

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 26 (1966)

**Artikel:** Zur Berechnung der Schalentragswerke nach der Deformationsmethode  
**Autor:** Bele, Aurel A. / Soare, Mircea  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-20867>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zur Berechnung der Schalentragerwerke nach der Deformationsmethode

*On the Application of the Deformation Method to Shell Analysis*

*Sur le calcul des coques par la méthode des déformations*

AUREL A. BELEŞ

Professor Dipl.-Ing., Bukarest, Mitglied  
der Akademie der Sozialistischen Repu-  
blik Rumänien, Mitglied der IVBH und  
IASS

MIRCEA SOARE

Dr.-Ing., Bukarest, Mitglied der IVBH  
und IASS

## 1. Einleitung

Bekanntlich kann der Spannungs- und Verformungszustand einer beliebigen Struktur nach drei Methoden bestimmt werden, und zwar nach der Kräfte-  
methode, der Deformationsmethode und der gemischten Methode.

Im Falle der Schalentragerwerke scheint die Anwendung der *Kräfte-  
methode* weniger bequem zu sein und ist dem Wissen der Verfasser nach nur von  
FINSTERWALDER [6] bei der Berechnung nach der Biegetheorie von Kreis-  
zylinderschalendächern angewendet worden.

Am meisten wird die *gemischte Methode* verwendet, in welcher alle interes-  
sierenden Größen mit Hilfe von zwei unbekannten Grundfunktionen ausge-  
drückt werden, und zwar der Spannungsfunktion  $F$ , Airyscher Art und der  
normalen Verschiebung (oder Durchbiegung)  $w$ .

In der *Deformationsmethode* sind die unbekannten Grundfunktionen die  
Verschiebungen  $u, v, w$  in bezug zu verschiedenen Koordinatensystemen<sup>1)</sup>.

Diese Methode wurde in der Fachliteratur weniger benützt. Wir möchten  
folgende Arbeiten erwähnen: FLÜGGE [7] und DISCHINGER [5] für die Behand-  
lung der Kreiszylinderschalen nach der Biegetheorie; Wlassow [15] für die  
Kreiszyylinder- und Kugelschalen, auch nach der Biegetheorie; NIKIREEW [11]

---

<sup>1)</sup> Als eine Ausnahme kann man die Kugelschale erwähnen, bei welcher Wlassow [15]  
als unbekannte Funktionen die Normalverschiebung  $w$ , die Volumendehnung  $\theta$  und die  
Normaldrehung  $\chi$  gewählt hat.

für das elliptische und Rotationsparaboloid nach der Membrantheorie und AASS jr. [1] nach der Biegetheorie; HRUBAN [10] für die Translationsschalen zweiten Grades; BONGARD [3] und auch GERARD [9] sowie CHETTY und TOTTENHAM [4] für das gleichseitige hyperbolische Paraboloid.

Im vorliegenden Beitrag nehmen wir uns vor zu beweisen, daß im Falle analytischer Lösungen eine enge Verbindung zwischen der gemischten und der Deformationsmethode besteht, wobei es die letzte in vielen Fällen erlaubt, die Ergebnisse auf einem einfacheren Wege zu erhalten.

Ebenso werden mit Hilfe dieser Methode einige Besonderheiten der Spannungs- und Verformungszustände des hyperbolischen und des von geradlinigen Erzeugenden begrenzten Sattelparaboloids besprochen, welches den Gegenstand zahlreicher Studien bildet und gegenwärtig eine breite Anwendung in der Praxis findet.

In diesem Sinne werden wir von vornherein die Grundgleichungen darstellen, die durch die gemischte Methode bestimmt werden, und nachher geben wir unter Benützung der Deformationsmethode die Grundgleichungen ausführlicher wieder.

## 2. Grundgleichungen der gemischten Methode

Die Schalengleichungen kann man in bezug auf verschiedene Koordinatensysteme schreiben, von welchen die kartesischen Koordinaten, die Hauptkrümmungslinien und die asymptotischen Linien die bequemsten sind.

In der auch im weiteren folgenden angenommenen Hypothese der flachen Schale können die Halbmesser der Hauptkrümmung, bzw. die zweiten Ableitungen der Mittelflächengleichung

$$z = z(x, y) \quad (1)$$

als konstant angenommen werden, was zu erheblichen Vereinfachungen in der Schreibung der Gleichungen und sogar in der Erhaltung der Lösungen führt.

Wenn wir mit

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad (2a)$$

die zweiten Ableitungen der Mittelflächengleichung (1) und mit

$$r_x \approx \frac{1}{r}, \quad r_y \approx \frac{1}{t} \quad (2b)$$

die Hauptkrümmungshalbmesser der Mittelfläche bezeichnen,  $E, \mu$  der Elastizitätsmodul bzw. die Poissonsche Querszahl,  $\delta$  die Schalenstärke (als konstant angenommen) und  $K = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)}$  die Biegefestigkeit der Schale darstellen, so lassen sich die zwei Grundgleichungen des Problems in bezug auf die Haupt-

krümmungslinien wie folgt schreiben:

$$K \Delta \Delta w - \Delta_1 F = Z, \quad (3a)$$

$$\Delta \Delta F + E \delta \Delta_1 w = 0. \quad (3b)$$

Die zwei in (3) vorkommenden Operationen sind entsprechend der Laplace-sche Operator

$$\Delta(\dots) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\dots)$$

und der gemischte Operator zweiter Ordnung

$$\Delta_1(\dots) = \left( t \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\dots).$$

Die äußere Belastung kann im Falle der flachen Schalen auf die normale Komponente reduziert werden.

Die Schnittkräfte  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy} = N_{yx}$ , die Momente  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy} = M_{yx}$  und die Querkräfte  $Q_x$ ,  $Q_y$  können mit Hilfe von  $F$  und  $w$  aufgestellt werden, wobei man die in der Fachliteratur bekannten Beziehungen anwendet (siehe z. B. [2], [4], [15]).

Bevor wir zur Deformationsmethode schreiten, ist es angebracht zu bemerken, daß das System (3) vereinfacht in eine einzige Gleichung mit partiellen Ableitungen 8-ter Ordnung umgewandelt werden kann durch die Einführung einer neuen Funktion  $\Omega$ :

$$F = -E \delta \Delta_1 \Omega, \quad (4a)$$

$$w = \Delta \Delta \Omega. \quad (4b)$$

Dadurch ist die Gleichung (3b) identisch erfüllt und (3a) wird zu

$$K \Delta \Delta \Delta \Delta \Omega + E \delta \Delta_1 \Delta_1 \Omega = Z. \quad (5)$$

### 3. Gleichungen der Deformationsmethode

Wenn man in den Elastizitätsbeziehungen die spezifischen Verformungen und Krümmungen in Abhängigkeit von  $u, v, w$  einsetzt, dann erhält man die Ausdrücke der Schnittkräfte, der Momente und der Querkräfte in Abhängigkeit von den Verschiebungen.

Die Einführung der so erhaltenen Ausdrücke in die drei Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0, \quad (6a)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \quad (6b)$$

$$r N_x + t N_y + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -Z, \quad (6c)$$



führt zu den drei Grundgleichungen der Deformationsmethode:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - (r+\mu t) \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (7a)$$

$$\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (t+\mu r) \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (7b)$$

$$-(r+\mu t) \frac{\partial u}{\partial x} - (t+\mu r) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{K}{D} \Delta \Delta w + (r^2 + 2\mu r t + t^2) w = \frac{Z}{D}. \quad (7c)$$

Auch in diesem Falle können die drei Grundgleichungen auf eine einzige Gleichung mit partiellen Ableitungen 8-ter Ordnung zurückgeführt werden durch die Einführung der Deformationsfunktion  $\Omega$  entsprechend den Beziehungen:

$$u = (r+\mu t) \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x^3} + [(2+\mu)r-t] \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x \partial y^2}, \quad (8a)$$

$$v = (t+\mu r) \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y^3} + [(2+\mu)t-r] \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x^2 \partial y}, \quad (8b)$$

$$w = \frac{\partial^4 \Omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Omega}{\partial y^4}. \quad (8c)$$

Es ist interessant zu bemerken, daß die  $w$ -Ausdrücke in den zwei Methoden — (4b) und (7c) — übereinstimmen.

Durch Einführung der Ausdrücke (8a), (8b) in das System (7) kann man feststellen, daß die ersten zwei Gleichungen identisch erfüllt sind, während die dritte Gleichung mit (5) übereinstimmt.

Falls man in den Beziehungen (8a) und (8b) die Operatoren  $\Delta$  und  $\Delta_1$  expliziert, so erhält man die von HRUBAN [10] gegebene Formulierung:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial x} [(1+\mu) \Delta_1 \Omega + (r-t) \Delta \Omega], \\ v &= \frac{\partial}{\partial y} [(1+\mu) \Delta_1 \Omega + (t-r) \Delta \Omega], \\ w &= \Delta \Delta \Omega. \end{aligned}$$

Für die Kreiszylinderschale von Halbmesser  $R$  nehmen wir  $r=0$ ,  $t=1/R$  an; die Gleichungen (7) und die Beziehungen (8) stimmen mit den von WLASSOW [15] in der technischen Theorie aufgestellten Beziehungen überein.

Analog finden wir für  $r=t=1/R$  die von WLASSOW [15] erhaltenen Ausdrücke im Falle einer flachen Kugelschale (die Koordinaten  $x$  und  $y$  sind in bezug auf die Mittelfläche angenommen).

Die Ergebnisse der Membrantheorie werden genau so einfach abgeleitet, indem man die Biegesteifigkeit verschwinden läßt ( $K \rightarrow 0$ ). Hiemit bleiben die Gleichungen (7a), (7b) unverändert, während die Gleichung (7c) folgende Form annimmt:

$$-(r + \mu t) \frac{\partial u}{\partial x} - (t + \mu r) \frac{\partial v}{\partial y} + (r^2 + 2\mu r t + t^2) w = \frac{Z}{D}.$$

Die Verschiebungsausdrücke (8) bleiben unverändert, während (5) zu einer Gleichung vierter Ordnung wird

$$\Delta_1 \Delta_1 \Omega = \frac{Z}{E \delta}. \quad (9)$$

Dies ist eine neue Formulierung der Deformationsmethode in der Membrannahme, welche von denen, die NIKIREEW [11] und BELEŞ und SOARE [2] angeführt haben, abweicht.

Des weiteren wollen wir annehmen, daß der allgemeine Spannungs- und Verformungszustand angenähert durch die Überlagerung einiger Randstörungen über die Membranergebnisse ausgedrückt werden kann, wobei erstere den einfachen Randeffect charakterisieren.

Es sei  $x = x_0$  der Rand, für welchen wir die Randstörungen bestimmen wollen. Der Spannungs- und Verformungszustand wird eine rasche Abklingung senkrecht zu dieser Randrichtung aufweisen, während von  $u, v, w$ -Verschiebungen nur die Normalverschiebung  $w$  eine vorherrschende Wichtigkeit haben. Die tangentialen Verschiebungen können gleich Null angenommen werden, während nur ihre Ableitungen in den Gleichungen (7) beibehalten werden müssen.

Die Beachtung der oben erwähnten Betrachtungen vereinfacht nach der Entfernung der rechten Seite die drei Gleichungen (7) wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (r + \mu t) \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \\ -(r + \mu t) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{K}{D} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (r^2 + 2\mu r t + t^2) w &= 0. \end{aligned}$$

Die obige zweite Gleichung kann entfernt werden, da sie die senkrechte Verschiebung zur Richtung der Randstörungen bestimmt; aus der ersten Gleichung erhält man durch Integration und der Vernachlässigung der Konstanten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (r + \mu t) w.$$

Indem wir diesen Wert in die vereinfachte dritte Gleichung einführen, und nach der Durchführung sämtlicher Vereinfachungen gleicher Ausdrücke, erhält man zum Schluß

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{E \delta t^2}{K} w = 0.$$

Wir haben auf dem schlichtesten Weg die Gleichung, welche den einfachen Randeffect kennzeichnet, wiedergefunden.

In dem nun folgenden wollen wir die erworbenen Ergebnisse zur Bestimmung einiger Eigenheiten des Verhaltens des hyperbolischen Sattelparaboloids anwenden.

#### 4. Analytischer Integrationsfall der Gleichungen (6)

Der Umstand, daß die Gleichungen mit partiellen Ableitungen (5) konstante Koeffizienten hat und nur Ableitungen gerader Ordnung aufweist, führt dazu eine Lösung mit Hilfe doppelter trigonometrischer Reihen zu erhalten, die im Falle eines rechteckigen Grundrisses gültig ist.

Wir nehmen an, daß der Ausdruck der äußeren Belastung nach einer doppelten trigonometrischen Reihe entwickelt werden kann

$$Z(x, y) = \sum_m \sum_n Z_{m,n} \sin m \pi \frac{x}{a} \sin n \pi \frac{y}{b}, \quad (10)$$

worin die Faktoren  $Z_{m,n}$  für jede gegebene Belastung bekannt sind. Ein analoger Ausdruck sei für die Verformungsfunktion gegeben

$$\Omega(x, y) = \sum_m \sum_n \Omega_{m,n} \sin m \pi \frac{x}{a} \sin n \pi \frac{y}{b}, \quad (11)$$

in welcher die Koeffizienten  $\Omega_{m,n}$  noch zu bestimmen sind.

Die Randbedingungen, welche von der obigen Lösungsart befriedigt werden, erhält man, indem man alle statischen und elastischen Größen mit Hilfe von (11) ausdrückt. Auf diesem Wege erhält man:

— *die Verschiebungen*

$$\begin{aligned} u &= -\pi^3 \sum_m \sum_n \Omega_{m,n} \left\{ (r + \mu t) \frac{m^3}{a^3} + [(2 + \mu)r - t] \frac{m n^2}{a b^2} \right\} \cos m \pi \frac{x}{a} \sin n \pi \frac{y}{b}, \\ v &= -\pi^3 \sum_m \sum_n \Omega_{m,n} \left\{ (t + \mu r) \frac{n^3}{b^3} + [(2 + \mu)t - r] \frac{m^2 n}{a^2 b} \right\} \sin m \pi \frac{x}{a} \cos n \pi \frac{y}{b}, \\ w &= \pi^4 \sum_m \sum_n \Omega_{m,n} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin m \pi \frac{x}{a} \sin n \pi \frac{y}{b}; \end{aligned} \quad (12a)$$

— *die Schnittkräfte*

$$\begin{aligned} N_x &= -E \delta \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta_1 \Omega = -\pi^4 E \delta \sum_m \sum_n \Omega_{m,n} \frac{n^2}{b^2} \left( t \frac{m^2}{a^2} + r \frac{n^2}{b^2} \right) \sin m \pi \frac{x}{a} \sin n \pi \frac{y}{b}, \\ N_y &= -E \delta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta_1 \Omega = -\pi^4 E \delta \sum_m \sum_n \Omega_{m,n} \frac{m^2}{a^2} \left( t \frac{m^2}{a^2} + r \frac{n^2}{b^2} \right) \sin m \pi \frac{x}{a} \sin n \pi \frac{y}{b}, \\ N_{xy} = N_{yx} &= +E \delta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta_1 \Omega = -\pi^4 E \delta \sum_m \sum_n \Omega_{m,n} \frac{m n}{a b} \left( t \frac{m^2}{a^2} + r \frac{n^2}{b^2} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \cos m \pi \frac{x}{a} \cos n \pi \frac{y}{b}; \end{aligned} \quad (12b)$$

— die Biege- und Drillmomente

$$\begin{aligned}
 M_x &= -K \Delta \Delta \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) = K \pi^6 \sum_m \sum_n \Omega_{m,n} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \mu \frac{n^2}{b^2} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \sin m \pi \frac{x}{a} \sin n \pi \frac{y}{b}, \\
 M_y &= -K \Delta \Delta \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \right) = K \pi^6 \sum_m \sum_n \Omega_{m,n} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \left( \frac{n^2}{b^2} + \mu \frac{m^2}{a^2} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \sin m \pi \frac{x}{a} \sin n \pi \frac{y}{b}, \\
 M_{xy} = M_{yx} &= +K (1 - \mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta \Delta \Omega = -K (1 - \mu) \pi^6 \sum_m \sum_n \Omega_{m,n} \frac{m n}{a b} \cdot \\
 &\quad \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \cos m \pi \frac{x}{a} \cos n \pi \frac{y}{b}.
 \end{aligned} \tag{12c}$$

Für  $x=0$  und  $x=a$  haben wir

$$v = w = 0, \quad N_x = N_y = 0, \quad M_x = M_y = 0$$

und analog für  $y=0$  und  $y=b$

$$u = w = 0, \quad N_x = N_y = 0, \quad M_x = M_y = 0.$$

Die Randbedingungen zeigen also eine gelenkige Lagerung der Schale an<sup>2)</sup>.

Die Konstanten  $\Omega_{m,n}$  lassen sich dadurch bestimmen, daß man die Ausdrücke (10) und (11) in (5) einführt. Auf diesem Wege erhält man nach der Durchführung sämtlicher Vereinfachungen

$$\Omega_{m,n} = \frac{Z_{m,n}}{K \pi^4} \frac{1}{\pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^4 + \frac{12 (1 - \mu^2)}{\delta^2} \left( t \frac{m^2}{a^2} + r \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \tag{13}$$

Wir schreiten nun zur Partikularisierung der Mittelflächenform.

Wenn wir annehmen, daß die Länge eines Bogens auf der flachen Mittelfläche gleich mit seiner Projektion in der  $x0y$ -Ebene ist, dann können die Koordinaten  $x, y$  als kartesische angenommen werden, und die Mittelfläche, für welche  $r, t = \text{konst.}$  ist, wird zu einer mittelpunktslosen Fläche zweiter Ordnung, und zwar zu einem elliptischen Paraboloid für  $rt > 0$  und einem hyperbolischen Sattelparaboloid für  $rt < 0$ .

Befassen wir uns mit dem zweiten Fall. Mit den Bezeichnungen von Fig. 1 schreibt sich die Gleichung der Mittelfläche und deren Ableitungen zweiter Ordnung wie folgt:

---

<sup>2)</sup> Allgemeinere Auflagerungsbedingungen können erhalten werden, indem man die Lösungen in der Form einfacher trigonometrischer Reihen sucht.

$$z = \frac{4f_1}{a^2}x(x-a) - \frac{4f_2}{b^2}y(y-b), \quad (14a)$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{8f_1}{a^2} > 0, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{8f_2}{b^2} < 0. \quad (14b)$$

Damit wird der Ausdruck (13) zu:

$$\Omega_{m,n} = \frac{Z_{m,n}}{K \pi^8} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^4 + \frac{768(1-\mu^2)}{\pi^4 \delta^2 a^4 b^4} (f_2 m^2 - f_1 n^2)^2}. \quad (15)$$

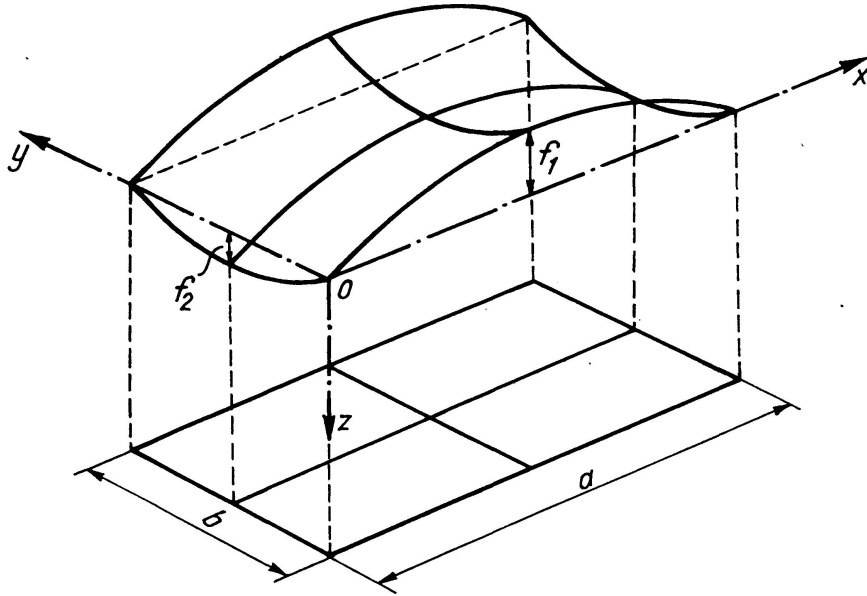


Fig. 1. Geometrische Elemente des hyperbolischen Sattelparaboloids

Zwecks Vereinfachung bezeichnen wir mit

$$\alpha = \frac{a}{b} \quad \text{das Seitenverhältnis,} \quad (16a)$$

$$\lambda = \frac{f_1}{f_2} \quad \text{das Verhältnis der Pfeile,} \quad (16b)$$

$$\beta = \frac{768(1-\mu^2)}{\pi^4} \left(\frac{f_2}{\delta}\right)^2 \quad \text{den Schalenparameter.} \quad (16c)$$

Der Ausdruck (15) erhält folgende Schluform:

$$\Omega_{m,n} = \frac{Z_{m,n} a^8}{K \pi^8} \frac{1}{(m^2 + \alpha^2 n^2)^4 + \beta \alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)^2}. \quad (17)$$

Von den in den Beziehungen (12) angefuhrten Groen werden wir nur  $w$ ,  $N_x$  und  $M_x$  explizite schreiben:

$$w = \frac{a^4}{K \pi^4} \sum_m \sum_n \frac{Z_{m,n} (m^2 + \alpha^2 n^2)^2}{(m^2 + \alpha^2 n^2)^4 + \beta \alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)^2} \sin m \pi \frac{x}{a} \sin n \pi \frac{y}{b}, \quad (18a)$$

$$M_x = \frac{a^2}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{Z_{m,n} (m^2 + \alpha^2 n^2)^2 (m^2 + \mu \alpha^2 n^2)}{(m^2 + \alpha^2 n^2)^4 + \beta \alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)^2} \sin m \pi \frac{x}{a} \sin n \pi \frac{y}{b}, \quad (18b)$$

$$N_x = \frac{a^2}{8 f_2} \sum_m \sum_n \frac{Z_{m,n} \beta \alpha^4 (m^2 - \lambda n^2) n^2}{(m^2 + \alpha^2 n^2)^4 + \beta \alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)^2} \sin m \pi \frac{x}{a} \sin n \pi \frac{y}{b}. \quad (18c)$$

Die vorherigen Ergebnisse werden wir für die Membrantheorie sowie für den Grenzfall einer Platte mit den Seitenlängen  $a, b$  partikularisieren.

Damit wir zur Membrantheorie gelangen, genügt es, die Biegesteifigkeit der Schale verschwinden zu lassen, also  $K \rightarrow 0$ , und die Schalenstärke als sehr klein anzunehmen, also  $\beta \rightarrow \infty$ , wobei aber  $K \beta = \frac{64}{\pi^4} E \delta f_2^2$ ; aus (18) folgt<sup>3)</sup>

$$\begin{aligned} w &= \frac{b^4}{64 E \delta f_2^2} \sum_m \sum_n \frac{Z_{m,n} (m^2 + \alpha^2 n^2)^2}{(m^2 - \lambda n^2)^2} \sin m \pi \frac{x}{a} \sin n \pi \frac{y}{b}, \\ M_x &= \frac{a^2}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{Z_{m,n} (m^2 + \alpha^2 n^2)^2 (m^2 + \mu \alpha^2 n^2)}{\beta \alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)^2} \sin m \pi \frac{x}{a} \sin n \pi \frac{y}{b}, \quad (19) \\ N_x &= \frac{a^2}{8 f_2} \sum_m \sum_n \frac{Z_{m,n} n^2}{m^2 - \lambda n^2} \sin m \pi \frac{x}{a} \sin n \pi \frac{y}{b}. \end{aligned}$$

Der Plattenfall ergibt sich ohne weiteres beim Verschwinden der Krümmungen ( $r=t=0$ ) oder der Pfeilhöhen ( $f_1=f_2=0$ ). In den Beziehungen (18) nehmen wir  $\beta=0$  an:

$$\begin{aligned} w &= \frac{a^4}{K \pi^4} \sum_m \sum_n \frac{Z_{m,n}}{(m^2 + \alpha^2 n^2)^2} \sin m \pi \frac{x}{a} \sin n \pi \frac{y}{b}, \\ M_x &= \frac{a^2}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{Z_{m,n} (m^2 + \mu \alpha^2 n^2)}{(m^2 + \alpha^2 n^2)^2} \sin m \pi \frac{x}{a} \sin n \pi \frac{y}{b}, \quad (20) \\ N_x &= 0. \end{aligned}$$

Wir können nun eine wichtige Betrachtung anstellen, die an das Vorhandensein von zwei Systemen geradliniger Erzeugenden in der Mittelfläche gebunden ist. Die Erzeugenden zweier Systeme bilden untereinander einen Winkel, dessen Projektion in der  $xOy$ -Ebene den Winkel  $\omega$  darstellt, welcher durch folgende Beziehung gegeben ist:

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}. \quad (21)$$

<sup>3)</sup> Der Ausdruck des Biegemomentes folgt aus der Elastizitätsbeziehung  $M_x = -K (\partial^2 w / \partial x^2 + \mu \partial^2 w / \partial y^2)$ , obwohl die Momente in den Gleichgewichtsbedingungen vernachlässigt wurden. Wenn die erhaltenen Ergebnisse klein sind, dann erscheint die Anwendung der Membranhypothese als gerechtfertigt.

Es sei nun ein Punkt  $P_1$  auf der Projektion des Schalenumrisses in der  $xOy$ -Ebene gelegen. Durch diesen Punkt gehen zwei Erzeugende. Wir wollen nun eine von den Erzeugenden betrachten welche im Punkte  $P_2$  das zweite Mal den Umriß trifft. Bei der Verfolgung der Erzeugenden dieses zweiten Systems gelangen wir im Punkte  $P_2$  wieder auf den Umriß usf.

Beim Nachgehen dieser Bahn können zwei Lagen eintreten, und zwar:

- a) man kommt niemals zum Ausgangspunkt  $P_1$  zurück;
- b) nach einer endlichen Anzahl von Zickzack-Wegen gelangt man von neuem nach  $P_1$ .

Wir werden im folgenden die Bedingung suchen, damit der oben erwähnte Fall b) zustande kommt.

Wenn  $A, B, C, D$  die Ecken des Rechteckes mit den Seiten  $ab$  darstellen, so sieht man sehr leicht aus Fig. 2, daß die Bedingung, von Ausgangspunkt  $P_1$  wieder nach  $P_1$  zurückzukommen, gleichbedeutend ist mit der Bedingung, von der Ecke  $A$  ausgehend nach der Ecke  $B$  oder  $C$  zu gelangen.

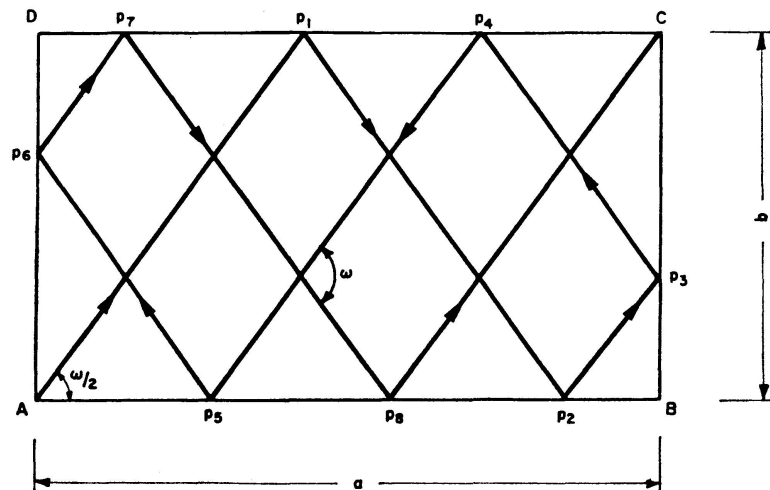


Fig. 2. Geschlossener Weg der geradlinigen Erzeugenden bei rechteckigem Umriß

Aus einfachen geometrischen Überlegungen folgt

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{m b}{n a} \quad (m, n \text{ ganzzahlig}). \quad (22)$$

Durch Vergleichen der Beziehungen (21) und (22) folgt die Bedingung

$$\lambda = \frac{f_1}{f_2} = \frac{m^2}{n^2}. \quad (23)$$

welche nur von dem Verhältnis der Pfeile abhängt.

Die Beziehung (23) ist jedoch mit

$$m^2 - \lambda n^2 = 0 \quad (24)$$

gleichwertig.

Kehren wir nun zu den Ausdrücken (19) zurück, welche die Membrantheorie kennzeichnen, so stellen wir fest, daß für diejenigen  $m, n$ -Glieder der äußeren Belastung, welche die Beziehung (24) befriedigen, die  $w$ -Durchbiegungen und die Schnittkräfte unendlich groß werden.

Dies bedeutet vom physikalischen Standpunkt aus, daß für die Annahme der gelenkigen Lagerung und für die entsprechenden  $m, n$ -Glieder die Schale nicht als eine Membran wirkt und daß die Übernahme der äußeren Belastung durch einen Biegungszustand übernommen werden muß.

Tatsächlich, wenn wir in den Ausdrücken (18) die Beziehung (24) berücksichtigen, kommen wir wieder zu den Ausdrücken (20) zurück. Mit anderen Worten verschwindet der günstige Krümmungseffekt und für die  $m, n$ -Glieder, welche die Beziehung (24) befriedigen, verhält sich das hyperbolische Sattelparaboloid wie eine Platte mit den Seitenlängen  $a b$ .

Mit derselben Methode der doppelten trigonometrischen Reihen haben FLÜGGE und CONRAD [8], in einer kurzen Anmerkung, das durch eine mittige Einzellast angegriffene hyperbolische Paraboloid studiert.

Die geometrischen Elemente sind so gewählt worden, damit die Krümmungen gleich, aber entgegengesetzt sind. Bei der Benützung von nur drei Reihengliedern gelangen sie zu dem Schluß, daß die Steifigkeit des hyperbolischen Paraboloids angenähert gleich einer Platte ist.

Dieses Ergebnis kann dadurch erklärt werden, daß der von ihnen untersuchte Fall gerade dem oben erwähnten Sonderfall entspricht; dies Ergebnis ist nicht allgemeiner Art.

Als allgemeine Bemerkung können wir erwähnen, daß beim Nichtvorhandensein einer elektronischen Rechenmaschine die Methode der doppelten trigonometrischen Reihen für zahlenmäßige Berechnungen nicht bequem ist. Die Berücksichtigung einer kleinen Gliederanzahl ist absolut ungenügend wegen der schwachen Reihenkonvergenz, auch im Falle verteilter Lasten [2], [13].

## 5. Durch geradlinige Erzeugende begrenztes hyperbolisches Paraboloid

Ähnlich des von WLASSOW [15] in bezug auf die Hauptkrümmungslinien aufgestellten Systems (7) kann folgendes Gleichungssystem abgeleitet werden mit Bezug auf die asymptotischen Linien [4]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - (1-\mu)s \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (25a)$$

$$\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (1-\mu)s \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (25b)$$

$$-(1-\mu)s \frac{\partial u}{\partial y} - (1-\mu)s \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{D} \Delta w + 2(1-\mu)s^2 w = \frac{Z}{D}. \quad (25c)$$



Für flache Schalen können die  $x, y$ -Koordinaten desgleichen als kartesisch angesehen werden, während die *Verwindung*  $s$  konstant ist.

Die Mittelfläche ist das gleichseitige hyperbolische Paraboloid

$$z = sxy,$$

worin  $s$  dimensional einen Längenkehrwert darstellt.

REISSNER [12] hat folgenden merkwürdigen Fall erwähnt, bei welchem die Ergebnisse der Membrantheorie streng mit denjenigen der Biegetheorie übereinstimmen, und zwar das am Umriß gelenkige hyperbolische Paraboloid, welches mit einer gleichförmig verteilten Last in der  $xOy$ -Ebene belastet ist; dies Paraboloid weist keine Durchbiegungen auf, während in der Schale nur Schubkräfte in parallelen Richtungen zu den Koordinatenachsen auftreten.

Für die obige Belastung hat SOARE [14] bewiesen, daß dieses Ergebnis auch in dem Falle der Schalenrandeinspannung gültig ist.

Wir nehmen uns des weiteren vor, die allgemeine Belastung zu finden, für welche die Membran- und Biegetheorie zu gleichen Ergebnissen führen.

Wir nehmen nach REISSNER [12] an, daß  $w=0$  die Lösung des Problems darstellt. Daraus folgt, daß die Momente und die Querkräfte über die ganze Schale verschwinden. Eine zweite Auflagerungsbedingung betreffs des Platten-effektes bleibt beliebig.

Damit vereinfacht sich das System (25) wie folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \quad (26a)$$

$$\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (26b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{Z}{2D(1-\mu)s}. \quad (26c)$$

Durch sukzessive Ausscheidung der tangentialen  $u$ - und  $v$ -Verschiebungen zwischen den Gleichungen (26) folgt die Bedingung

$$\Delta \Delta Z = 0, \quad (27)$$

die besagt, daß der Ausdruck der normalen Belastung eine biharmonische Funktion ist. Der Fall einer gleichmäßig verteilten Last ist augenscheinlich ein Sonderfall der Beziehung (27).

Aus den Rechnungen folgt, daß auch die  $u, v$ -Verschiebungen dieselbe biharmonische Gleichung befriedigen.

Beachtet man, daß die Schubspannung in Abhängigkeit der Verschiebungsfunktion mit Hilfe der Beziehung

$$N_{xy} = N_{yx} = D \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2sw \right)$$

ausgedrückt wird und führt man in der rechten Seite das erste Glied der Gleichung (26c) ein, so folgt

$$N_{xy} = N_{yx} = -\frac{Z}{2s}.$$

Wir haben so das Ergebnis der Membrantheorie wiedergefunden. Andere Belastungsfälle sind in der Monographie von BELEŞ und SOARE [2] angegeben.

Die Ableitung der normalen Kräfte geschieht am einfachsten mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen (6a), (6b), während die Bestimmung der Integralfunktionen aus den Randbedingungen folgt.

### Literatur

1. A. AASS, jr.: A Contribution to the Bending Theory of Elliptic Paraboloid Shells. International Association for Bridge and Structural Engineering. Publications. Zürich, Vol. 23 (1963).
2. A. A. BELEŞ, M. SOARE: Paraboloidul eliptic și hiperbolic în construcții. Ed. Academiei R.P.R., București, 1964.
3. W. BONGARD: Zur Theorie und Berechnung von Schalentragwerken in Form gleichseitiger hyperbolischer Paraboloiden. Bautechnik-Archiv, H. 15, Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin, 1959.
4. S. M. K. CHETTY, H. TOTTENHAM: An Investigation into the Bending Analysis of Hyperbolic Paraboloid Shells. Indian Concrete Journal, 38, 7 (1964).
5. F. DISCHINGER: Die strenge Theorie der Kreiszylinderschale in ihrer Anwendung auf die Zeiß-Dywidag-Schalen. Beton und Eisen, 34, 16 (1935); 34, 18 (1935).
6. U. FINSTERWALDER: Die Theorie der Kreiszylinderschalen. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Abhandlungen I.V.B.H., Zürich, 1932.
7. W. FLÜGGE: Statik und Dynamik der Schalen (2. Aufl.). Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1958.
8. W. FLÜGGE, D. A. CONRAD: A Note on the Calculation of Shallow Shells. Transactions of the A.S.M.E., Series E, Journal of Applied Mechanics, 683—685, Dec. 1959.
9. F. A. GERARD: The Analysis of Hyperbolic Paraboloidal Shell Roofs. Trans. of the E.I.C., 3, 1, 32—42, 1959.
10. K. HRUBAN: Teorie časového průběhu deformace plochých skořepin. Stavebnický Časopis, XII, 4, 201—214 (1964).
11. V. V. NIKIREEV: Berechnung flacher Schalen unter dem Angriff senkrechter Lasten (in russischer Sprache). Stroitel'naja mekhanika i raschet sooruzenii, I, 6, 1—9 (1959).
12. E. REISSNER: On Some Aspects of the Theory of Thin Elastic Shells. Journal Boston Society of Civil Engineers, Apr. 1955.
13. M. SOARE: Beiträge zur Biegetheorie des hyperbolischen Sattelparaboloids (in rumänischer Sprache). Studii și cercetări de mecanică aplicată. Ed. Acad. R.P.R., XIII, 2 (1962).
14. M. SOARE: Zur numerischen Behandlung von Hyparschalen nach der Biegetheorie. Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl. Tome 10, No. 1, 1965.
15. W. S. WLASSOW: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie-Verlag, Berlin, 1958.

### **Zusammenfassung**

Es wird bewiesen, daß im Falle analytischer Lösungen eine enge Verbindung zwischen der gemischten und der Deformationsmethode besteht, wobei die letztere in vielen Fällen erlaubt, die Ergebnisse auf einfacherem Wege zu erhalten.

Desgleichen werden einige Besonderheiten der Spannungs- und Verformungszustände des hyperbolischen und des von geradlinigen Erzeugenden begrenzten Sattelparaboloids besprochen.

### **Summary**

A close relationship is shown to subsist, in the case of analytical solutions, between the mixed method and the deformation method, but the latter makes it possible in many cases, to obtain the results in a simpler manner.

Some peculiarities of the state of stress and strain of the saddle hypar and of the hypar bounded by asymptotic lines are then examined.

### **Résumé**

Les auteurs montrent que, dans le cas des solutions analytiques, il y a des relations étroites entre la méthode mixte et la méthode des déformations; cette dernière permet toutefois en maints cas d'obtenir les résultats d'une manière plus simple.

On explique certaines particularités de l'état de contraintes et de déformations du paraboloïde hyperbolique en forme de selle et du paraboloïde hyperbolique délimité par des lignes asymptotiques.