# Beitrag zur Stabillitätsuntersuchung von Stabwerken mit Imperfektionen

Autor(en): **Beer, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **26 (1966)**

PDF erstellt am: **01.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20866

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung von Stabwerken mit Imperfektionen

*On the Stability of Structures Composed of Struts with Imperfections*

*Sur la stabilité des systèmes dont les barres présentent des imperfections*

H. BEER
Technische Hochschule Graz

## A. Einleitung

Die Stabilitätsuntersuchung von planmäßig zentrisch gedrückten Stäben mit baupraktisch unvermeidbaren Fehlerhebeln als Gleichgewichtsproblem wurde erstmalig von TH. VON KÁRMÁN [1] theoretisch behandelt. M. ROŠ und BRUNNER [2] haben dann auf Grund eines Näherungsverfahrens Kurventafeln aufgestellt, die mit der Exzentrizität als Parameter die Traglast des Gelenkstabes in Funktion der Schlankheit ergeben. E. CHWALLA [3] behandelt eingehend die Theorie des elastisch nachgiebig eingespannten Stabes im elastisch-plastischen Bereich, wobei er ein beliebiges Spannungs-Dehnungs-Gesetz für das Material zugrunde legt. Er ermittelt für bestimmte Exzentrizitäten als Parameter die Grenzschlankheiten in Funktion der Stabausbiegungen, bei denen ein Gleichgewicht gerade noch möglich ist, und erhält, wenn man als weitere Parameter den Einspanngrad $c$ und die Grundspannung $\sigma_m$ annimmt, eine Familie von Kurvenscharen, die für den Rechteckquerschnitt das Problem der Tragkraft des Stabes umschreibt. F. STÜSSI [4] betrachtet den Gelenkstab und wendet für die Ermittlung der Ausbiegungslinie $y$ in jedem Punkt aus der Stabkrümmung $\eta''$ — die er für angenommene Dehnungsdiagramme ermittelt — die Seilpolygongleichung an. STÜSSI gelangt mit Hilfe schrittweiser Annäherung zur Grenzschlankheit, wobei auch Eigenspannungen im Stab berücksichtigt werden.

Ein allgemeines Verfahren zur Ermittlung der Traglast des gelenkig gelagerten Stabes mit Imperfektionen geometrischer und struktureller Natur (Eigenspannungen, Streckgrenzenstreuung) entwickelt M. MARINČEK [5]. Durch Einführung des Korrektionsfaktors $K$ läßt sich die Differentialgleichung der Stabkrümmung auf nichtlineare Verhältnisse anwenden und der Einfluß

aus den Imperfektionen berücksichtigen. MARINČEK geht in seiner Ableitung des Korrektionsfaktors vom idealisierten Spannungs-Dehnungs-Gesetz des Baustahls aus und begründet diese Annahme damit, daß der eigenspannungsfreie Stab diesem Gesetz mit guter Näherung folgt. G. WÄSTLUND und S. G. BERGSTRÖM [6] bringen interessante Vergleiche der Traglast bei Annahme verschiedener Spannungs-Dehnungs-Diagramme. Schließlich behandelt K. KLÖPPEL [7] in Theorie und Versuch die Traglast eines exzentrisch gedrückten I-Profils.

Bisher fehlt aber eine systematische Behandlung der Traglastermittlung von Stabwerken mit Imperfektionen als Gleichgewichtsproblem, wobei ein beliebiges Spannungs-Dehnungs-Diagramm und sowohl geometrische als auch strukturelle Imperfektionen zugrunde zu legen sind. Der Verfasser setzt sich in dieser und in weiter folgenden Arbeiten, die er zur Zeit gemeinsam mit G. SCHULZ durchführt, das Ziel, die Grundlagen für diese Traglastberechnung zu entwickeln, wobei es sich zunächst nicht um die Aufstellung einer Berechnungsmethode, sondern um die Gewinnung grundsätzlicher Erkenntnisse über das Verhalten des gedrückten Einzelstabes im Verband mit anderen Stäben und die Grenzbelastung des Gesamtsystems handelt. In der vorliegenden Arbeit wird als Grundfall ein Mehrstabknoten (Fig. 1) behandelt, wobei die Stäbe als nachgiebig eingespannt betrachtet werden. Hierbei ist es grundsätzlich gleichgültig, ob diese Einspannung proportional den Reaktionen ist oder

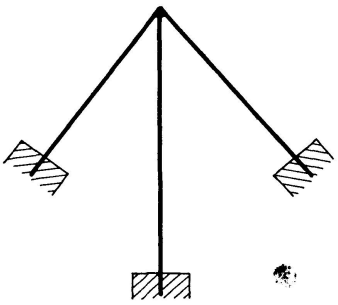

Fig. 1. Mehrstabknoten.

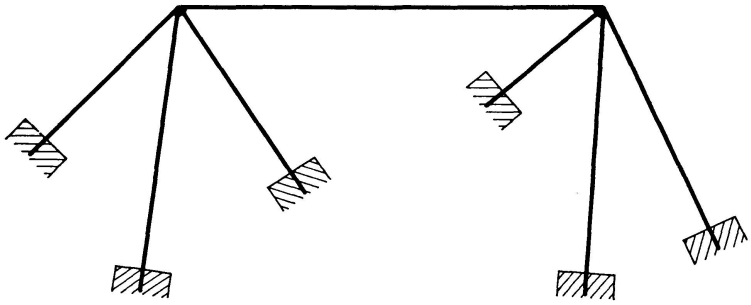

Fig. 2. System mit zwei Mehrstabknoten.

einem beliebigen anderen Gesetz folgt. In der ersten Phase der Berechnung wird angenommen, daß der Knoten unverschieblich, aber frei verdrehbar ist. Die Erweiterung soll sich dann auf den frei verschieblichen Knoten und auf ein System mit zwei Mehrstabknoten erstrecken, bei dem diese beiden Knoten durch einen Verbindungsstab zur gemeinsamen Wirkung gelangen (Fig. 2), um so die Grundelemente für die Behandlung von Stabwerken zu schaffen. Erst wenn diese Fragen prinzipiell geklärt sind, kann ein Bemessungsverfahren entwickelt werden, für das geeignete Unterlagen in Form von Familien von Kurvenscharen für die gebräuchlichen Querschnittsformen und unter Annahme bestimmter Imperfektionen ausgearbeitet werden müssen. Da hierfür elektronische Rechenanlagen zur Verfügung stehen, ist dieses Ziel in reale Nähe gerückt.

## B. Ermittlung der Traglast des Mehrstabknotens

Im weiteren Verlauf sollen ebene Stabwerke betrachtet werden, bei denen die Ausweichform in der Systemebene liegt. Für die Ermittlung der Formänderungen setzen wir das Ebenbleiben der Querschnitte, aber nur für die äußere Belastung, voraus und treffen die Annahme, daß die Stabkrümmung $\rho$ genügend genau durch die zweite Ableitung der Biegelinienordinaten $\eta$ ausgedrückt werden kann. Wir legen ein beliebiges Spannungs-Dehnungs-Gesetz für das Material zugrunde, das sowohl über den Querschnitt als auch über die Stablänge veränderlich sein kann. Damit sind wir auch in der Lage, beliebige Verbundquerschnitte zu behandeln. Wir betrachten geometrische und strukturelle Imperfektionen sowie Querlasten. Als geometrische Imperfektionen werden eine Exzentrizität des Kraftangriffes im Knoten und eine Säbelkrümmung der Stäbe sowie Abweichungen der Querschnitte von den Sollmaßen angenommen, während die strukturelle Imperfektion sich aus den Eigenspannungen aus dem Schweiß- und Walzprozeß ergibt. Die Querlasten bestehen aus Einflüssen, welche im allgemeinen bei Stabilitätsuntersuchungen rechnerisch nicht besonders erfaßt werden, wie z. B. Eigengewicht für nicht lotrecht stehende Stäbe und Windbelastung auf die Stäbe selbst.

Zusammenfassend soll es sich bei allen Einflüssen um *Imperfektionen* handeln, d. h. um Abweichungen des Ausführungsfalles, von dem der ideellen Stabilitätsberechnung zugrunde gelegten System. Systeme mit planmäßigen Querlasten, deren Versagen durch überwiegendes Biegefließen erfolgt, sollen hier nicht betrachtet werden, vielmehr soll geradezu als Charakteristikum gelten, daß die Steigerung der Normalkräfte zum Versagen führt.

Zunächst betrachten wir die einzelnen Stäbe aus dem Verband gelöst, aber mit der Auflage, daß für die jeweilig betrachteten Laststufen die Randbedingungen sowohl an der Einspannstelle als auch am Knoten während des ganzen Berechnungsganges erfüllt sind.

Wir beachten, daß auch bei konstant gehaltener Normalkraft das Superpositionsgesetz nicht gilt und daß daher immer bei der Betrachtung vom Endzustand ausgegangen werden muß. Da dieser nicht von vorneherein bekannt ist, muß der Weg einer schrittweisen Näherung gegangen werden. Der Einzelstab mit geometrischen und strukturellen Imperfektionen steht demnach unter dem Einfluß einer Normalkraft und einer Querlast sowie von Randmomenten aus der nachgiebigen Einspannung an der Auflagerstelle und am Knoten (siehe Fig. 10). Die Normalkräfte werden zunächst nach der Theorie 1. Ordnung ermittelt, was aber keine Einschränkung bedeutet, da die Verbesserung nach der Theorie 2. Ordnung unter Berücksichtigung aller Imperfektionen nach jeder abgeschlossenen Iteration erfolgen kann.

Wir gehen von den zwei Grunddiagrammen von STÜSSI $\bar{P}=f(\bar{\eta}'')$ und $\bar{P}=f(\bar{y})$ aus (Fig. 3), die wir für ein beliebiges Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Materials (Fig. 4) ermitteln. Da wir Eigenspannungen voraussetzen, be-

steht die Dehnungsverteilung über den Querschnitt aus einem linearen Anteil, der aus der Belastung herrührt und einem nichtlinearen Anteil infolge der vorhandenen Eigenspannungen. Die Veränderung der Neigung zur Bestimmung der Grunddiagramme erfolgt jedoch nur für den linearen Anteil.

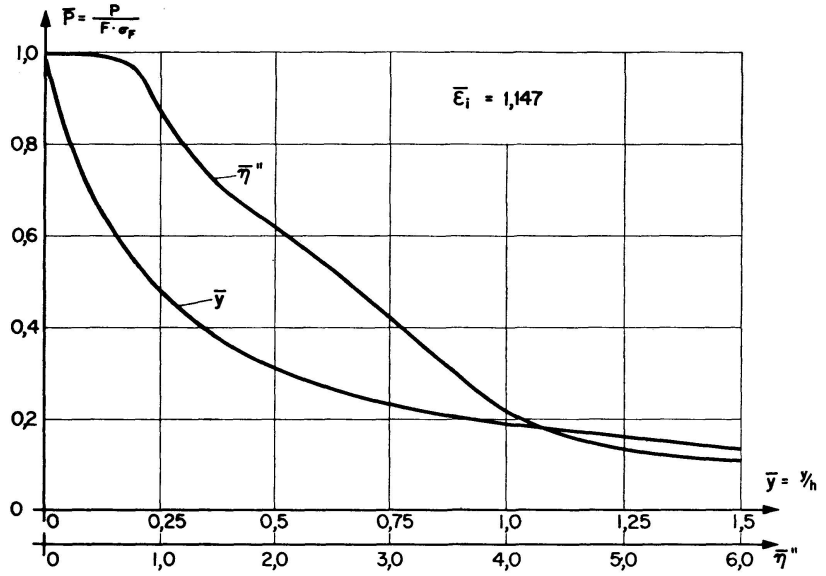


Fig. 3. Grunddiagramm $\bar{P} = f(\bar{\eta}'')$ und $\bar{P} = f(\bar{y})$ für die Dehnung $\epsilon_i = 1{,}147$ am inneren Querschnittsrand.

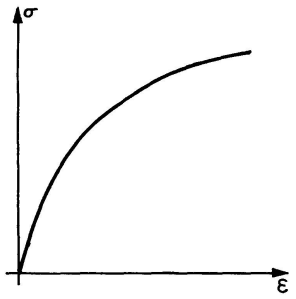


Fig. 4. Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines beliebigen Materials.

Um die einzelnen Punkte der Lastverformungskurve zu bekommen, kann man für ein angenommenes $M_l$ das zugehörige $M_r$ schätzen und mit Hilfe der «$w$»-Gewichte nach Müller-Breslau die Biegelinie rechnen und die Iteration bei konstant gehaltenem $M_l$ so lange fortsetzen, bis die Biegelinie mit der vorher erhaltenen übereinstimmt und die Verträglichkeitsbedingungen an der Einspannstelle erfüllt sind (Fig. 5). Läßt man nun $M_l$ ansteigen, so nehmen die Formänderungen progressiv zu bis der Scheitel der Kurve erreicht ist.

Mit Hilfe dieses Verfahrens erhält man jedoch nur über die variable Stablänge bzw. Schlankheit den absteigenden Ast dieser Kurve, was im vorliegenden Fall einen großen Umweg bedeuten würde. Außerdem zeigte die Zahlenrechnung auch für den aufsteigenden Ast eine schlechte Konvergenz, da das Erfüllen von Randbedingungen durch Iteration ungünstig ist und daher zu langen Rechenzeiten auf der elektronischen Rechenanlage führt.

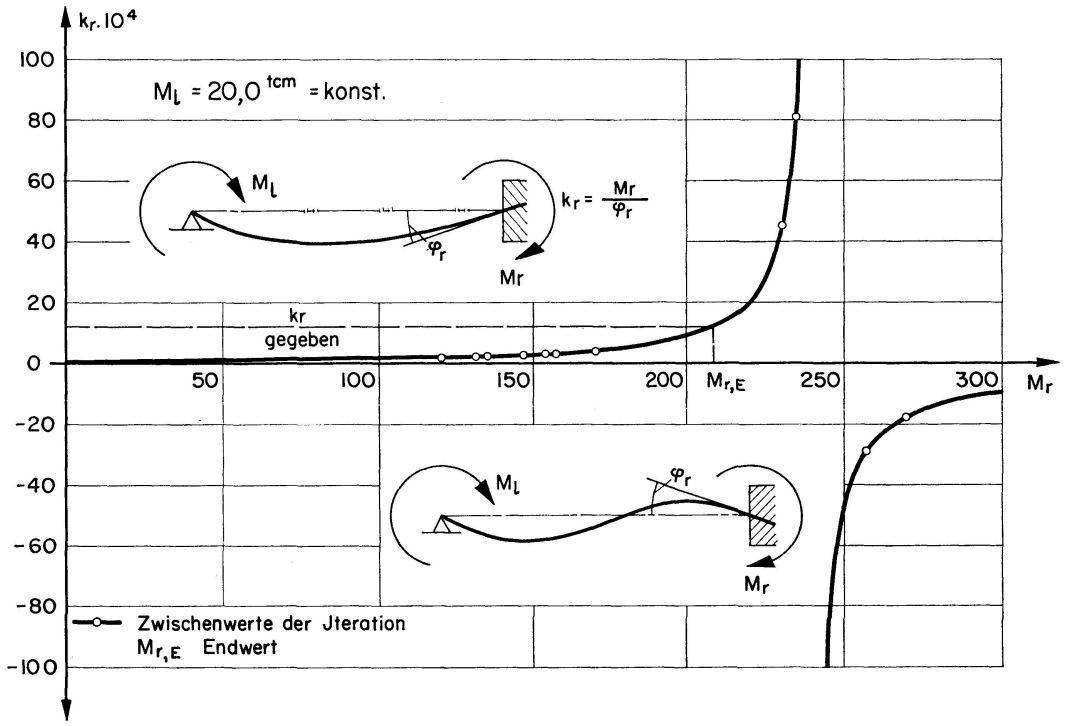


Fig. 5. Darstellung des Verlaufes der Iteration zur Erfüllung der Verträglichkeitsbedingungen an den Einspannstellen.

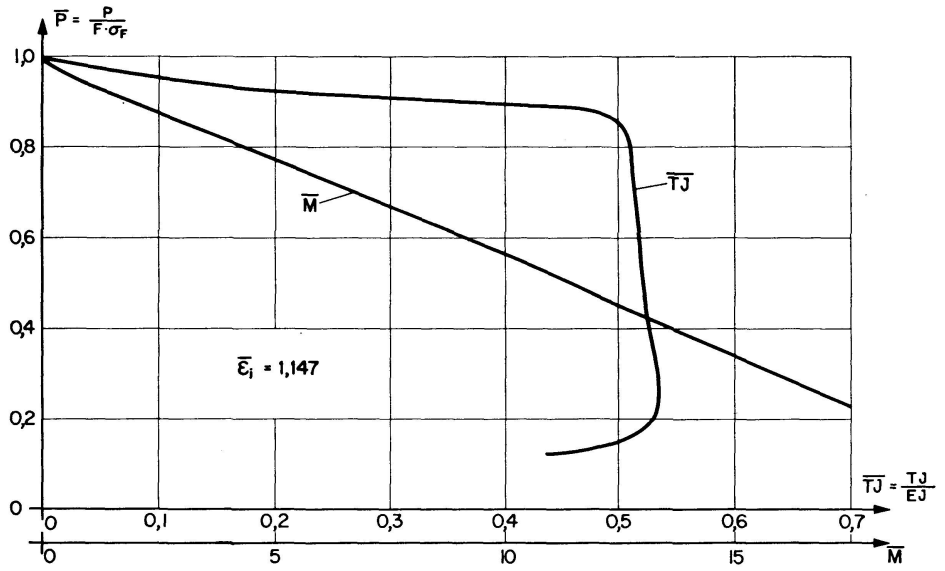


Fig. 6. Grunddiagramme $\bar{P} = f(\overline{TJ})$ und $\bar{P} = f(\bar{M})$ für die Dehnung $\bar{\epsilon}_i = 1{,}147$ am inneren Querschnittsrand.

Für unseren Fall ist es notwendig, das Tragverhalten des Systems auch nach Überschreiten der maximalen Momentenaufnahmefähigkeit für den Einzelstab zu verfolgen, da dieses Verhalten für die Beurteilung der Tragsicherheit des Stabwerkes bekannt sein muß. Es wurde daher ein neuer Weg zur Ermittlung der Last-Formänderungsverhältnisse beschritten. Zunächst mußten hierfür die Grunddiagramme anders aufgebaut werden. Mit $TJ$ als Biegesteifigkeit

und $M$ als Exzentrizitätsmoment werden die beiden Diagramme $\overline{P}=f(\overline{TJ})$ und $\overline{P}=f(\overline{M})$ (Fig. 6) ermittelt und als Ausgangspunkt für die weitere Iteration benützt. Wir nehmen hierzu wiederum nach STÜSSI einen linearen Dehnungsverlauf über den Querschnitt an, der einem noch nicht bekannten Normalkraftsanteil entspricht und überlagern diesen Dehnungsanteil mit den Dehnungen aus den Eigenspannungen. Sodann berechnen wir mit Hilfe des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes des Materials die zu diesen Gesamtdehnungen zugehörigen Spannungswerte sowie den Verformungsmodul $T$ (Fig. 7).

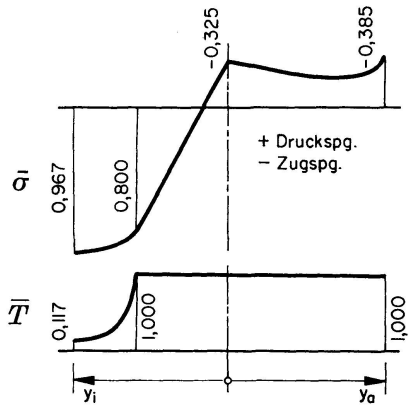


Fig. 7. Verlauf der Spannung $\bar{\sigma}$ und des Verformungsmoduls $\overline{T}$ über den Stabquerschnitt infolge äußerer Belastung und Eigenspannungen.

Der weitere Rechnungsgang besteht nun in der Rückrechnung der angreifenden Druckkräfte und der Exzentrizität aus den Gleichgewichtsbedingungen und die Bildung von $M=Py$ sowie in der Bestimmung der Biegesteifigkeit $TJ$ für $T(y)$ aus dem $\sigma$-$T$-Diagramm durch numerische Integration.

Für die Ermittlung des Last-Verformungsdiagrammes betrachten wir den druckbelasteten Stab mit den vorhandenen statischen und geometrischen Randbedingungen und den geometrischen Imperfektionen sowie der Querlast. Die Iteration geht nun folgendermaßen vor sich: für eine angenommene Normalkraft und vorgegebene Stabendverdrehung am Knoten werden die endgültige Form der Biegelinie und die Stabendmomente gesucht. Hierbei beginnt man die Iteration mit geschätzten Biegemomenten $M_l$ und $M_r$ an den Stabenden und einer geschätzten Biegelinie und rechnet mit Hilfe der «$w$»-Gewichte eine neue Biegelinie. Der Zusammenhang zwischen den Querschnittsmomenten und den Biegesteifigkeiten ($TJ$) wird durch das $TJ$-$M$-Diagramm hergestellt, das durch Auswertung der Familie der Grunddiagramme mit der angenommenen Normalkraft erhalten wird. Nach diesem ersten Schritt sind sowohl die Randbedingungen noch nicht erfüllt als auch die erhaltene Biegelinie mit den zugehörigen $TJ$-Werten noch nicht endgültig.

Um nun den Iterationsgang zu beschleunigen und gleichzeitig bei jedem Schritt die Randbedingungen zu erfüllen, wird die verzerrte Momentenbelastung in vier Teile aufgespalten (Fig. 8), von denen drei Teile, nämlich

der Momentenanteil aus der Normalkraft zufolge Exzentrizität und Säbelkrümmung, aus der Querlast und aus den Ordinaten der im ersten Schritt verbesserten Biegelinie konstant gehalten werden, während für den vierten Anteil die Stabendmomente $M_l$ bzw. $M_r$ als Unbekannte $X_1$ und $(X_1 - 10\,X_2)$ aufgefaßt werden. Als dritte Unbekannte $X_3$ wird die Verdrehung $\varphi_r$ des nachgiebig eingespannten Stabendes gewählt. Diese drei Unbekannten werden bei konstant gehaltenen $TJ$-Werten aus zwei Gleichgewichtsbedingungen und der Verträglichkeitsbedingung am rechten Stabende bestimmt.

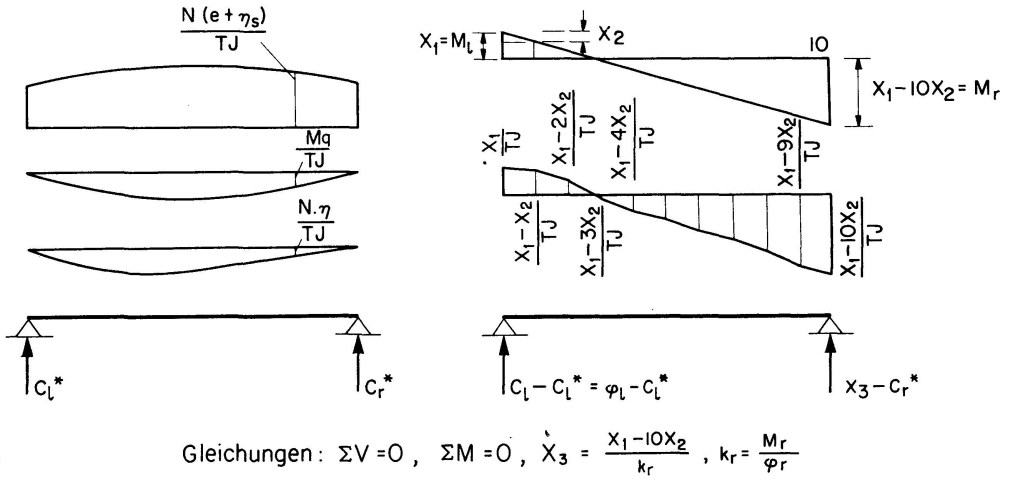


Fig. 8. Zerlegung der verzerrten Momentenbelastung und Aufstellung des Gleichungssystems zur Erfüllung der Randbedingungen im Rahmen der Iteration.

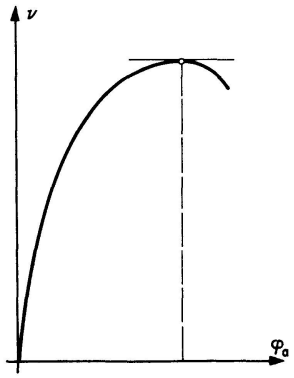


Fig. 9. Last-Verformungskurve für ein beliebiges System.

Mit den so erhaltenen Stabendmomenten und den unverändert belassenen drei Anteilen der verzerrten Momentenbelastungen wird eine neue Biegelinie mit den $TJ$-Werten des ersten Iterationsschrittes berechnet und der gesamte Rechnungsgang so lange wiederholt, bis $M_l$ und $M_r$ sich im Rahmen der festgesetzten Rechengenauigkeit nicht mehr ändern. Da die endgültige $TJ$-Verteilung über die Stablänge nun bekannt ist, kann man auch verfolgen, bei welcher Laststufe und an welchen Stellen sich plastische Gelenke ausbilden, was für die Beurteilung der Mitwirkung des Stabes im Gesamtsystem von ausschlaggebender Bedeutung ist.

Betrachten wir nun das Stabsystem (s. Fig. 1). Die Traglast für dieses System wird dann erschöpft sein, wenn den angreifenden Lasten nur *eine* Knotendrehung zugeordnet ist, bei der ein Knotengleichgewicht möglich ist. Diese Laststufe entspricht dem Scheitel der Lastverformungskurve (Fig. 9). Zu ihrer Bestimmung ermitteln wir zuerst die Lastverformungskurven $M = f(\varphi_a)$ der Einzelstäbe und rechnen uns den Knotendrehwinkel für jede Laststufe aus der Bildung des Verdrehungsgleichgewichtes. Die damit erhaltene Lastverformungskurve für das System weist einen Scheitelpunkt auf, der die Traglast praktisch begrenzt, wenn auch bei absinkender Last noch ein Gleichgewicht zwischen äußerem und innerem Moment möglich ist.

Wir haben bisher stillschweigend vorausgesetzt, daß in keinem Querschnitt eine Spannungsumkehr eintritt, so daß es zu Entlastungen — die bei beliebigem Material der Entlastungskurve des $\sigma$-$\epsilon$-Diagrammes folgen — kommt. Wenn auch eine solche Spannungsumkehr im allgemeinen nur eine geringe Rolle spielt, so wäre es dennoch möglich, diese Tatsache zu berücksichtigen, wobei der den Grunddiagrammen entnommene $TJ$-Wert entsprechend zu korrigieren ist. Diese Korrektur könnte für die voraussichtlich maßgebenden $TJ$-Werte entsprechend dem Grad der Plastizierung des Querschnittes durch neuerliche Integration erfolgen. Die Zunahme des $TJ$-Wertes bei steigender Last unter Zugrundelegung des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes für die Belastung ist jedoch allein noch kein Kriterium dafür, daß eine Entlastung eingetreten ist, da diese namentlich bei entsprechender Eigenspannungsverteilung auch in einzelnen Teilen des Querschnittes auftreten kann, während andere Teile eine weitere Laststeigerung erfahren.

## C. Anwendung

Der Untersuchung liegt ein Dreistabknoten zugrunde (Fig. 10), wobei für die Stäbe Rechteckquerschnitte angenommen wurden und — wie bereits eingangs ausgeführt — ein Ausweichen aus der Systemebene verhindert wird. Die Anwendung des Verfahrens auf andere einfach-symmetrische Querschnittsformen ist jedoch ohne weiteres möglich. Die angenommenen Maße, Imperfektionen und Querlasten sind in der Tabelle I angegeben. In Fig. 10 ist auch die Belastung des Systems eingetragen, die als Ausgangswert der Laststufe

*Tabelle I*

| Stab | $l$ (cm) | $h$ (cm) | $b$ (cm) | $e$ (cm) | $\eta_s$ (cm) Stabmitte | $q$ (t/cm) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 600 | 30 | 4,2 | 1,8 | 1,2 | $3{,}3 \cdot 10^{-3}$ |
| II | 400 | 22 | 3,2 | 1,2 | 0,8 | $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ |
| III | 500 | 26 | 3,6 | 1,5 | 1,0 | $2{,}4 \cdot 10^{-3}$ |

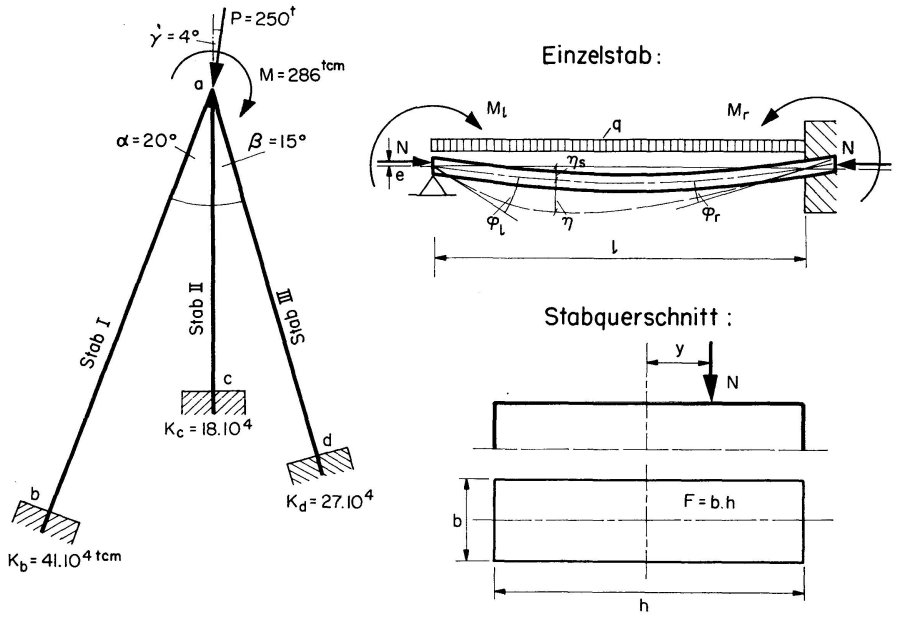


Fig. 10. Der untersuchte Dreistabknoten mit den der Laststufe $\nu = 1$ entsprechenden Belastungen und der aus dem System gelöste Einzelstab.

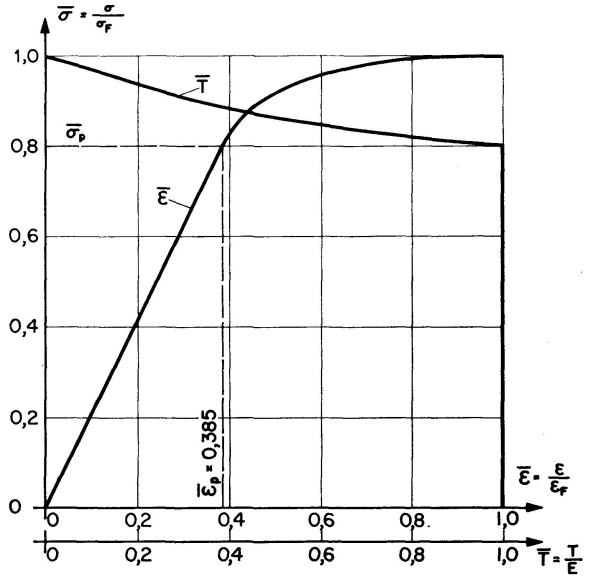


Fig. 11. Angenommenes $\bar{\sigma}$–$\bar{\epsilon}$-Diagramm und zugehöriger Verformungsmodul $\bar{T}$.

$\nu = 1$ entspricht. Für die weitere Rechnung erweist es sich als zweckmäßig, alle Systemmaße sowie die Kraft und Verformungsgrößen auf Festwerte zu beziehen. Es bedeuten demnach:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_F}, \qquad \bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon_F}, \qquad \bar{N} = \frac{N}{F\,\sigma_F},$$

$$\bar{M} = 100\,\frac{M}{F\,\sigma_F\,h}, \qquad \bar{y} = \frac{y}{h}, \qquad \overline{TJ} = \frac{TJ}{EJ},$$

Wir legen das in Fig. 11 dargestellte Spannungs-Dehnungs-Diagramm zugrunde, das wir in die folgenden Teilabschnitte zerlegen:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\sigma} < \bar{\sigma}_p = 0{,}8 \\ \bar{\epsilon} < \epsilon_p = 0{,}385\end{array}\right\} \bar{\sigma} = 2{,}0779\,\bar{\epsilon},$$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\sigma}_p < \bar{\sigma} < \bar{\sigma}_F = 1{,}0 \\ \bar{\epsilon}_p < \bar{\epsilon} < \bar{\epsilon}_F = 1{,}0\end{array}\right\} 0{,}2348\,\bar{\epsilon}^2 + 1{,}4166\,\bar{\epsilon}\,\bar{\sigma} + 0{,}8276\,\bar{\sigma}^2 - 1{,}8862\,\bar{\epsilon} - 1{,}5928\,\bar{\sigma} + 1 = 0.$$

Aus diesem Spannungs-Dehnungs-Diagramm folgen durch Ausführung der Differentiation $\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}}$ die Werte des Verformungsmoduls $\overline{T} = \frac{T}{E}$. Sie sind in Fig. 11 eingetragen. Wir nehmen für die Rechnung die in Fig. 12 dargestellte Eigenspannungsverteilung an, die im inneren Gleichgewicht ist. Die Spannungsverteilungen über den Querschnitt sind für ein konstant gehaltenes $\bar{\epsilon}_i$ für verschiedene $\bar{\epsilon}_a$, die der Variation der äußeren Belastung entsprechen, in Fig. 13 eingetragen. Die aus diesem Diagramm gewonnenen $\overline{N}$ und $\overline{M}$ und die durch die numerische Integration erhaltenen Werte $\overline{TJ}$ bilden die Komponenten, aus denen sich die Grunddiagramme zusammensetzen. Dieser Vorgang ist für verschiedene Annahmen von $\bar{\epsilon}_i$ solange zu wiederholen, bis die vollständige Plastizierung des Querschnittes eintritt ($\overline{TJ} = 0$). In Fig. 14 sind für charakteristische Annahmen von $\bar{\epsilon}_i$ die erhaltenen $\overline{N} = f(\overline{M})$ und $\overline{N} = f(\overline{TJ})$ Diagramme eingetragen. Dem elastischen Grenzwert $\overline{TJ} = 1$, $\bar{\epsilon}_i = 0{,}385$ entspricht die Gerade $\overline{N} = f(\overline{M}_{el})$, während dem plastischen Grenzwert $\overline{TJ} = 0$ die Kurve $\overline{N} = f(\overline{M}_{pl})$ zugeordnet ist. Die Kurven $\bar{\epsilon}_i = 0{,}647$ entsprechen einer

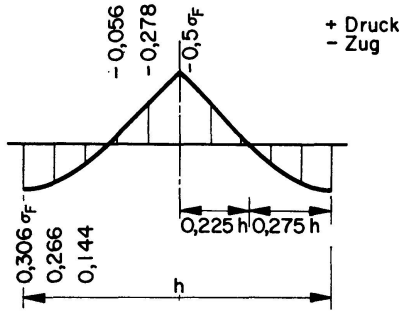


Fig. 12. Angenommener Verlauf der Eigenspannungen über den Stabquerschnitt.

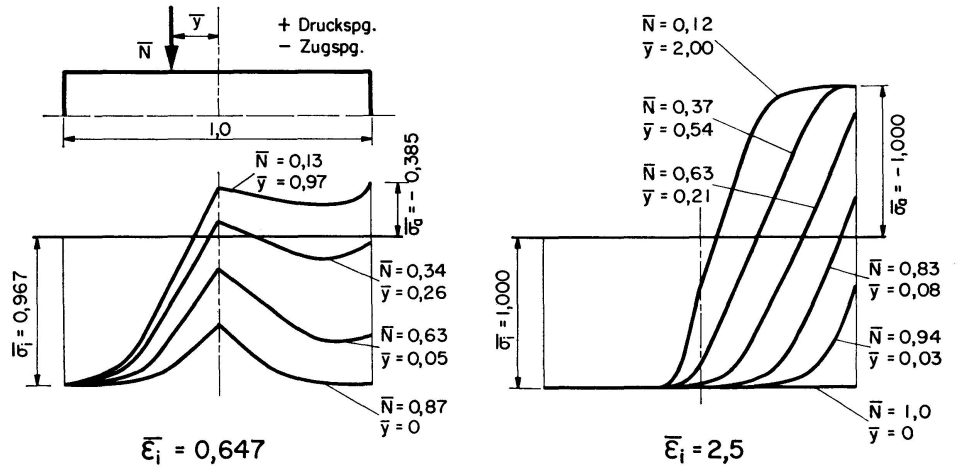


Fig. 13. Spannungsverteilung über den Querschnitt für $\bar{\epsilon}_i = 0{,}647 = \text{konst.}$ und $\bar{\epsilon}_i = 2{,}5 = \text{konst.}$ bei variierter äußerer Belastung.

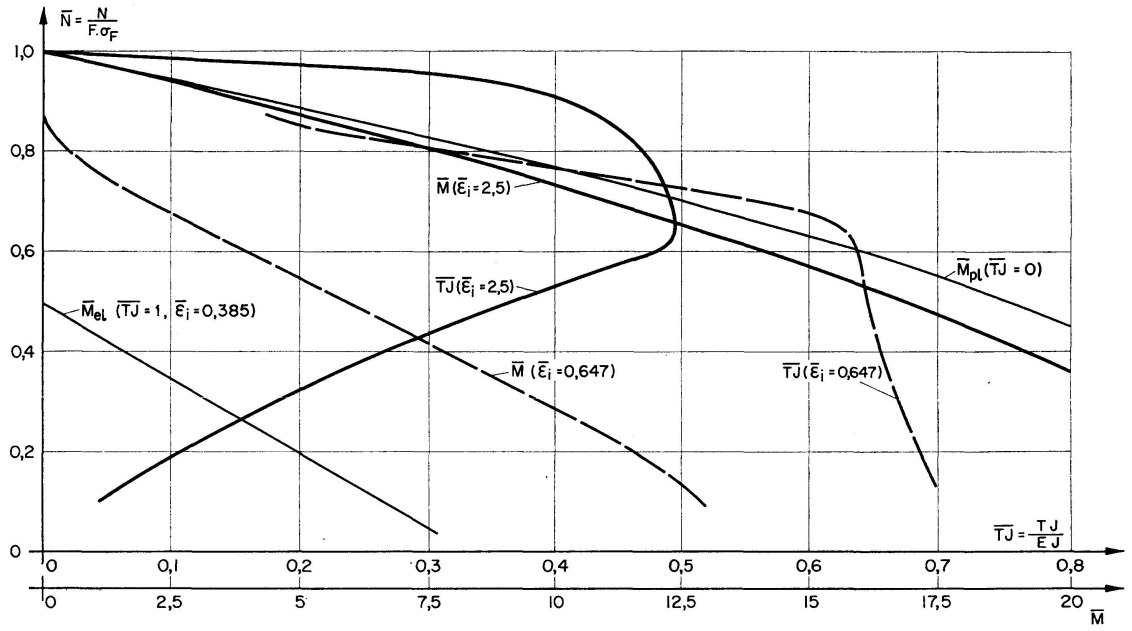


Fig. 14. Grunddiagramme $\bar{N}=f(\bar{T}\bar{J})$ und $N=f(M)$ für $\bar{\epsilon}_i=0{,}647$ bzw. $\bar{\epsilon}_i=2{,}5$.

Randspannung $\bar{\sigma}_i=0{,}967$, also knapp unter der Fließgrenze, während die Kurven $\bar{\epsilon}_i=2{,}5$ mit $\bar{\sigma}_i=1$ eine bereits weitgehend fortgeschrittene Plastizierung anzeigen (s. Fig. 13).

Man erkennt aus der Kurve $\bar{N}=f(\bar{T}\bar{J})$ für $\bar{\epsilon}_i=0{,}647$, daß bei geringen Exzentrizitäten, die im Diagramm den Werten $\bar{N}$ nahe an 1 entsprechen, eine starke Plastizierung am inneren und äußeren Rand eintritt, die bis zum Wert $\bar{N}=0{,}65$ anhält, wobei schon vorher die Werte an der äußeren Randfaser wieder an die Proportionalitätsgrenze absinken. Mit abnehmendem $\bar{N}$ und zunehmender Exzentrizität, die einem Anwachsen von $\bar{M}$ entspricht, wird der äußere Querschnittsbereich zunehmend entlastet, was ein nur sehr schwaches Ansteigen der $\bar{T}\bar{J}$-Werte zur Folge hat. Für $\bar{\epsilon}_i=2{,}5$ und $\bar{N}$ nahe an 1 hingegen erfolgt die Plastizierung vom inneren Rand her, da der äußere Rand durch relativ große zugehörige Momente $\bar{M}$ entlastet wird. Die Umkehr des Anstieges der $\bar{T}\bar{J}$-Werte erfolgt etwa bei $\bar{N}=0{,}63$, weil die Zugspannungen am äußeren Rand in diesem Stadium bereits die Proportionalitätsgrenze überschreiten. Da diese Zugspannungen weiter ansteigen, findet nun eine rasche Plastizierung von beiden Seiten statt.

Zur Durchführung der Iteration ist es notwendig, die den Normalkräften der einzelnen Laststufen entsprechenden $\bar{M}=f(\bar{T}\bar{J})$-Diagramme aus der Familie der Grunddiagramme zu ermitteln. In Fig. 15 sind diese Diagramme für alle untersuchten Laststufen für den Stab II eingetragen. Man erkennt deutlich für niedrige Laststufen den vorstehend beschriebenen Vorgang der Plastizierung von der Druckseite her mit anschließender Schwächung des $\bar{T}\bar{J}$-Abfalles und schließlich die Plastizierung von beiden Seiten (Zug und Druck) infolge des großen auftretenden Momentes. Hingegen ist bei höherer Laststufe

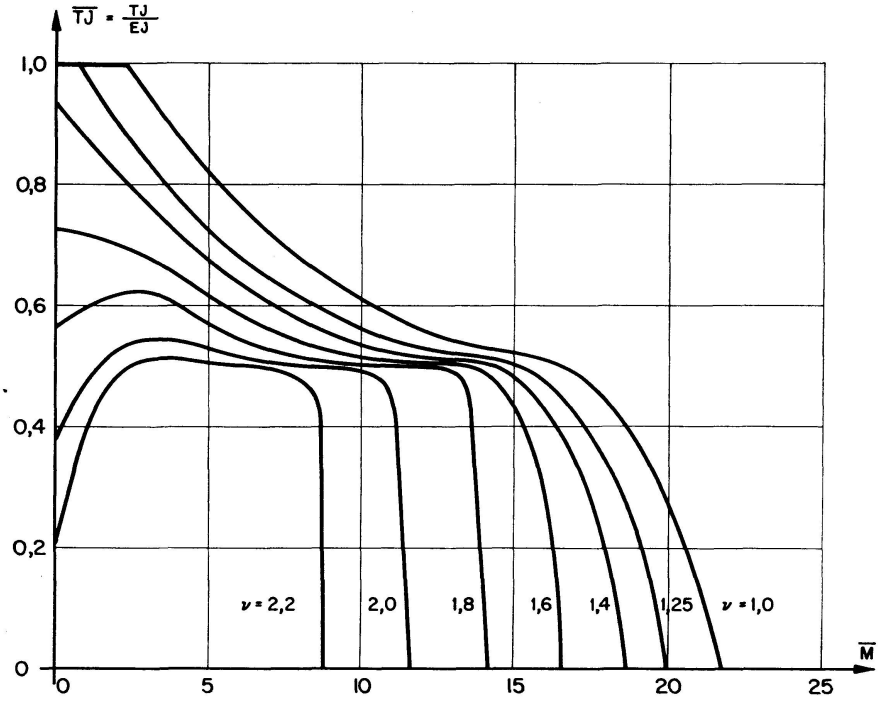


Fig. 15. Diagramme $\overline{M} = f(\overline{TJ})$ für den Stab II für charakteristische Laststufen.

und kleinerem Moment — infolge Druckplastizierung von beiden Seiten — ein stärkeres Absinken der $\overline{TJ}$-Werte zu beobachten. Der Anstieg bei wachsendem Moment und das nahezu Konstantbleiben entspricht der Entlastung des äußeren Randes, während der darauffolgende Abfall dadurch zustande kommt, daß nun auch die Zugfasern plastizieren. Es sei hier besonders betont, daß die beschriebenen Entlastungen nichts mit den Entlastungen im tatsächlichen Belastungsfortschritt des Systems zu tun haben, sondern sich nur auf den isoliert belastet gedachten Querschnitt beziehen.

Nunmehr kann die unter B. beschriebene Iteration durchgeführt werden. Sie wurde im Grazer Rechenzentrum auf der elektronischen Rechenmaschine UNIVAC 490 durchgeführt. Es ergab sich eine ausgezeichnete Konvergenz im Bereich der $\overline{TJ}$-Werte von 1,0 bis 0,4. Mit weiter absinkenden $\overline{TJ}$-Werten (vgl. den Steilabfall der $\overline{TJ}$-$\overline{M}$-Kurven in Fig. 15) und der Ausbildung von Fließgelenken in den Einzelstäben mußten die Verbesserungen der Stabendmomente $\overline{M}_l$ und $\overline{M}_r$ der einzelnen Iterationsschritte abgebremst werden. Da in diesem Kurvenbereich einer kleinen Änderung von $\overline{M}$ eine große Änderung von $\overline{TJ}$ zugeordnet ist, wurden nur solche Verbesserungen der $\overline{M}$ zugelassen, die eine vorgegebene Änderung der entsprechenden $\overline{TJ}$-Werte nicht überschreiten. Mit dieser Maßnahme wurde die Konvergenz des Iterationsverfahrens auch in diesem Bereich hergestellt.

Die damit erhaltenen Lastverformungskurven der drei Einzelstäbe sind für $\nu = 1{,}6$ und $\nu = 2{,}0$ in Fig. 16 eingetragen. Das Drehungsgleichgewicht im Knoten ist für $\nu = 1{,}6$ durch die Ordinate $\varphi_a = 0{,}0120$ dargestellt, während dieses Gleichgewicht für $\nu = 2{,}0$ der Ordinate $\varphi_a = 0{,}0204$ entspricht. Man

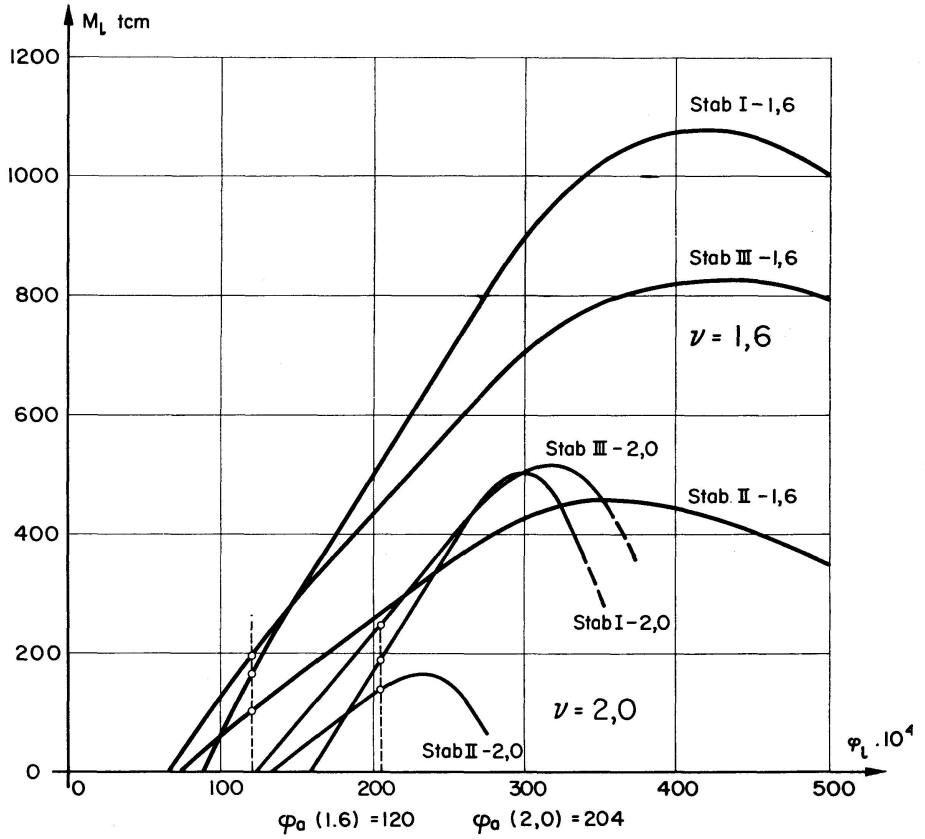


Fig. 16. Last-Verformungskurven der drei Einzelstäbe für die Laststufen $\nu = 1{,}6$ bzw. $\nu = 2{,}0$.

erkennt, daß auch für die Laststufe $\nu = 2{,}0$ keiner der drei Stäbe seine maximale Momentenaufnahmefähigkeit bei konstant gehaltener Normalkraft erreicht hat, wenn auch der Stab II sich diesem Grenzwert schon stark nähert. Bei der Laststufe $\nu = 2{,}08$ (Fig. 17) nimmt die Verformung schon relativ stärker zu ($\varphi_a = 0{,}236$). Dies hat seine Ursache darin, daß im Stab II die Momentenaufnahmefähigkeit bei Einstellung des Gleichgewichtes schon stark absinkt. Im Verlauf der $\overline{TJ}$-Werte zeigt sich hier schon deutlich die Tendenz zur Ausbildung eines Gelenkes. Die Untersuchung, ob bei dieser Laststufe ein weiteres Gleichgewicht bei ansteigender Knotenverdrehung möglich ist, ergab, daß dies bei $\varphi_a = 0{,}0306$ der Fall ist. Fig. 18 zeigt die $\sum M$-$\varphi_a$-Kurve, in der deutlich die beiden Nullpunkte, die dem Verdrehungsgleichgewicht entsprechen, zu erkennen sind. Die Unstetigkeitsstelle ergibt sich organisch bei Ausbildung des plastischen Gelenkes im Stab II. Zu ihrer Erklärung wurde einerseits angenommen, daß dieser Stab weiter wie bisher zur Momentenaufnahme herangezogen wird und der linke Kurvenast entsprechend strichliert verlängert, während der strichlierten Fortsetzung des rechten Kurvenastes die Annahme zugrunde liegt, daß sich das Fließgelenk bereits früher ausbildet. Hier wurde — etwas auf der sicheren Seite liegend — mit der voll ausgezogenen Kurve gerechnet, d. h. der Stab II beteiligt sich nach Ausbildung des plastischen Gelenkes nicht mehr an der weiteren Momentenaufnahme.

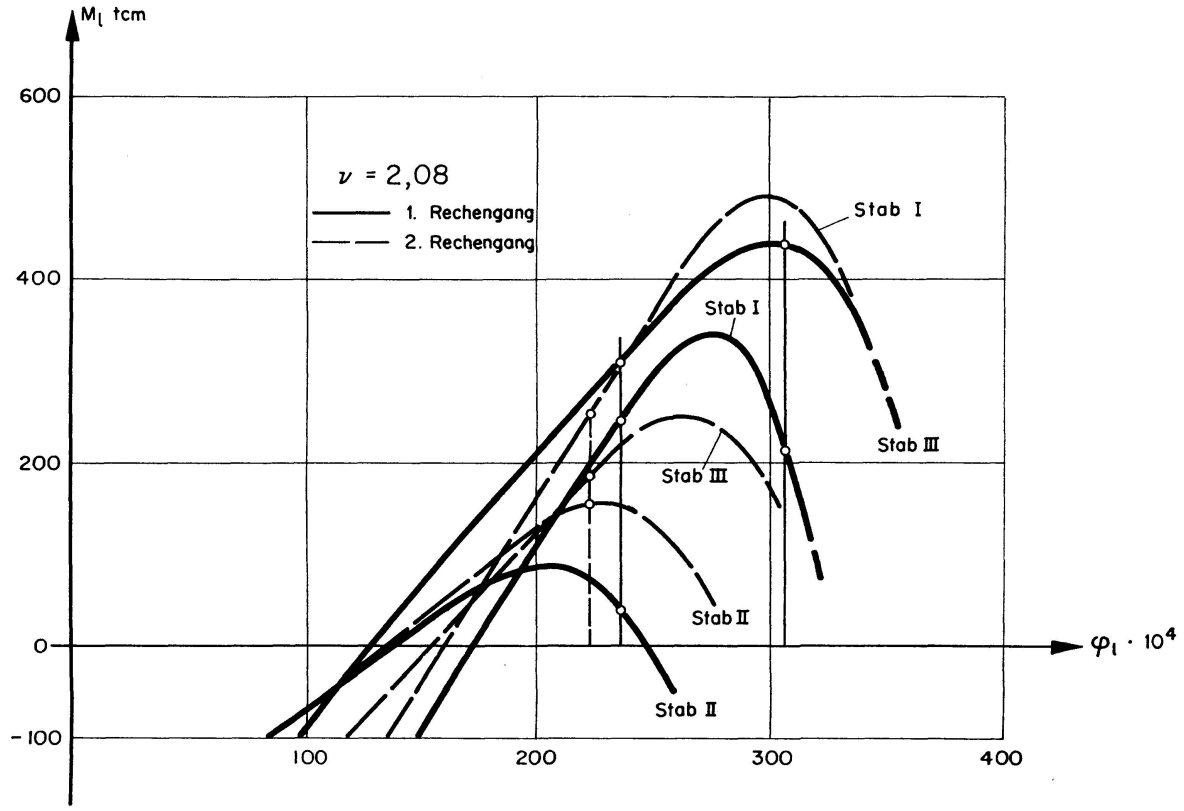


Fig. 17. Last-Verformungskurven der drei Einzelstäbe für den 1. und 2. Rechengang der Laststufe $\nu = 2{,}08$.

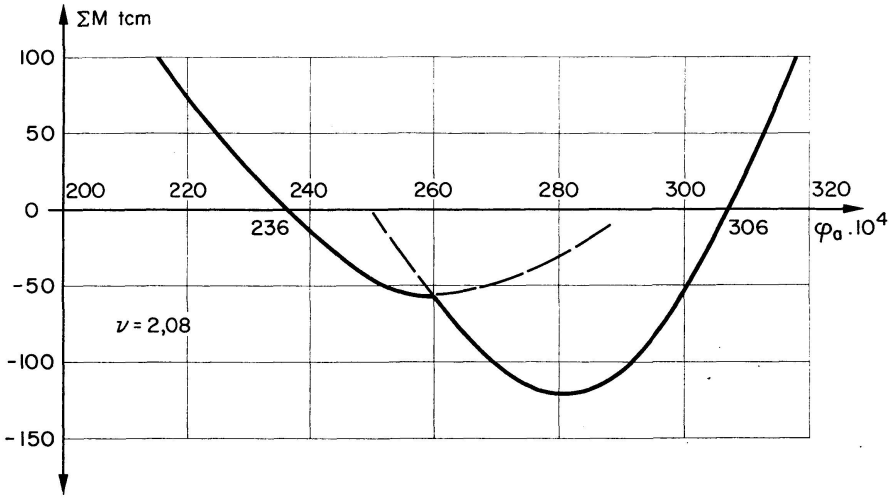


Fig. 18. Momentensummenkurve zur Bildung der Verdrehungsgleichgewichte der Laststufe $\nu = 2{,}08$.

Es wäre natürlich möglich, die im allgemeinen geringfügige weitere Momentenaufnahme zu erfassen, wenn man die durch die Ausbildung des Gelenkes erfolgte Änderung des statischen Systems berücksichtigt und in den Iterationsgang entsprechend einbaut.

In Fig. 19 ist die Lastverformungskurve für das Gesamtsystem dargestellt. Man erkennt, daß der Scheitelpunkt bei $\nu = 2{,}11$ liegt, was einem Knotendrehwinkel $\varphi_a = 0{,}027$ entspricht. Damit ist die maximale Tragkraft des

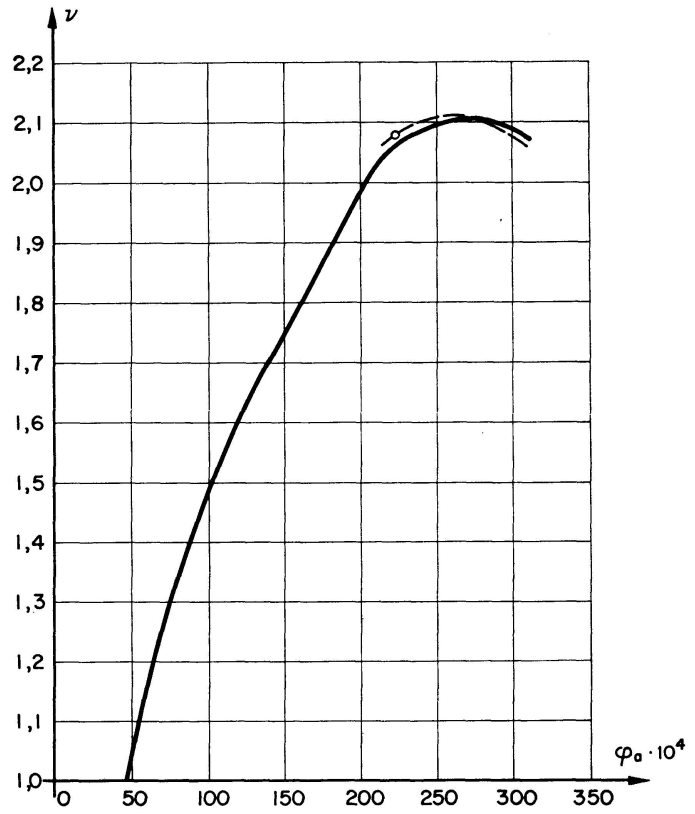


Fig. 19. Last-Verformungskurve des Gesamtsystems.

Systems erreicht. Bei der Untersuchung eines zusammengesetzten Stabsystems (s. Fig. 2) muß aber auch der abfallende Ast dieser Kurve ermittelt werden, da die Gleichgewichtszustände auch in diesem Bereich für die Ermittlung der Traglast des zusammengesetzten Systems von Bedeutung sind. Die Punkte des abfallenden Astes entsprechen der zweiten Gleichgewichtslage für die einzelnen Laststufen.

Der in Fig. 19 dargestellten Kurve liegt die nach der Theorie 1. Ordnung ermittelte Normalkraftverteilung zugrunde. Um den Einfluß der Normalkraftsveränderung nach der Theorie 2. Ordnung und unter Berücksichtigung aller Imperfektionen festzustellen, wurde für eine Laststufe in der Nähe des Scheitels ($\nu = 2{,}08$) ein zweiter Rechnungsgang durchgeführt, dessen Ergebnis strichliert eingetragen ist (s. Fig. 17 und 19). Die Normalkräfte und ihre Änderung sind in Tabelle II eingetragen. Zum Verständnis der Kräfteumlagerung sind die $\overline{TJ}$-Kurven für die drei Stäbe in Fig. 20 für den ersten Rechnungsgang und in Fig. 21 für den zweiten Rechnungsgang dargestellt. Man erkennt, daß die stärker plastizierten Stäbe II und I an den weniger plastizierten Stab III Kräfte abgeben, was auch deutlich aus der Tabelle zu erkennen ist. Aus einem dritten Rechnungsgang ersehen wir, daß der am stärksten plastizierte Stab sich noch geringfügig auf Kosten der beiden anderen Stäbe entlastet. Das Ergebnis des zweiten Rechnungsganges ist in Fig. 17 strichliert eingetragen. Die Kräfteumlagerung bewirkt eine Erhöhung der Systemsteifig-

*Tabelle II*

| Stab | $N$ $(t)$, $\nu = 2{,}08$ | | |
|---|---|---|---|
| | 1. Rechengang | 2. Rechengang | 3. Rechengang |
| I | 231,3 | 223,8 | 224,7 |
| II | 142,9 | 138,4 | 136,7 |
| III | 163,1 | 176,1 | 176,9 |

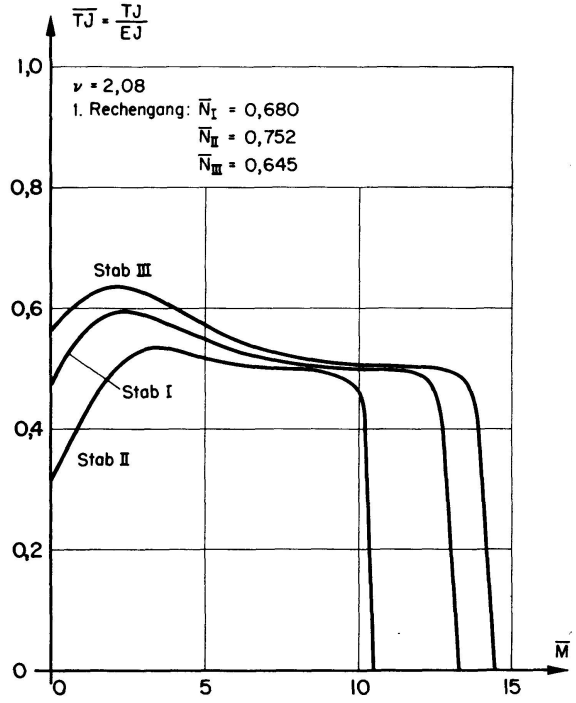


Fig. 20. $\overline{TJ} - \overline{M}$-Kurven des 1. Rechengang der Laststufe $\nu = 2{,}08$.

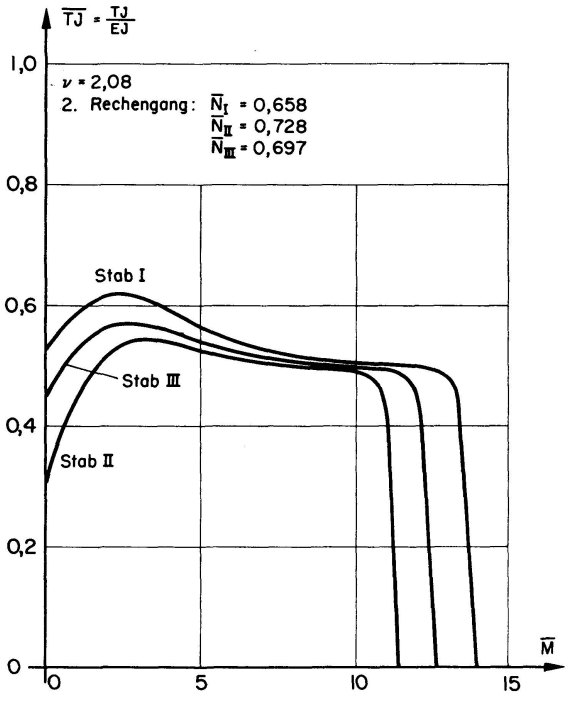


Fig. 21. $\overline{TJ} - \overline{M}$-Kurven des 2. Rechengang der Laststufe $\nu = 2{,}08$.

keit, was durch die Verringerung des Knotendrehwinkels $\varphi_a$ um ca. 5% zum Ausdruck kommt. Die Erhöhung der Tragfähigkeit durch diese Kräfteumlagerung ist hier jedoch nur geringfügig. Es zeigt sich demnach, daß *das Instabilwerden des Systems vor der Ausbildung eines Gelenkmechanismusses* eintritt, was auf den hier nicht vernachlässigbaren steifigkeitsvermindernden Einfluß der Druckkräfte zurückzuführen ist. Auch U. VOGEL (8) hat in einer allgemeinen Betrachtung auf diese Tatsache hingewiesen.

Wie eine Kontrollrechnung bei Vergleich der aufeinanderfolgenden Gleichgewichtszustände ergab, finden im allgemeinen keine Entlastungen in den Querschnitten statt. Eine solche tritt nur dann ein, wenn ein am Gleichgewicht mitwirkender Stab bereits seine maximale Momentenaufnahmefähigkeit überschritten hat, was nur für einen engen Bereich in der Nähe des Scheitels der Lastverformungskurve bei stärkerer Unterdimensionierung eines Stabes der Fall sein könnte.

## D. Schlußfolgerungen

Der vorliegende erste Teil der Stabilitätsuntersuchung von Stabwerken mit Imperfektionen befaßt sich mit der Traglastberechnung des frei verdrehbaren, aber an der Verschiebung behinderten Mehrstabknotens, wobei ein beliebiges, auch ortsveränderliches Spannungs-Dehnungs-Gesetz, strukturelle und geometrische Imperfektionen und Querlasten angenommen werden. Eine weitere zur Zeit in Durchführung begriffene Untersuchung bezieht sich auf den frei verdrehbaren und nicht an der Verschiebung behinderten Mehrstabknoten. Diese Arbeit hat vor allem das Ziel, grundsätzliche Erkenntnisse über das Verhalten des Einzelstabes im Knotenverband und des Mehrstabknotens selbst zu gewinnen. Im weiteren soll nach Behandlung des nicht mehr an der Verschiebung behinderten Mehrstabknotens die Untersuchung zusammengesetzter Systeme mit den so erarbeiteten Grundlagen in Angriff genommen werden. Hierbei wird man zweckmäßig in erster Linie auf den I-Querschnitt, dessen schwache Achse senkrecht zur Systemebene liegt, zurückkommen. Mit der ersten Stufe hierfür, nämlich den zum Rechteckquerschnitt zusammengelegten Flanschen, befaßte sich diese Arbeit. Das Endziel ist die richtige Abschätzung der Auswirkung von verschiedenen Imperfektionseinflüssen auf die Tragkraft zur Beurteilung geeigneter Näherungsverfahren. Als Ergänzung ist natürlich nach wie vor die versuchsmäßige Traglastbestimmung unentbehrlich.

Bei der Ausarbeitung des Iterationsverfahrens und der umfangreichen Zahlenrechnung hat mich mein Assistent Dipl.-Ing. G. Schulz auf das wertvollste unterstützt. Die Programmierung besorgte mit großem Einsatz Herr H. Pircher. Dem Rechenzentrum Graz und seinem Leiter, Prof. Dr. H. Florian, danke ich für die Bereitstellung der erforderlichen Rechenzeiten.

## Bibliographie

1. von Kármán Th.: «Untersuchungen über die Knickfestigkeit.» Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens V. d. J., H. 81.
2. Roš M. und Brunner: «Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl.» Mitteilungen der TKVSB.
3. Chwalla E.: «Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl.» Der Stahlbau 1934, H. 21—23. Dortselbst weitere Literaturangabe.
4. Stüssi F.: «Über einige Knickfragen.» Mitteilungen der TKVSB, H. 8, Zürich 1953, und «Entwurf und Berechnung von Stahlbauten.» Springer-Verlag 1958, S. 288 usw.
5. Marinček M.: «Die Tragfähigkeit metallischer Druckstäbe.» Stahlbau und Baustatik, Springer-Verlag 1965, S. 74 usw.
6. Wästlund G. und Bergström S. G.: "Buckling of compressed steel members." Transaction of the Royal Institute of Technology. Stockholm.
7. Klöppel K. und Winkelmann E.: «Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Traglast von zweiachsig gedrückten Stahlstäben.» Der Stahlbau 1962, S. 33 usw.
8. Vogel U.: «Methoden der Traglastberechnung.» Acier Stahl Steel 1965, H. 12.

## Zusammenfassung

Zur Stabilitätsuntersuchung von Stabwerken mit Imperfektionen benötigt man die Lösung für den Grundfall des Mehrstabknotens. Die Arbeit befaßt sich mit diesem Grundfall, wobei die in einem Knoten anlaufenden Stäbe — deren Material einem beliebigen Spannungs-Dehnungs-Gesetz folgt — am anderen Ende nachgiebig eingespannt sind und geometrische und strukturelle Imperfektionen sowie Querlasten aufweisen. Es wird das Verhalten des Einzelstabes im Verband mit anderen Stäben und die Stabilität des Gesamtsystems an einem konkreten Beispiel untersucht und die Ergebnisse der elektronischen Berechnung in Kurvenform dargestellt. Es zeigt sich der steifigkeitsvermindernde Einfluß der Druckkräfte, so daß ein Versagen vor Ausbildung eines Gelenkmechanismusses eintritt.



## Summary

This paper deals with the basic case of the stability problem of a framework composed of struts with imperfections by considering a node formed by several struts. These struts can be restrained on the opposite ends either rigidly or flexibly and may, furthermore, have geometrical and structural imperfections (residual stresses) as well as transverse loading. The material may comply with any strain-stress diagram. The structural behaviour of a single strut alone and in combination with the other struts, and the stability of the whole system are investigated by means of a typical example calculated with the aid of a computer. The results obtained are discussed and the characteristic diagrams are plotted. It is clearly demonstrated that the compression forces reduce the stiffness of the system in such a way that collaps takes place before the formation of a linkage mechanism.



## Résumé

Pour étudier la stabilité des systèmes dont les barres présentent des imperfections, il faut connaître la solution du cas fondamental, celui du nœud où aboutissent plusieurs barres. L'auteur traite ce cas, en considérant des barres encastrées flexibles dont le matériau obéit à un diagramme contrainte-déformation quelconque. Ces barres présentent des imperfections géométriques et structurelles et elles sont sollicitées par des charges latérales. Pour un exemple typique, on examine le comportement d'une des barres de l'ensemble et on vérifie la stabilité du système. Les résultats, obtenus à l'aide d'une calculatrice électronique, sont présentés sous forme de diagrammes qui montrent clairement la diminution de rigidité due à l'effet des compressions; on atteint ainsi la charge de ruine avant que se forme un mécanisme de rotules plastiques.