht

beschreiben, doch ist die theoretische beziehungsweise mathematische Lösung des tatsächlichen Verbunds äußerst umständlich und dürfte sich meines Erachtens auch nicht lohnen. Deshalb kann man mit jener Tendenz einverstanden sein, zwischen Stahleinlage und Betonumhüllung gleichmäßig verteilte Haft-Reibungs- und Scherkräfte für Zwecke der Berechnung vorauszusetzen und die durch den gleichmäßigen Oberflächenverbund dargestellte durchschnittliche Spannung auf dem Versuchswege, an einfachen Stahlbeton-Zugstäben, zu bestimmen.

Eine derartige Versuchsreihe erörtert BRICE [6]. Ist seines Erachtens die Betonumhüllung nicht befriedigend, dann führt der im Herausziehen befindliche Betonstahl Risse in der Betonhülle herbei. Die zum Herausziehen, beziehungsweise zur Rissebildung benötigte Kraft wird offenbar um so größer sein, je kleiner das Verhältnis  $e = \frac{\sum d}{\sum u}$  ist. Bei großen Werten der Zahl «e» führen die Stahleinlagen Risse in der Betonhülle herbei und geraten ins Gleiten (Fig. 8).

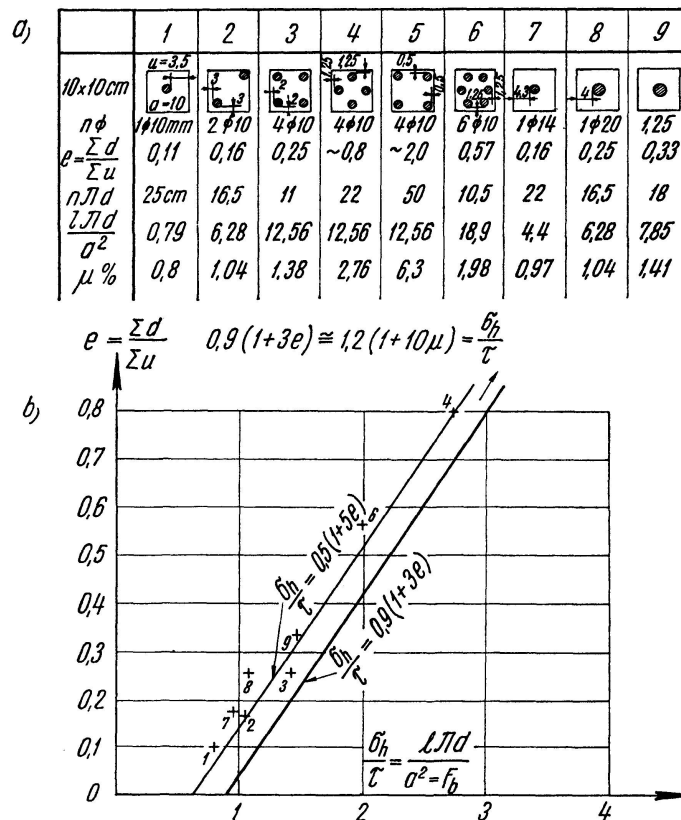


Fig. 8. Aus den Versuchen von Brice.

Setzt man eine gleichmäßige Verteilung der Gleitspannungen  $\tau$  voraus, dann ergibt sich aus dem Gleichgewicht der Betonzugkraft und der Gleitkraft am Umfang der Stahleinlagen

$$\tau K_v l_r = F_b \sigma_h,$$

worin  $K$  der Gesamtumfang der Stahleinlagen ist, so daß

$$\frac{\sigma_h}{\tau} = \frac{K_v l_r}{F_b}.$$

Anhand einer Auswertung der Versuchsergebnisse läßt sich nach Fig. 8b annähernd folgende lineare Beziehung schreiben:

$$\frac{\sigma_h}{\tau} = 0,5(1 + 50). \quad (38)$$

Auch andere Versuchsergebnisse zusammenfassend empfiehlt BRICE an Stelle von Gl. (38) die Beziehung

$$\frac{\sigma_h}{\tau} = 0,9(1 + 30). \quad (39)$$

Der so erhaltene Wert  $\tau$  ist der durchschnittliche Wert der Oberflächenhaftung. BRICE bemerkt, daß an ein und demselben Probekörper der Rißabstand große Streuung aufwies (100—300%). Als durchschnittlichen Rißabstand fand er rund 180%.

Unter Voraussetzung einer entsprechend guten Betonumhüllung kann auf Grund der Tabellenwerte in Fig. 8a an Stelle des Verhältnisses « $e$ » der Bewehrungsanteil  $\mu$  abgeleitet werden. Es ergab sich folgende Beziehung:

$$1 + 30 = \frac{4}{3}(1 + 10\mu). \quad (40)$$

Die Formänderung des noch nicht gerissenen Zugstabes kann aus den für den Druckstab abgeleiteten Beziehungen berechnet werden, ausgehend von der gleichen Dehnung von Stahleinlage und Beton (dies ist vor der Rißbildung in dem mit gleichmäßig verteilter Zugkraft belasteter Stahlbetonstab natürlich eine Annahme), das heißt im allgemeinen

$$P = F_b \sigma_h (1 + n_{th} \mu) = F_b \sigma_h \left(1 + \frac{n_0}{\nu_h} \mu\right),$$

worin 
$$n_{th} = \frac{n_0}{\nu_h} = (1 + \varphi) \frac{n_0}{\nu_0}$$

und 
$$\sigma_h = \frac{P}{F_b (1 + n_{th} \mu)}, \quad \sigma_v = n_{th} \sigma_b, \quad (41)$$

schließlich 
$$\epsilon_t = \frac{\sigma_b}{\nu_h E_{h0}} = \frac{P}{F_b E_{h0} \nu_h (1 + n_{th} \mu)} = \frac{P}{B_h}, \quad (42)$$

das heißt die Steifigkeit des Stahlbetonzugstabes beträgt

$$B_h = F_b E_{h0} \nu_h (1 + n_{th} \mu) = F_b E_{h0} (\nu_h + n_0 \mu) = E_{th} F_{bt}. \quad (43)$$

Die Werte  $\nu_0$  und  $\nu_h$  lassen sich gegebenenfalls aus den Formeln (20) und (21) bestimmen, da wir vorausgesetzt haben, daß  $E_0 = E_{h0}$ , so daß  $n_0$  das gleiche

ist, wie beim Druck. Der Endwert des Kriechmaßes errechnet sich aus Formel (12).

Die zum Grenzzustand der Rissebildung gehörige *Rißkraft*  $P_r$  kann aus der Überlegung erhalten werden, daß der Grenzzustand der Rissebildung erreicht wird, wenn der Beton seine volle Bruchdehnung  $\epsilon'_h$  erlangt hat. Die volle Dehnungsfähigkeit des Zugbetons mit Stahleinlagen wird zweckmäßig mit dem gleichen Wert angesetzt wie beim reinen Betonquerschnitt, obwohl aus dem bisher gesagten darauf geschlossen werden kann, daß mit größerer und gut verteilter Betonstahlmenge auch eine scheinbare Erhöhung der Dehnungsfähigkeit beziehungsweise der Zugfestigkeit einhergeht.

So wird unter Einwirkung der *Momentanlast*

$$P_r = P_{bh} + P_{vh} = F_b \sigma_h + F_v \sigma_{vh} = F_b \sigma_h (1 + n_{th} \mu), \quad (44)$$

worin 
$$n_{th} = \frac{\sigma_{vh}}{\sigma_h} = \frac{\epsilon'_h E_v}{\sigma_h} = \frac{\sigma'_h}{\sigma_h} n_0 = \frac{n_0}{\nu_h}, \quad (45)$$

das heißt 
$$\boxed{\nu_h} = \frac{n_0}{n_{th}} = \frac{E_v \sigma_h}{E_0 \epsilon'_h E_v} = \boxed{\frac{\sigma_h}{\sigma'_h}} \quad (45a)$$

und  $\sigma_{vh} = \epsilon'_h E_v = n_{th} \sigma_h$  ist die Grenzspannung der Rissebildung in der Stahleinlage.

Unmittelbar nach Öffnen des Risses beträgt die Stahlspannung im Schnitt des Risses

$$\sigma_{v,r} = \frac{P_r}{F_v} = \frac{\sigma_h}{\mu} (1 + n_{th} \mu), \quad (46)$$

beziehungsweise 
$$\sigma_{v,r} = \sigma_h \left( \frac{1}{\mu} + \frac{n_0}{\nu_h} \right). \quad (46a)$$

Ist die Kraft eine *Langzeitlast*, dann tritt an Stelle von  $\sigma_h$  das  $\alpha_{ta} \sigma_h$ , und

$$\boxed{P_{r,ta} = F_b \sigma_{h,ta} \left( 1 + \frac{n_0}{\nu_{h,ta}} \mu \right)}, \quad (47)$$

$$\nu_{h,ta} = \frac{\sigma'_h}{\sigma_{h,ta}} = \frac{\nu_h}{\alpha_{ta}}, \quad n_{n,ta} = \frac{n_0}{\nu_h} \alpha_{ta}. \quad (47a)$$

Natürlich sind gegebenenfalls die Schwindspannungen zu superponieren.

### c) Formänderung des Stahlbeton-Zugstabes nach Auftreten der Risse

An der Rißstelle sinkt die Betonzugspannung auf null, und die Stahleinlage hat allein die volle Rißkraft aufzunehmen, also entsteht in ihr eine Spannung  $\sigma_{vr}$ , die größer ist als die im Grenzzustand der Rissebildung wirkende Spannung  $\sigma_{vh}$ . Die Stahlspannung sinkt auf einer Entfernung  $l_v$  von  $\sigma_{vr}$  auf  $\sigma_{vh}$ , während der Wert Null der Betonzugspannung an der Rißstelle ebenfalls in

der Entfernung  $l_v$  den Wert der Zugfestigkeit  $\sigma_h$  erreicht. In diesem Zustand kann grundsätzlich an anderen in der Entfernung  $l_v$  liegenden Stellen ein neuer Riß oder eine ganze Reihe von Rissen auftreten. Der in der Umgebung eines einzelnen Risses auftretende Formänderungs- und Spannungszustand ist in Fig. 9 formgerecht dargestellt.

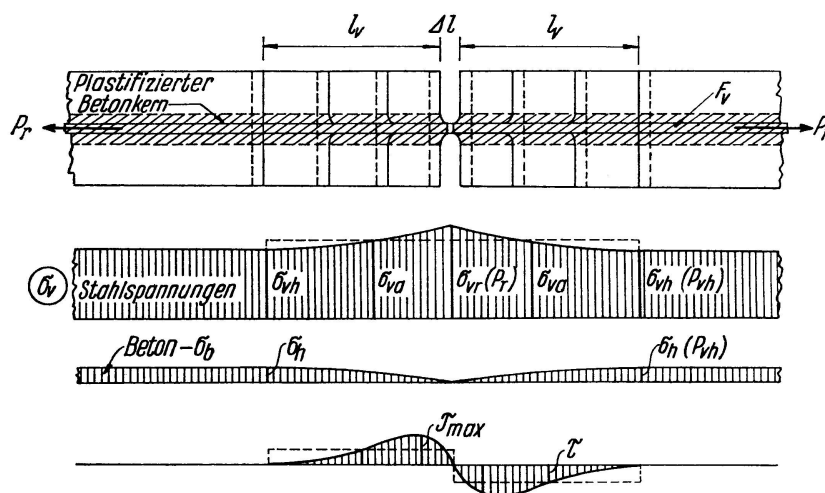


Fig. 9. Verankerungslänge und Rißweite  $l_v$ ,  $\Delta l$ .

Die vom ersten Riß an gemessene Entfernung  $l_v = l_r$  der nach Ausbildung des ersten Risses möglichen weiteren Risse erhält man aus der Überlegung, daß auf der Länge  $l_v$  die Flächenhaftung  $K_v$  am Umfang der Stahleinlagen jenen Kraftunterschied aufnimmt, der zwischen der vollen Rißkraft  $P_r$  und der in der Entfernung  $l_v$  vom Riß in den Bewehrungsstählen wirkenden Kraft  $P_{v,h}$  besteht. Diese Entfernung  $l_v$  ist eigentlich der Verankerungslänge, der Länge der Kraftübertragung identisch. Da

$$P_r = F_v \sigma_{vr} = P_b \sigma_h (1 + n_{th} \mu),$$

$$P_{v,h} = F_v \sigma_{vh} = F_v n_{th} \sigma_h,$$

das heißt

$$P_r - P_{v,h} = F_v (\sigma_{vr} - \sigma_{vh}) = \tau K_v l_v$$

und hieraus im allgemeinen

$$l_v = \frac{F_v}{\tau K_v} (\sigma_{vr} - \sigma_{vh}). \quad (48)$$

$\tau$  ist der durchschnittliche Wert der Flächenhaftung. Diese Größe ist abhängig von der Güte der Oberflächengestaltung der Stahleinlage, vom Charakter der Last, von der Betongüte und vom Umhüllungsmaß. Die sowjetische Bestimmungsformel schreibt die Verhältniszahl  $\sigma_h/\tau$  für glatten Bewehrungsstahl mit 1, für periodische Stahleinlagen mit 0,7 vor.

Für die Ermüdungslast kann das Verhältnis  $\sigma_h/\tau$  — übereinstimmend mit den ausländischen Versuchen — mit 3,0 angesetzt werden [7], [8], [9], [10].

Setzt man in Gl. (48) die Werte  $P_r$  und  $P_{vh}$  ein, dann ist

$$P_r - P_{vh} = F_b \sigma_h (1 + n_{th} \mu) - F_v n_{th} \sigma_h = F_b \sigma_h (1 + n_{th} \mu - n_{th} \mu) = F_b \sigma_h$$

und hieraus 
$$l_v = \frac{F_b \sigma_h}{K_v \tau}. \quad (48a)$$

Der so erhaltene Wert  $l_r$  ist die wahrscheinliche Stelle, an der ein neuer Riß auftritt, doch kann der folgende Rißabstand in einem mit der Kraft  $P$  belasteten Stab auch größer oder kleiner sein.

Nach einem Vorschlag von BRICE ergibt die Verwendung der Gl. (38) für die durchschnittliche Länge der Kraftübertragung

$$\frac{\sigma_h}{\tau} = \frac{2(1 + 10\mu)}{3\delta},$$

worin  $\delta$  einen für die Art der Stahleinlagen kennzeichnenden Faktor bedeutet, und zwar laut Vorgehendem für glatte Bewehrungsstähle 1, für periodische Stahleinlagen 1,6, so daß — oben in die Länge  $l_v$  der Kräfteübertragung eingesetzt —

$$l_v = l_r = \frac{2 F_b (1 + 10\mu)}{3 \delta K_v}. \quad (49)$$

Ist der Durchmesser der Stahleinlagen gleich  $d$ , dann wird, da

$$\mu = \frac{n \pi d^2}{4 F_b} \quad \text{und} \quad K_v = n \pi d,$$

$$l_v = \frac{d}{6 \delta} \left( 10 + \frac{1}{\mu} \right) = \frac{5 d}{3 \delta} \left( 1 + \frac{1}{10 \mu} \right). \quad (49a)$$

Im wesentlichen entspricht Gl. (49) dem Vorschlag des *CEB*, Gl. (48) hingegen dem Vorschlag des *RGW* beziehungsweise dem sowjetischen Vorschlag. Bemerkt sei, daß Gl. (48), nach geeigneter Umänderung, allgemein auch für den Zuggurt von Biegebalken gültig ist.

In Kenntnis des Risseabstandes versuchen wir nun, die Öffnung der Risse, die Rißweite  $\Delta l$  zu bestimmen. Die Rißweite — in der Schwerlinie der Einlagen gemessen — kann man aus der vereinfachten Bedingung ermitteln, daß die gesamte Formänderung von Stahleinlage und Beton proportional auf den durchschnittlichen Rißabstand verteilt ist, mit anderen Worten also die Rißweite die Summe der relativen Verschiebungen von Stahleinlage und Beton auf der vom Riß gemessenen  $2l_v$  beziehungsweise  $2l_v/2$  langen Strecke ist.

Gemäß dieser Überlegung ist die auf die  $l_v$  lange Strecke bezogene durchschnittliche spezifische Formänderung  $\epsilon_a$  zu bestimmen.

Dementsprechend beträgt die Rißweite

$$\Delta l = 2 \epsilon_a l_v = \epsilon_a l_r. \quad (50)$$



Zur Bestimmung der durchschnittlichen spezifischen Formänderung muß die Spannungsverteilung an der Strecke  $l_v$  bekannt sein. Wie aus Fig. 9 ersichtlich, erhält man die durchschnittliche Stahlspannung, indem von der an der Rißstelle auftretenden Spannung  $\sigma_v$  der entsprechende Anteil der Spannungen infolge Flächenhaftung abgezogen wird.

Vorerst behandeln wir nur den Fall eines einzigen Risses in einem Zugstab, auf den gerade eine  $P_r$  große — also der Rißkraft identische — Last wirkt. Den, der Verminderung der Stahlspannungen entsprechenden Subtrahenden nehmen wir auf Grund der Gl. (48a) zu

$$\frac{\alpha F_b \sigma_h}{F_v} = \frac{\alpha \tau K_v l_v}{F_v}$$

an, wobei « $\alpha$ » einen für die Spannungsverteilung kennzeichnenden Faktor bedeutet, dessen Wert bei parabolischer Verteilung  $2/3$ , bei linearem Verlauf hingegen  $1/2$  beträgt. Demgemäß ist

$$\sigma_{va} = \sigma_{vr} - \frac{\alpha F_b \sigma_h}{F_v} = \sigma_{vr} \left( 1 - \alpha \frac{F_b \sigma_h}{F_v \sigma_{vr}} \right) \quad (51)$$

und

$$\epsilon_a = \frac{\sigma_{va}}{E_v} = \frac{\sigma_{vr}}{E_v} \left( 1 - \alpha \frac{F_b \sigma_h}{F_v \sigma_{vr}} \right) = \psi_r \frac{\sigma_{vr}}{E_v} = \psi_r \epsilon_{vr}.$$

Der Wert des Minderungsfaktors  $\psi_r$  beträgt, da

$$F_b \sigma_h = \frac{P_r}{1 + n_{th} \mu}, \quad F_v \sigma_{vr} = P_r,$$

$$\text{im allgemeinen} \quad \psi_r = 1 - \frac{\alpha}{1 - n_{th} \mu} = 1 - k \quad (52)$$

$$\text{und} \quad k = \frac{\alpha}{1 + n_{th} \mu} = \frac{\alpha}{1 + \frac{n_0}{\nu_h} \mu} = \frac{\alpha \nu_h}{\nu_h + \mu n_0}. \quad (53)$$

Die Rißweite des einzigen beziehungsweise des ersten Risses  $\Delta l_v$  aus der Einwirkung der Rißlast  $P_r$  ergibt sich anhand Gl. (50) aus

$$\boxed{\Delta l_v = \epsilon_a l_r = 2 \psi_r \frac{\sigma_{vr}}{E_v} l_v = 2 \psi_r \frac{P_r}{E_v F_v} l_v}. \quad (50a)$$

Noch muß das Problem für den Fall der Stablast  $P > P_r$  erleuchtet werden (Fig. 10). Die durchschnittliche Stahlspannung erhält man wiederum aus der erwähnten Überlegung, also

$$\sigma_{va} = \sigma_v - \frac{\alpha F_b \sigma_h}{F_v} = \sigma_v \left( 1 - \alpha \frac{F_b \sigma_h}{F_v \sigma_v} \right) = \psi \sigma_v,$$

wobei mit Sicherheit angenommen werden darf, daß

$$F_b \sigma_h = \frac{P_r}{1 + n_{th} \mu} \quad \text{und} \quad F_v \sigma_v = P;$$

der Faktor « $\alpha$ » hingegen, der den Füllungsgrad der Stahlspannungsfigur zum Ausdruck bringt, wird dementsprechend aufgenommen.

Dann gilt allgemein

$$\epsilon_a = \frac{\sigma_{va}}{E_v} = \frac{\sigma_v}{E_v} \left( 1 - \frac{\alpha}{1 + n_{th}\mu} \frac{P_r}{P} \right), \quad (51a)$$

wobei

$$\psi = 1 - \frac{\alpha}{1 + n_{th}\mu} \frac{P_r}{P}. \quad (52a)$$

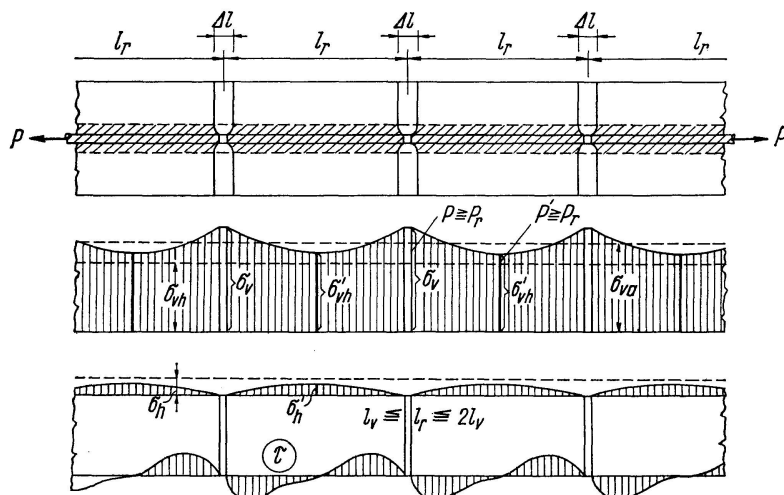


Fig. 10. Rißweite  $\Delta l$ .

An Stelle von  $P_r$  empfiehlt die sowjetische Bestimmungsformel einen Wert  $0,8 F_b \sigma_h$  und setzt den Multiplikator für  $P_r/P$  bei Kurzzeitlast auf 0,7 und bei Langzeitlast auf 0,35 an, so daß

$$\psi = 1 - 0,7 \frac{P_r}{P}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \psi = 1 - 0,35 \frac{P_r}{P}. \quad (52b)$$

Die Rißweite hingegen beträgt

$$\Delta l = \psi \frac{\sigma_v}{E_v} l_r = \psi \frac{P}{E_v P_v} l_r. \quad (50b)$$

Die Aufspaltung des Risses wird auch durch das Schwinden des Betons verstärkt.

Die Zugsteife des Stahlbeton-Zugstabes nach der Rißbildung erhält man im allgemeinen unter Berücksichtigung der Gleichungen (51) beziehungsweise (51a) oder aber (50a) beziehungsweise (50b) mit

$$B_n = \frac{1}{\psi} E_v F_v, \quad (53)$$

wobei  $\psi$  ein gemäß Gl. (52a) gewählter Faktor ist.

#### 4. Formänderung des Stahlbeton-Biegebalkens

##### a) Allgemeine Bemerkungen

Die Berechnung der Formänderungen im Stahlbeton erfordert — es handle sich nun um die sogenannten  $\sigma$ -Risse — ähnlich wie beim Stahlbeton-Zugstab die Untersuchung von verschiedenen Zuständen. Die *Biegesteife* des Stahlbeton-Biegebalkens

$$B = EJ = E_t J_t \quad (54)$$

nimmt natürlich in den bekannten Spannungszuständen wesentlich abweichende Werte an. In dieser Hinsicht müssen also zwischen den Biegesteifen Unterschiede gemacht werden. Und zwar am Anfang des *Spannungszustandes I*, wenn also der gesamte Stahlbetonquerschnitt als elastisch zusammenwirkend betrachtet werden kann, und am Ende dieses Zustandes, wenn der Stahlbetonquerschnitt den Grenzzustand der Rissebildung und damit in der äußersten Zugfaser die Zugfestigkeit des Betons mit der zugehörigen plastischen Dehnung erreicht hat. Ähnlich gestaltet sich die Biegesteife wiederum anders im *Spannungszustand II*, wenn die Zugzone zwar eingerissen ist, aber weder Stahleinlage noch Beton den Bruchzustand erreicht haben — und wieder anders beim Bruch im *Spannungszustand III*, im Grenzzustand des Bruches, in dem die Stahleinlagen fließen und der Beton zerstört wird.

Für die Bemessung und Rißbildung müssen vorerst das den Grenzzustand der Rissebildung anzeigende *Rißmoment*  $M_r$ , dann, nach erfolgter Rißbildung, der auf Einwirkung des Moments  $M_r$  auftretende *Rißabstand*  $l_v, l_r$  sowie die *Rißweite*  $\Delta l$  und schließlich die am gerissenen Träger infolge der Betriebslast herbeigeführte *Häufung der Risse* und deren eventuelle Aufspaltung ermittelt werden.

Das im Spannungszustand III entstehende Formänderungsbild wird dadurch bestimmt, daß im Bewehrungsstahl zumindest die dem Anfang des Fließens entsprechende spezifische Verformung  $\epsilon_f$ , in der äußersten Beton-Druckfaser hingegen am Anfang des Bruches die Bruchstauchung  $\epsilon_p$  bzw. beim Bruch die volle Bruchstauchung  $\epsilon'_p$  zustande kommt.

Die Fließdehnung der Stahleinlagen bei Beginn des Fließens beträgt

$$\epsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_v} + 10^{-2} \sqrt{\sigma_f} \text{ ‰}, \quad (55)$$

beziehungsweise

$$\epsilon_f = \frac{\sigma_{f,0.2}}{E_v} + 2 \text{ ‰}, \quad (56)$$

worin  $E_v$  in  $\text{Mp/cm}^2$ ,  $\sigma_f$  in  $\text{kp/cm}^2$  zu setzen sind.

## b) Formänderungs(Riß)-Grenzzustand des Stahlbeton-Biegebalkens

Solange die Beanspruchung derart klein ist, daß in der Zug-Randfaser die volle Dehnung noch nicht aufgetreten ist, also die Zugspannung  $\sigma_{bh} \ll \sigma_h$  ist, kann man mit dem idealen Betonquerschnitt  $F_i$  arbeiten, das heißt mit dem auf reinen Beton reduzierten Stahlbetonquerschnitt. Mit den Bezeichnungen

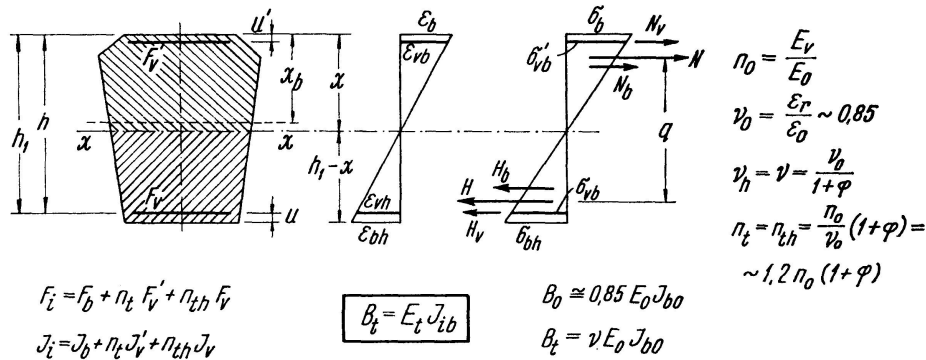


Fig. 11. Zustand vor der Rißbildung.

in Fig. 11 und unter Annahme von eben bleibenden Querschnitten und einer linear veränderlichen Spannungsfigur gilt

$$F_i = F_b + n_t F_v' + n_{th} F_v, \quad (57)$$

worin mit den bisherigen Bezeichnungen

$$n_t = \frac{n_0}{\nu} = (1+\varphi) \frac{n_0}{\nu_0}, \quad n_{th} = \frac{n_0}{\nu_h} = (1+\varphi) \frac{n_0}{\nu_{h0}}, \quad n_0 = \frac{E_v}{E_0}, \quad \nu_0 \neq \nu_{h0} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_0}.$$

In diesem Stadium darf die Gleichheit  $n_t = n_{th}$  vorausgesetzt werden. Ist der Querschnitt  $F_i$  bekannt, dann läßt sich die neutrale Achse  $x$  und das Trägheitsmoment des Querschnitts auf gewöhnliche Weise bestimmen.

Da die Betonspannungen klein sind, darf man  $\nu_0 = 0,85$ ,  $n_t = (1+\varphi) 1,20 n_0$  nehmen, und die Biegesteife beträgt

$$B = E_b J_{ib},$$

worin mit den bisherigen Bezeichnungen  $E_{bn} = E_{bh} = E_0$ .

In solchen Fällen vernachlässigt man für gewöhnlich den Einfluß der Stahleinlagen und arbeitet bei *Kurzzeitlast* mit der Gleichung

$$B_0 = 0,85 E_0 J_{b0} \quad (58)$$

und bei *Langzeitlast* mit der Beziehung

$$B_t = E_t J_t = \frac{E_0 J_{b0}}{1+\varphi} = \nu E_0 J_{b0} = \frac{\nu_0}{1+\varphi} E_0 J_{b0} \cong \frac{0,85}{1+\varphi} E_0 J_{b0}. \quad (59)$$

Das für den *Grenzzustand der Rissebildung* kennzeichnende *Rißmoment*  $M_r$  wird von der Überlegung aus berechnet, daß die Formänderung in der Betonzug-Randfaser die volle Bruchdehnung des Betons erreicht hat, ferner daß das Diagramm der Zugspannungen rechteckig, die als konstant vorausgesetzte Spannung gerade der Beton-Zugfestigkeit  $\sigma_{ht} = \sigma_h$  oder  $\sigma_{hta}$  gleich ist, daß der Querschnitt eben bleibt und das Diagramm der Betondruckspannungen dreieckförmig ist. Bei dieser Auffassung läßt sich für das Rißmoment folgende allgemeine Formel geben

$$M_r = W_r \sigma_{ht}, \quad (60)$$

in der  $W_r$  den auf  $\sigma_{ht}$  reduzierten idealisierten Widerstandsmodul des Stahlbetonquerschnitts bedeutet.

Die *Zugfestigkeit, beziehungsweise die Dauer-Zugfestigkeit des Betons* sowie der Wert  $E_t = \nu E_0$ , der von der Formänderung des Druckbetons abhängig ist, können als bekannt vorausgesetzt werden. Die Lage der neutralen Achse  $x$  läßt sich in Kenntnis der Beton- und Stahlgüte, des Kriechmaßes und der geometrischen Abmessungen aus der Gleichheit der Zug- und Druckkräfte anhand der auf  $\sigma_{ht}$  reduzierten Querschnittsflächen — im allgemeinen Fall durch wiederholtes Probieren — ermitteln.

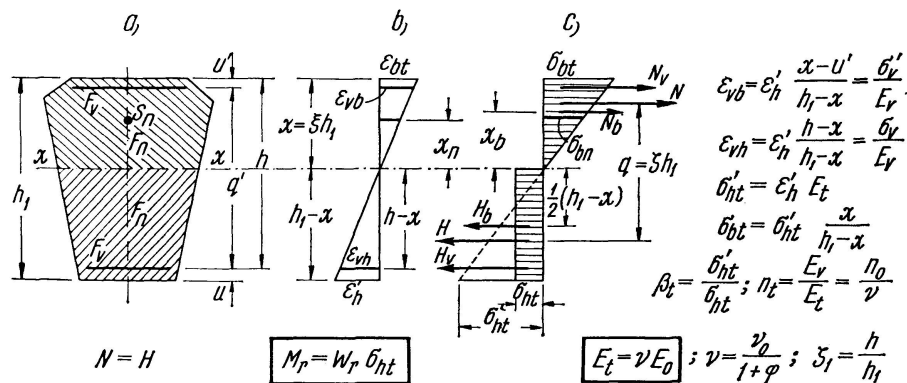


Fig. 12. Rißmoment  $M_r$  und Biegesteife  $B'_r$ .

Behandelt man die Lösung allgemein, dann erhält man mit den Bezeichnungen der Fig. 12 anhand der geometrischen Beziehungen die Bestimmungsgleichung für  $x$ . Sie heißt

$$F_{n,r} + F_{v,r}' = F_h + F_{v,r}, \quad (61)$$

worin

$$F_{n,r} = F_n \beta_t \frac{x_n}{h_1 - x}, \quad (62)$$

$$F_{v,r}' = F_v' n_t \beta_t \frac{x - u'}{h_1 - x}, \quad (63)$$

$$F_{v,r} = F_v n_t \beta_t \frac{h - x}{h_1 - x}. \quad (64)$$

In Kenntnis des Wertes  $x$  kann der auf  $\sigma_{ht}$  reduzierte Widerstandsmodul aus dem auf die  $x$ -Achse aufgeschriebenen statischen Moment der reduzierten Flächen ermittelt werden:

$$W_r = F_{n,r} x_b + F'_{v,r} (x - u') + \frac{1}{2} F_h (h_1 - x) + F_{v,r} (h - x). \quad (65)$$

Bei der Berechnung des *Rißmomentes* kann man den reduzierten Widerstandsmodul im allgemeinen annähernd aus den Formeln

$$W_r = \gamma W_0, \quad W_0 = \frac{b h_1^2}{6} \quad (66)$$

bestimmen, und zwar unabhängig vom Charakter der Belastung, wobei  $W_0$  den auf den Beton bezogenen Widerstandsmodul bezeichnet und  $\gamma$  ein von der Querschnittsform abhängiger Faktor ist. Nach den sowjetischen Vorschriften ist für Rechteck- und T-Querschnitte  $\gamma = 1,75$ , für kopfstehende T-Querschnitte mit dicker Platte 1,75, mit dünner Platte  $\left(\frac{v}{h_1} < 0,2\right)$  und verhältnismäßig breitem Steg  $\left(\frac{b}{h} > 2\right)$  hingegen  $\gamma = 1,5$ . Für Doppel-T-Träger, bei annähernd rechteckiger Form  $\gamma = 1,75$ , wenn das Verhältnis zwischen Plattenbreite und Stegbreite zwischen 2 bis 6 liegt  $\gamma = 1,5$ , schließlich bei übermäßig breiter  $\left(\frac{b}{b_0} > 15\right)$  Platte ist  $\gamma = 1,1$  bis 1,25 empfohlen.

Ein genauer Wert für  $\gamma$  beim Rechteckquerschnitt ergibt sich aus der Beziehung

$$\gamma = 2 \beta_t \frac{\xi^3}{1 - \xi} + 3 (1 - \xi)^2 + 6 n_t \beta_t \mu (\xi_1 - \xi)^2 / (1 - \xi). \quad (67)$$

In Kenntnis des Wertes  $x$  erhält man mit Hilfe von  $\sigma_{ht}$  vor allem den Wert von  $\sigma_{bt}$  aus der Beziehung

$$\sigma_{bt} = \sigma'_{ht} \frac{x}{h_1 - x},$$

und

$$\sigma'_v = n_t \sigma'_{ht} \frac{x - u'}{h_1 - x}, \quad (68)$$

$$\sigma_v = n_t \sigma'_{ht} \frac{h - x}{h_1 - x}, \quad (69)$$

worin

$$n_t = \frac{n_0}{\nu} = (1 + \varphi) \frac{n_0}{\nu_0}.$$

Die *Biegesteife*  $B'_r$  für den Grenzzustand der Rissebildung kann man bekommen, wenn man anhand der bekannten Beziehung

$$\left| \frac{1}{R} \right| = \left| \frac{M}{EJ} \right| = \frac{M}{B}, \quad (71)$$

$$B'_r = E_t J_t = |R| M_r = |R| W_r \sigma_{ht} \quad \text{setzt.} \quad (72)$$

Da

$$\left| \frac{1}{R} \right| = \left| \frac{\epsilon_{bt} + \epsilon'_h}{h_1} \right| \quad (73)$$

und

$$R = \left| \frac{h_1 - x}{\epsilon'_h} \right|, \quad (74)$$

worin

$$\epsilon_{bt} + \epsilon'_h = \frac{\epsilon'_h}{h_1 - x}, \quad (75)$$

so daß 
$$\overline{B'_r} = W_r \sigma_{ht} \frac{h_1 - x}{\epsilon'_h} = \frac{W_r (h_1 - x)}{\beta_t} = \psi_t E_t J_{b1} = \overline{\psi_t \nu E_0 J_{b1} = E_t J_t}, \quad (76)$$

worin 
$$J_t = \psi_t J_{b1}, \quad E_t = \nu E_0, \quad J_{b1} = \frac{b h_1^2}{12}, \quad \psi_t = \frac{W_r (h_1 - x)}{\beta_t J_{b1}}. \quad (77)$$

Mit guter Annäherung gilt

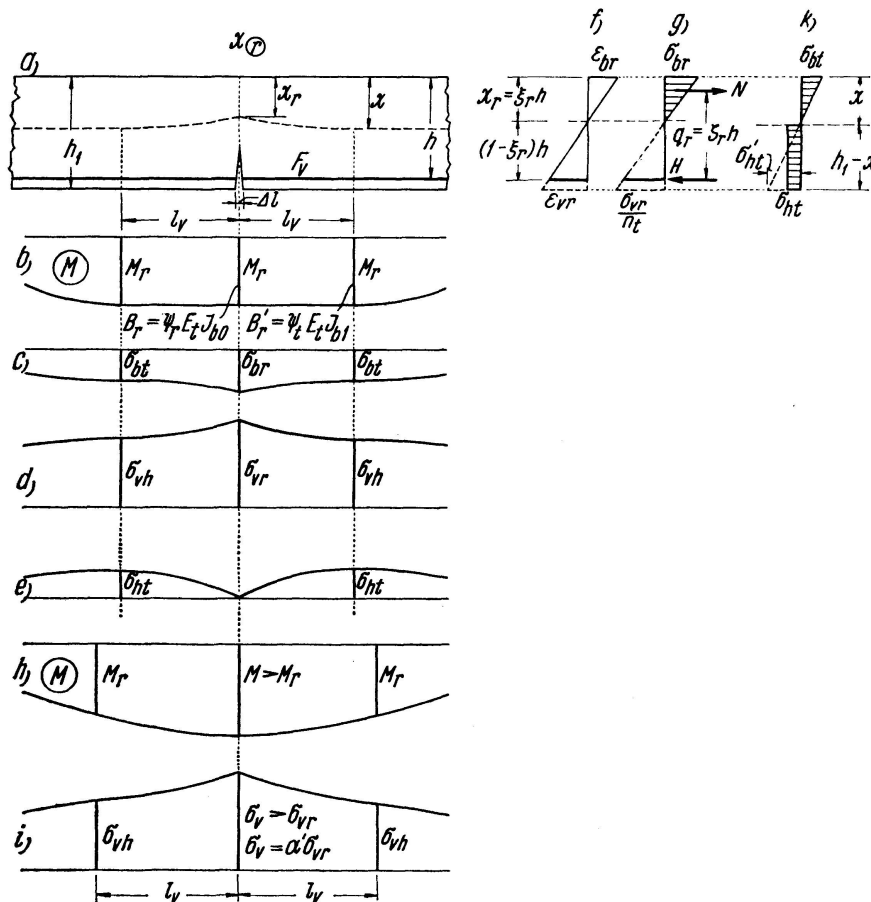
$$\psi_t = 2\gamma(1-\xi) \frac{\sigma_{ht}}{\sigma'_{ht}} \sim \gamma \frac{\alpha_{ta}}{\nu} (1-\xi) \rho^{3/2} \sim \frac{\gamma}{\nu} (1-\xi) \rho^{3/2} \quad (77a)$$

und für Rechteckquerschnitt, der Einfachheit halber nur mit Zugstäben,

$$\psi_t = 4\xi^3 + \frac{6(1-\xi)^3}{\beta_t} + 12n_t\mu(\zeta_1 - \xi)^2, \quad (77b)$$

wenn

$$\zeta_1 = \frac{h}{h_1}, \quad n_t = \frac{n_0}{\nu} = (1+\varphi) \frac{n_0}{\nu_0}.$$

Fig. 13. Biegesteife  $B_a$  und Rißweite  $\Delta l$ .

## c) Formänderung des Stahlbeton-Biegebalkens nach dem Auftreten der Risse

Nach dem Auftreten der Risse gerät der Stahlbeton-Biegeträger in den *Spannungszustand II*. Die neutrale Achse  $x_r$  verschiebt sich etwas gegen die Druck-Randfaser hin (Fig. 13). In der Druck-Randfaser sowie in der gedrückten Stahleinlage wächst die Spannung  $\sigma_{br}$  bzw.  $\sigma'_{vr}$  an, während sich die Betondruckzone vermindert und in der unteren Faser die Betonspannung gleich Null wird. In einer Entfernung  $l_v$  vom ersten Riß an entspricht der Spannungszustand dem *Grenzzustand der Rissbildung*.

Vor allem werde der Fall eines einzigen Risses behandelt. Man ermittle die Veränderung der Biegesteife  $B_r$ , die Entfernung  $l_v$  eines möglichen zweiten Risses vom ersten Riß und die Rißweite  $\Delta l$ . In diesem unmittelbar auf die Rißbildung folgenden Zustand wird die Veränderlichkeit der Druckspannungen noch linear vorausgesetzt. Auf den gerissenen Querschnitt wirkt gerade das Rißmoment  $M_r$ . Zwecks Vereinfachung der Berechnungen erscheint es zweckmäßig den Rechnungsgang für einen Rechteckquerschnitt ohne Druckeinlagen darzustellen.

Die Entfernung  $x_r$  beziehungsweise  $\zeta_r = x_r/h$  läßt sich aus den bekannten Beziehungen für den Spannungszustand II. berechnen, also mit den üblichen Bezeichnungen  $\mu = F_v/bh$ ,

$$\begin{aligned}\xi_r &= n_t \mu \left( \sqrt{1 + \frac{2}{n_t \mu}} - 1 \right), \\ q &= \left( 1 - \frac{\xi_r}{3} \right) h = \zeta_r h, \\ \epsilon_{br} &= \frac{\sigma_{br}}{\nu E_0} = \frac{2 M_r}{\nu E_0 \zeta_r \xi_r b h^2}, \\ \epsilon_{vr} &= \frac{\sigma_{vr}}{E_v} = \frac{M_r}{E_v \zeta_r h F_v}, \\ \frac{1}{R} &= -\frac{M_r}{B_r} = \frac{\epsilon_{br} + \epsilon_{vr}}{h} = \frac{\epsilon_{vr}}{h - x_r} = \frac{\epsilon_{br}}{x_r}, \\ |R| &= \frac{x_r}{\epsilon_{br}} = \frac{\nu E_0 \frac{1}{2} \zeta_r \xi_r^2 b h^3}{M_r} = \frac{E_v \zeta_r (1 - \xi_r) F_v h^2}{M_r}, \\ \boxed{B_r = M_r |R|} &= \frac{1}{2} \zeta_r \xi_r^2 b h^3 \nu E_0 = \zeta_r (1 - \xi_r) F_v E_v h^2 = \boxed{\psi_r E_t J_{b0}}, \quad (78) \\ J_{b0} &= \frac{1}{12} b h^3\end{aligned}$$

und

$$\boxed{\psi_r = 6 \zeta_r \xi_r^2 = 12 \zeta_r (1 - \xi_r) n_t \mu}. \quad (79)$$

Die Veränderlichkeit der *Biegesteife* zeigt das Verhältnis der Formeln (77) und (78)

$$\frac{B_r}{B'_r} = \frac{\psi_r}{\psi_t} \zeta_1^3 \sim \frac{\psi_r}{\psi_t} 0,86, \quad (80)$$



unter der Voraussetzung, daß  $E_t$  in beiden Fällen dasselbe und  $\zeta_1 = 0,95$  ist.

Berücksichtigt man die durchschnittliche Veränderung der Beton- beziehungsweise Stahlspannungen, so ergibt sich die *durchschnittliche Biegesteife* mit der auf die Strecke  $l_v$  ( $l_r$ ) bezogenen Nutzhöhe gerechnet zu

$$B_a = \psi_a E_t J_{b0} = \psi_a E_0 J_{b0}. \quad (81)$$

Die Bestimmung der Werte für  $\psi_a$  ermöglichen bei gegebenen Baustoffgütern und geometrischen Abmessungen die bereits angeführten Formeln (77), (78) und (79). Im allgemeinen kann annähernd die Bezeichnung

$$\psi_a = \frac{1}{3} (2\psi_r + \psi_t) \quad (82)$$

verwendet werden. Auf dieser Grundlage fanden wir z. B. bei 1%igem Bewehrungsanteil für den Wert  $\psi_a$  bei Kurzzeitlast durchschnittlich 0,65, bei Langzeitlast 1,35. Für den Wert von  $\nu$  erhielten wir bei Kurzzeitlast 0,9, bei Langzeitlast 0,3 und für die Werte  $\psi_a \nu$  beziehungsweise 0,4.

Was nun die wahrscheinlichen Werte für die Entfernung des nächstfolgenden Risses betrifft, läßt sich hierfür sinngemäß die Gl. (48) anwenden, das heißt

$$l_v = \frac{F_v}{\tau K_v} (\sigma_{vr} - \sigma_{vh}),$$

worin

$$\sigma_{vr} = \frac{M_r}{\zeta_r h F_v},$$

$$\sigma_{vh} = \sigma'_{ht} n_t \frac{h-x}{h_1-x} = \epsilon'_h E_1 \frac{h-x}{h_1-x} \sim \sigma'_{ht} n_t \sim n_t \beta_t \sigma_{ht}.$$

Die auf die Zugeinlagen lastende Differenz der Zugkräfte ist

$$\Delta H = H_r - H_h = F_v \sigma_{vr} - F_v \sigma_{vh} = F_v \sigma_{ht} \left( \frac{W_r}{W_v} - n_t \beta_t \right),$$

weil

$$\sigma_{vr} = \frac{M_r}{\zeta_r h F_v} = \frac{M_r}{W_v}, \quad \sigma_{vh} = n_t \beta_t \sigma_{ht}.$$

$$M_r = \sigma_{vr} \zeta_r h F_v = \sigma_{ht} W_r = \sigma_{vr} W_v, \quad W_v = \zeta_r h F_v$$

und so

$$l_v = \frac{F_v}{K_v \tau} \left( \frac{W_r}{W_v} - n_t \beta_t \right). \quad (83)$$

Die durchschnittliche Stahlspannung beträgt

$$\sigma_{va} = \sigma_{vr} - \frac{2}{3} \frac{F_v \sigma_{ht}}{F_v} \left( \frac{W_r}{W_v} - n_t \beta_t \right) = \psi \sigma_{vr}, \quad (84)$$

worin

$$\psi = \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \frac{W_v}{W_r} n_t \beta_t \right). \quad (84a)$$

Auf dieser Grundlage läßt sich folgender Ausdruck geben

$$\overline{\Delta l} = \epsilon_a l_r = \frac{\sigma_{va}}{E_v} l_r = 2\psi \frac{\sigma_{vr}}{E_v} l_v. \quad (85)$$

In diesen Formeln sind an der Strecke  $l_v$  konstante Momente vorausgesetzt worden; ist dies nicht der Fall, sondern nimmt das Moment links und rechts vom Riß ab, dann kann ein nächstfolgender Riß erst dann auftreten, wenn im gerissenen Querschnitt und damit auch in den Nachbarquerschnitten die Beanspruchung derart wächst, daß im Querschnitt des ersten Risses ein  $M > M_r$  und in einer größeren Entfernung  $l_v$  als vorher ein  $M = M_r$  auftritt.

In diesem Fall gestalten sich die vorigen Beziehungen anhand der Fig. 13h (und i) folgendermaßen

$$M = \sigma_v W_v = \alpha' M_r = \alpha' \sigma_{ht} W_r,$$

das heißt

$$\sigma_v = \frac{\alpha' \sigma_{ht} W_r}{W_v}$$

und so

$$l_v = \frac{F_v \sigma_{ht}}{K_v \tau} \left( \alpha' \frac{W_r}{W_v} - n_t \beta_t \right). \quad (83a)$$

In dieser Gleichung ist in Abhängigkeit von der Form der Momentenfigur  $\alpha \geq 1$  und die Spannung  $\sigma_v$  größer als  $\sigma_{vr}$ .

Es gilt dann

$$\psi = \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \frac{W_v}{\alpha' W_r} n_t \beta_t \right). \quad (84b)$$

Die Berechnungen ordnet man derart, daß vorerst mit Formeln (60), (61) gearbeitet wird, sodann anhand der Momentenfigur unter Berücksichtigung von  $l_v$  der Wert  $\alpha'$  ermittelt wird, worauf man dann wieder  $l_v$ ,  $\alpha'$  und so weiter rechnet.

Überschreitet die Beanspruchung auch im Querschnitt des neuen Risses den Wert  $M_r$  und steigt im Querschnitt des ersten Risses die Beanspruchung noch weiter an, dann entstehen offenbar noch weitere Risse und auch die bereits entstandenen öffnen sich weiter, und, ist die Flächenhaftung erschöpft, dann kann sogar die Stahleinlage, sich vom Beton loslösend, ins Gleiten kommen.

Die neutrale Achse verschiebt sich gegen den gedrückten Rand hin; die Druckspannungsfigur weicht immer mehr von der Dreieckform ab und nähert sich der für den Bruchzustand kennzeichnenden — nahezu rechteckigen — Spannungsverteilung, so daß der Hebelarm der Zug- und Druckkräfte in den Wert

$$q = \left( 1 - \frac{\xi}{2} \right) h$$

übergeht.

In den Zugeinlagen wachsen die Stahlspannungen  $\sigma_v$  über den Wert  $\sigma_{vr}$  der Reißquerschnitte an, während auch die durchschnittliche Stahlspannung den genannten Wert überschreitet. In Fig. 14 ist die Veränderlichkeit der  $x$ -Achse sowie der Spannungen dargestellt.

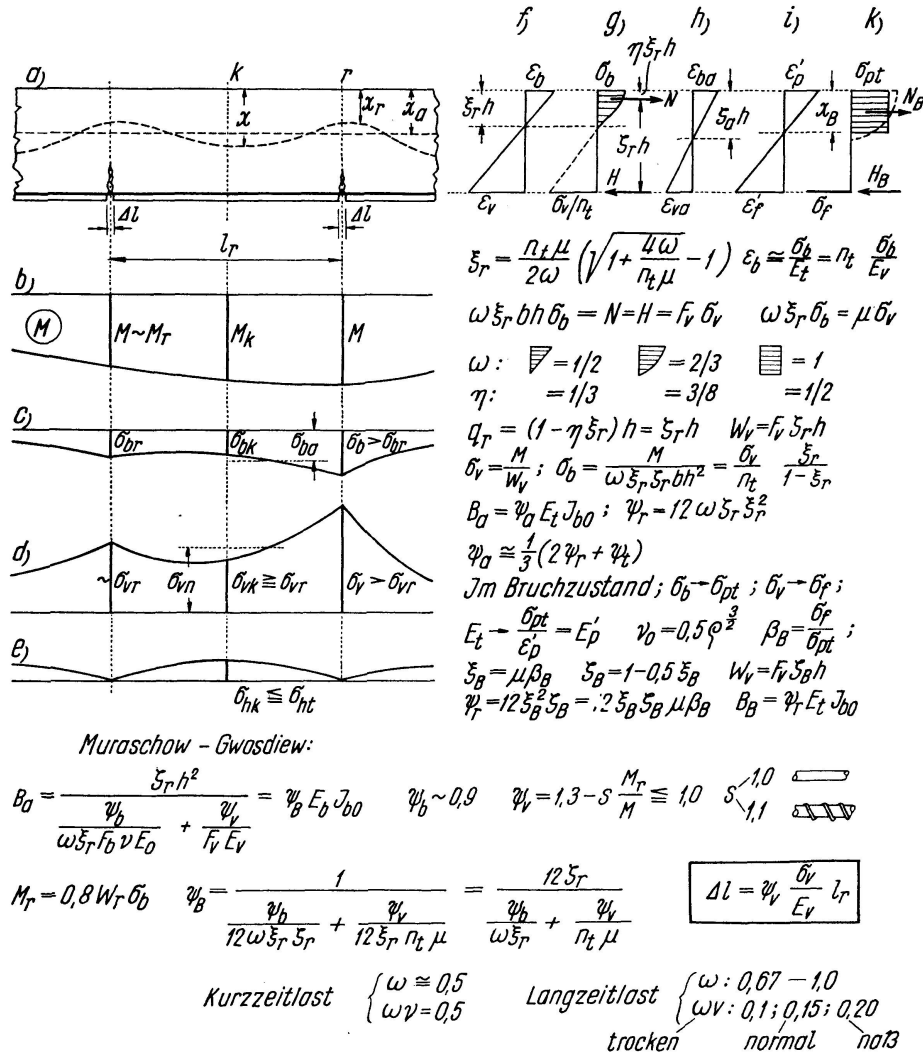


Fig. 14. Biegesteife nach der Reißbildung.

Die Biegesteife und die Aufspaltung der Risse in der Umgebung des Risses, selbst dann, wenn im Reißquerschnitt  $\sigma_v > \sigma_{vr}$ , im Halbierungspunkt zwischen den Rissen jedoch kein neuer Reiß entstanden ist, können aus den Formeln (78)–(85) berechnet werden. Ist im Reißquerschnitt das  $\sigma_b$  genügend groß, so daß die Druckspannungsfigur krummlinig ist, dann folgt mit den Bezeichnungen in Fig. 14e) und f) aus der Gleichheit der Zug- und Druckkräfte

$$N = \omega \sigma_b \xi_r b h = F_v \sigma_v = H,$$

worin das  $\omega$  den Füllungsgrad der Druckspannungsfigur zum Ausdruck bringt. Dem Formänderungsdiagramm entsprechend ist

$$\epsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_t} \epsilon_v = \frac{\sigma_v}{E_v} = \epsilon_b \frac{1 - \xi_r}{\xi_r} = \frac{\sigma_b}{E_t} \frac{1 - \xi_r}{\xi_r}$$

und hieraus

$$\sigma_v = n_t \sigma_b \frac{1 - \xi_r}{\xi_r}, \quad \sigma_b = \frac{M}{\omega \xi_r \zeta_r b h^2},$$

$$q_r = (1 - \eta \xi_r) h = \zeta_r h, \quad W_v = E_v \zeta_r h$$

und schließlich, vorausgesetzt daß  $\sigma'_{ht} \sim \sigma'_h$ , laut Formel (78) im allgemeinen

$$B_r = \psi_r E_t J_{b0} = \psi_r \nu E_0 J_{b0}, \quad (78a)$$

$$\psi_r = 12 \omega \zeta_r \xi_r^2 = 12 \zeta_r (1 - \xi_r) n_t \mu. \quad (79a)$$

Die durchschnittliche Biegesteife hingegen ist

$$B_a = \psi_a E_t J_{b0} = \psi_a \nu E_0 J_{b0} \quad (81)$$

und

$$\psi_a = \frac{1}{3} (2 \psi_r + \psi_t). \quad (82a)$$

Der Wert  $\omega$  ist für ein Dreieck  $1/2$ , für eine Parabel  $2/3$ , für ein Viereck 1, der Wert  $\eta$  für ein Dreieck  $1/2$ , für eine Parabel  $3/8$ , für ein Viereck  $1/2$ .

Die Spaltung des Risses wird nach Gl. (85) berechnet, wobei der Wert  $\psi$  aus Gl. (84b) zu ermitteln ist.

Wie aus einer Untersuchung der Formeln hervorgeht, können die Berechnungen nur auf dem Wege von *Probieren* durchgeführt werden, da in den Formeln die Faktoren  $\nu_0, \nu, n_t, \omega, \alpha' \dots$  zum vornherein nicht genau bekannt sind, sondern zuerst eingeschätzt und die Rechnungen im Bedarfsfall wiederholt werden müssen.

Im Stadium kurz vor Bruch können im Reißquerschnitt die Druckspannungen als Rechteckfigur angenommen werden. Die durchschnittliche Biegesteife kann auch in diesem Fall berechnet werden, und zwar in der hier geschilderten Weise, doch erhält man mit den Versuchen besser übereinstimmende Ergebnisse, wenn man die Rechnungen mit einer verbesserten Variante des Verfahrens von Muraschow durchführt [9], [10], [11].

Die Reißweite läßt sich, ähnlich wie in Gl. (48), durch die Formel

$$\Delta l = \psi_a \frac{\sigma_v}{E_v} l_r$$

ausdrücken, mit  $\psi$  wie Gl. (82) und

$$\sigma_v = \frac{M}{E_v \zeta_r h}$$

oder ähnlich zu Gl. (48)

$$\Delta l = \frac{\sigma_v + \sigma_{vk}}{2 E_v} l_r,$$

worin  $\sigma_{vk}$  die im Halbierungspunkt zwischen zwei Rissen auftretende und aus Spannungszustand II berechnete Stahlspannung bedeutet.

Wiederholt muß betont werden, daß sämtliche Formeln bezüglich der Rißweite und des Rißabstandes nur so lange gültig sind, bis die Flächenhaftung zwischen den zwei vorhandenen Rissen nicht erschöpft ist. Nach Erschöpfung der Flächenhaftung gerät die Stahleinlage ins Gleiten, löst sich vom Beton und das Öffnen des Risses wird nunmehr allein durch die Stahlspannung bedingt [12], [13].

Grundsätzlich sind die Formeln der Biegesteife auch im Bruchstadium gültig.

Mit den Bezeichnungen in Fig. 14i), k) ergibt sich aus der Gleichung

$$N_B = \xi_B b h \sigma_{pt} = H_B = F_v \sigma_f : \\ \xi_B = \mu \beta_B \quad \text{und} \quad \zeta_B = 1 - 0,5 \xi_B,$$

worin 
$$\beta_B = \frac{\sigma_f}{\sigma_{pt}} \quad \text{und} \quad \sigma_{pt}$$

bei Kurzzeitlast die Biegedruckfestigkeit, bei Langzeitlast hingegen die Dauerstandfestigkeit bedeutet. Der Krümmungshalbmesser beträgt

$$|R| = \frac{x_B}{\epsilon'_p} = \frac{\xi_B}{\epsilon'_p} h = \frac{\xi_B}{\sigma_{pt}} E_t h,$$

die Biegesteife 
$$B_B = |R| M_B = \psi_{Br} E_t J_{b0}, \quad (83)$$

worin das Bruchmoment

$$M_B = \xi_B \zeta_B \sigma_{pt} b h^2 = F_v \zeta_B h \sigma_f = W_v \sigma_f, \quad (84)$$

der auf die Schwerlinie der Bewehrung bezogene Widerstandsmodul

$$W_v = F_v \zeta_B h = \mu \zeta_B \beta_B \sigma_{pt} b h^2, \quad (85)$$

der Minderungsfaktor

$$\psi_{Br} = 12 \xi_B^2 \zeta_B = 12 \xi_B \zeta_B \mu \beta_B, \\ E_t = \nu E_0, \quad \nu = \frac{\nu_0}{1 + \varphi} \sim \frac{\epsilon_p}{2 \epsilon'_p} \sim 0,5 \rho^{3/2}. \quad (86)$$

Im Falle ausmittiger Beanspruchung ist natürlich der ausmittige Druck (die Spannkraft) bei der Berechnung der Biegesteife zu berücksichtigen.

Für gerissene Querschnitt kann die Biegesteife mit den Bezeichnungen in Fig. 14 aus der Formel der Krümmung berechnet werden. Nach einem Vorschlag von MURASCHOW-GWOSDIEW [10], [9]:

$$\left| \frac{1}{R} \right| = \frac{\epsilon_{be} + \epsilon_{ve}}{h} = \frac{M_v}{\zeta_r h^2} \left( \frac{\psi_b}{\xi_r \omega \nu F_b E_0} + \frac{\psi_v}{F_v E_v} \right) - P \frac{\psi_v}{F_v E_v h}, \quad (87)$$

worin

$$M_v = F_v \zeta_r h \sigma_b \quad (88)$$

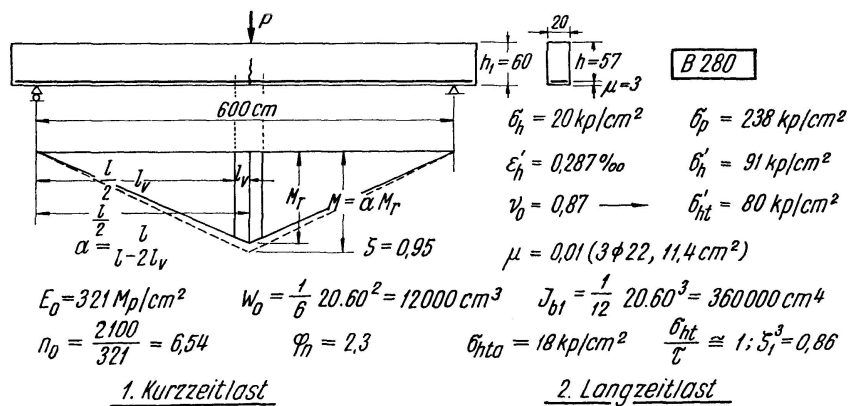
und weil

$$\sigma_v = \frac{M_v}{\zeta_r h F_v} - \frac{P}{F_v}, \quad M_r = 0,8 W_r \sigma_h$$

und

$$\psi_b = 0,9, \quad \psi_v = 1,3 - s \frac{M_r}{M} \leq 1,0, \quad s = 1,0 - 1,1.$$

Um diese Ausführungen zu beleuchten, zeigen wir in Fig. 15 die Ergebnisse eines Beispiels [14].



## a) Rißmoment (Vor der Rißbildung)

$$\begin{aligned} \nu_0 &\approx 0,87; \quad n_t = \frac{6,54}{0,87} = 7,5; \quad \sigma'_{ht} = 80 \text{ kp/cm}^2; \quad \nu \approx \frac{0,97}{3,3} = 0,295; \quad n_t = 2,3; \quad \sigma'_{ht} = 27 \text{ kp/cm}^2 \\ \beta_t &= \frac{80}{20} = 4; \quad \xi_t = 0,485; \quad \psi_t = 0,871; \quad \beta_t = \frac{27}{18} = 1,50; \quad \xi_t = 0,580; \quad \psi_t = 1,56 \\ W_r &= 36000 \text{ cm}^3; \quad M_r = 7,2 \text{ Mpm}; \quad W_r = 25400 \text{ cm}^3; \quad M_r = 4,58 \text{ Mpm} \\ B'_r &= 0,76 E_0 J_{b1}; \quad \sigma_{vh} = 543; \quad \sigma_b = 75,4; \quad B'_r = 0,41 E_0 J_{b1}; \quad \sigma_{vh} = 600; \quad \sigma_b = 33,8 \end{aligned}$$

## b) Nach der ersten Rißbildung

$$\begin{aligned} \nu_0 &\approx 0,87; \quad \xi_r = 0,317; \quad \xi_r = 0,894; \quad \nu \approx 0,295; \quad n_t = 2,3; \quad \xi_r = 0,500 \\ \psi_r &= 0,540; \quad W_r = 582 \text{ cm}^3; \quad \sigma_b = 83; \quad \xi_r = 0,833; \quad W_r = 542 \text{ cm}^3; \quad \sigma_b = 34,8 \\ \alpha' &= 1,07; \quad l_v = \frac{d}{4} (\alpha' \frac{W_r}{W_v} - n_t \beta_t) = 20 \text{ cm}; \quad \alpha' = 1,03; \quad l_v = 8 \text{ cm}; \quad \sigma_v = 870 \\ \sigma_v &= 1326; \quad \psi_r = \frac{1}{3} (1 + 2 \frac{W_v}{\alpha' W_r} n_t \beta_t) = 0,63; \quad \psi = 0,80; \quad \Delta l = 53 \mu; \quad \psi_r = 1,25 \\ \Delta l &= 2 \psi \frac{\sigma_v}{E_v} l_v = 160 \mu; \quad B_r = 0,41 E_0 J_{b1}; \quad B_r = 1,25 \cdot 0,295 \cdot 0,86 E_0 J_{b1} = 0,31 E_0 J_{b1} \\ c = b) \quad M &= 12 \text{ Mpm}; \quad \xi_r = 0,50; \quad \xi_r = 0,833; \quad \nu = 0,263; \quad \omega = 0,5 \end{aligned}$$

$$\omega \approx 0,6; \quad \nu_0 \approx 0,82; \quad \xi_r = 0,304; \quad \xi_r = 1 - 0,36 \cdot 0,304 = 0,89$$

$$\begin{aligned} \psi_r &= 0,59; \quad B_r = 0,41 E_0 J_{b1}; \quad \sigma_v = 2065; \quad \sigma_b = 131; \quad \psi_r = 1,25; \quad B_r = 0,31 E_0 J_{b1}; \quad \sigma_v = 2280; \quad \sigma_b = 67 \\ \psi_a &= 0,68; \quad B_a = 0,48 E_0 J_{b1}; \quad \Delta l = 120 - 240; \quad \psi_a = 1,46; \quad B_a = 0,33 E_0 J_{b1}; \quad \Delta l = 60 - 120 \end{aligned}$$

## d) Vor dem Bruchzustand

$$\begin{aligned} \sigma_v &= 3500; \quad \sigma_b = 238; \quad \omega \approx 0,67; \quad \nu_0 \approx 0,5; \quad \sigma_v = 3500; \quad \omega = 0,60; \quad \nu_0 \approx 0,85; \quad \nu \sim 0,258; \\ n_t &= 13; \quad \xi_r = 0,218; \quad \xi_r = 0,918; \quad M = 20,8 \text{ Mpm}; \quad n_t \approx 25; \quad \xi_r = 0,5; \quad \xi_r = 0,82; \quad \sigma_b = 116; \\ \psi_r &= 0,352; \quad B_r = 0,15 E_0 J_{b1}; \quad \psi_r = 1,48; \quad M = 18,8; \quad B_r = 0,31 E_0 J_{b1} \end{aligned}$$

## e) Im Bruchzustand

$$\begin{aligned} \omega &= 1; \quad \sigma_p = 238; \quad \sigma_r = 3500; \quad \omega = 1; \quad \sigma_{ht} = 214; \quad \sigma_r = 3500; \quad \beta_B = 16,4 \\ \nu_0 &= \nu = 0,5 \frac{1}{2} = 0,223; \quad \xi_B = 0,148; \quad \nu \sim 0,66; \quad \nu = 0,223; \quad n_t = 33 \\ \beta_B &\sim 15; \quad \psi_{Br} = 0,243; \quad M_B = 22,1 \text{ Mpm}; \quad \psi_{Bt} = 0,296; \quad M_{Bt} = 20,8 \text{ Mpm} \\ B_B &= 0,05 E_0 J_{b1}; \quad B_{Bt} = 0,06 E_0 J_{b1} \end{aligned}$$

Fig. 15. Eine Aufgabe.

Handelt es sich um die *Berechnung der Durchbiegung* eines Stahlbetonträgers, dann kann diese Aufgabe in Kenntnis der Momentenfigur und der von Punkt zu Punkt veränderlichen Biegesteifen in der üblichen Weise gelöst werden [14].

*Zum Abschluß* sei noch bemerkt, daß im behandelten Themenkreis zahlreiche Vorschläge und Ideen zur Verfügung stehen, deren Anwendung diese Frage mehr oder weniger gut annähert.

Der Verfasser verfolgte in diesem Beitrag das Ziel, in einheitlicher Anschauungsweise für die Berechnung der Formänderungen von Stahlbetonträgern — hauptsächlich für die gewöhnlichen schlaffbewehrten Tragwerke — praktisch gut anwendbare Formeln und Verfahren zusammenzustellen. Auch wollte er bei der Angabe der Parameter in den Formeln den einheimischen und ausländischen Versuchsergebnissen gebührend Beachtung schenken. Natürlich ist zu betonen, daß die durch die vorgeschlagenen Formeln erhaltenen *Ergebnisse nur orientierende Werte darstellen*, die lediglich als charakteristische Richtwerte betrachtet werden dürfen. Gerade deshalb machte er den Versuch, auch grundsätzliche Probleme im Zusammenhang mit den behandelten Fragen aufzuführen, eine Auslegung der Erscheinungen und einiger heiklerer Punkte zu geben. Das Wesentliche liegt darin, daß der im Entwurf und im Bau tätige Ingenieur sich auch im klaren ist, welche Umstände für die Formänderungen der Stahlbetonkonstruktionen von Einfluß sind, bis zu welchem Maß die Rechnungswerte als zuverlässig betrachtet werden können und schließlich auch damit, welche Mittel und Wege zur Abminderung der schädlichen Formänderungen zur Verfügung stehen.

### Schrifttum

1. L. PALOTÁS: A beton alakváltozása tartós terhelés hatására (Formänderung des Betons infolge Dauerlast). Anyagvizsgálók közlönye (Mitteil. der Materialprüfer), Budapest, 1938, 1.  
A vasbetonszerkezetek erőjátéka a tartós alakváltozások figyelembevételével (Kräfte-spiel der Stahlbetonkonstruktionen mit Berücksichtigung der Dauerverformung). Anyagvizsgálók közlönye (Mitteil. der Materialprüfer), Budapest, 1940, 3.  
Experimental and theoretical relations between the strength- and deformation characteristics of concrete, with special respect to the durability. Durability of Concrete, Praha, Rilem-Rapport 1961—1962.
2. B. G. SZKRAMTAJEV: Sztojityelnyije materiali (Baustoffe). Sztrojizdat, 1950.
3. H. LOSSIER und I. FAURY: La fissuration du béton armé ... Paris, Annales I.F.B.T.P., 1939, mai-juin.
4. R. L'HERMITE: Le comportement du béton autour des armatures. Paris, Annales I.T.B.T.P., 1944, mars.
5. M. M. ADAM: Fissuration des réservoirs en béton armé. Paris, Annales I.T.B.T.P., 1963, mai-juin.
6. M. L. P. BRICE: Idées générales sur la fissuration du béton armé et du béton précontraint. Paris, Annales I.T.B.T.P., 1964, juin.

7. ÉTI KUTATÁSI BESZÁMOLÓ: Méretezési eljárás kidolgozása a tapadóbetétes feszített szerkezetek repedésmegnyílási határállapotának ellenőrzésére (Versuchsbericht v. Bauwissen. Institut über die Rißweite des Spannbetons ...), (Kármány-Garay). Budapest, 1963.
8. V. I. MURASCHOW: Trescsinusztojsivoszty, zsesztkoszty i procsnoszty zselezobetona. Moszkva, Massztrojizdat, 1950.
9. A. A. GWOSDIEW: Új előírások a vasbetonszerkezetek tervezési és méretezési szabályzatában a Szovjetunióban (Neue Vorschriften in sowjetischen Normen ...). Budapest, ÉKME Tud. Közl., 1963, 5.
10. MULIN, ARTEMIER: Obosznovanie raszcseta deformacij zselezobetonnuh konsztrukcij po proehu novüh norm. Beton i zselezobeton 1962, 491—498.
11. K. SZALAI: Vasbetonszerkezetek (Stahlbetonkonstruktionen). Tervezési segédlet (Lehrheft) II, 1965. Egyetemi jegyzet.
12. B. GOSCHY: Der teilweise gespannte Stahlbeton. Wiss. Zeitschr. H. Sch. f. Verkehrsw. in Dresden, 1964, H. 2.
13. RÜSCH-REHM: Versuche z. Bestimmung d. Übertragungslänge v. Spannstählen. Berlin, D.A. f. Stb., 1963, H. 47.
14. L. PALOTÁS: Vasbetonszilárdsgátan (Theorie des Stahlbetons). Tankönyvkiadó (Lehrbuch-Verlag), Budapest, 1965. Szakmérnökjegyzet (Lehrheft f. Faching.).

### Zusammenfassung

Der Verfasser behandelt die Berechnung der Steifigkeiten, Formänderungen und der Rißsicherheit von Stahlbetonträgern. Unter Beachtung von Versuchsergebnissen stellt er praktische Formeln zusammen, deren Ergebnisse als *orientierende* Werte gelten sollen.

### Summary

This paper deals with the calculation of the stiffness, deflections and safety from cracking of reinforced concrete beams. Taking into account experimental results, the author presents practical methods which give results whose value should be considered as *indicative*.

### Résumé

L'auteur traite le calcul de la rigidité, des déformations et de la sécurité à la fissuration des poutres en béton armé. Prenant en compte des résultats expérimentaux, il réunit des formules pratiques à appliquer, qui donnent des résultats dont la valeur doit être considérée comme *indicative*.



Leere Seite  
Blank page  
Page vide