

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 26 (1966)

**Artikel:** La flexion elasto-plastique de l'acier doux  
**Autor:** Campus, Ferdinand  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-20869>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **La flexion elasto-plastique de l'acier doux**

*Elastoplastische Biegung bei weichem Stahl*

*Elasto-plastic Bending of Mild Steel*

FERDINAND CAMPUS

Professeur émérite de l'Université de Liège

## **Introduction**

La présente étude concerne des matériaux qui, comme l'acier doux, présentent dans le diagramme classique de traction axiale un palier d'étirage caractérisé et d'étendue suffisante (1 à 2%). Elle examine le phénomène de flexion plane pure et simple entre un état initial où la contrainte maximum calculée pour la fibre extrême la plus sollicitée atteint cette tension d'étirage et un état final où la pièce droite fléchie subit des accroissements de courbure sous un moment constant.

L'auteur a été conduit, dans des conditions qui seront indiquées plus loin, à effectuer quelques expériences dont un compte rendu détaillé dépasserait le développement autorisé pour cette note. On se bornera à définir les diverses expériences et à esquisser une synthèse des observations.

Pour des raisons inhérentes au but des premières expériences, qui concernait un phénomène éventuel de fluage ou de relaxation en flexion, c'est-à-dire une question relative à des propriétés mécaniques des matériaux, on a opéré tout d'abord sur des barreaux prismatiques de formes simples et de dimensions modérées. Dès les premières expériences, il est apparu qu'il n'y avait pas de fluage ni de relaxation dans les circonstances envisagées, c'est-à-dire aucun abaissement de la tension d'étirage sous l'effet de la durée de sollicitation entre les états initial et final définis plus haut. Par contre, des augmentations apparentes considérables des tensions élastiques instantanées ont été observées, qui ont incité à orienter la recherche dans cette nouvelle direction et à examiner aussi le comportement de pièces de dimensions plus considérables et de sections laminées courantes en construction. L'objet initial de la recherche a eu cependant des conséquences avantageuses. Comme il s'agissait primitivement



d'observer des déformations présumées très faibles et croissant lentement dans le temps, pour les rendre assez sensibles, les expériences ont porté sur des éprouvettes comportant une zone d'assez grande longueur relative sollicitée sous moment constant par deux charges symétriques et égales assez écartées. Comme ces expériences restaient néanmoins délicates, des précautions expérimentales avaient paru nécessaires. Pour ces raisons, un dispositif spécial de flexion avait été réalisé, représenté à la fig. 1. Le barreau fléchi reposait sur

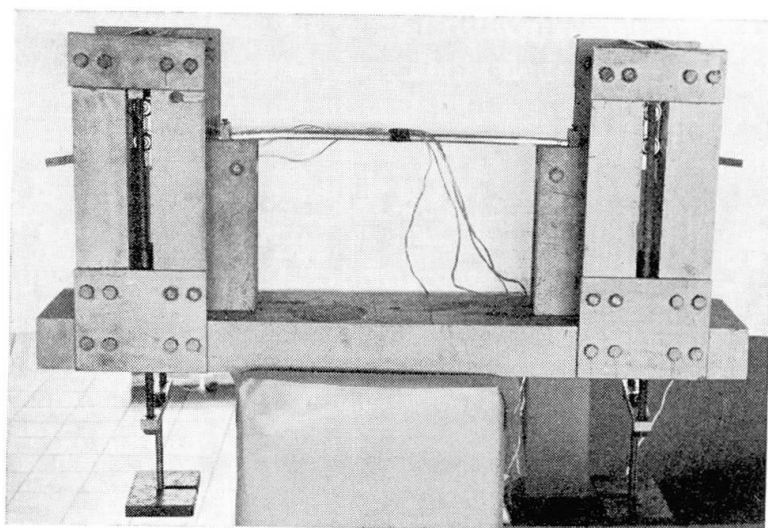


Fig. 1.

deux appuis très rigides par des couteaux écartés de 50 cm. Ses extrémités en porte à faux étaient chargées, également par l'intermédiaire de couteaux distants de 10 cm des appuis, au moyen d'étriers auxquels étaient suspendus des poids tarés égaux. Ces étriers étaient guidés verticalement par des galets à billes dans des glissières à faible jeu, de manière à assurer la constance des bras de levier indépendamment des déformations. Pour réduire les perturbations aux points singuliers d'appui et d'application des charges, on y avait disposé des colliers rigides enveloppant la pièce à frottement doux et fixés par une vis de pression. Ces colliers portaient de part et d'autre de l'éprouvette deux couteaux dont les tranchants normaux à l'axe de la pièce étaient situés dans le plan des fibres neutres. Ce dispositif a donné satisfaction et il aurait certes convenu pour les expériences de fluage ou de relaxation si celles-ci avaient donné un résultat positif. Pour l'étude des phénomènes instantanés dans le domaine élasto-plastique délimité plus haut, le dispositif a présenté l'inconvénient de limiter les déformations maximales qui dépassaient celles prévues pour le fluage. Après essais sur les deux premiers barreaux 1 et 2, pour les deux suivants 3 et 4, on a disposé deux charges symétriques intérieures, distantes de 20 ou de 10 cm des appuis et écartées entr'elles de 10 cm seulement, ce qui réduisait considérablement la longueur de la zone à moment constant et les flèches. Etant parti de l'hypothèse d'une plastification et d'une

courbure uniformes sur toute la longueur sollicitée sous le même moment maximum, on avait calculé préalablement la loi de variation de la flèche médiane de flexion qui, en intégrant les rotations de tous les éléments, constituait l'indice le plus sensible d'observation. Un fleximètre central, constitué d'un micromètre à cadran au  $1/100^{\text{e}}$  de mm, en permettait la mesure. Cependant, on avait dès le début jugé utile de disposer des extensomètres ohmiques au milieu des éprouvettes, un sur chacune des faces inférieure et supérieure. Ce sont ces extensomètres qui ont permis des observations caractéristiques. Dans la suite des expériences, on y a toujours eu recours et souvent en plus grand nombre.

### Résultats des expériences

Les quatre premières éprouvettes étaient des barreaux en acier doux étiré, normalisés après usinage, de 80 cm de longueur et de section carrée de 1,185 cm de côté, usinés avec soin. L'essai de traction à la machine Amsler de 10 tonnes, avec enregistrement du diagramme sur la machine, a montré un premier palier caractérisé à 26 kg/mm<sup>2</sup>, suivi d'un deuxième plus allongé à 28,6 kg/mm<sup>2</sup> (barreau de section carrée de 1,19 cm de côté). Un autre barreau de section carrée de 1,14 cm de côté, dont le diagramme a été relevé par un dispositif électronique à grande amplification, a indiqué un premier palier assez court (environ 0,001) à 28,05 kg/mm<sup>2</sup> et un palier très net et allongé à 28,65 kg/mm<sup>2</sup>. On n'a constaté aucune indication apparente de limite d'élasticité supérieure.

Les quatre premiers barreaux fléchis ont conservé leur élasticité bien au delà de la sollicitation pour laquelle la contrainte aux fibres extrêmes atteint 26 ou 28,65 kg/mm<sup>2</sup>. Pour le barreau n° 1, l'élasticité a été conservée sous les extensomètres jusqu'à 35 kg/mm<sup>2</sup>. Pour le barreau n° 2, jusqu'à 39,3 et 40,1 kg/mm<sup>2</sup> et pour la flèche au milieu jusqu'à 39,3 kg/mm<sup>2</sup>. Pour le barreau n° 3, bien que la longueur de la zone à moment constant ne fut que de 10 cm pour une portée de 50 cm, l'élasticité a été conservée sous quatre extensomètres situés non loin des points d'application des charges jusqu'à 38,3 et 39 kg/mm<sup>2</sup>, pour la flèche médiane jusqu'à 36,1 kg/mm<sup>2</sup>. Le barreau n° 4 a été soumis à 9 cycles successifs de mise en charge, respectivement à 25,3 kg/mm<sup>2</sup> (3 cycles), 28,9 kg/mm<sup>2</sup> (2 cycles), 32,5 kg/mm<sup>2</sup> (2 cycles) et 36,1 kg/mm<sup>2</sup> (2 cycles). Une dernière mise en charge a été portée à 37,9 kg/mm<sup>2</sup>, l'élasticité ayant été conservée jusque là, puis suivie aussitôt d'une importante flexion. La fig. 2, réunissant les photographies des quatre barreaux après les expériences, montre combien la plastification est inégalement répartie dans la zone à moment constant et localisée principalement à ses extrémités, près des points d'application des charges.

On a relevé les rayons de courbure des faces inférieures. Pour le barreau n° 1, on a trouvé 25 et 30 cm près des appuis, 490 cm au milieu. Pour le barreau n° 2, 25 et 21 cm près des appuis, l'infini dans la majeure partie centrale. Pour

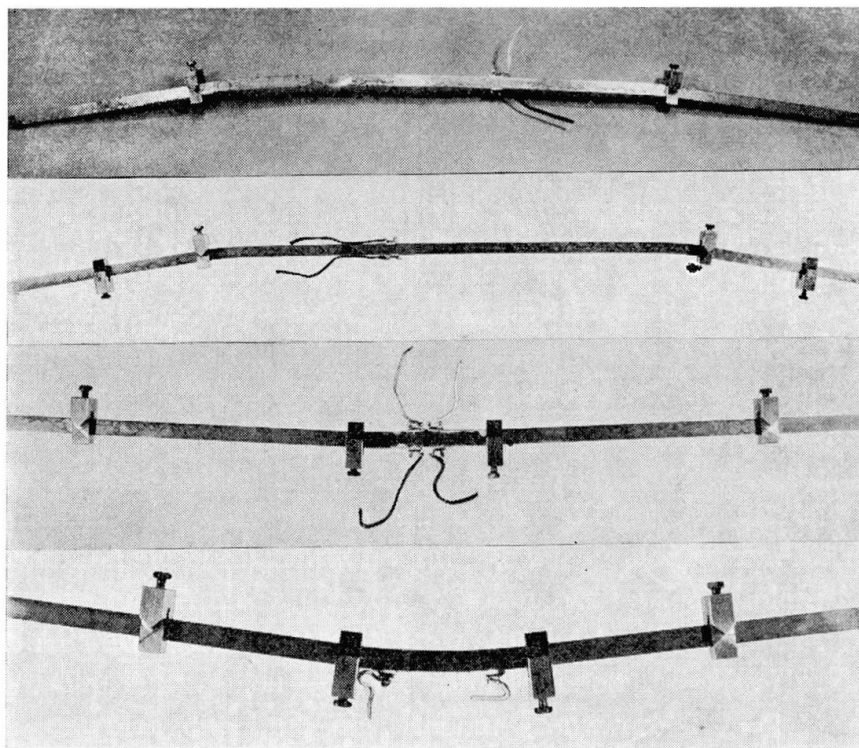


Fig. 2.

l'éprouvette n° 3, 20 cm au tiers vers la force de gauche; pour le barreau n° 4, 16 cm au tiers vers la force de droite. On remarque que pour les deux dernières éprouvettes, la réduction à 10 cm de la longueur de la zone à moment constant a entraîné une plastification plus généralisée bien que non uniforme. Un rayon de 16 cm à la fibre la plus comprimée correspond à des déformations des fibres extrêmes de 0,0357, supérieures à la longueur du palier. On notera également que le mode de mise en charge à l'aide de poids donnait lieu à une assez faible vitesse d'accroissement des tensions. Pour le barreau n° 1, on a noté les temps et la tension maximum a été atteinte après 43 minutes. Le rythme était le même pour les barreaux 2 et 3. Pour le n° 4, on a procédé par échelons de charge plus considérables mais la multiplication des cycles a augmenté la durée de l'expérience. L'échec de la recherche primitive de fluage-relaxation, qui sera commentée plus loin, correspond à l'absence d'observation d'un effet de la durée dans les expériences qui viennent d'être mentionnées. Elles ont confirmé et généralisé les résultats de deux expériences faites une année auparavant par N. M. DEHOUSSE [1] sur des barreaux de  $0,85 \times 5$  cm de section, fléchis à plat sur 25 cm de portée, sous deux charges égales symétriques ou une charge unique médiane. Le même dépassement de la tension d'étirage de 26 kg/mm<sup>2</sup> avait été constaté.

Il a paru intéressant d'examiner le phénomène dans des conditions plus voisines des pratiques de la construction, d'abord sur des tronçons de poutrelles à larges ailes D.I.L. 100. Les expériences ont été effectuées sur une portée de 1,00 m, sous l'effet de charges symétriques égales distantes entr'elles de 20 cm

et de 40 cm des appuis, contrôlées par un vérin et un dynamomètre Amsler. Le dispositif de flexion était cependant beaucoup plus rudimentaire que le précédent. Il consistait en deux couteaux d'appui sous la face inférieure de l'éprouvette et deux couteaux d'application des charges à la face supérieure. Les éprouvettes étaient essayées dans l'état de livraison et le parallélisme des couteaux n'était guère assuré. De plus, les âmes et les ailes n'étaient pas raidies au droit des appuis et des points d'application des charges. Ces conditions d'expérience étaient assez sommaires. Elles ont été acceptées en raison de l'imperfection géométrique des pièces brutes de laminage, qui ne rendaient pas approprié de recourir à de grands raffinements et du caractère purement exploratoire de la recherche.

Un tronçon de poutrelle entière a été essayé dans les deux positions principales: âme verticale (N° 5) et âme horizontale (N° 6). En outre, une aile a été enlevée par oxy-coupage et après rabotage de la coupure, le profil en T ainsi réalisé a été fléchi en position supérieure de l'aile, celle-ci étant donc comprimée (N° 7, 8 et 9).

Les résultats de ces expériences ont été affectés des imperfections indiquées ci-dessus, mais moins qu'on le craignait. Pour la poutrelle entière fléchie parallèlement à l'âme (N° 5) le rapport  $M_p/M_e$  est égal à 1,12. Une éprouvette de traction simple a donné  $R_e = 23,60 \text{ kg/mm}^2$ , d'où  $M_e = 2220 \text{ kgm}$  et  $M_p = 2487 \text{ kgm}$ . La poutrelle s'est comportée élastiquement sous quatre cycles de charges répétées jusqu'à 2000 kgm, puis jusqu'à 2200 kgm et s'est fortement déformée à partir de 2400 kgm. Le phénomène de l'augmentation de la charge limite élastique est difficile à saisir dans ce cas.

Pour la poutrelle fléchie suivant le plan des ailes (N° 6)  $M_p/M_e = \text{env. } 1,5$ . Pour une tension d'étirage de  $24,5 \text{ kg/mm}^2$ ,  $M_e = 907 \text{ kgm}$  et  $M_p = 1360 \text{ kgm}$ . Cette dernière valeur n'a pu être atteinte, mais seulement 1300 kgm. Le comportement a été parfaitement élastique jusqu'à 900 kgm. Entre cette valeur et 1300, il a été douteux. Les conditions d'expérience ont paru particulièrement déficientes au point de vue des appuis et de l'application des charges sur les bords des ailes d'une poutrelle brute.

Pour le profil recoupé en T, de 7 cm de hauteur,  $M_p/M_e = 1,97$ . Pour  $R_e = 24,8 \text{ kg/mm}^2$ ,  $M_e = 165 \text{ kgm}$  et  $M_p = 325 \text{ kgm}$ . Trois expériences ont été effectuées dans ce cas intéressant, l'âme étant tendue. La première (N° 7) a montré un comportement élastique jusqu'à 240 kgm et la valeur finale de  $M$  a atteint 320 kgm. Une deuxième expérience (n° 8) a donné un résultat assez différent. Une des jauges ohmiques a établi un comportement élastique jusqu'à 400 kgm, ce qui était dû probablement à une valeur beaucoup plus élevée de  $R_e$ , qui n'a pas été déterminée. Le troisième essai (n° 9) a été effectué sur un tronçon de poutrelle pour lequel on a déterminé

dans l'âme  $R_e = 44 \text{ kg/mm}^2$ ,

dans l'aile  $R_e = 37 \text{ kg/mm}^2$ .

Les paliers étaient bien caractérisés et allongés. En admettant la valeur supérieure de  $R_e$ , on obtient  $M_e = 293$  kgm et  $M_p = 578$  kgm. Le comportement de l'âme a été élastique jusqu'à 480 kgm (fig. 3) et la valeur limite de  $M$  a été de l'ordre de 560 kgm. Il est à remarquer que pour  $M = 480$  kgm, la tension élastique de l'âme atteindrait  $72$  kg/mm<sup>2</sup> et celle de la semelle  $16,25$  kg/mm<sup>2</sup>. Or, la tension de rupture conventionnelle en traction de l'âme est de  $57,3$  kg/mm<sup>2</sup>. L'ablation d'une aile a dû réduire les tensions résiduelles.

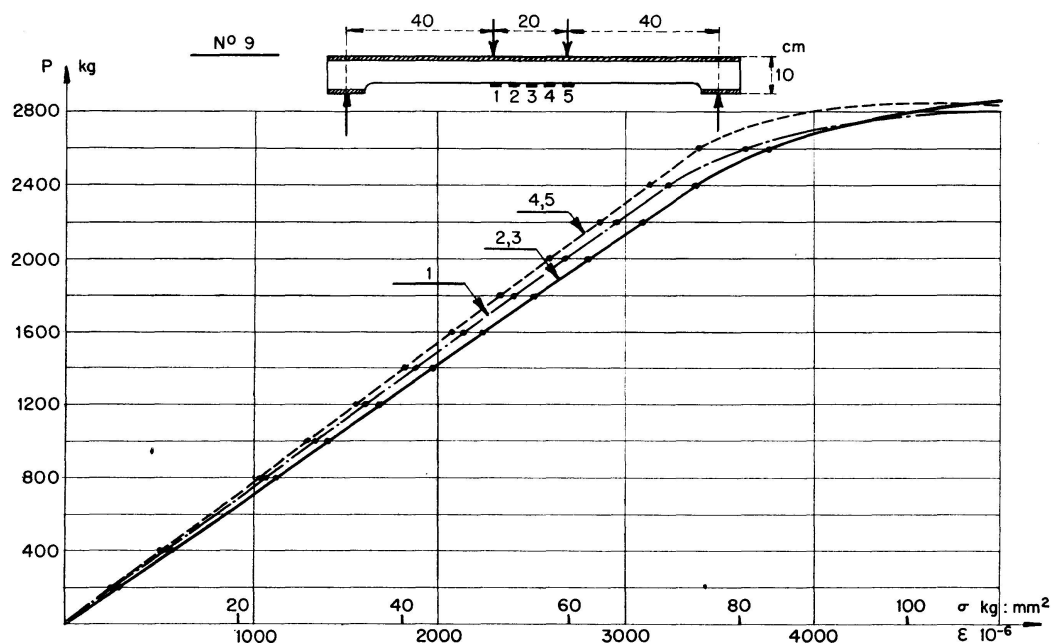


Fig. 3.

Après ces expériences de l'année académique 1962—1963, des séries complémentaires d'essais ont été effectuées en 1964, d'abord sur des barreaux de petite section usinés avec grand soin suivant des profils divers, à partir de barres d'acier étiré et normalisé après usinage. Ils ont été fléchis (sauf le n° 11) dans les mêmes conditions que les barreaux n° 1 à 4, avec les mêmes dispositions aux appuis et aux points d'application des poids. On a façonné de petites sections en T, ailes d'environ  $20 \times 5$  mm, âme d'environ  $15 \times 6$  mm. Pour  $R_e = 27$  kg/mm<sup>2</sup> on a environ  $M_e = 14,4$  kgm et  $M_p = 25,5$  kgm. Un essai âme tendue (n° 10) a montré un comportement élastique jusqu'à  $M = 22,25$  kgm. La tension élastique correspondante atteindrait  $41,8$  kg/mm<sup>2</sup>, peu inférieure à la tension conventionnelle de rupture en traction simple  $R_r = 42,5$  kg/mm<sup>2</sup>. Après avoir porté le moment jusqu'à  $23,15$  kgm, le barreau n'était pratiquement guère fléchi. Une deuxième expérience (n° 11), effectuée sur une presse universelle Amsler de 10 tonnes au régime de 1 tonne avec une moindre portée (40 cm au lieu de 70) et un moindre écart des charges (20 cm au lieu de 34) a conservé son élasticité jusqu'à environ 21 kgm, sauf près du point d'appli-



cation d'une des charges. La valeur expérimentale de  $M_p$  était de l'ordre de 24 à 25 kgm.

Ensuite, deux barreaux du même profil ont été fléchis âme comprimée. Pour un premier barreau (n° 12), la proportionnalité n'a été observée que jusqu'à  $12,6 \text{ kgm} < M_e$  dans une section, dans une autre jusqu'à 18 kgm. Le deuxième essai (n° 13) a confirmé ces résultats. Il y a donc une grande différence de comportement élasto-plastique selon que l'âme est tendue ou comprimée.

Un barreau usiné en double té, ailes de  $12 \times 3 \text{ mm}$ , âme de  $5,5 \times 4 \text{ mm}$ , a été fléchi dans le plan axial de l'âme:  $M_e = 6,48 \text{ kgm}$ ,  $M_p = 8,83 \text{ kgm}$  (n° 14). La plastification commence près d'une des charges pour  $M = 4,75 \text{ kgm} < M_e$ , tandis que l'élasticité se maintient dans la partie centrale du barreau jusqu'au delà de  $M_p$  et près de l'autre charge jusqu'à 7,25 kgm, mais avec de très faibles écarts au delà. Un autre barreau semblable a été fléchi perpendiculairement à l'âme. Ailes de  $20 \times 4 \text{ mm}$ , âme de  $12 \times 4$ ,  $M_e = 13,92 \text{ kgm}$ ,  $M_p = 22,37 \text{ kgm}$ . On a placé quatre jauges ohmiques au milieu de la zone à moment constant, haut et bas sur les tranches des deux ailes. L'élasticité a été conservée jusqu'à  $M_e$  (n° 15).

On a ensuite fléchi sur la machine à poids, avec les mêmes dispositions pour les appuis et les points d'application des charges (colliers rigides à couteaux dont les tranchants sont situés dans le plan des fibres neutres), deux barreaux tubulaires. Diamètre extérieur 19,95 mm, diamètre intérieur 16,85 mm, épaisseur 1,55 mm. Pour  $R_e = 27,9 \text{ kg/mm}^2$ , on a  $M_e = 10,7 \text{ kgm}$ ,  $M_p = 14,7 \text{ kgm}$ . Pour le tube n° 16, l'élasticité se conserve pratiquement jusqu'à  $M_p$ , sauf près du point d'application d'une des charges, où elle n'existe plus en traction à partir de  $M = 8,8 \text{ kgm}$  et où le moment de plastification totale est assez

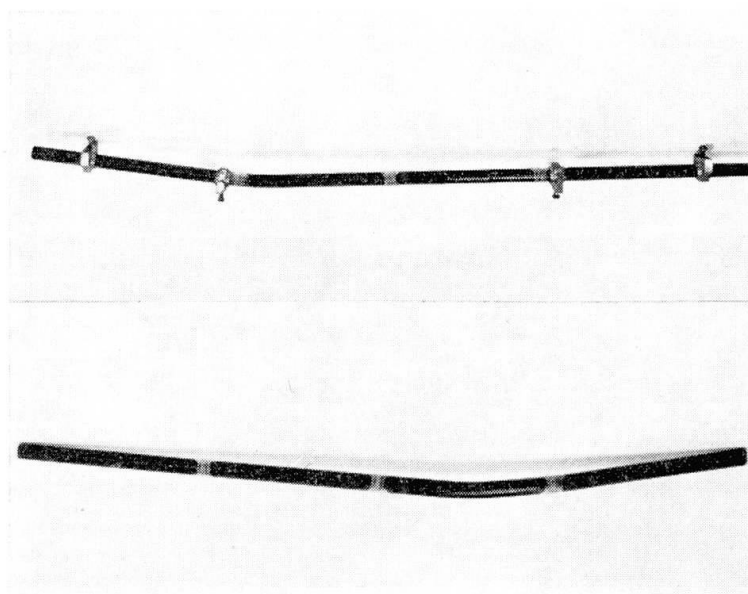


Fig. 4.

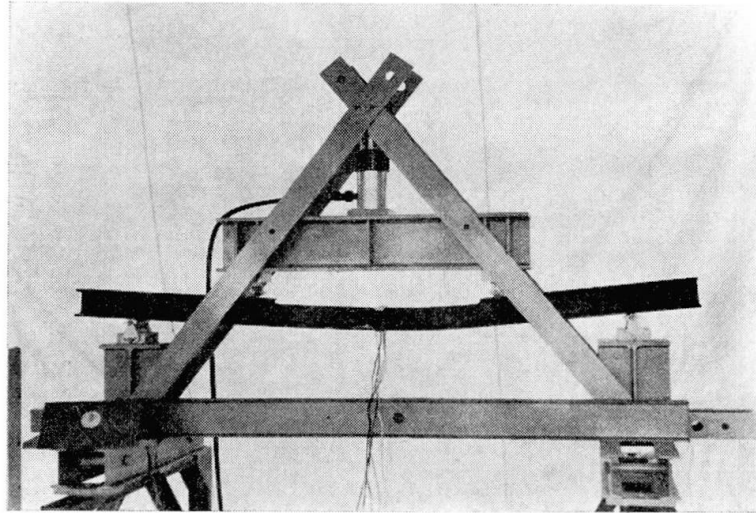


Fig. 5.

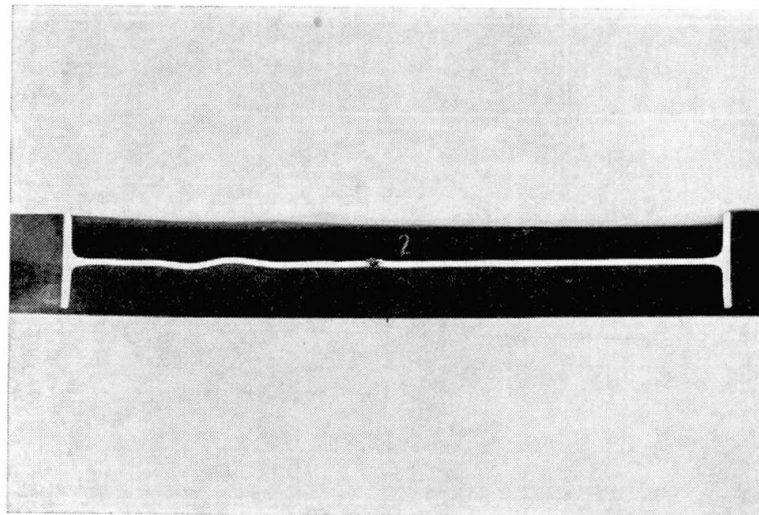


Fig. 6.

rapidement atteint, tendant vers la valeur calculée. Le deuxième tube n° 17 donne un résultat analogue. La limite de proportionnalité est atteinte près du point d'application d'une des charges pour  $M = 6 \text{ kgm}$  env. Au centre, on atteint  $M_p$  sans déformation permanente. Les deux tubes sont restés droits sur une grande partie de la zone fléchie sous  $M = M_p$  (fig. 4).

Enfin, une dernière série d'essais a été faite sur des poutrelles laminées avec raidisseurs transversaux d'âmes et d'ailes soudés au droit des appuis et des points d'application des charges. Recuit de normalisation à  $625^\circ \text{C}$  pendant 1 heure après soudage. Essais effectués sur une machine de flexion à vérin Amsler (fig. 5) contrôlé par un dynamomètre Amsler. Deux tronçons avaient été usinés en T, ailes de  $99 \times 8 \text{ mm}$ , âme de  $67 \times 5 \text{ mm}$ . L'un d'eux a été fléchi âme tendue (n° 18).  $R_e$  de l'âme =  $37,1 \text{ kg/mm}^2$ ,  $R_e$  de l'aile =  $32,7 \text{ kg/mm}^2$ . D'où, en admettant le  $R_e$  de l'âme,  $M_e = 285 \text{ kgm}$ ,  $M_p = 515 \text{ kgm}$ .

L'aile a cessé d'être élastique peu au delà de  $M_e$ , mais les écarts sont faibles. L'autre a été fléchi âme comprimée:  $M_e = 247$  kgm et  $M_p = 445$  kgm (n° 19). L'aile a cessé d'être élastique pour  $M = 330$  kgm (tension  $10,6$  kg/cm<sup>2</sup>) et l'âme s'est voilée à son bord libre, après que la tension élastique ait atteint  $43$  kg/mm<sup>2</sup> (fig. 6).

Une poutrelle D.I.E. 10 a été fléchie dans le plan de sa plus grande raideur (n° 20),  $M_e = 2000$  kgm,  $M_p = 2290$  kgm. Les jauges de l'aile tendue sont restées sensiblement élastiques jusqu'à  $M_e$ , mais celles de l'aile comprimée ont nettement divergé à partir de  $1800$  kgm, la plastification paraissant totale à  $2120$  kgm. Une poutrelle identique mais sans raidisseurs a été fléchie perpendiculairement à l'âme (n° 21) avec  $M_e = 825$  kgm et  $M_p = 1278$  kgm. Elle s'est écartée de l'élasticité à partir de  $720$  kgm en traction, mais assez peu jusqu'à  $M_e$ . En compression, la divergence s'est faite à  $640$  kgm et la valeur expérimentale de  $M_p$  ne paraît pas supérieure à  $1000$  kgm.

Finalement deux profils IPN 10 ont été fléchis, l'un avec raidisseurs parallèlement à l'âme (n° 22), l'autre sans raidisseurs perpendiculairement à l'âme. Pour le premier,  $M_e = 1022$  kgm,  $M_p = 1190$  kgm. L'élasticité a été conservée au delà de la valeur  $M_p$  calculée jusqu'à  $1300$  kgm sous 2 jauges (une inférieure et une supérieure). Mais la flèche au milieu a divergé à partir de  $1160$  kgm à cause d'une torsion. Pour le deuxième (n° 23),  $M_e = 142$  kgm,  $M_p = 272$  kgm. L'élasticité a été conservée jusqu'à  $210$  kgm environ, puis les déformations ont crû très rapidement jusqu'à une valeur de  $M$  paraissant tendre vers  $250$  kgm.

### Commentaire des expériences

Purement exploratoires, elles ne font, malgré leur nombre, qu'introduire le problème. Il a été constaté qu'elles sont très délicates et qu'elles demandent des conditions soigneusement préparées, des investigations plus nombreuses et plus approfondies et des informations précises sur la qualité des aciers et leur état. Elles ne sont pas assez systématiques pour permettre d'énoncer des conclusions assez générales. Elles permettent cependant d'énoncer de nombreuses remarques, dont beaucoup certes ne sont pas nouvelles, mais restent peu connues et font peut-être ici l'objet d'une analyse plus détaillée.

Le phénomène de plastification des pièces en acier doux fléchies sous l'effet de charges transversales progresse toujours en conservant un noyau élastique et, en conséquence, sans instabilité propre. Il peut être accompagné de phénomènes d'instabilité locaux, comme le voilement de l'âme comprimée de la poutrelle en T (fig. 6), des voilements, déversements, ou déformations locales d'ailes comprimées de profils en I ou en H, surtout aux appuis et aux points d'application des charges concentrées. Abstraction faite de ces perturbations, il y a toujours une détente élastique et, par conséquent, des tensions résiduelles en cas de déformation permanente. Il n'y a donc pas de plastification



hétérogène pure en flexion; la pièce reste toujours en régime élasto-plastique, même lorsque le moment est devenu constant. Le noyau élastique fait obstacle à la plastification de la zone extérieure et la retarde. Si des phénomènes parasites de déformations locales d'éléments comprimés ne perturbent pas le comportement général, les fibres les plus sollicitées peuvent rester élastiques sous des tensions considérablement plus élevées que la tension d'étirage établie par un essai de traction simple; elles semblent même pouvoir atteindre et dépasser la tension conventionnelle de rupture d'un essai de traction simple, c'est-à-dire rapportée à la section initiale. Il semble cependant que la majoration de la limite d'étirage aux fibres extrêmes ne puisse guère dépasser 50%, sauf dans des conditions d'expériences particulières [2].

Ce phénomène d'élévation de la limite élastique en flexion est fortement influencé par les singularités de la sollicitation. Si l'on opère de manière à réaliser une région d'assez grande longueur à moment constant, on constate que la plastification est loin d'y être uniforme. Cet aspect des expériences a vivement retenu l'attention, en raison du fait que l'auteur avait procédé au préalable à des calculs hypothétiques de fluage et de relaxation en comptant sur une plastification uniforme de toute la zone à moment constant. Or, les expériences ont établi que, lorsque la zone à moment constant est assez longue, la plastification est toujours localisée au voisinage du point d'application des charges. C'est là que se produit la rotation sous moment constant et il est clair que cette situation conduit à la plus grande rotation pour le moindre travail des forces extérieures. La plastification exige en effet une assez grande quantité d'énergie par unité de longueur. Si elle était uniformément répartie sur toute la longueur à moment constant, pour un égal déplacement des forces extérieures la plastification serait faible partout.

Si la zone à moment constant est assez longue, on y trouve généralement un jarret, parfois deux, dont un plus développé que l'autre. Le rayon de courbure peut y être si réduit que l'allongement correspondant des fibres extrêmes est supérieur à la longueur du palier d'étirage. Entre ces jarrets situés aux extrémités, la courbure est beaucoup plus faible et souvent nulle. Dans ce cas, une partie du barreau est restée élastique sous un moment égal à  $M_p$  et l'on ne peut donc savoir sous quelle valeur du moment elle se serait finalement plastifiée.

Ces phénomènes ne peuvent être mis en évidence quantitativement que par des mesures de tensions dans diverses sections. Beaucoup d'expériences antérieures ont été faites en ne mesurant que des flèches. Ces mesures décèlent la première plastification mais non sa répartition. Des essais très analytiques demanderaient, outre des mesures de flèches et de rotations, des investigations extensométriques très développées et détaillées dans de nombreuses sections.

Si la zone à moment constant est assez réduite, l'effet des singularités d'extrémité se fait sentir sur toute son étendue et la plastification est alors moins localisée, sans être uniforme cependant. Cet effet augmente lorsque la

zone à moment constant diminue. Beaucoup d'expériences antérieures, ainsi que leurs conclusions, sont affectées de cet effet, de telle sorte que les résultats et les interprétations d'expériences de cette nature ne sont valables que pour les conditions dans lesquelles elles ont été effectuées.

Les phénomènes d'instabilité locale des éléments comprimés perturbent beaucoup les phénomènes d'élévation de la limite élastique. Ceux-ci sont le plus assurés pour des sections pleines et concentrées, comme le carré, le cercle, le rectangle large pas trop oblong, formes que l'auteur avait appelées «cohérentes» [3]. Mais ce terme prête à confusion et il vaudrait mieux les appeler «compactes». Les sections évidées sont moins favorables sous ce rapport. Elles sont déjà souvent les moins favorables au point de vue du bénéfice de la plasticité, lorsque le rapport  $M_p/M_e$  est faible. Mais elles sont éventuellement encore plus défavorisées en ce qui concerne la limite d'élasticité, notamment les profilés à larges ailes, dont il semble que le moment maximum réel puisse être inférieur au  $M_p$  calculé. Les profils normaux semblent plus favorables sous ce rapport.

Il faut considérer aussi dans les profils laminés à l'état de livraison d'autres causes de perturbations: imperfections géométriques, tensions résiduelles, hétérogénéités, notamment différences des limites élastiques entre les âmes et les ailes [4]. Le comportement global des profilées est alors mixte, mais peut laisser subsister un palier d'étirage, qui est essentiel pour la plastification de flexion. Aussi semble-t-il que les principaux effets perturbateurs soient les imperfections géométriques et les déformations locales d'éléments comprimés.

Sous ce rapport, les sections fermées et les tubes notamment ont certains avantages et peuvent présenter des comportements analogues à ceux des sections compactes pleines (voir fig. 2 et 4), d'autant plus que  $M_p/M_e$  n'est pas très grand. Cependant, les tubes essayés ont manifesté quelque faiblesse près des points d'application des charges. Les parois tubulaires minces sont donc aussi sensibles aux effets des charges concentrées.

Une remarque importante enfin est que l'élévation de la limite élastique observée en flexion est sans relation directe avec une éventuelle limite apparente d'élasticité supérieure, généralement inexistante ou peu marquée dans les aciers des expériences relatées ci-dessus. On sait que cette valeur supérieure dépend essentiellement des conditions opératoires, notamment de la rigidité relative de la machine de traction [5]; l'accouplement des fibres extérieures avec les fibres internes résultant de la conservation des sections planes constitue sans doute une liaison très rigide. D'autre part la même relation produit une variation considérable des vitesses de mise en charge pour les diverses fibres, comme le professeur H. RÜSCH l'a fait remarquer pour le béton [6].

Somme toute, le postulat que les lois de déformation plastique homogène sont ipso facto applicables aux phénomènes de la flexion élasto-plastique est purement rationnel et n'est pas confirmé par l'expérience. Celle-ci n'est pas simple. D'ailleurs les notions de limite de proportionnalité, de limites appa-

rentes d'élasticité et de tension d'étirage en traction homogène ne sont pas simples ni ne varient [7].

Elles sont notamment sensibles à l'effet de la durée [8]. Elles peuvent donc, selon les circonstances, évoluer dans un large domaine de valeurs. A la lumière de cette remarque, ce que l'on observe dans la flexion élasto-plastique n'a rien d'insolite.

### Interprétation des expériences

On considère une pièce prismatique fléchie sous moment constant et dont la section transversale est simplement ou doublement symétrique. On désigne par  $M_e$  le moment  $(I/v)_{min} \times R_e$  et par  $M_p$  le moment ultime  $\frac{ScR_e}{2}$ ,  $S$  désignant l'aire de la section transversale et  $c$  la distance entre les centres de gravité des deux moitiés égales de cette section. A la fig. 7, (a) représente le diagramme

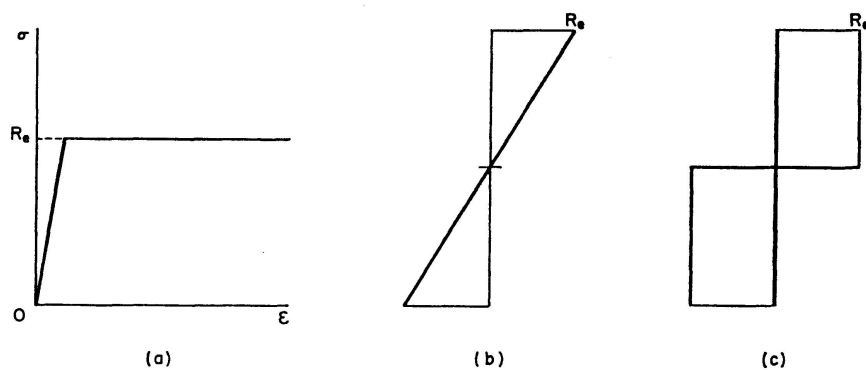


Fig. 7.

tensions-déformations de traction simple, (b) le diagramme des tensions de flexion correspondant à  $M_e$ , (c) le diagramme des tensions de flexion correspondant à  $M_p$ . Par simple raison de commodité, on se référera dans la suite pour les formules à la section rectangulaire. Alors:

$$M_e = \frac{b h^2 R_e}{6}, \quad M_p = \frac{b h^2 R_e}{4} = 1,5 M_e.$$

Le problème est celui des états intermédiaires entre (b) et (c). Déjà dans la 2e édition de 1899 de "Strength of materials" de J. A. EWING [9], une figure à la page 107 représente un état intermédiaire dans le but de mettre en évidence la notion des tensions résiduelles, mais sans formules. Cette représentation correspond probablement à la théorie à laquelle RODERICK et PHILLIPS [10] attachent les noms de Nadai-Haigh-Volterra, encore que ces auteurs ne l'avaient pas encore formulée à cette date.

Dans leur publication de 1949, RODERICK et PHILLIPS passent en revue diverses théories, dont la précitée qui ne tient pas compte d'une élévation

de la limite élastique et d'autres qui en tiennent compte. Il y est surtout question de la variation des flèches avec les moments. Pour la facilité d'écriture, on repèrera dans la suite les théories par un chiffre romain.

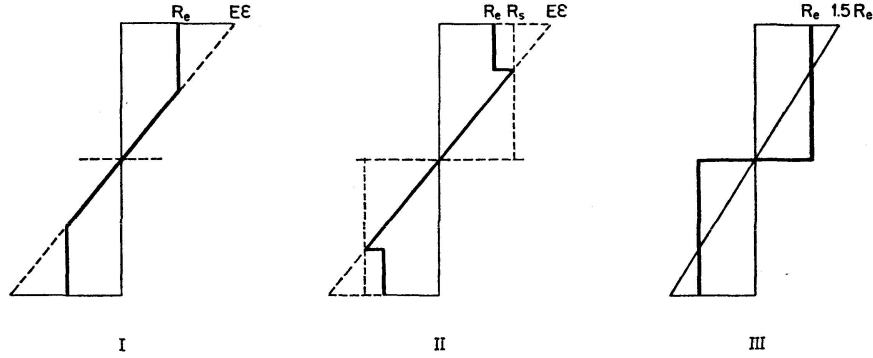


Fig. 8.

La formulation *I* (Nadai-Haigh-Volterra) correspond à la fig. 8, I. Elle est encore généralement la seule considérée dans les publications les plus récentes, alors qu'elle n'est pas en accord avec les expériences. En fonction de la dilatation de la fibre extrême

$$\epsilon > \frac{R_e}{E},$$

on a 
$$M_\epsilon = \frac{b h^2 R_e}{4} \left( 1 - \frac{R_e^2}{3 E^2 \epsilon^2} \right), \quad M_e < M_\epsilon < M_p. \quad (1)$$

En 1913, ROBERTSON et COOK ont formulé la théorie II dans une communication à la Royal Society [11]. Elle est fondée sur l'hypothèse d'une limite élastique supérieure  $R_s > R_e$  et représentée à la fig. 8, II pour  $\epsilon > \frac{R_s}{E}$ .

L'élasticité est conservée jusqu'au moment

$$\frac{b h^2 R_s}{6} > M_e.$$

Au delà, 
$$M_\epsilon = \frac{b h^2 R_e}{4} \left[ 1 - \frac{R_s^2}{E^2 \epsilon^2} \left( 1 - \frac{2 R_s}{3 R_e} \right) \right]. \quad (2)$$

Si  $\frac{R_s}{R_e} < 1,5$ ,  $M_\epsilon < M_p$ , (pour la section rectangulaire).

Si  $\frac{R_s}{R_e} > 1,5$ ,  $M_\epsilon > M_p$ , (pour la section rectangulaire).

Si  $\frac{R_s}{R_e} = 1,5$ ,  $M_\epsilon = M_p$ , pour toute valeur de  $\epsilon$ .

RODERICK et PHILLIPS [10] attribuent à W. PRAGER l'interprétation suivant laquelle l'élasticité resterait totale jusqu'au moment  $M_p$  et serait suivie d'une

plastification totale atteignant sans transition l'état final de la fig. 7 (c), comme indiqué à la fig. 8, III. Il ne subsisterait donc pas de noyau élastique, contrairement aux théories I et II. Donc, pour

$$\epsilon > \frac{M_p v}{I E} = 1,5 \frac{R_e}{E}, \quad M_\epsilon = M_p. \quad (3)$$

Après la publication du travail de RODERICK, ODQUIST et SCHAUB [12] ont publié une théorie IV schématisée à la fig. 9 et correspondant à l'hypothèse

$$\sigma = R_e - \alpha (E \epsilon - R_e)$$

dans laquelle  $\alpha$  est un coefficient expérimental. On trouve

$$M_\epsilon = \frac{b h^2 R_e}{6} \left[ \left( \frac{3}{2} - \frac{R_e^2}{2 E^2 \epsilon^2} \right) (1 + \alpha) - \alpha \frac{E \epsilon}{R_e} \right]. \quad (4)$$

$M_\epsilon$  atteint un maximum analytique pour

$$\frac{E \epsilon}{R_e} = \left( \frac{1 + \alpha}{\alpha} \right)^{1/3}.$$

$$M_{\epsilon \max.} = \frac{b h^2 R_e}{4} \alpha \left[ \frac{1 + \alpha}{\alpha} - \left( \frac{1 + \alpha}{\alpha} \right)^{1/3} \right]. \quad (4 \text{ bis})$$

$\alpha$	= 0	0,025	0,05	0,10	0,20	0,50	1,
$\left( \frac{E \epsilon}{R_e} \right)_{\max.}$	= $\infty$	3,45	2,76	2,225	1,818	1,442	1,26,
$\frac{6 M_{\epsilon \max.}}{b h^2 R_e}$	= 1,50	1,41	1,367	1,315	1,255	1,17	1,11.

La théorie IV n'indique pas ce qui se passe après le maximum de  $M_\epsilon$ . Elle limite considérablement l'effet de l'accroissement de déformation, à peine  $3,5 \frac{R_e}{E}$  pour la valeur faible 0,025 de  $\alpha$ , alors que pour l'acier 37, la longueur du palier d'étirage atteint 12 à 13  $\frac{R_e}{E}$  et pour l'acier 52 près de 10  $\frac{R_e}{E}$ .

Sans être informé des théories II, III et IV, sur la base des expériences

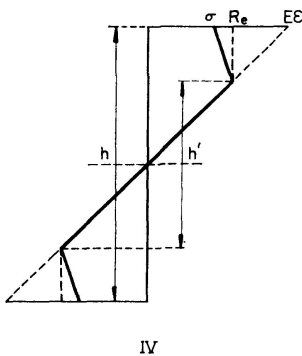


Fig. 9.

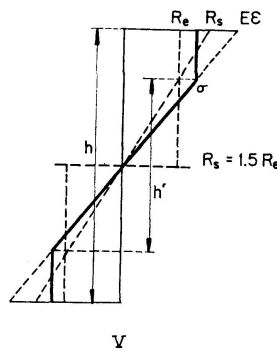


Fig. 10.

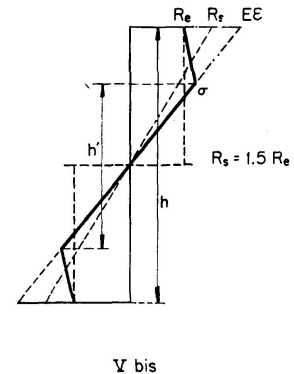


Fig. 11.

résumées plus haut, l'auteur a formulé la théorie V [3], schématisée à la fig. 10. Le moment reste élastique jusqu'à la valeur  $M_p$ , c'est-à-dire

$$\epsilon \leq \frac{M_p v}{E I} = 1,5 \frac{R_e}{E}.$$

Au delà,

$$M_\epsilon = M_p = \frac{b h^2 R_e}{4} \quad (5)$$

et

$$\sigma = E \epsilon \sqrt{3 \left(1 - \frac{R_e}{\sigma}\right)}, \quad R_e < \sigma < 1,5 R_e.$$

$$\frac{\sigma}{R_e} = 1,50 \quad 1,40 \quad 1,30 \quad 1,20 \quad 1,10 \quad 1,05 \quad 1,01 \quad 1,$$

$$\frac{E \epsilon}{R_e} = 1,50 \quad 1,512 \quad 1,565 \quad 1,70 \quad 2,11 \quad 2,78 \quad 5,88 \quad \infty,$$

$$\frac{h'}{h} = 1 \quad 0,926 \quad 0,832 \quad 0,707 \quad 0,522 \quad 0,378 \quad 0,172 \quad 0.$$

La loi peut s'appliquer jusqu'à la limite du palier d'étirage avec un noyau élastique réduit à  $0,05 h$  de part et d'autre de l'axe neutre.

Une autre manière de réaliser la transition en se rapprochant de la théorie IV et aussi de la théorie II sans discontinuité dans le diagramme des tensions donnerait la formulation V bis, suivant le schéma de la fig. 11. On a toujours  $M_\epsilon = M_p$  pour

$$\epsilon > 1,5 \frac{R_e}{E} \quad \text{et} \quad R_e < \sigma < 1,5 R_e,$$

avec

$$\left(1 - \frac{\sigma}{E \epsilon}\right) \left(2 + \frac{\sigma}{E \epsilon}\right) = \frac{2 E \epsilon - 3 R_e}{E \epsilon - R_e} \quad (6)$$

ou

$$\frac{\sigma}{E \epsilon} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{4}{\frac{E \epsilon}{R_e} - 1}} - 1 \right].$$

$$\frac{E \epsilon}{R_e} = 1,5 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 10 \quad \infty,$$

$$\frac{\sigma}{R_e} = 1,5 \quad 1,235 \quad 1,098 \quad 1,035 \quad 1,005 \quad 1.$$

Les expériences résumées plus haut ont montré que pour les sections rectangulaires, l'élasticité n'est pas toujours conservée jusqu'à la valeur  $M_p$ , mais seulement jusqu'à une valeur comprise entre  $M_e$  et  $M_p$ , que nous désignerons par

$$\frac{I R_s}{v} = \frac{b h^2 R_s}{6} \quad \text{avec} \quad 1 < \frac{R_s}{R_e} < 1,5.$$

Dans ce cas, en s'inspirant des précédentes, on peut formuler la théorie VI, de la manière suivante. La tension à la fibre extrême reste égale à  $R_s$  pour les valeurs de  $M_\epsilon$  comprises entre

$$\frac{b h^2 R_s}{6} \quad \text{et} \quad M_p,$$

au delà  $M_\epsilon = M_p$  pour toute valeur de  $\epsilon$  et  $\sigma$  décroît en tendant vers  $R_e$

$$\begin{aligned}
 1^{re} \text{ phase} \quad & \frac{R_s}{E} < \epsilon < \frac{R_s}{E} \sqrt{\frac{R_s}{3(R_s - R_e)}}, \quad \sigma = R_s, \\
 & M_\epsilon = \frac{b h^2 R_s}{4} \left( 1 - \frac{R_s^2}{3 E^2 \epsilon^2} \right). \\
 2^{e} \text{ phase} \quad & \epsilon > \frac{R_s}{E} \sqrt{\frac{R_s}{3(R_s - R_e)}}, \quad M_\epsilon = M_p, \\
 & \sigma = E \epsilon \sqrt{3 \left( 1 - \frac{R_e}{\sigma} \right)}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Si l'on se réfère à V bis, on obtient une théorie VI bis.

La première phase est analogue à la fig. 11, sauf que la tension  $\sigma$  reste égale à  $R_s$  tant que  $M_\epsilon < M_p$ . Alors:

$$\begin{aligned}
 \frac{\epsilon}{R_e} &< \frac{R_s}{2 R_e} \left( \sqrt{\frac{R_s + 3 R_e}{R_s - R_e}} - 1 \right) = \frac{\epsilon_p}{R_e}, \\
 M_\epsilon &= \frac{b h^2 R_e}{12} \left[ 2 + \frac{R_s}{R_e} - \frac{R_s^2}{E^2 \epsilon^2} + \frac{R_s}{E \epsilon} \left( \frac{R_s}{R_e} - 1 \right) \right].
 \end{aligned} \tag{6 bis}$$

Lorsque  $\epsilon \geq \epsilon_p$ , on retombe sur la théorie V bis de la fig. 11, avec

$$\frac{\sigma}{E \epsilon} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{4}{\frac{E \epsilon}{R_e} - 1}} - 1 \right]. \tag{6}$$

Le tableau ci-après reproduit les valeurs de  $\frac{6 M_\epsilon}{b h^2}$  en fonction de  $\frac{E \epsilon}{R_e}$  suivant les diverses théories esquissées ci-dessus. Les valeurs entre parenthèses correspondent à l'état élastique. Pour les théories II, VI et VI bis, on a admis  $R_s/R_e = 1,333$ ; pour la théorie IV,  $\alpha = 0,05$

$\frac{E \epsilon}{R_e}$	1	1,33	1,50	2,00	3,00	5,00	10,00	$\infty$
I	(1)	1,219	1,277	1,375	1,445	1,48	1,495	1,5
II	(1)	(1,33)	1,368	1,426	1,467	1,488	1,497	1,5
III, V, V bis	(1)	(1,33)	(1,5)	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
II pour $\frac{R_s}{R_e} = 1,5$								
IV*	(1)	1,213	1,267	1,344				
VI**	(1)	(1,33)	1,473	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
VI bis***	(1)	(1,33)	1,42	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5

\*  $\frac{6 M_{\epsilon_{max}}}{b h^2 R_e} = 1,367$  pour  $\frac{E \epsilon}{R_e} = 2,76$ .

\*\* La valeur 1,5 de  $\frac{6 M_\epsilon}{b h^2 R_e}$  est atteinte pour  $\frac{E \epsilon}{R_e} = 1,54$ .

\*\*\* La valeur 1,5 de  $\frac{6 M_\epsilon}{b h^2 R_e}$  est atteinte pour  $\frac{E \epsilon}{R_e} = 1,735$ .

La formulation du moment en fonction de  $\epsilon$  établit rationnellement la relation de cause à effet dans le phénomène de flexion élastoplastique. Elle correspond aussi à la meilleure voie expérimentale, qui consiste dans la mesure des valeurs simultanées de  $M$  et de  $\epsilon$ . On en déduit aisément la rotation élémentaire

$$d\omega = \frac{\epsilon dx}{v} = \frac{2 \epsilon dx}{h}. \quad (7)$$

La dernière expression pour les sections doublement symétriques telle que le rectangle. Le rayon de courbure est

$$\rho = \frac{dx}{d\omega} = \frac{v}{\epsilon} = \frac{h}{2 \epsilon}. \quad (8)$$

En cas de plastification uniforme sous moment constant, la déformée est circulaire et la flèche  $f$  correspondant à une longueur de corde  $l$  est

$$f = \rho \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{l^2}{4 \rho^2}} \right) \approx \frac{l^2}{8 \rho} \quad (9)$$

si  $l/\rho$  est petit. Donc

$$f = \frac{h}{2 \epsilon} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{l^2 \epsilon^2}{h^2}} \right) \approx \frac{l^2 \epsilon}{4 h}. \quad (10)$$

En conjuguant la formule (10) avec chacune des formules (1) à (6), il est possible d'établir la relation entre  $f$  et  $M_\epsilon$  pour chacune des théories. Beaucoup d'expériences ont été fondées sur cette relation et ont consisté uniquement en mesures de  $f$ . Celles décrites plus haut ont montré que la plastification n'est généralement pas uniforme, ce qui affecte les valeurs de  $f$ .

L'interprétation des phénomènes de flexion élasto-plastique n'est pas complète si l'on ne considère pas les déformations et les tensions résiduelles après décharge et les énergies mises en jeu. Lors de la décharge totale, il se produit une détente élastique correspondant à une déformation  $\epsilon'$  de la fibre extrême, telle que

$$\frac{b h^2 E \epsilon'}{6} = M_\epsilon. \quad (11)$$

La dilatation résiduelle est  $\epsilon_r = \epsilon - \epsilon'$  (12) et la tension résiduelle à la fibre extrême est  $\sigma_r = E \epsilon' - \sigma$  (13); elle est de signe contraire à  $\sigma$ .

$$\text{Théorie I} \quad \sigma_r = \frac{R_e}{2} \left( 1 - \frac{R_e^2}{E^2 \epsilon^2} \right). \quad (14)$$

$$\text{Théorie II} \quad \sigma_r = \frac{R_e}{2} \left[ 1 - \frac{3 R_s^2}{E^2 \epsilon^2} \left( 1 - \frac{2 R_s}{3 R_e} \right) \right]. \quad (15)$$

$$\text{Théorie III} \quad \sigma_r = \frac{R_e}{2}.$$



Théorie IV  $\sigma_r = \frac{R_e}{2} \left[ 1 - \frac{R_e^2}{E^2 \epsilon^2} \right] (1 + \alpha).$  (16)

Théories V et V bis  $\sigma_r = \frac{3 R_e}{2} - \sigma \quad \text{ou} \quad \frac{R_e}{2}.$  (17)

Théorie VI. Lorsque  $\epsilon < \frac{R_s}{E} \sqrt{\frac{R_s}{3(R_s - R_e)}},$

$$\sigma_r = \frac{R_s}{2} \left( 1 - \frac{R_s^2}{E^2 \epsilon^2} \right). \quad (18)$$

Lorsque  $\epsilon > \frac{R_s}{E} \sqrt{\frac{R_s}{3(R_s - R_e)}}, \quad \sigma_r = \frac{3 R_e}{2} - \sigma \quad \text{ou} \quad \frac{R_e}{2}.$  (17)

Théorie VI bis. Lorsque  $\epsilon < \epsilon_p$  (voir 6 bis),

$$\sigma_r = \frac{R_e}{2} \left[ \frac{R_s}{R_e} - \frac{R_s^2}{E^2 \epsilon^2} + \frac{R_s}{E \epsilon} \left( \frac{R_s}{R_e} - 1 \right) \right]. \quad (18 \text{ bis})$$

Lorsque  $\epsilon$  atteint ou dépasse cette valeur,  $\sigma_r = R_e/2$  (17).

La fig. 12 montre les formes des diagrammes des tensions résiduelles selon les diverses théories. Celle qui correspond à la théorie II présente une discontinuité qui est difficilement concevable physiquement.

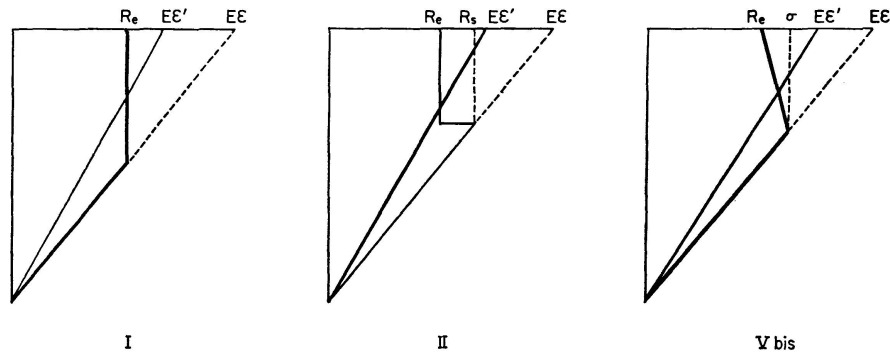


Fig. 12.

Pour le travail élastique par unité de longueur avant plastification, on trouve:

Théories I et IV  $T_e = \frac{b h R_e^2}{6 E}.$

Théories II et VI  $T_e = \frac{b h R_s^2}{6 E}.$  (19)

Théories III et V  $T_e = \frac{3 b h R_e^2}{8 E}.$

On appelle travail de plastification par unité de longueur

$$T_p = \int_{\epsilon_0}^{\epsilon} M_{\epsilon} d\omega = \frac{2}{h} \int_{\epsilon_0}^{\epsilon} M_{\epsilon} d\epsilon. \quad (20)$$

Selon les théories,  $\epsilon_0 = \frac{R_e}{E}, \quad \frac{R_s}{E} \quad \text{ou} \quad \frac{3 R_e}{2 E}.$

Théorie I  $T_p = \frac{b h R_e \epsilon}{2} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{R_e}{E \epsilon} + \frac{R_e^2}{3 E^2 \epsilon^2} \right).$  (21)

Théorie II  $T_p = \frac{b h R_e}{2} \left[ \epsilon - 2 \frac{R_s}{E} + \frac{2 R_s^2}{3 E R_e} + \frac{R_s^2}{E^2 \epsilon} \left( 1 - \frac{2 R_s}{3 R_e} \right) \right].$  (22)

Théorie III  $T_p = \frac{b h R_e}{2} \left( \epsilon - \frac{3 R_e}{2 E} \right).$  (23)

Théorie IV  $T_p = \frac{b h R_e}{2} \left[ (1 + \alpha) \left( \epsilon - \frac{R_e}{E} \right) - \frac{R_e^2 (1 + \alpha)}{3 E^2} \left( \frac{E}{R_e} - \frac{1}{\epsilon} \right) - \frac{\alpha E}{3 R_e} \left( \epsilon^2 - \frac{R_e^2}{E^2} \right) \right].$  (24)

Théorie V  $T_p = \frac{b h R_e}{2} \left( \epsilon - \frac{3 R_e}{2 E} \right).$  (23)

Théorie VI

Lorsque  $\epsilon < \frac{R_s}{E} \sqrt{\frac{R_s}{3(R_s - R_e)}}$ ,  $T_p = \frac{b h R_s \epsilon}{2} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{R_s}{E \epsilon} + \frac{R_s^2}{3 E^2 \epsilon^2} \right).$  (25)

Lorsque  $\epsilon > \frac{R_s}{E} \sqrt{\frac{R_s}{3(R_s - R_e)}}$ ,  $T_p = \frac{b h R_e \epsilon}{2} - \frac{2 b h R_s^2}{3 E} + \frac{b h (R_s - R_e) R_s}{E} \sqrt{\frac{R_s}{3(R_s - R_e)}}.$  (26)

Théorie VI bis. Lorsque  $\epsilon < \epsilon_p$  (voir 6 bis)

$$T_p = \frac{b h R_e}{6} \left\{ \epsilon \left( 2 + \frac{R_s}{R_e} \right) - \frac{R_s}{E} \left[ 3 + \frac{R_s}{R_e} - \frac{R_s}{E \epsilon} - \left( \frac{R_s}{R_e} - 1 \right) \log \frac{E \epsilon}{R_s} \right] \right\}. \quad (25 \text{ bis})$$

Lorsque  $\epsilon$  dépasse cette valeur  $\epsilon_p$ ,

$$T_p = T_{pp} + \frac{b h R_e}{2} (\epsilon - \epsilon_p). \quad (26 \text{ bis})$$

Lors d'une décharge élastique complète, il se produit un travail de détente élastique égal à

$$T_d = \frac{M_{\epsilon}^2}{2 E I}. \quad (27)$$

On trouve:

Théorie I  $T_d = \frac{3 b h R_e^2}{8 E} \left( 1 - \frac{R_e^2}{3 E^2 \epsilon^2} \right)^2 > T_e.$  (28)

Théorie II 
$$T_d = \frac{3}{8} \frac{b h R_e^2}{E} \left[ 1 - \frac{R_e^2}{E^2 \epsilon^2} \left( 1 - \frac{2 R_s}{3 R_e} \right) \right]^2 > T_e \quad (29)$$

si 
$$\frac{R_s}{R_e} < \frac{3}{2}.$$

Théories III et V 
$$T_d = \frac{3}{8} \frac{b h R_e^2}{E} = T_e. \quad (30)$$

Théorie IV 
$$T_d = \frac{3}{8} \frac{b h R_e^2}{E} \left[ \left( 1 - \frac{R_e^2}{3 E^2 \epsilon^2} \right) (1 + \alpha) - \frac{2 \alpha E \epsilon}{3 R_2} \right]^2 > T_e. \quad (31)$$

Théorie VI. Lorsque 
$$\epsilon < \frac{R_s}{E} \sqrt{\frac{R_s}{3(R_s - R_e)}}, \quad \text{si} \quad \frac{R_s}{R_e} < \frac{3}{2},$$

$$T_d = \frac{3}{8} \frac{b h R_s^2}{E} \left( 1 - \frac{R_s}{3 E^2 \epsilon^2} \right)^2 > T_e \quad (32)$$

si 
$$\epsilon \geq \frac{R_s}{E} \sqrt{\frac{R_s}{3(R_s - R_e)}},$$

$$T_d = \frac{3}{8} \frac{b h R_e^2}{E} > T_e \quad (30)$$

si 
$$\frac{R_s}{R_e} < \frac{3}{2}.$$

Théorie VI bis. Lorsque  $\epsilon < \epsilon_p$  (voir 6 bis)

$$T_d = \frac{3}{8} \frac{b h R_e^2}{E} \left[ \frac{2}{3} + \frac{R_s}{3 R_e} - \frac{R_s^2}{3 E^2 \epsilon^2} + \frac{R_s}{3 E \epsilon} \left( \frac{R_s}{R_e} - 1 \right) \right]^2. \quad (32 \text{ bis})$$

Lorsque  $\epsilon > \epsilon_p$ , 
$$T_d = \frac{3}{8} \frac{b h R_e^2}{E}. \quad (30)$$

Toutes les théories autres que III et V donnent

$$T_d > T_e \quad \left( \text{si} \quad \frac{R_s}{R_e} < \frac{3}{2} \right).$$

Il en résulte que le travail de plastification  $T_p$  contient une part de travail élastique, sauf pour III et V. Posons:

$$t_e = \frac{8 T_e E}{3 b h R_e^2}, \quad t_p = \frac{8 T_p E}{3 b h R_e^2}, \quad t_d = \frac{8 T_d E}{3 b h R_e^2}. \quad (33)$$

Le tableau suivant reproduit les valeurs de ces paramètres sans dimensions pour les diverses théories,

$$\frac{R_s}{R_e} = 1,33 \text{ pour II, VI et VI bis,}$$

$$\alpha = 0,05 \text{ pour IV}$$

et pour les deux valeurs 2 et 10 de  $\frac{E \epsilon}{R_e}$

Théorie	$t_e$	$\frac{E \epsilon}{R_e} = 2$		$\frac{E \epsilon}{R_e} = 10$	
		$t_p$	$t_d$	$t_p$	$t_d$
I	0,444	1,111	0,84	11,60	0,993
II	0,79	0,823	0,905	11,38	0,996
III	1	0,667	1	11,333	1
IV	0,444	1,10	0,805		
V	1	0,667	1	11,333	1
VI	0,79	0,877	1	11,54	1
VI bis	0,79	0,860	1	11,53	1

En l'absence de tensions initiales entre l'état de sollicitation nulle et celui de déformation  $\epsilon$ , le travail élastique total est proportionnel à  $t_d$  et le travail de plastification proprement dite est proportionnel à  $t_p + t_e - t_d$ , qui n'est égal à  $t_p$  que pour les interprétations III, V, ainsi que II lorsque  $R_s/R_e = 1.5$ .

Dans ces cas, l'énergie élastique totale est complètement libérée avant toute plastification. Pour toutes les autres théories, l'énergie élastique totale, égale à

$$\frac{3 b h^2 R_e}{8 E}$$

n'est complètement libérée qu'après plastification totale.

### Commentaire des théories

Les comparaisons que permettent les formules et les tableaux qui précèdent valent uniquement pour les sections rectangulaires. Elles peuvent prêter à confusion pour les autres formes de sections, notamment pour celles, telles que les doubles tés et les tubes à parois relativement minces, pour lesquelles  $M_p < 1,5 M_e$ . Si dans ce cas on envisageait des valeurs de  $R_s > \frac{M_p}{M_e} R_e$ , on obtiendrait des valeurs de  $M_e$  décroissantes pour  $\epsilon > \frac{R_s}{E}$  parce que  $M_p < \frac{M_e R_s}{R_e}$ . Or, les expériences ne montrent pas cette décroissance. Donc  $R_s$  ne peut dépasser  $\frac{M_p}{M_e} R_e$  valeur qui dans ces cas dépend uniquement de la forme de la section et non des caractéristiques de la matière définies en sollicitation homogène. Mais selon certaines théories,  $M_e$  décroîtrait même pour des valeurs de  $R_s$  moindres que cette limite. Si, par exemple, l'on considère un double té fléchi dans le plan de l'âme, ayant les dimensions suivantes: ailes de  $10 \times 1$  cm, âme de  $8 \times 1$  cm, on trouve  $\frac{M_p}{M_e} = \frac{106}{89,667} = 1.18$ .

Selon la théorie II, pour  $\epsilon = \frac{R_s}{E}$  le moment élastique maximum vaut  $89,667 R_s$ . Pour  $\epsilon = 1,25 \frac{R_s}{E}$ ,  $M_\epsilon = 90 R_e + 10,667 R_s$  il est inférieur au précédent si  $R_s > \frac{90}{79} R_e = 1,135 R_e$ .

Cela provient de la conjugaison de la discontinuité de la section et de celle du diagramme hypothétique des tensions. Une décroissance de  $M_\epsilon$  pourrait aussi correspondre à la théorie IV mais pour des valeurs de  $\alpha \geq 0,94$ .

Sauf la théorie I, qui n'est généralement pas conforme à l'expérience, toutes les autres admettent une diminution progressive de la tension maximum au fur et à mesure que la plastification progresse, mais il est physiquement exclu que le moment diminue ce qui correspondrait à une instabilité qui ne se manifeste pas. Si l'on considère le phénomène en général, indépendamment d'une forme particulière de section, la théorie II paraît donc peu plausible et il semble que les théories V et VI soient les plus adaptées à l'ensemble des observations. Cependant, on a déjà fait remarquer dans le commentaire des expériences que la localisation de la plastification et sa non uniformité dans les zones à moment constant font qu'il est difficile d'établir des limites de plastification. En conséquence, il est difficile de déduire de l'expérience lequel des processus II à VI est le plus adéquat. Ce sont plutôt des considérations rationnelles qui permettent de juger certains comme peu plausibles, cependant que la théorie classique I n'est plus admissible selon les expériences.

### **Influence de l'effort tranchant**

RODERICK et PHILLIPS [10] citent des expériences de flexion sous une charge centrale unique qui ont montré la même élévation de la limite élastique que sous moment constant. N. M. DEHOUSSE [1] relate un résultat de même nature. Donc l'existence d'efforts tranchants et les perturbations dues à une charge concentrée à l'endroit de la plastification engendrée par un moment maximum local n'affectent pas qualitativement le phénomène. Les observations faites sur les expériences à moment constant, où les perturbations n'affectent que les extrémités de la zone à  $M$  constant, permettent de croire que ces éléments influencent le départ et le développement de la plastification, qu'ils peuvent donc agir sur la manière dont elle se produit et exercer éventuellement des effets quantitatifs.

### **Influence de l'effort normal**

Il a paru intéressant de procéder aussi à des expériences de traction excentrée. Il en a été effectué deux sur des barreaux de section rectangulaire de 20 mm de hauteur et de 10 mm de largeur, ayant 500 mm de longueur totale. Les excentricités étaient de 13,33 mm (n° 24) et de 29,17 mm (n° 25). La

distance entre les points d'application des forces de traction longitudinales était de 450 mm. La limite d'étirage de l'acier était  $R_e = 26,6 \text{ kg/mm}^2$ , la tension de rupture  $R_s = 41,9 \text{ kg/mm}^2$ . Il n'est pas apparu de limite élastique supérieure. Deux extensomètres ohmiques étaient fixés au milieu de la pièce, un sur chaque tranche. On peut aisément établir une théorie sur la même base que celle désignée V pour la flexion simple [13].

Pour  $e = 13,33 \text{ mm}$  (n° 24), on trouve

$$N_e = 1060 \text{ kg}, \quad N_p = 1630 \text{ kg}.$$

Pour  $e = 29,17 \text{ mm}$  (n° 25), on trouve

$$N_e = 550 \text{ kg}, \quad N_p = 870 \text{ kg}.$$

Ces expériences trop peu nombreuses et plus délicates encore que celles de flexion simple, influencées par la déformation de l'éprouvette, ne sont pas concluantes. Elles ont cependant montré une élévation de la charge limite élastique au delà de  $N_e$  et qui n'est guère éloignée de  $N_p$ . Comme toujours, de telles expériences se terminent par une rupture de traction simple [14]. On a trouvé  $N_r = 8350 \text{ kg}$  pour le n° 24 et 8150 pour le n° 25.

Dans son ouvrage «L'équilibre des corps déformables» [15] G. COLONNETTI reproduit à la page 46 le résultat d'une expérience de traction excentrique sur un crochet selon lequel l'élasticité paraît pratiquement conservée jusqu'à  $N = N_p$  pour une section trapézoïdale arrondie. Il ne paraît donc pas abusif d'admettre que le début de la plastification en flexion plane composée pourrait se produire au niveau  $N_p$ , surtout pour des sections et des excentricités telles que  $N_e/N_p$  n'atteigne pas des valeurs très considérables, sous réserve de déformations locales et autres perturbations. Ce pourrait être le cas pour des sections en double té et tubulaires. Pour le cas de la compression excentrique, en suivant la voie de la théorie élastique eulérienne de l'instabilité, on peut établir une théorie générale de l'instabilité des pièces droites comprimées [16, 17].

### Influence de la durée

Ainsi qu'il a été exposé en introduction, le but initial de la recherche était d'étudier le fluage et la relaxation de l'acier doux en flexion. Le point de départ était le phénomène observé en traction homogène de barreaux d'acier doux d'un véritable abaissement de la limite élastique dans les phénomènes de longue durée de fluage et de relaxation par rapport à la valeur instantanée [8]. On pouvait dès lors concevoir comme suit la relaxation à déformation constante dans le domaine élasto-plastique sur la base de la théorie classique I. La déformation  $R_e/E$  de la fig. 7, I restant constante, la tension deviendrait  $R'_e < R_e$  et le moment  $M'_e < M_e$  d'après la formule (1).

Pour le fluage sous moment constant  $M$ , le même phénomène devrait se produire, mais de manière à satisfaire aux conditions

$$M = \frac{b h^2 R_e}{4} \left( 1 - \frac{R_e^2}{3 E^2 \epsilon^2} \right) = \frac{b h^2 R'_e}{4} \left( 1 - \frac{R_e'^2}{3 E^2 \epsilon'^2} \right),$$

$$\epsilon' > \epsilon, \quad R'_e < R_e, \quad M_e < M < M_p.$$

Les premières expériences ont montré qu'il n'y avait pas ou guère de déformation permanente pour  $M < M_p$  ni de variation temporelle. Le barreau n° 3, dont la zone a moment constant ne mesurait que 10 cm a paru approprié pour une observation de quelques jours sous un moment de 10,6 kgm ( $M_e = 7,93$  kgm,  $M_p = 11,9$  kgm).

Les apparences de fluage ont été insignifiantes, même aberrantes et stabilisées après 96 heures. Or, en sollicitation homogène, des accroissements considérables de déformation ou des diminutions considérables de tension se manifestent dans un laps de temps de quelques heures. La barreau n° 10 à section en T fléchi à âme tendue sous une tension très élevée a été observé après décharge pendant 120 heures. Les variations de déformations résiduelles ont été insignifiantes.

Il semble donc que dans le domaine élasto-plastique ( $M_e, M_p$ ) la flexion soit pratiquement instantanée et guère sous la dépendance de la durée. Les déformations accusées qui se produisent rapidement sous moment constant égal à  $M_p$  et qui résultent d'un travail extérieur ne constituent pas un fluage proprement dit. Quant à la relaxation, les théories I à VI indiquent qu'elle se produit pendant le phénomène instantané de flexion élasto-plastique.

Il est à remarquer que tout fluage de flexion dans le temps sous moment constant implique une relaxation s'il subsiste un noyau élastique; la théorie III fait seule exception.

### Conclusions

Le phénomène de la flexion plane simple élasto-plastique n'est pas encore élucidé d'un commun accord. Il en est de même à fortiori des flexions composées et gauches. Même si cela doit demander beaucoup de recherches, il est important pour la connaissance, la sécurité et l'économie des constructions que ces problèmes soient entièrement résolus. Ils ne peuvent l'être avec exactitude à partir des données établies pour les sollicitations homogènes.

### Remarque finale

Le même problème existe pour la torsion élasto-plastique d'une barre cylindrique en acier doux. Il est caractérisé par l'existence d'une phase de torsion à moment constant (palier). ROBERTSON et COOK [11] citent des expériences de torsion ayant donné  $R_s = \frac{3}{4} R_e$ , correspondant au rapport  $\frac{M_p}{M_e} = \frac{4}{3}$  pour la section circulaire. Ils étendent leur théorie (II) à la torsion. Les autres y sont naturellement adaptables avec leurs caractères propres.

### Bibliographie

1. N. M. DEHOUSSE: Note relative à un phénomène de surélasticité en flexion constaté lors d'un essai de barreau en acier doux. Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, mars 1962, p. 329—334.
2. R. HILTSCHER und G. FLORIN: Versuche zur statischen Fließlasterhöhung bei weichem Stahl. Materialprüfung, Bd. 4 (1962), Nr. 10, S. 363—368.
3. F. CAMPUS: Plastification de l'acier doux en flexion plane simple. Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, avril 1963, p. 303—314.
4. F. CAMPUS et CH. MASSONNET: Recherches sur le flambement de colonnes en acier A 37, à profil en double té, sollicitées obliquement. Bulletin du C.E.R.E.S., Liège, t. VII, 1955, p. 119—336.
5. B. P. HAIGH: The lower yield point in mild steel. Engineering, 2. 11. 34 et 16. 11. 34.
6. H. RÜSCH: Essai d'une nouvelle théorie à la flexion du béton armé. Mémoires du C.E.R.E.S., Liège, n° 2, 1961, p. 1—45.
7. F. CAMPUS: Fluage et relaxation des aciers à la température ordinaire. A.I.P.C., Cinquième Congrès, Lisbonne 1956, Rapport final, p. 181—188.
8. F. CAMPUS: Effets de la durée sur les phénomènes plastiques (d'après le fluage et la relaxation des aciers à la température ordinaire). Memoria presentata al Symposium su la plasticita nella scienza delle costruzioni in onore di Arturo Danusso, 1956, p. 83—92.
9. J. A. EWING: Strength of materials. 2d ed. 1899.
10. J. W. RODERICK and I. H. PHILLIPS: Carrying capacity of simply supported mild steel beams. Engineering Structures, Colston Papers, London, Butterworths scientific publications, 1949, p. 9—48.
11. A. ROBERTSON and G. COOK: The transition from the elastic state to the plastic state in mild steel. Proceedings of the Royal Society, London, Series A, Vol. LXXXVIII, 1913.
12. F. K. G. ODQUIST and C. SCHAUB: The yield point of mild steel at non-homogeneous and compound stress distributions. Transactions of the Royal Institute of Technology, Stockholm, No. 34, 1950, p. 3—16.
13. F. CAMPUS: Plastification de l'acier doux en flexion plane composée. Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, avril 1963, p. 315—319.
14. F. CAMPUS: Recherches, études et considérations sur les constructions soudées. Ed. Sciences et Lettres, Liège 1946, p. 183.
15. G. COLONNETTI: L'équilibre des corps déformables. Ed. Dunod, Paris 1955.
16. F. CAMPUS: Théorie du flambage par compression des pièces droites élasto-plastiques à plan moyen. Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, avril 1963, p. 320—328.
17. F. CAMPUS: La plastification de l'acier doux en flexion plane simple et composée et ses effets sur le flambage par compression des pièces droites élasto-plastiques. Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, mai 1963, p. 445—452.
18. Publications du 2e Congrès de l'A.I.P.C. Berlin 1936, thème I.

### Résumé

Des expériences de flexion plane pure et simple dans le domaine élasto-plastique montrent en général une élévation de la limite élastique. Diverses interprétations théoriques de ces expériences sont examinées, dont deux nouvelles. La question requiert encore des études expérimentales approfondies.



### **Zusammenfassung**

Versuche ebener reiner Biegung im elastoplastischen Bereich zeigen im allgemeinen eine Erhöhung der Fließgrenze. Verschiedene theoretische Betrachtungen dieser Versuchsergebnisse werden untersucht, wobei noch zwei neue Betrachtungsweisen aufgezeigt werden. Dieses Problem erfordert noch eingehende experimentelle Untersuchungen.

### **Summary**

Tests of plane pure bending in the elasto-plastic range generally show an increase in the yield point. Various theoretical formulations of these results are discussed, including two new interpretations. The question still requires exhaustive experimental research.