

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 26 (1966)

Artikel: Beitrag zur Theorie und Berechnung von zellenförmig und drehsymmetrisch ausgesteiften Kreisplatten
Autor: Gravina, P.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-20872>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Beitrag zur Theorie und Berechnung von zellenförmig und dreh-symmetrisch ausgesteiften Kreisplatten

Contribution to the Theory and Calculation of Cellular Circular Plates Provided with a System of Stiffeners Exhibiting Symmetry of Revolution

Contribution à la théorie et au calcul des plaques circulaires cellulaires munies d'un système raidisseur présentant une symétrie de révolution

P. GRAVINA
Brasilien

1. Einleitung

Einer der Wege zur Untersuchung ausgesteifter Platten besteht in der Überführung dieser Platten in orthotrope Platten mit von den konstruktiven Eigenheiten des Tragwerkes abhängigen Charakteristiken. Wenn einmal die Grundgleichungen des Problems aufgestellt sind, so beschränkt sich die Untersuchung auf die Integration dieser Gleichungen; diese Integration ist meist nicht einfach durchführbar.

Die auf diesem Gebiet angestellten Untersuchungen haben sich vorzugsweise auf den Fall rechteckiger Platten mit rechtwinklig angeordneten und unter sich gleichen Abstand aufweisenden Aussteifungen beschränkt. Das System von Grundgleichungen wurde für diesen Fall von PFLÜGER [8] aufgestellt und die Integration wurde für einige Belastungsfälle von verschiedenen Autoren durchgeführt [2], [3], [7], [8].

Wenig wurde bisher über die radial und kreisringförmig ausgesteiften Kreisplatten, die Gegenstand dieses Beitrages sind, publiziert. Einige wertvolle Beiträge wurden durch die russische Schule gegeben [1].

In unserem Beitrag wurde das System der Grundgleichungen des Tragwerkes für den Fall aufgestellt, daß die ausgesteifte Platte dreh-symmetrische Form besitzt. Die Gleichungen von PFLÜGER werden dann als Grenzfall dieser

Grundgleichungen erhalten. Zudem wird auch die Grundgleichung für radial und kreisringförmig ausgebildete Roste abgeleitet.

Anschließend wird die Platte, die eine Symmetrieebene besitzt und durch eine dreh-symmetrische Belastung beansprucht wird, unter spezieller Behandlung der Platte mit zellenförmigem Querschnitt, besonders untersucht. Die Grundgleichung wird hierfür abgeleitet, wobei der homogene Anteil zu einer hypergeometrischen Gleichung reduziert wird. Nach der Ableitung der allgemeinen Lösung der Grundgleichung für einige Belastungsfälle werden die Beziehungen für die Platte mit nur radialen oder nur kreisringförmigen Aussteifungen und für die isotrope Platte hergeleitet.

Durch ein numerisches Beispiel wird der Rechnungsgang bei einer praktischen Anwendung erläutert. Der Vergleich zwischen den Kräften und den Spannungen für durch verschiedene Aussteifungen verstärkte Platten mit der isotropen Platte erlaubt, die durch die Anwendung ausgesteifter Platten erzielten Vorteile abzuschätzen.

2. Allgemeine Theorie ausgesteifter, kreisförmiger Platten

A. Verformungen und Spannungen

Betrachtet wird ein Tragwerk (Fig. 1), bestehend aus einer oder mehreren isotropen, kreisringförmigen Platten, mit ebenen, unter sich parallelen Mittel-

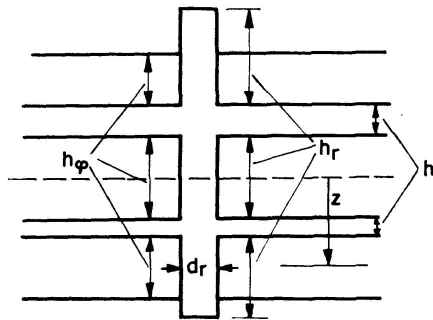


Fig. 1.

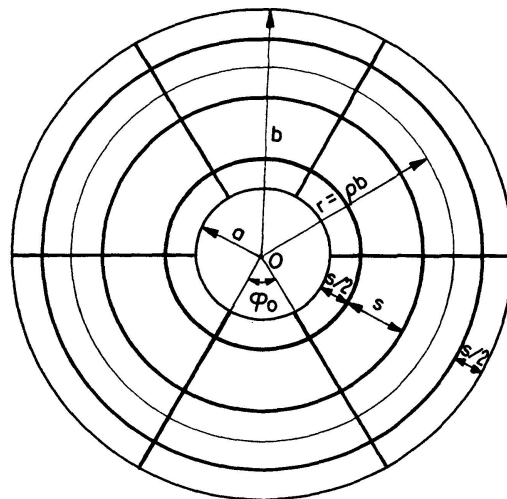


Fig. 2.

flächen, die den gleichen Mittelpunkt 0 und den Innenradius a und den Außenradius b besitzen (Fig. 2). Jede isotrope Platte weist konstante Stärke auf, wobei h die Summe der Teilstärken bedeutet. Dieses Plattensystem ist verstärkt durch ein System von Aussteifungen, deren Achsen parallel zu den Mittelflächen der isotropen Platten sowie radial und kreisringförmig mit dem gleichen Zentrum angeordnet sind. Die radial und kreisförmig orientierten

Aussteifungen sind oben und unten durch zu den Mittelflächen der isotropen Platten parallelen Ebenen begrenzt und besitzen somit die konstanten Summen der Teilhöhen h_r und h_φ . Die Breite der Aussteifungen ist ebenfalls konstant und beträgt d_r bzw. d_φ .

Die Gesamtheit der Aussteifungen ist dreh-symmetrisch angeordnet. Die radial angeordneten Aussteifungen bilden unter sich den konstanten Winkel φ_0 (Fig. 2) und die kreisringförmigen Aussteifungen sind mit unter sich gleichen Abständen s angeordnet, wobei der Abstand der Randaussteifungen in bezug auf den inneren und den äußeren Rand jeweils $s/2$ beträgt.

Das Tragwerk, hergestellt aus einem Material mit konstantem Elastizitätsmodul E und Poissonzahl μ , bildet eine ausgesteifte Platte, die konstruktiv orthotrop ausgebildet ist.

Eine Ebene im Inneren der Platte wird nun als Grundebene bezeichnet. Auf diese Ebene wird nun das Tragwerk bezogen durch ein System zylindrischer Koordinaten r, φ, z mit Ursprung in 0 in der oben bezeichneten Grundebene, wobei die Achse z senkrecht zu dieser festgelegt wird. Für die Grundebene wird somit $z = 0$.

Nun wird angenommen, daß die Senkrechte zur Grundebene auch nach der Verformung eine Gerade bleibt und daß sie auch nach der Verformung der Grundebene senkrecht zur verformten Fläche bleibt. Betrachtet wird nun ein beliebiger Punkt (r, φ) auf der Grundebene. Unter dem Einfluß einer Belastung erfährt der Punkt P eine Verschiebung, wobei mit u die Komponente dieser Verschiebung bezüglich des Radius r , mit v der Komponente senkrecht zu diesem Radius, mit w die Komponente bezüglich der Achse z bezeichnet wird. Infolgedessen kann die Verformung der Grundebene in der Umgebung des Punktes P durch die Einheitsverformungen $\epsilon_r, \epsilon_\varphi$ und durch die Verdrehung $\gamma_{r\varphi}$ dargestellt werden; somit wird nach [4]:

$$\epsilon_r = u', \quad \epsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{v'}{r}, \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{u'}{r} + v' - \frac{v}{r}, \quad (1)$$

wobei mit $()'$ die partielle Ableitung in bezug auf r und mit $()''$ die partielle Ableitung in bezug auf φ bezeichnet wird.

Der Punkt P' , der sich ursprünglich auf der Senkrechten zur Grundebene über P mit dem Abstand z von dieser befand, erfährt, infolge der Hypothese konstanter Vertikalität dieser Senkrechten, folgende Verschiebungen:

$$u_z = u - z w', \quad v_z = v - z \frac{w'}{r}, \quad w_z = w, \quad (2)$$

wobei durch Einsetzen der Ausdrücke unter (1) die Verformungscharakteristiken, bezogen auf das System zylindrischer Koordinaten in der Umgebung des Punktes P' in der Ebene im Abstand z von der Grundebene, sich ergeben zu:

$$\epsilon_{rz} = \epsilon_r - z w'', \quad \epsilon_{\varphi z} = \epsilon_\varphi - z \left(\frac{w''}{r^2} + \frac{w'}{r} \right), \quad \gamma_{r\varphi z} = \gamma_{r\varphi} - 2z \left(\frac{w'}{r} \right)'. \quad (3)$$

Betrachtet wird nun ein Element des Tragwerkes (Fig. 3), das begrenzt wird durch zwei zylindrische Flächen mit der Achse z und den Radien r bzw. $r+dr$, durch zwei Ebenen senkrecht zu dieser Achse mit $z = \text{konstant}$ bzw. $z+dz = \text{konst.}$ und durch zwei Ebenen, die durch diese Achse z gehen, mit $\varphi = \text{konstant}$ bzw. $\varphi+d\varphi = \text{konstant}$.

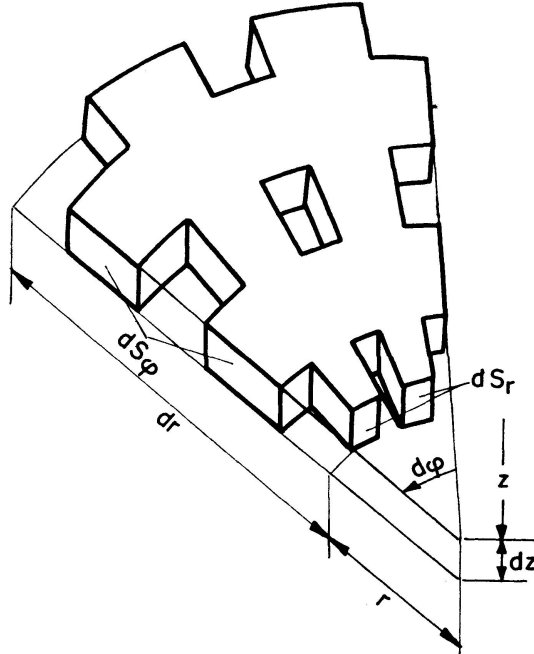


Fig. 3.

Falls der Querschnitt des so erhaltenen Elementes mit der Stärke dz längs des Kreises $r = \text{konstant}$ voll ist, erhält man:

$$dS_r = r d\varphi dz. \quad (4)$$

Falls jedoch dieser Querschnitt längs des Kreises $r = \text{konstant}$ die ausgesteifte Zone enthält, erhält man:

$$dS_r = k_r r d\varphi dz, \quad (5)$$

wobei für den betrachteten Querschnitt des Elementes mit:

$$k_r = \frac{S_r''}{S_r'} \quad (6)$$

das Verhältnis zwischen der Fläche des reduzierten effektiven Querschnittes S_r'' , mit der Einheitsbreite und längs des Kreises $r = \text{konstant}$ gemessen, und der Fläche des Querschnittes S_r' , ebenfalls mit der Einheitsbreite und längs des Kreises $r = \text{konstant}$ gemessen, die sich ergeben würde, falls der betrachtete Querschnitt voll wäre, bezeichnet wird.

Ebenso erhält man für die Querschnittsfläche des Elementes für $\varphi = \text{konstant}$, falls eine volle Fläche vorhanden ist:

$$dS_\varphi = dr dz \quad (7)$$

und falls die betrachtete Fläche die ausgesteifte Zone enthält:

$$dS_\varphi = k_\varphi dr dz, \quad (8)$$

wobei die Definition des Koeffizienten k_φ offenkundig ist.

Die Koeffizienten k_r und k_φ , die geometrische Eigenschaften beschreiben, sind infolge der angenommenen Drehsymmetrie des Tragwerkes einzig von r und von z abhängig und nicht mehr von φ . Sie können variieren zwischen:

$$0 \leq k_r \leq 1; \quad 0 \leq k_\varphi \leq 1. \quad (9)$$

In der ausgesteiften Zone, falls nur radiale Aussteifungen vorhanden sind, ist $k_r \neq 0$, $k_\varphi = 0$, und falls nur kreisringförmige Aussteifungen vorhanden sind, ist $k_r = 0$ und $k_\varphi \neq 0$. In der Zone des Vollquerschnittes ist natürlich $k_r = k_\varphi = 1$. Je kleiner die Breite der Einheitsquerschnitte ist, auf die sich die Koeffizienten k_r und k_φ beziehen, um so genauer werden die konstruktiven Charakteristiken des ausgesteiften Tragwerkes interpretiert.

Im Falle daß zahlreiche Aussteifungen vorhanden sind, erhält man eine ausreichende Näherung durch folgende Annahme für die ausgesteifte Zone für $r = \text{konstant}$ bzw. $\varphi = \text{konstant}$:

$$k_r = \frac{t_r d_r}{2\pi r}, \quad k_\varphi = \frac{t_\varphi d_\varphi}{b-a}, \quad (10)$$

wobei t_r und t_φ die Anzahl der radial bzw. kreisringförmig angeordneten Aussteifungen bedeutet:

$$t_r = \frac{2\pi}{\varphi_0}, \quad t_\varphi = \frac{b-a}{s}. \quad (11)$$

Die Breite d_r wurde längs des Umfangs für $r = \text{konstant}$ und die Breite d_φ längs des Radius für $\varphi = \text{konstant}$ gemessen. Die Verwendung der Ausdrücke unter (10) bedeutet die Ersetzung des effektiven kurvenförmigen Verlaufes von k_r und k_φ längs der Schnitte $r = \text{konstant}$ bzw. $\varphi = \text{konstant}$ durch eine ausgleichende Gerade.

Für die betrachteten Verhältnisse wird k_r in der ausgesteiften Zone nur eine Funktion von r , während k_φ für die gleiche Zone konstant bleibt. Tatsächlich wird nach Fig. 4, indem man für:

$$r = \rho b, \quad s = \rho_s b \quad (12)$$

$$\text{einsetzt:} \quad d_r = b \varphi_r, \quad d_\varphi = \rho_\varphi b, \quad (13)$$

wobei der Winkel φ_r der Bogenlänge d_r gemessen längs des äußeren Umfangs mit Radius b entspricht. Drückt man zudem r, d_φ und s in Funktion des äußeren Radius b aus, so erhält man für die ausgesteifte Zone:

$$k_r = \frac{d_r}{r \varphi_0} = \frac{\varphi_r}{\rho \varphi_0} = \frac{m}{\rho}, \quad k_\varphi = \frac{d_\varphi}{s} = \frac{\rho_\varphi}{\rho_s} = n, \quad (14)$$

$$\text{wobei:} \quad m = \frac{\varphi_r}{\varphi_0}, \quad n = \frac{\rho_\varphi}{\rho_s}. \quad (15)$$

Konstanten sind, die von den konstruktiven Eigenschaften des Tragwerkes abhängen. Für die isotrope Zone der Platte erhält man:

$$k_r = k_\varphi = 1. \quad (16)$$

Betrachtet man in der Umgebung eines Punktes (r, φ, z) ein Element mit der Höhe dz (Fig. 5) und mit den Einheitsabmessungen in radialer Richtung für

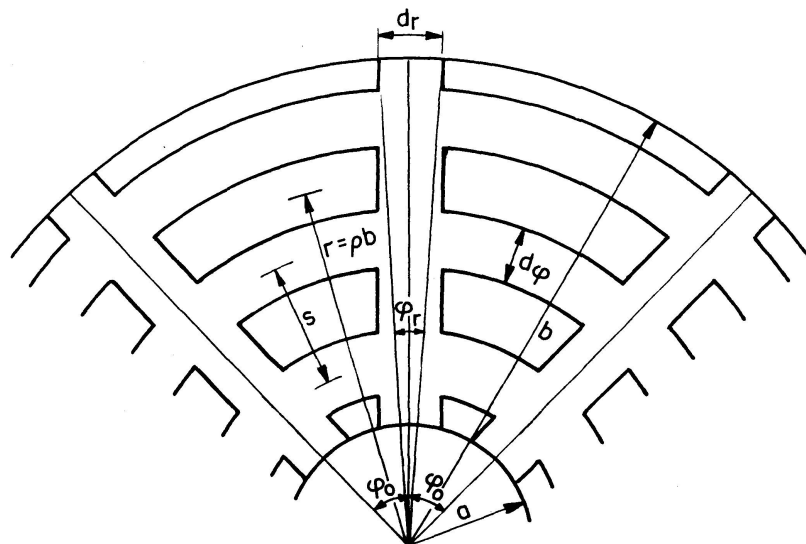


Fig. 4.

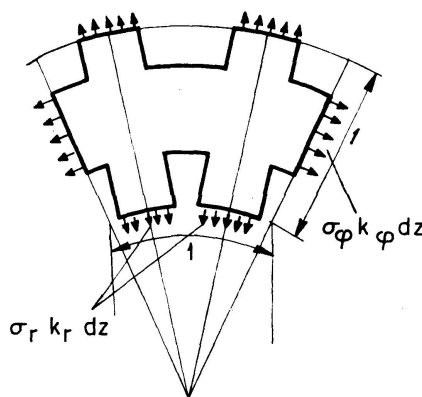


Fig. 5.

$\varphi = \text{konstant}$ und in tangentieller Richtung für $r = \text{konstant}$, so erhält man die Flächen der Querschnitte zu $k_\varphi l dz$ bzw. $k_r l dz$. Die Einheitsverformung in radialer Richtung infolge einer radialen Spannung σ_r beträgt dann:

$$\epsilon'_{rz} = \frac{\sigma_r k_r l dz}{E k_r l dz} = \frac{\sigma_r}{E}. \quad (17)$$

Infolge der Spannung σ_φ entsteht angesichts der Querkontraktion ebenfalls eine radiale Einheitsverformung:

$$\epsilon''_{rz} = -\mu \frac{\sigma_\varphi k_\varphi l dz}{E l dz} = -\mu \frac{k_\varphi \sigma_\varphi}{E}. \quad (18)$$

Diese beiden Einflüsse ergeben überlagert die totale Einheitsverformung ϵ_{rz} .

Analog erhält man die tangentielle Einheitsverformung. Somit ergeben sich die Einheitsverformungen in der Umgebung eines Punktes mit den Koordinaten (r, φ, z) zu:

$$\epsilon_{rz} = \frac{1}{E} (\sigma_r - k_\varphi \mu \sigma_\varphi), \quad \epsilon_{\varphi z} = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - k_r \mu \sigma_r). \quad (19)$$

Für die tangentiellen Spannungen erhält man unter Berücksichtigung der konstruktiven Orthotropie:

$$k_{\gamma r} G \gamma_{r\varphi z} = \tau_{r\varphi} k_r, \quad k_{\gamma \varphi} G \gamma_{\varphi r z} = \tau_{\varphi r} k_\varphi, \quad (20)$$

wobei mit $k_{\gamma r}$ und $k_{\gamma \varphi}$ dimensionslose Koeffizienten, die von den geometrischen Eigenschaften des Tragwerkes abhängen, und mit G der Schubmodul des Werkstoffes bezeichnet werden. Für den Sonderfall eines Vollquerschnittes wird $k_r = k_\varphi = 1$ und $k_{\gamma r} = k_{\gamma \varphi} = 1$.

Aus den Beziehungen (19) und (20) erhält man durch Darstellung der Spannungen σ_r und σ_φ in Funktion der Einheitsverformungen ϵ_{rz} und $\epsilon_{\varphi z}$ sowie der Tangentialspannungen τ_{rz} und $\tau_{\varphi z}$ in Funktion der Verdrehungen $\gamma_{r\varphi z}$ bzw. $\gamma_{\varphi r z}$ und unter Berücksichtigung der Beziehungen (3) und (1) folgende Ausdrücke:

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - k_r k_\varphi \mu^2} \left\{ (u' - z w'') + k_\varphi \mu \left[\frac{u}{r} + \frac{v}{r} - z \left(\frac{w''}{r^2} + \frac{w'}{r} \right) \right] \right\}, \quad k_r \neq 0, \quad (21)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1 - k_r k_\varphi \mu^2} \left\{ \left[\frac{u}{r} + \frac{v}{r} - z \left(\frac{w''}{r^2} + \frac{w'}{r} \right) \right] + k_r \mu (u' - z w'') \right\}, \quad k_\varphi \neq 0, \quad (22)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{k_{\gamma r}}{k_r} G \left[\left(\frac{u}{r} + v' - \frac{v}{r} \right) - 2z \left(\frac{w''}{r} - \frac{w'}{r^2} \right) \right], \quad k_r \neq 0, \quad (23)$$

$$\tau_{\varphi r} = \frac{k_{\gamma \varphi}}{k_\varphi} G \left[\left(\frac{u}{r} + v' - \frac{v}{r} \right) - 2z \left(\frac{w''}{r} - \frac{w'}{r^2} \right) \right], \quad k_\varphi \neq 0. \quad (24)$$

Zu beachten ist, daß die Gl. (21) und (23) nur sinnvoll sind, falls $k_r \neq 0$ und die Gl. (22) und (24) nur, falls $k_\varphi \neq 0$. Falls nun k_r gleich Null wird, für einen durch die Koordinaten (r, φ, z) festgelegten Punkt, so bedeutet dies, daß der Einheitsquerschnitt senkrecht zu dem Radius dieses Punktes gleich Null wird, somit $\sigma_r = \tau_{r\varphi} = 0$. Analog ergibt sich, falls für einen Punkt $k_\varphi = 0$ wird, für diesen Punkt $\sigma_\varphi = \tau_{\varphi r} = 0$.

B. Innere Kräfte

Sind die Ausdrücke für die Spannungen in einem allgemeinen Punkt in Funktion der geometrischen Eigenschaften k_r, k_φ und der Komponenten der Verschiebung dieses Punktes bekannt, so können die Einheitskräfte folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
n_r &= \int_r \sigma_r k_r dz, & n_\varphi &= \int_\varphi \sigma_\varphi k_\varphi dz, \\
n_{r\varphi} &= \int_r \tau_{r\varphi} k_r dz, & n_{\varphi r} &= \int_\varphi \tau_{\varphi r} k_\varphi dz, \\
m_r &= \int_r \sigma_r k_r z dz, & m_\varphi &= \int_\varphi \sigma_\varphi k_\varphi z dz, \\
m_{r\varphi} &= \int_r \tau_{r\varphi} k_r z dz, & m_{\varphi r} &= \int_\varphi \tau_{\varphi r} k_\varphi z dz,
\end{aligned} \tag{25}$$

wobei n_r und n_φ die Normalkräfte, $n_{r\varphi}$ und $n_{\varphi r}$ die Tangentialkräfte, m_r und m_φ die Biegemomente, $m_{r\varphi}$ und $m_{\varphi r}$ die Torsionsmomente bedeuten [4].

Die Integrale \int_r und \int_φ erstrecken sich über die ganze Höhe des Tragwerkes, bzw. längs der Radien und der Umfänge.

Um die Ausdrücke für die Kräfte zu vereinfachen, wird angenommen, daß längs den Aussteifungen $\mu=0$ sei sowie daß, im Einklang mit PFLÜGER [8], die Tangentialkräfte $n_{r\varphi}$ und $n_{\varphi r}$ einzig durch die isotropen Platten aufgenommen werden, was gleichbedeutend ist mit der Integration der Gl. (25) nur über die Stärke der isotropen Platten.

Durch Einsetzen der Gl. (21), (22), (23) und (24) in die Gl. (25) erhält man:

$$\begin{aligned}
n_r &= D_{11} u' + \mu D \left(\frac{u}{r} + \frac{v}{r} \right) - D_{11}^* w'' - \mu D^* \left(\frac{w}{r^2} + \frac{w'}{r} \right), \\
n_\varphi &= D_{22} \left(\frac{u}{r} + \frac{v}{r} \right) - D_{22}^* \left(\frac{w}{r^2} + \frac{w'}{r} \right) + \mu D u' - \mu D^* w'', \\
n_{r\varphi} &= n_{\varphi r} = \frac{1-\mu}{2} D \left(\frac{u}{r} + v' - \frac{v}{r} \right) - (1-\mu) D^* \left(\frac{w'}{r} - \frac{w}{r^2} \right), \\
m_r &= D_{11}^* u' + \mu D^* \left(\frac{u}{r} + \frac{v}{r} \right) - K_{11} w'' - \mu K \left(\frac{w}{r^2} + \frac{w'}{r} \right), \\
m_\varphi &= D_{22}^* \left(\frac{u}{r} + \frac{v}{r} \right) + \mu D^* u' - K_{22} \left(\frac{w}{r^2} + \frac{w'}{r} \right) - \mu K w'', \\
m_{r\varphi} &= \frac{1-\mu}{2} D^* \left(\frac{u}{r} + v' - \frac{v}{r} \right) - [(1-\mu) K + 2 C_{r\varphi}] \left(\frac{w'}{r} - \frac{w}{r^2} \right), \\
m_{\varphi r} &= \frac{1-\mu}{2} D^* \left(\frac{u}{r} + v' - \frac{v}{r} \right) - [(1-\mu) K + 2 C_{\varphi r}] \left(\frac{w'}{r} - \frac{w}{r^2} \right),
\end{aligned} \tag{26}$$

wobei folgende Abkürzungen eingesetzt wurden:

$$D = \int_h \frac{E dz}{1-\mu^2}, \quad D^* = \int_h \frac{E z dz}{1-\mu^2}, \quad K = \int_h \frac{E z^2 dz}{1-\mu^2} \tag{27}$$

sowie:

$$\begin{aligned}
D_{11} &= \int_r E(z) k_r dz, & D_{22} &= \int_\varphi E(z) k_\varphi dz, \\
D_{11}^* &= \int_r E(z) k_r z dz, & D_{22}^* &= \int_\varphi E(z) k_\varphi z dz, \\
K_{11} &= \int_r E(z) k_r z^2 dz, & K_{22} &= \int_\varphi E(z) k_\varphi z^2 dz.
\end{aligned} \tag{28}$$

Unter \int_h ist zu verstehen, daß sich das Integral nur über die Stärke der Platten mit Totalhöhe h erstreckt und unter $E(z)$, daß der Wert des Elastizitätsmoduls gleich E in der ausgesteiften Zone und gleich $E/(1-\mu^2)$ in der Zone der isotropen Platten ist.

In den Ausdrücken für $m_{r\varphi}$ und $m_{\varphi r}$, die in der zweitletzten und in der letzten der Gl. (26) angegeben sind, werden die Torsionscharakteristiken in radialer und tangentieller Richtung näherungsweise zu:

$$\begin{aligned} H_{11} &= 2 \int_r k_{\gamma r} G z^2 dz = (1-\mu) K + 2 C_{r\varphi}, \\ H_{22} &= 2 \int_\varphi k_{\gamma \varphi} G z^2 dz = (1-\mu) K + 2 C_{\varphi r} \end{aligned} \quad (29)$$

bestimmt durch Hinzufügen zu den Werten der Torsionscharakteristiken der isotropen Platten allein, die Werte $2 C_{r\varphi}$ bzw. $2 C_{\varphi r}$, die gleich der Summe der Torsionaleinheitssteifigkeiten der Teilelemente der zwischen den isotropen Platten liegenden Aussteifungen sind. Diese Einheitssteifigkeiten werden näherungsweise bestimmt, indem man die Torsionssteifigkeiten der Teilelemente der Aussteifungen durch die Zwischenabstände dividiert, und zwar sowohl in radialer als auch in tangentieller Richtung.

Die durch die Gl. (27), (28) und (29) definierten Größen werden als elasto-geometrische Größen bezeichnet. In Übereinstimmung mit den Gl. (15) sind alle diese Größen von φ unabhängig und einzig D_{11} , D_{11}^* , K_{11} , $C_{r\varphi}$ variieren mit $r = \rho b$.

C. Allgemeine Grundgleichungen

Es wird angenommen, daß die ausgesteifte Platte durch äußere Kräfte belastet ist, deren Komponenten in radialer, tangentieller und in Richtung der z -Achse mit p_r , p_φ und p_z bezeichnet werden.

Die Gleichgewichtsbedingung für das Tragwerkelement bezüglich einer zur Grundebene parallelen Ebene ergibt folgende Beziehungen [4]:

$$(r n_r)' + n_{\varphi r} - n_\varphi + r p_r = 0, \quad n_\varphi + (r n_{r\varphi})' + n_{\varphi r} + r p_\varphi = 0. \quad (30)$$

Die Gleichgewichtsbedingung bezüglich einer Senkrechten zur Grundebene und diejenige bezüglich einer Verdrehung liefern die anderen Beziehungen:

$$\begin{aligned} (r q_r)' + q_\varphi + r p_z &= 0, \\ (r m_r)' + m_{\varphi r} - m_\varphi - r q_r &= 0, \\ m_\varphi + (r m_{r\varphi})' + m_{\varphi r} - r q_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

worin q_r und q_φ die Querkräfte in den Schnitten $r = \text{konstant}$ bzw. $\varphi = \text{konstant}$ bezeichnen [4].

Durch Entwickeln der ersten zwei Gleichungen und durch die Substitution der Querkräfte bei den drei letzten Gleichungen erhält man:

$$\begin{aligned}
r n'_r + n_{\varphi r} + n_r - n_{\varphi} + r p_r &= 0, \\
r n'_{r\varphi} + n_{\varphi} + n_{\varphi r} + n_{r\varphi} + r p_{\varphi} &= 0, \\
m''_r + \frac{m_{\varphi}}{r^2} + 2 \frac{m'_r}{r} - \frac{m'_{\varphi}}{r} + \frac{m'_{\varphi r}}{r} + \frac{m_{\varphi r}}{r^2} + \frac{m'_{r\varphi}}{r} + \frac{m_{r\varphi}}{r^2} + p_z &= 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Ersetzt man nun in den Gl. (32) die Ausdrücke für die Kräfte durch die Beziehungen der Gl. (26), so erhält man nach einigen Umformungen die Grundgleichungen der ausgesteiften Kreisplatte zu:

$$\begin{aligned}
&-D_{11}^* w''' - D^* \frac{w''}{r^2} - D_{11}^* \frac{w''}{r} + (D^* + D_{22}^*) \frac{w''}{r^3} - D_{11}^{*'} w'' + D_{22}^* \frac{w'}{r^2} + D_{11} u'' \\
&+ \frac{1-\mu}{2} D \frac{u''}{r^2} + D_{11} \frac{u'}{r} + D_{11}' u' - D_{22} \frac{u}{r^2} + \frac{1+\mu}{2} D \frac{v'}{r} - \left(D_{22} + \frac{1-\mu}{2} D \right) \frac{v}{r^2} + p_r = 0,
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
&-D_{22}^* \frac{w''}{r^3} - D^* \frac{w''}{r} - D_{22}^* \frac{w'}{r^2} + \frac{1+\mu}{2} D \frac{u'}{r} + \left(D_{22} + \frac{1-\mu}{2} D \right) \frac{u}{r^2} \\
&+ \frac{1-\mu}{2} D v'' + D_{22} \frac{v''}{r^2} + \frac{1-\mu}{2} D \frac{v'}{r} - \frac{1-\mu}{2} D \frac{v}{r^2} + p_{\varphi} = 0,
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
&-K_{11} w'''' - 2(K + C_{r\varphi} + C_{\varphi r}) \frac{w''''}{r^2} - K_{22} \frac{w''''}{r^4} - 2K_{11} \frac{w'''}{r} \\
&- 2K_{11}' w''' + 2(K + C_{r\varphi} + C_{\varphi r}) \frac{w''}{r^3} - 2C_{r\varphi}' \frac{w''}{r^2} + K_{22} \frac{w''}{r^2} \\
&- 2(K + K_{22} + C_{r\varphi} + C_{\varphi r}) \frac{w'}{r^4} - 2K_{11}' \frac{w'}{r} - K_{11}'' w'' + 2C_{r\varphi}' \frac{w'}{r^3} \\
&- K_{22} \frac{w'}{r^3} + D_{11}^* u''' + D^* \frac{u''}{r^2} + 2D_{11}^* \frac{u''}{r} + D_{22}^* \frac{u''}{r^3} + 2D_{11}^{*'} u'' - D_{22}^* \frac{u'}{r^2} \\
&+ 2D_{11}^{*'} \frac{u'}{r} + D_{11}^{*''} u' + D_{22}^* \frac{u}{r^3} + D^* \frac{v''}{r} + D_{22}^* \frac{v''}{r^3} - D_{22}^* \frac{v'}{r^2} + D_{22}^* \frac{v}{r^3} + p_z = 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

Sind die elasto-geometrischen Größen der ausgesteiften Platte bekannt und die Lösungen des Gleichungssystems (33), (34), (35), d.h. der Funktionen:

$$u = u(r, \varphi); \quad v = v(r, \varphi); \quad w = w(r, \varphi) \tag{36}$$

bestimmt, so erhält man über die Gl. (26) die Kräfte und über die Gl. (21), (22), (23), (24) die Spannungen.

Falls die Platte eine Symmetrieebene besitzt und diese Ebene als Grundebene angenommen wird, so ist in den Grundgleichungen einzusetzen:

$$D^* = D_{11}^* = D_{22}^* = 0. \tag{37}$$

In diesem Falle werden die beiden ersten Gleichungen in (33) und (34) in den Unbekannten u und v unabhängig von der letzten Gleichung in (35) in der Unbekannten w .

Reduziert man nun die ausgesteifte Platte — durch Aufhebung der isotropen Platten — auf ein System rostförmiger Aussteifungen, angeordnet nach den Linien polarer Koordinaten, so wird $K=0$. Für den Sonderfall, daß das Tragwerk eine Symmetrieebene aufweist, die zugleich als Grundebene angenommen wird, leitet man aus der Gl. (35) unter Berücksichtigung der Gl. (37) die Grundgleichungen für den Rost ab zu:

$$\begin{aligned}
 & -K_{11} w'''' - 2(C_{r\varphi} + C_{\varphi r}) \frac{w'''}{r^2} - K_{22} \frac{w''''}{r^4} - 2K_{11} \frac{w'''}{r^2} - 2K'_{11} w''' \\
 & + 2(C_{r\varphi} + C_{\varphi r}) \frac{w''}{r^3} - 2C'_{r\varphi} \frac{w''}{r^2} + K_{22} \frac{w'}{r^2} \\
 & - 2(C_{r\varphi} + C_{\varphi r} + K_{22}) \frac{w''}{r^4} - 2K'_{11} \frac{w''}{r} - K''_{11} w'' + 2C'_{r\varphi} \frac{w''}{r^3} - K_{22} \frac{w'}{r^3} + p_z = 0.
 \end{aligned} \quad (38)$$

Nun wird noch der Fall einer ausgesteiften Platte, bestehend aus einer einzigen isotropen Platte, wobei die Mittelebene der letzteren als Grundebene angenommen wird, betrachtet. Falls der Ursprung der Koordinaten 0 ins Unendliche verlegt wird, wird das System polarer Koordinaten r, φ in ein System kartesischer Koordinaten x, y überführt. Für den Fall $r \rightarrow \infty$ geht $\partial r \rightarrow \partial x$ bzw. $r \partial \varphi \rightarrow \partial y$ über. Zu beachten ist noch, daß in diesem Fall K_{11} und $C_{r\varphi} \rightarrow C_{xy}$ zu Konstanten werden, weil alle Aussteifungen unter sich gleiche Abstände s_x bzw. s_y aufweisen. Nun kann man aus den Gl. (33), (34), (35) noch die Gleichungen von PFLÜGER für geradlinig, orthogonal ausgesteifte Platten ableiten zu:

$$-D_{11}^* w''' + D_{11} u'' + \frac{D}{2} (1 - \mu) u'' + \frac{D}{2} (1 + \mu) v'' + p_r = 0, \quad (39)$$

$$-D_{22}^* w''' + D_{22} v'' + \frac{D}{2} (1 + \mu) u'' + \frac{D}{2} (1 - \mu) v'' + p_\varphi = 0, \quad (40)$$

$$-K_{11} w'''' + D_{11}^* u''' - 2(K + C_{xy} + C_{yx}) w'''' - K_{22} w'''' + D_{22}^* v''' + p_z = 0. \quad (41)$$

In diesen Beziehungen werden die partiellen Ableitungen nach x mit $()'$ und diejenigen nach y mit $()''$ bezeichnet.

3. Theorie und Berechnung der symmetrischen Zellenplatte

A. Grundgleichung

Betrachtet wird nun der Sonderfall einer aufgesteiften Platte, die eine Symmetrieebene besitzt, die als Grundebene angenommen wird und die durch eine drehsymmetrische Belastung beansprucht wird. Für diesen Fall heben sich in den Gl. (33), (34), (35) alle Ableitungen nach φ auf; somit erhält man unter Berücksichtigung der Gl. (37):

$$D_{11} u'' + D_{11} \frac{u'}{r} + D'_{11} u' - D_{22} \frac{u}{r^2} + p_r = 0, \quad (42)$$

$$\frac{1-\mu}{2} D v'' + \frac{1-\mu}{2} D \frac{v'}{r} - \frac{1-\mu}{2} D \frac{v}{r^2} + p_\varphi = 0, \quad (43)$$

$$-K_{11} w'''' - 2 K_{11} \frac{w'''}{r} - 2 K'_{11} w''' + K_{22} \frac{w''}{r^2} - 2 K'_{11} \frac{w''}{r} - K''_{11} w'' - K_{22} \frac{w'}{r^3} + p_z = 0, \quad (44)$$

d. h. man erhält drei unter sich unabhängige Gleichungen für die Unbekannten u, v, w , wobei die radiale Verschiebung eine Funktion der Komponente p_r , die tangentielle Verschiebung eine Funktion der Komponente p_φ und die axiale Verschiebung eine Funktion der Komponente p_z wird.

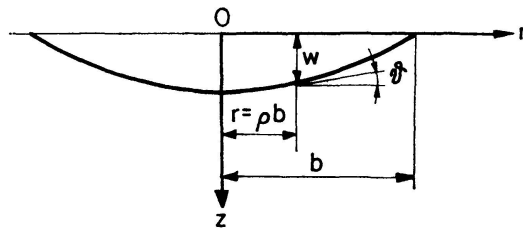


Fig. 6.

Die Gl. (44) kann zweckmäßig umgeformt werden durch Einführung der Verdrehung ϑ des zum Radius normalen Querschnittes (Fig. 6):

$$\vartheta = -w'. \quad (45)$$

Das Vorzeichen ist negativ, da mit zunehmenden r die Verschiebung w kleiner wird.

Durch Benützung der Beziehung (45) und geeigneter Umformung der Gl. (44) und unter Berücksichtigung, daß für dreh-symmetrische Belastungen die erste Zeile der Gl. (31) zu:

$$r p_z = -(q_r r)' \quad (46)$$

wird, erhält man:

$$(r K_{11} \vartheta'')' + (K_{11} \vartheta')' + (r K'_{11} \vartheta')' - \left(K_{22} \frac{\vartheta}{r} \right)' - (q_r r)' = 0 \quad (47)$$

d. h.:

$$K_{11} \vartheta'' + K_{11} \frac{\vartheta'}{r} + K'_{11} \vartheta' - K_{22} \frac{\vartheta}{r^2} - q_r = 0. \quad (48)$$

Diese Gleichung besitzt den gleichen Aufbau wie die Gl. (42) und (43).

Unter den verschiedenen möglichen Belastungsfällen wird infolge seiner Bedeutung der Sonderfall der symmetrisch ausgesteiften Platte mit dreh-symmetrischer Belastung p_z besonders behandelt.

Der Radialquerschnitt, in Fig. 7 dargestellt, ist zellenförmig, wobei das Tragwerk aus zwei isotropen Platten mit Plattenstärke um je $h/2$ besteht mit einem dazwischenliegenden System von Aussteifungen mit der Höhe h_n .

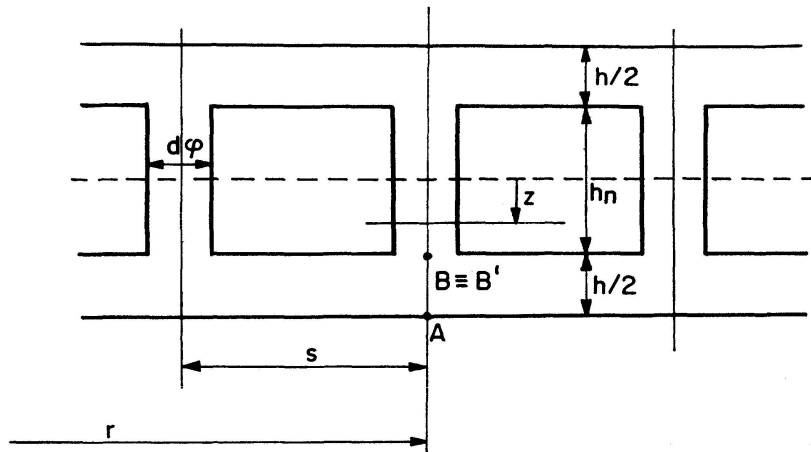


Fig. 7.

Unter Benützung der Ausdrücke für K_{11} und K_{22} in den letzten Zeilen der Gl. (28) und der in den Gl. (15) angegebenen Ausdrücke für k_r und k_φ erhält man:

$$K_{11} = \frac{E[(h+h_n)^3 - h_n^3]}{12(1-\mu^2)} + \frac{m E h_n^3}{12\rho}, \quad K_{22} = \frac{E[(h+h_n)^3 - h_n^3]}{12(1-\mu^2)} + \frac{n E h_n^3}{12}. \quad (49)$$

Setzt man:

$$K = \frac{E[(h+h_n)^3 - h_n^3]}{12(1-\mu^2)} = \frac{E h^3 [(1+\epsilon)^3 - \epsilon^3]}{12(1-\mu^2)} = \frac{E h^{*3}}{12(1-\mu^2)} \quad (50)$$

und bezeichnet mit ϵ die Beziehung:

$$\epsilon = \frac{h_n}{h}, \quad (51)$$

so erhält man: $K_{11} = K \left[\frac{\rho + r^*}{\rho} \right], \quad K_{22} = K [1 + s^*], \quad (52)$

wobei: $r^* = m(1-\mu^2) \frac{\epsilon^3}{(1+\epsilon)^3 - \epsilon^3}, \quad s^* = n(1-\mu^2) \frac{\epsilon^3}{(1+\epsilon)^3 - \epsilon^3}. \quad (53)$

r^* und s^* sind geometrische Konstanten der ausgesteiften Platte. Beachtet man zudem, daß:

$$K'_{11} = \frac{1}{b} \frac{d K_{11}}{d \rho} = - \frac{1}{b} \frac{r^*}{\rho^2} K \quad (54)$$

ist, so erhält man durch Einsetzen der Gl. (52) in der Gl. (48) die Grundgleichung:

$$\rho(\rho + r^*) \frac{d^2 \vartheta}{d \rho^2} + \rho \frac{d \vartheta}{d \rho} - (s^* + 1) \vartheta = \frac{q_r b^2 \rho^2}{K}. \quad (55)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung wird gegeben durch:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta^*, \quad (56)$$

wobei ϑ_0 die Lösung des homogenen Anteils und ϑ^* eine Partikulärlösung derselben Gleichung (55) bedeutet.

B. Lösung der Grundgleichung

Zuerst wird die Lösung ϑ_0 des homogenen Anteils gesucht. Setzt man:

$$t = \frac{\rho + r^*}{r^*}, \quad c^2 = 1 + s^*, \quad (57)$$

so erhält man:

$$t(t-1) \frac{d^2 \vartheta_0}{dt^2} + (t-1) \frac{d\vartheta_0}{dt} - c^2 \vartheta_0 = 0, \quad (58)$$

wobei $c = \sqrt{1+s^*}$ ein Plattenkennwert bedeutet. Die Gl. (58) ist eine hypergeometrische Gleichung. Beachtet man, daß die Normalform der hypergeometrischen Gleichung:

$$x(x-1) \frac{d^2 y}{dx^2} + [(\alpha + \beta + 1)x - \gamma] \frac{dy}{dx} + \alpha \beta y = 0. \quad (59)$$

ist, worin α, β, γ Parameter der Gleichung sind, so erhält man durch Vergleich mit Gl. (58) die Parameterwerte zu:

$$\alpha = c, \quad \beta = -\sqrt{s^* + 1} = -c, \quad \gamma = 1. \quad (60)$$

Untersucht man die erste der Gl. (57), so zeigt sich, daß für $\rho > 0$, $t > 1$ wird, Wert der nach Unendlich strebt, wenn r^* gegen Null geht. Unter diesen Umständen ist eine Lösung der Gl. (58) erforderlich in der Umgebung des singulären Punktes $t = \infty$, somit eine Lösung, die im Intervall zwischen den singulären Punkten $t = 1$ und $t = \infty$ konvergiert.

Um eine Lösung in der Umgebung des Punktes $t = \infty$ zu erhalten, setzt man in der Gl. (58):

$$z = \frac{1}{t}, \quad \vartheta_0 = z^c y(z) \quad (61)$$

und erhält:

$$z(z-1) \frac{d^2 y}{dz^2} + [(1+2c)z - (1+2c)] \frac{dy}{dz} + c^2 y = 0. \quad (62)$$

Dies ist eine hypergeometrische Gleichung in den Variablen $y(z)$ mit $|z| < 1$. Aus dem Vergleich mit der Gl. (59) ergeben sich folgende Parameterwerte:

$$\alpha = c; \quad \beta = c; \quad \gamma = 1 + 2c. \quad (63)$$

Die Gl. (62) liefert in der Umgebung des Punktes $z = 0$ entsprechend $t = \infty$ die beiden partikulären Lösungen:

$$y_1 = F(c, c, 1 + 2c, z); \quad y_2 = z^{-2c} F(-c, -c, 1 - 2c, z), \quad (64)$$

wobei:
$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha \beta}{1 \gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1) \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \gamma(\gamma+1)} z^2 + \dots \quad (65)$$

eine hypergeometrische Reihe darstellt.

Aus der Gl. (64) und unter Vergegenwärtigung der Gl. (61) erhält man:

$$\vartheta_{01} = \left(\frac{1}{t}\right)^c F\left(c, c, 1+2c, \frac{1}{t}\right), \quad \vartheta_{02} = \left(\frac{1}{t}\right)^{-c} F\left(-c, -c, 1-2c, \frac{1}{t}\right), \quad (66)$$

worin, unter Beachtung der Gl. (56) und (57) und unter Einschluß der Konstanten $(r^*)^c$ in den Integrationskonstanten, leitet man die allgemeine Lösung des homogenen Anteils der Gl. (55) in der Umgebung des Singulärpunktes $\frac{r^*}{r^* + \rho} = 0$ ab zu:

$$\vartheta_0 = \frac{C_1}{(r^* + \rho)^c} F\left(c, c, 1+2c, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) + C_2 (r^* + \rho)^c F\left(-c, -c, 1-2c, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right). \quad (67)$$

Die Partikulärlösung der Gl. (55) ist im zweiten Glied abhängig von der Belastungsfunktion. Im Falle einer ausgesteiften Platte, die durch eine axiale Einzellast P beansprucht wird, erhält man mit:

$$q_r = -\frac{P}{2\pi r} = -\frac{P}{2\pi b \rho}, \quad (68)$$

$$\rho(\rho + r^*) \frac{d^2 \vartheta^*}{d\rho^2} + \rho \frac{d\vartheta^*}{d\rho} - (s^* + 1) \vartheta^* = -\frac{P b \rho}{2\pi K}. \quad (69)$$

Es läßt sich auf einfache Weise zeigen, daß diese Gleichung durch die Funktion:

$$\vartheta^* = \frac{P b \rho}{2\pi s^* K} \quad (70)$$

für $s^* \neq 0$ befriedigt wird.

Falls die ausgesteifte Platte durch eine gleichmäßig verteilte Belastung p beansprucht wird, so erhält man mit:

$$q_r = -\frac{p \pi r^2}{2\pi r} = -\frac{p b \rho}{2}, \quad (71)$$

$$\rho(\rho + r^*) \frac{d^2 \vartheta^*}{d\rho^2} + \rho \frac{d\vartheta^*}{d\rho} - (s^* + 1) \vartheta^* = -\frac{p b^3 \rho^3}{2K}. \quad (72)$$

Gleichung, die für $s^* \neq 0$ durch die folgende Funktion befriedigt wird:

$$\vartheta^* = -\frac{p b^3 \rho^3}{2K(8-s^*)} + \frac{3 p b^3 r^* \rho^2}{K(8-s^*)(3-s^*)} + \frac{6 p b^3 r^{*2} \rho}{K s^* (8-s^*)(3-s^*)}. \quad (73)$$

Sind die Lösungen ϑ_0 und ϑ^* einmal bekannt, so erhält man die allgemeine Lösung ϑ der Gl. (55) über die Gl. (56).

C. Biegemomente

Vergegenwärtigt man, daß:

$$\frac{d}{dz} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\alpha \beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, z) \quad (74)$$

ist und daß mit der ersten Gleichung der Gl. (61) und der Gl. (57):

$$dz = -\frac{r^*}{(r^* + \rho)^2} d\rho \quad (75)$$

wird, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dr} = \frac{1}{b} \frac{d\vartheta}{d\rho} = -\frac{C_1}{b} & \left[\frac{c}{(r^* + \rho)^{c+1}} F\left(c, c, 1 + 2c, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) \right. \\ & + \frac{r^*}{(r^* + \rho)^{c+2}} \frac{c^2}{1 + 2c} F\left(c + 1, c + 1, 2 + 2c, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) \Big] \\ & + \frac{C_2}{b} \left[c (r^* + \rho)^{c-1} F\left(-c, -c, 1 - 2c, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) \right. \\ & \left. - (r^* + \rho)^c \frac{r^*}{(r^* + \rho)^2} \frac{c^2}{1 - 2c} F\left(-c + 1, -c + 1, 2 - 2c, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) \right] + \frac{1}{b} \frac{d\vartheta^*}{d\rho}. \end{aligned} \quad (76)$$

Aus den in den Gl. (26) angegebenen Beziehungen für m_r und m_φ leitet man, unter Beachtung der Bedingungen für drehsymmetrische Belastung und der Gl. (45), folgende Beziehungen ab:

$$m_r = K_{11} \vartheta' + \mu K \frac{\vartheta}{r}, \quad m_\varphi = \mu K \vartheta' + K_{22} \frac{\vartheta}{r} \quad (77)$$

und eingesetzt:

$$\begin{aligned} m_r = \frac{K}{b} & \left\{ \frac{C_1}{\rho (r^* + \rho)^c} \left[(\mu - c) F\left(c, c, 1 + 2c, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) \right. \right. \\ & \left. - \frac{r^*}{r^* + \rho} \frac{c^2}{1 + 2c} F\left(c + 1, c + 1, 2 + 2c, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) \right] \\ & + \frac{C_2 (r^* + \rho)^c}{\rho} \left[(\mu + c) F\left(-c, -c, 1 - 2c, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) \right. \\ & \left. - \frac{r^*}{r^* + \rho} \frac{c^2}{1 - 2c} F\left(-c + 1, -c + 1, 2 - 2c, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) \right] + \frac{r^* + \rho}{\rho} \frac{d\vartheta^*}{d\rho} + \mu \frac{\vartheta^*}{\rho} \Big\}, \\ m_\varphi = \frac{K}{b} & \left\{ \frac{C_1}{(r^* + \rho)^c} \left[\left(\frac{c^2}{\rho} - \frac{\mu c}{r^* + \rho} \right) F\left(c, c, 1 + 2c, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) \right. \right. \\ & \left. - \frac{\mu r^*}{(r^* + \rho)^2} \frac{c^2}{1 + 2c} F\left(c + 1, c + 1, 2 + 2c, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) \right] \\ & + C_2 (r^* + \rho)^c \left[\left(\frac{c^2}{\rho} + \frac{\mu c}{r^* + \rho} \right) F\left(-c, -c, 1 - 2c, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) \right. \\ & \left. - \frac{\mu r^*}{(r^* + \rho)^2} \frac{c^2}{1 - 2c} F\left(-c + 1, -c + 1, 2 - 2c, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) \right] + \mu \frac{d\vartheta^*}{d\rho} + c^2 \frac{\vartheta^*}{\rho} \Big\}. \end{aligned} \quad (79)$$

Für den Sonderfall, daß nur radiale Aussteifungen vorhanden sind, erhält man mit:

$$n = 0; \quad s^* = 0; \quad c = 1 \quad (80)$$

die Beziehungen:

$$\vartheta = \frac{C_1}{r^* + \rho} F\left(1, 1, 3, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) + C_2 \rho + \vartheta^*, \quad (81)$$

$$m_r = \frac{K}{b} \left\{ \frac{C_1}{\rho(r^* + \rho)} \left[(\mu - 1) F\left(1, 1, 3, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) - \frac{r^*}{3(r^* + \rho)} F\left(2, 2, 4, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) \right] + C_2 \left[\mu + \frac{r^* + \rho}{\rho} \right] + \frac{r^* + \rho}{\rho} \frac{d\vartheta^*}{d\rho} + \mu \frac{\vartheta^*}{\rho} \right\}, \quad (82)$$

$$m_\varphi = \frac{K}{b} \left\{ \frac{C_1}{(r^* + \rho)^2} \left[\frac{r^* + \rho(1 - \mu)}{\rho} F\left(1, 1, 3, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) - \frac{\mu r^*}{3(r^* + \rho)} F\left(2, 2, 4, \frac{r^*}{r^* + \rho}\right) \right] + C_2(1 + \mu) + \mu \frac{d\vartheta^*}{d\rho} + \frac{\vartheta^*}{\rho} \right\}. \quad (83)$$

Für den Sonderfall, daß nur kreisringförmige Aussteifungen vorhanden sind, erhält man mit:

$$m = 0; \quad r^* = 0 \quad (84)$$

die Beziehungen:

$$\vartheta = \frac{C_1}{\rho^c} + C_2 \rho^c + \vartheta^*, \quad (85)$$

$$m_r = \frac{K}{b} \left\{ \frac{C_1}{\rho^{1+c}} (\mu - c) + \frac{C_2}{\rho^{1-c}} (\mu + c) + \frac{d\vartheta^*}{d\rho} + \mu \frac{\vartheta^*}{\rho} \right\}, \quad (86)$$

$$m_\varphi = \frac{K}{b} \left\{ C_1 c \frac{c - \mu}{\rho^{1+c}} + C_2 c \frac{c + \mu}{\rho^{1-c}} + \mu \frac{d\vartheta^*}{d\rho} + c^2 \frac{\vartheta^*}{\rho} \right\}. \quad (87)$$

Und für den Sonderfall, daß die ausgesteifte Platte in eine isotrope Platte mit der Stärke h übergeht, erhält man mit:

$$m = n = 0; \quad r^* = s^* = 0; \quad \epsilon = 0; \quad c = 1 \quad (88)$$

die folgenden Beziehungen:

$$\vartheta = \frac{C_1}{\rho} + C_2 \rho + \vartheta^*, \quad (89)$$

$$m_r = \frac{K}{b} \left[\frac{C_1(\mu - 1)}{\rho^2} + C_2(\mu + 1) + \frac{d\vartheta^*}{d\rho} + \mu \frac{\vartheta^*}{\rho} \right], \quad (90)$$

$$m_\varphi = \frac{K}{b} \left[\frac{C_1(1 - \mu)}{\rho^2} + C_2(1 + \mu) + \mu \frac{d\vartheta^*}{d\rho} + \frac{\vartheta^*}{\rho} \right]. \quad (91)$$

Für alle untersuchten Fälle werden die Spannungen durch die Gl. (21) und (22) bestimmt, wobei infolge der dreh-symmetrischen Belastung und unter Beachtung der Gl. (45) und des Umstandes, daß $u = v = 0$ ist, die Spannungsgleichungen folgendermaßen ausgedrückt werden können:

$$\sigma_r = z E(z) \left[\vartheta' + k_\varphi \mu \frac{\vartheta}{r} \right], \quad \sigma_\varphi = z E(z) \left[\frac{\vartheta}{r} + k_r \mu \vartheta' \right]. \quad (92)$$

Für den Sonderfall radialer Aussteifungen stellt man aus der ersten der Gleichungen (15) fest, daß der Wert $k_r = 1$ für $\rho_a = m$ erreicht wird. Für $\rho < \rho_a$ verschmelzen sich die Aussteifungen zu einer isotropen Mittelplatte mit gleicher Stärke wie die totale Höhe der ausgesteiften Platte. Somit können die hier abgeleiteten Beziehungen nur verwendet werden für $\rho \geq \rho_a$, wobei bei der Bestimmung der Konstanten die bestehenden Bedingungen längs des Randes $\rho = \rho_a$ der ausgesteiften Platte ebenfalls erfüllt werden müssen.

D. Anwendung

Eine ausgesteifte Stahlbetonplatte mit zellenförmigem Querschnitt und mit radialen und kreisringförmigen Aussteifungen ist sowohl am äußeren Rand, entsprechend dem Radius $\rho = 1$, als auch am inneren Rand, entsprechend dem Radius $\rho = 0,1$, eingespannt, wobei am inneren Rand die ausgesteifte Platte an eine steife zentrale Platte mit gleicher Stärke wie die totale Höhe der ausgesteiften Platte angeschlossen ist. Das Tragwerk wird durch eine axiale Last P beansprucht (Fig. 8).

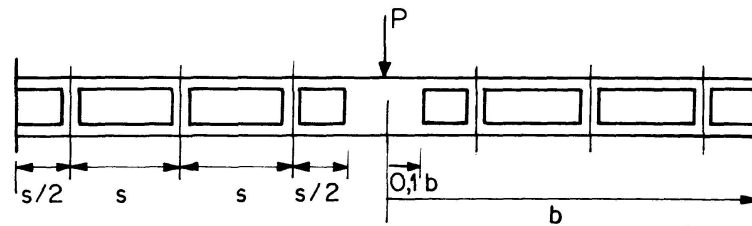


Fig. 8.

Für die Bestimmung der Biegemomente werden die Gl. (78) und (79) noch umgeformt zu:

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{K}{b} \left\{ C_1 \Phi_1(\rho) + C_2 \Phi_2(\rho) + \frac{r^* + \rho}{\rho} \frac{d\vartheta^*}{d\rho} + \mu \frac{\vartheta^*}{\rho} \right\}, \\ m_\varphi &= \frac{K}{b} \left\{ C_1 \Phi_3(\rho) + C_2 \Phi_4(\rho) + \mu \frac{d\vartheta^*}{d\rho} + c^2 \frac{\vartheta^*}{\rho} \right\}. \end{aligned} \quad (93)$$

Die konstruktiven Kennwerte der ausgesteiften Platte werden angenommen zu:

$$m = 0,10; \quad n = 0,20; \quad \epsilon = 5,$$

wobei mit $\mu = 1/6$ folgt:

$$r^* = 0,1336, \quad s^* = 0,2673, \quad K = \frac{91 E h^3}{12 (1 - \mu^2)}$$

und somit

$$c = 1,126.$$

Unter Beachtung der Gleichung (65) erhält man, für die durch die Gl. (67),

(68) und (69) gegebenen hypergeometrischen Funktionen, die folgenden Beziehungen:

$$F_1(\rho) = F(c, c, 1 + 2c, z) = 1 + 0,3899z + 0,2072z^2 + 0,1285z^3 \\ + 0,0875z^4 + 0,0634z^5 + 0,0481z^6 + 0,0376z^7 \\ + 0,0303z^8 + 0,0250z^9 + 0,0208z^{10} + \dots$$

$$F_2(\rho) = F(c + 1, c + 1, 2 + 2c, z) = 1 + 1,0630z + 0,9889z^2 \\ + 0,8976z^3 + 0,8130z^4 + 0,7394z^5 + 0,6764z^6 \\ + 0,6224z^7 + 0,5758z^8 + 0,5355z^9 + 0,5002z^{10} + \dots$$

$$F_3(\rho) = F(-c, -c, 1 - 2c, z) = 1 - 1,0126z + 0,03190z^2 + 0,0108z^3 \\ + 0,00545z^4 + 0,00327z^5 + 0,00218z^6 + 0,00156z^7 \\ + 0,00117z^8 + 0,00091z^9 + 0,000728z^{10} + \dots$$

$$F_4(\rho) = F(-c + 1, -c + 1, 2 - 2c, z) = 1 - 0,06300z - 0,03217z^2 \\ - 0,02154z^3 - 0,01618z^4 - 0,01296z^5 - 0,01081z^6 \\ - 0,00927z^7 - 0,00811z^8 - 0,00721z^9 - 0,00649z^{10} - \dots$$

Für die verschiedenen Werte von ρ werden nun unter Beachtung der Gl. (61) und (57) die z -Werte berechnet. Daraus können die Werte für $F_1(\rho)$, $F_2(\rho)$, $F_3(\rho)$, $F_4(\rho)$ und anschließend für $\Phi_1(\rho)$, $\Phi_2(\rho)$, $\Phi_3(\rho)$, $\Phi_4(\rho)$ bestimmt werden. Die Ergebnisse dieser Berechnung sind in den Tabellen A und B zusammengefaßt.

Tabelle A

σ	z	$F_1(\rho)$	$F_2(\rho)$	$F_3(\rho)$	$F_4(\rho)$
0,1	0,571917	1,331058	2,279646	0,434209	0,946164
0,2	0,400479	1,200818	1,674889	0,600443	0,967609
0,4	0,250374	1,113042	1,346362	0,748646	0,981792
0,6	0,182115	1,078761	1,232875	0,816706	0,987308
0,8	0,143101	1,060452	1,175386	0,855771	0,990255
0,9	0,129256	1,054160	1,156114	0,869663	0,991267
1,0	0,117854	1,049054	1,140655	0,881113	0,992089

Tabelle B

ρ	$\Phi_1(\rho)$	$\Phi_2(\rho)$	$\Phi_3(\rho)$	$\Phi_4(\rho)$
0,1	-91,774293	2,157049	79,366221	1,214131
0,2	-24,326729	1,697114	23,417917	1,260311
0,4	-6,080877	1,499412	6,275713	1,337457
0,6	-2,651530	1,455355	2,810335	1,393560
0,8	-1,462560	1,445696	1,572157	1,437548
0,9	-1,144972	1,445990	1,236722	1,456574
1,0	-0,919323	1,448065	0,996875	1,474053

Die partikuläre Lösung ϑ^* wird durch die Gl. (70) angegeben.

Um die Integrationskonstanten zu bestimmen, muß beachtet werden, daß für $\rho=0,1$ und $\rho=1$, $\vartheta=0$ wird. Unter Berücksichtigung der Gl. (67) und (70) kann man folgende Beziehungen anschreiben:

$$C_1 \frac{1,331058}{0,1945} + C_2 0,1945 \cdot 0,434209 = -\frac{Pb}{2\pi K} \frac{0,1}{0,2673},$$

$$C_1 \frac{1,049054}{1,1517} + C_2 1,1517 \cdot 0,881113 = -\frac{Pb}{2\pi K} \frac{1}{0,2673}.$$

und daraus bestimmt man:

$$C_1 = -0,009273 \frac{Pb}{2\pi K}, \quad C_2 = -3,67832 \frac{Pb}{2\pi K}.$$

Beachtet man noch, daß infolge der Gl. (70) gilt:

$$\frac{\vartheta^*}{\rho} = \frac{d\vartheta^*}{d\rho} = \frac{Pb}{2\pi s^* K},$$

so können nun auch noch die Biegemomente m_r und m_φ unter Benützung der Gl. (93) berechnet werden. Die Ergebnisse sind in der Tabelle C zusammengefaßt, wo auch die Werte der Momente m_{r1} und $m_{\varphi1}$ sowie m_{r0} und $m_{\varphi0}$, d. h.

Tabelle C

ρ	$m_r / \frac{P}{4\pi}$	$m_\varphi / \frac{P}{4\pi}$	$m_{r1} / \frac{P}{4\pi}$	$m_{\varphi1} / \frac{P}{4\pi}$	$m_{r0} / \frac{P}{4\pi}$	$m_{\varphi0} / \frac{P}{4\pi}$
0,1	4,558	0,325	3,325	0,549	3,652	0,608
0,2	1,693	1,023	1,263	1,385	1,389	1,253
0,4	0,310	0,773	0,223	0,937	0,217	0,808
0,6	-0,262	0,425	-0,282	0,491	-0,322	0,402
0,8	-0,629	0,124	-0,635	0,135	-0,682	0,090
0,9	-0,776	-0,009	-0,780	-0,017	-0,825	-0,040
1,0	-0,907	-0,133	-0,910	-0,156	-0,953	-0,158

Tabelle D

ρ	$(\sigma_r)_A / \frac{6P}{4\pi h^2}$	$(\sigma_\varphi)_A / \frac{6P}{4\pi h^2}$	$(\sigma_r)_B / \frac{6P}{4\pi h^2}$	$(\sigma_\varphi)_B / \frac{6P}{4\pi h^2}$	$(\sigma_r)_{B'} / \frac{6P}{4\pi h^2}$	$(\sigma_\varphi)_{B'} / \frac{6P}{4\pi h^2}$
0,1	0,128	0,021	0,107	0,018	0,104	0
0,2	0,070	0,055	0,058	0,046	0,050	0,036
0,4	0,020	0,041	0,014	0,034	0,0085	0,032
0,6	-0,013	0,021	-0,011	0,018	-0,014	0,020
0,8	-0,035	0,005	-0,029	0,004	-0,030	0,009
0,9	-0,044	-0,002	-0,037	-0,0017	-0,036	0,0044
1,0	-0,053	-0,008	-0,044	-0,0073	-0,043	0

für die beiden Sonderfälle der nur kreisringförmig ausgesteiften Platte bzw. der isotropen Platte konstanter Plattenstärke h aufgeführt sind.

Sind einmal die Momente bekannt, können über die Gl. (77) die Werte für ϑ' und ϑ/r und über die Gl. (92) die Spannungen σ_r und σ_φ bestimmt werden, wobei zu beachten ist, daß für die Aussteifungen $\mu = 0$ anzunehmen ist.

In der Tabelle D werden die Werte für die Spannungen in den Punkten A und B auf dem unteren bzw. oberen Rand der unteren isotropen Platte des Querschnittes (Fig. 7) und in den Punkten $B' \equiv B$ auf dem unteren Rand der Aussteifungen aufgeführt.

Tabelle E

ρ	$(\sigma_r)_A/(\sigma_{r1})_A$	$(\sigma_r)_A/(\sigma_{r0})_A$	$(\sigma_\varphi)_A/(\sigma_{\varphi1})_A$	$(\sigma_\varphi)_A/(\sigma_{\varphi0})_A$
0,1	0,586	0,0352	0,586	0,0352
0,2	0,839	0,0503	0,742	0,0442
0,4	1,150	0,0780	0,829	0,0502
0,6	0,721	0,0415	0,868	0,0534
0,8	0,842	0,0517	0,937	0,0571
0,9	0,864	0,0538	0,755	0,0512
1,0	0,878	0,0553	0,879	0,0553

In der Tabelle E werden die Spannungen $(\sigma_r)_A$ und $(\sigma_\varphi)_A$ in den Punkten A auf dem unteren Rand für den Fall einer radial und kreisringförmig aussteiften Platte, in Funktion der Spannungen $(\sigma_{r1})_A$ und $(\sigma_{\varphi1})_A$ für die gleichen Punkte einer nur kreisringförmig aussteiften Platte und in Funktion der Spannungen $(\sigma_{r0})_A$ und $(\sigma_{\varphi0})_A$ für die gleichen Punkte einer isotropen Platte mit der konstanten Stärke h , die sich durch Weglassung der Aussteifungen ergibt, angegeben.

Aus der Tabelle E ist die große Spannungsreduktion ersichtlich, die in bezug auf die Spannungen in einer isotropen Platte durch die Anwendung von Aussteifungen erzielt werden kann. Bei Anordnung radialer und kreisringförmiger Aussteifungen beträgt die Reduktion der Spannungen im Minimum etwa 92% und bei kreisringförmigen Aussteifungen allein im Minimum etwa 90%.

Literatur

1. I. A. BIRGHER: Kruglie plastinki i obolocki vrascenii, Moskva, 1961.
2. E. GIENCKE: Der Stahlbau, S. 128—129, 1955, Berlin.
3. P. GRAVINA: Giornale del Genio Civile, p. 10—24, 1963, Roma.
4. P. GRAVINA: Rend. e Pubbl. corso perf. cost. in cem. arm., Politecnico di Milano, vol. XVII, 1964, Milano.
5. P. GRAVINA: Giornale del Genio Civile, 1965, Roma.

6. P. GRAVINA: Rend. e Pubbl. corso perf. cost. in cem. arm., Politecnico di Milano, vol. XVIII, 1965, Milano.
7. CH. MASSONNET: Mémoires AIPC, p. 201—230, vol. XIX, 1959, Zürich.
8. A. PFLÜGER: Ing.-Archiv, S. 111—120, 1947.
9. K. TRENKs: Der Bauingenieur, S. 372—377, 1954, Berlin.

Zusammenfassung

Im ersten Teil dieser Arbeit wird die Theorie der kreisförmigen orthotropen Platten mit radialen und kreisringförmigen Aussteifungen dargestellt. Zuerst werden die Grundgleichungen für drehsymmetrische Anordnung der Aussteifungen und anschließend für den Sonderfall des Rostes die Grundgleichung aufgestellt. Aus diesen Grundgleichungen werden auch die Gleichungen von PFLÜGER für den Fall einer orthogonal ausgesteiften Platte mit exzentrisch angeordneten geraden Aussteifungen abgeleitet.

Im zweiten Teil wird die Theorie der orthotropen Platten mit einer Symmetrieebene, die durch drehsymmetrische Belastungen beansprucht werden, dargestellt. Insbesondere wird die zellenförmig orthotrop ausgesteifte Platte untersucht. Zuerst wird die Grundgleichung aufgestellt und für einige Belastungsfälle die Lösung angegeben. Anschließend werden die Beziehungen für die Kräfte entwickelt, wobei als Sonderfälle diejenigen für die orthotrope Platte mit nur radialen oder nur kreisringförmigen Aussteifungen und für die isotrope Platte abgeleitet werden.

Ein numerisches Beispiel erläutert den Berechnungsgang, wobei noch ein Vergleich angestellt wird zwischen den resultierenden Momenten und Spannungen für Platten mit Aussteifungen und für isotrope Platten.

Summary

The first part of this paper is devoted to a statement of the theory of orthotropic circular plates provided with stiffeners arranged radially and according to concentric circles. The fundamental equations relating to the arrangement of the stiffening members exhibiting a symmetry of revolution are first established and finally the special case is reached of a network consisting of crossed members. From these fundamental equations, the PFLÜGER equations relating to plates stiffened orthogonally with offset rectilinear stiffeners are derived.

The second part deals with the theory of orthotropic plates comprising a plane of symmetry and subjected to stresses by loads exhibiting a symmetry of revolution. In particular, plates stiffened by means of an orthotropic cellular arrangement are considered. Once the fundamental equation has been established, the solutions corresponding to different loading systems are indicated. The relationships expressing the stresses are finally established, more parti-

cularly those relating to orthotropic plates, with stiffening members arranged exclusively either radially or annularly, together with those of isotropic plates. The calculation procedure is illustrated by a numerical example in connection with which a comparison is also made of the resultant tensions and moments in the case of plates provided with stiffeners and also in that of isotropic plates.

Résumé

La première partie de cette communication est consacrée à l'exposé de la théorie des plaques circulaires orthotropes munies de raidisseurs disposés radialement et selon des cercles concentriques. On établit d'abord les équations fondamentales relatives à la disposition des éléments raidisseurs présentant une symétrie de révolution pour en arriver, finalement, au cas particulier du réseau constitué par des éléments croisés. De ces équations fondamentales, on déduit les équations de PFLÜGER concernant les plaques raidies orthogonalement avec des raidisseurs rectilignes excentrés.

La seconde partie traite de la théorie des plaques orthotropes comportant un plan de symétrie et sollicitées par des charges présentant une symétrie de révolution. On étudie notamment les plaques raidies selon un dispositif cellulaire orthotrope. Une fois établie l'équation fondamentale, on indique les solutions correspondant à différents systèmes de charges. Les relations exprimant les efforts sont finalement établies, et plus particulièrement celles relatives aux plaques orthotropes, avec des éléments raidisseurs disposés exclusivement soit dans la direction radiale soit annulairement, ainsi que celles des plaques isotropes. La marche du calcul est illustrée sur un exemple numérique à propos duquel, en outre, on procède à une comparaison des tensions et des moments résultants dans le cas des plaques munies de raidisseurs et dans celui des plaques isotropes.

Leere Seite
Blank page
Page vide