

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 25 (1965)

Artikel: Théorie des ponts courbes à poutres multiples
Autor: Ceradini, Giulio
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-20347>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Théorie des ponts courbes à poutres multiples

Theorie der gekrümmten Balkenbrücken mit mehreren Hauptträgern

Theory of Multi-Girders Curved Bridges

GIULIO CERADINI

Ingénieur, Professeur de Résistance des Matériaux à l'Université de Florence, Italie

Les conditions imposées aux ouvrages d'art par les conceptions actuelles en matière de projets d'autoroutes, de routes surélevées et des rampes d'accès à celles-ci, ont rendu toujours plus nombreux les exemples de ponts courbes.

Cela a donné lieu récemment à des études ayant pour but d'approfondir l'analyse du comportement statique de ces ouvrages [1, 2, 3, 4, 5].

Dans le présent mémoire, on entreprend l'étude du problème d'une travée courbe sur deux appuis simples, constituée par un grillage polaire de maîtresses-poutres disposées suivant des arcs de cercle et d'entretoises radiales, solidaire d'une dalle formant le platelage du tablier (fig. 1).

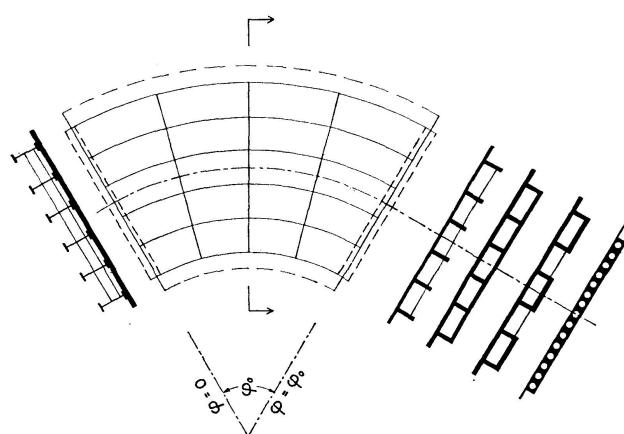


Fig. 1.

Le système porteur considéré peut être traité comme une plaque à orthotropie polaire ou mieux comme un grillage de maille infinitésimale. De cette façon, on peut établir une théorie qui représente, pour les travées courbes,

l'équivalent de celle développée par YVES GUYON et CHARLES MASSONNET pour les ponts droits à poutres multiples [6, 7].

La théorie se simplifie sensiblement si l'on introduit l'hypothèse *d'entretoises rigides* à la flexion. La méthode que l'on obtient de cette façon peut-être considérée comme l'équivalent, pour les ponts courbes, de la méthode d'Engesser pour le calcul de la répartition des charges dans les ponts droits.

Théorie du grillage polaire de maille infinitésimale

La fig. 2 montre l'état de contrainte d'un élément du grillage polaire. Les équations d'équilibre, respectivement à la translation suivant la verticale et à la rotation autour des axes radial et tangent, s'écrivent *):

$$\frac{1}{r} q_r + q'_r + \frac{1}{r} q_\varphi = -p(r, \varphi), \quad (1a)$$

$$\frac{1}{r} m_\varphi' + \frac{1}{r} (m_{\varphi r} + m_{r\varphi}) + m'_{r\varphi} - q_\varphi = 0, \quad (1b)$$

$$m'_r + \frac{1}{r} m_r + \frac{1}{r} m_{\varphi r}' - \frac{1}{r} m_\varphi - q_r = 0. \quad (1c)$$

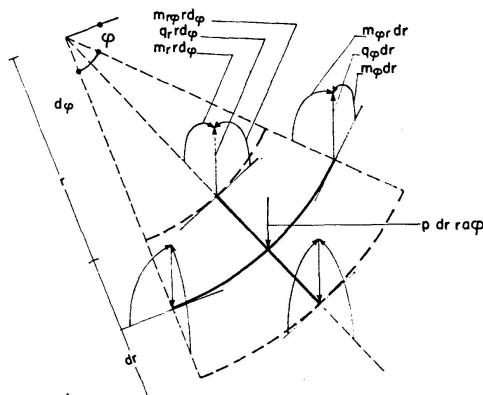


Fig. 2.

En éliminant les efforts tranchants on obtient:

$$m''_r + \frac{2}{r} m'_r + \frac{1}{r} (m_{\varphi r}'' + m_{r\varphi}'') + \frac{1}{r^2} (m_{\varphi r}' + m_{r\varphi}') + \frac{1}{r^2} m_{\varphi\varphi}'' - \frac{1}{r} m'_\varphi = -p. \quad (2)$$

Si l'on désigne par D_φ , $D_{\varphi r}$, D_r , $D_{r\varphi}$ les rigidités flexionnelles et torsionnelles des poutres et des entretoises, par unité de longueur, les expressions des moments fléchissants et de torsion en fonction des dérivées du déplacement vertical sont [9]:

*) On désigne par un point les dérivées par rapport à φ , par une apostrophe les dérivées par rapport à r .

$$\begin{aligned}
 m_r &= -D_r w'', \\
 m_{r\varphi} &= -D_{r\varphi} \left(\frac{1}{r} w' - \frac{1}{r^2} w \right), \\
 m_{\varphi r} &= -D_{\varphi r} \left(\frac{1}{r} w' - \frac{1}{r^2} w \right), \\
 m_\varphi &= -D_\varphi \left(\frac{1}{r^2} w'' + \frac{1}{r} w' \right).
 \end{aligned} \tag{3}$$

En substituant les équations (3) dans la relation (2), on obtient l'équation différentielle du grillage:

$$\begin{aligned}
 D_r \left(w'''' + \frac{2}{r} w''' \right) + (D_{r\varphi} + D_{\varphi r}) \left(\frac{1}{r^4} w'' - \frac{1}{r^3} w''' + \frac{1}{r^2} w'''' \right) \\
 + D_\varphi \left(\frac{1}{r^4} w'''' + \frac{2}{r^4} w''' + \frac{1}{r^3} w'' - \frac{1}{r^2} w''' \right) = p(r, \varphi).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Solution de l'équation différentielle

Pour le cas pris en considération, les conditions aux limites sur les bords

$$\begin{aligned}
 \varphi &= 0 \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi_0 \\
 w &= 0 \quad \text{et} \quad m_\varphi = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Si la charge est exprimée sous la forme

$$p = P(r) \sin \frac{\pi \varphi}{\varphi_0}, \tag{6}$$

on peut poser

$$w = W(r) \sin \frac{\pi \varphi}{\varphi_0}. \tag{7}$$

Cette fonction satisfait aux conditions aux limites (5); d'autre part, si on la substitue dans l'équation différentielle (4), on obtient l'équation suivante à une seule variable:

$$\begin{aligned}
 D_r W'''' + 2 D_r \frac{1}{r} W''' - \left[(D_{r\varphi} + D_{\varphi r}) \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} + D_\varphi \right] \frac{1}{r^2} W'' \\
 + \left[(D_{r\varphi} + D_{\varphi r}) \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} + D_\varphi \right] \frac{1}{r^3} W' - \left[(D_{r\varphi} + D_{\varphi r}) \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} + D_\varphi \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \left(2 - \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \right) \right] \frac{1}{r^4} W = P(r).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Il s'agit d'une équation du type dit de Euler pour laquelle la solution du problème homogène est

$$W = \sum_{i=1}^4 C_i r^{\lambda i}, \tag{9}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sont les racines de l'équation caractéristique:

$$\begin{aligned} D_r(\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda) + \left[(D_{r\varphi} + D_{\varphi r}) \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} + D_\varphi \right] (-\lambda^2 + 2\lambda) \\ - \left[(D_{r\varphi} + D_{\varphi r}) \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} + D_\varphi - D_\varphi \left(1 - \frac{2\pi^2}{\varphi_0^2} + \frac{\pi^4}{\varphi_0^4} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Si l'on pose

$$\alpha = \frac{D_{r\varphi} + D_{\varphi r}}{D_r} \frac{\pi^2}{\varphi_0^2}; \quad \beta = \frac{D_\varphi}{D_r},$$

on obtient: $\lambda_{1,2,3,4} = 1 \pm \sqrt{\frac{1+\alpha+\beta}{2}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{\beta \left(1 - \frac{\pi^2}{\varphi_0^2}\right)^2}{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)^2}}}.$ (11)

Si l'on désigne par $\bar{W}(r)$ une solution particulière de l'équation (8), la solution générale est:

$$W(r) = \sum_{i=1}^4 C_i r^{\lambda_i} + \bar{W}(r). \quad (12)$$

Les constantes C_i se déterminent au moyen des conditions aux limites sur les bords $r = \text{const.}$, selon lesquelles le moment fléchissant m_r et la réaction verticale au bord q_r^* doivent s'annuler.

On obtient ainsi:

$$\begin{aligned} m_r(r_{1,2}) &= 0, \\ q_r^*(r_{1,2}) &= q_r(r_{1,2}) + \frac{m_{r\varphi}(r_{1,2})}{r_{1,2}} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Cas d'une charge répartie transversalement selon une puissance du rayon r

Si l'on pose

$$P(r) = P_0 \left(\frac{r}{R} \right)^m, \quad (14)$$

où R est une longueur de référence — par exemple le rayon moyen $1/2(r_1 + r_2)$ — on obtient la solution particulière:

$$\bar{W}(r) = W_0 \left(\frac{r}{R} \right)^n, \quad \text{avec } n = m+4. \quad (15)$$

En effet, en introduisant la relation (15) dans l'équation (8), on obtient:

$$W_0 = \frac{P_0 R^4}{D_r} \frac{1}{n(n-1)^2(n-2) - \alpha(n-1)^2 + \beta \left[\left(\frac{\pi^2}{\varphi_0^2} - 1 \right)^2 - (n-1)^2 \right]}.$$

Ce cas est intéressant, car il correspond généralement, avec un choix approprié de l'exposant m , à la charge permanente.

Effets d'une charge sinusoïdale répartie sur l'arc de cercle $r = \bar{r}$ entre $\varphi = 0$ et $\varphi = \varphi_0$ (fig. 3)

Cette solution est particulièrement importante parce qu'elle permet d'obtenir, moyennant un développement en série de fonctions circulaires selon φ et une intégration selon r , les effets d'une charge quelconque appliquée sur le pont.

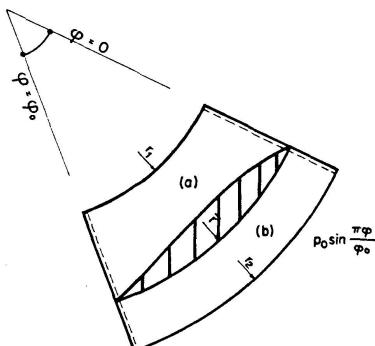


Fig. 3.

En ce cas l'équation différentielle (8) est homogène. On obtient la solution w comme juxtaposition des deux solutions w_a et w_b relatives aux deux domaines «a» et «b» indiqués à la fig. 3.

Les conditions aux limites sont:

$$\begin{aligned} q_{r,a}^*(r_1) &= q_{r,a}(r_1) + \frac{m_{r,\varphi}(r_1)}{r_1} = 0; \quad m_{r,a}(r_1) = 0. \\ q_{r,b}^*(r_2) &= q_{r,b}(r_2) + \frac{m_{r,\varphi}(r_2)}{r_2} = 0; \quad m_{r,b}(r_2) = 0, \\ w_a(\bar{r}) &= w_b(\bar{r}); \quad w'_a(\bar{r}) = w'_b(\bar{r}); \quad m_a(\bar{r}) = m_b(\bar{r}); \quad q_a^*(\bar{r}) - q_b^*(\bar{r}) = p. \end{aligned} \quad (16)$$

Les quatre dernières conditions constituent la liaison entre les deux solutions w_a et w_b ; la dernière, en particulier, contient la charge extérieure.

En posant $W_a = \sum_{i=1}^4 C_{i,a} r^{\lambda_i}$ et $W_b = \sum_{i=1}^4 C_{i,b} r^{\lambda_i}$, et en tenant compte des relations (1), (3) et (7), les conditions aux limites donnent lieu à un système de 8 équations linéaires pour les 8 inconnues $C_{i,a}$ et $C_{i,b}$.

Ce système fournit donc la solution du problème.

Applications numériques

Le problème en question a été programmé pour le Calculateur électronique IBM 1620 de l'Institut de Mathématiques «Ulisse Dini» de la Faculté des Sciences de l'Université de Florence. Dans la rédaction du programme, on a dû distinguer le cas où les racines λ_i de l'équation caractéristique (10) sont réelles du cas où elles sont complexes [10]. En général, les racines sont complexes lorsque l'angle φ_0 est petit.

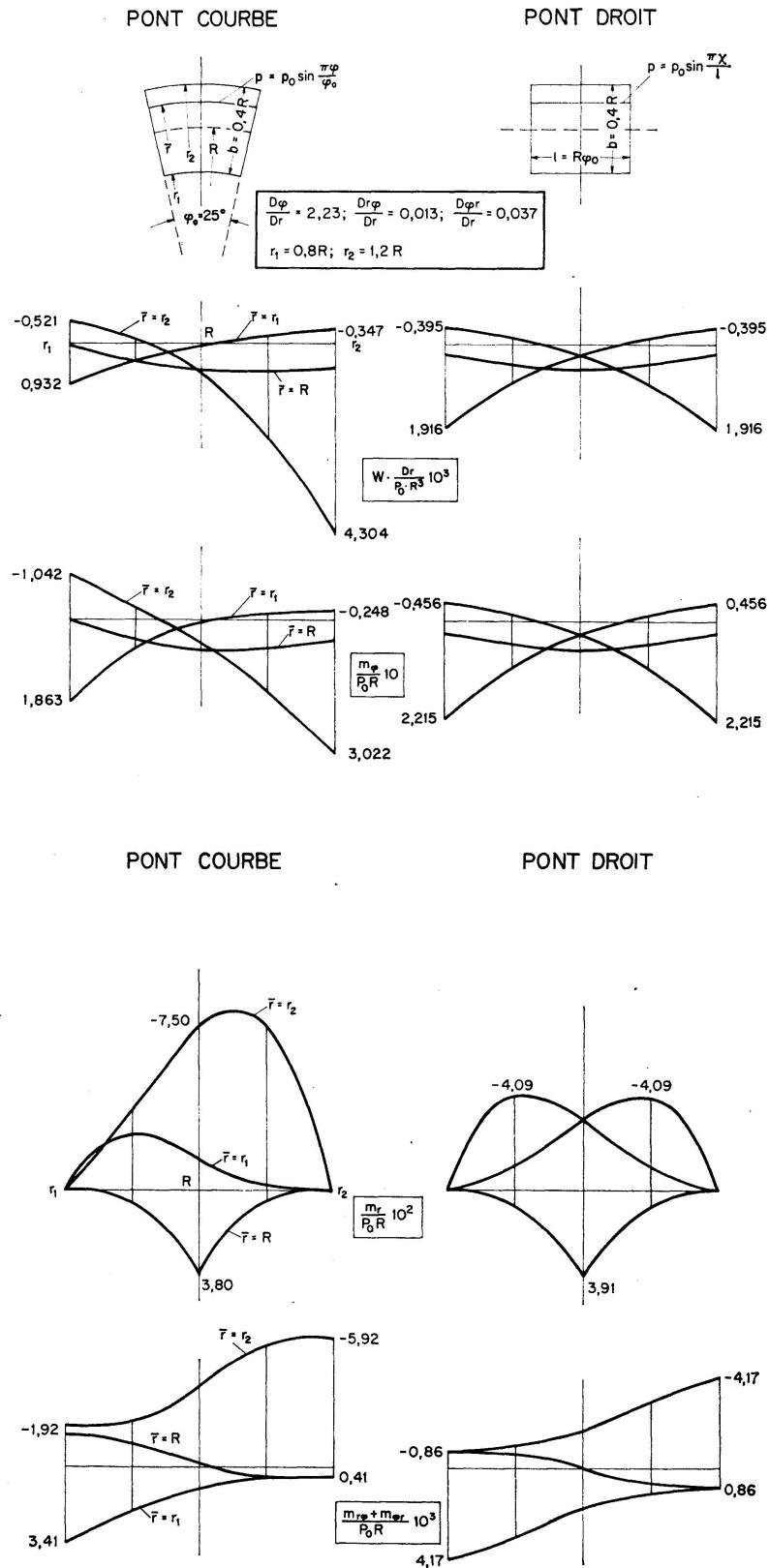


Fig. 4a.

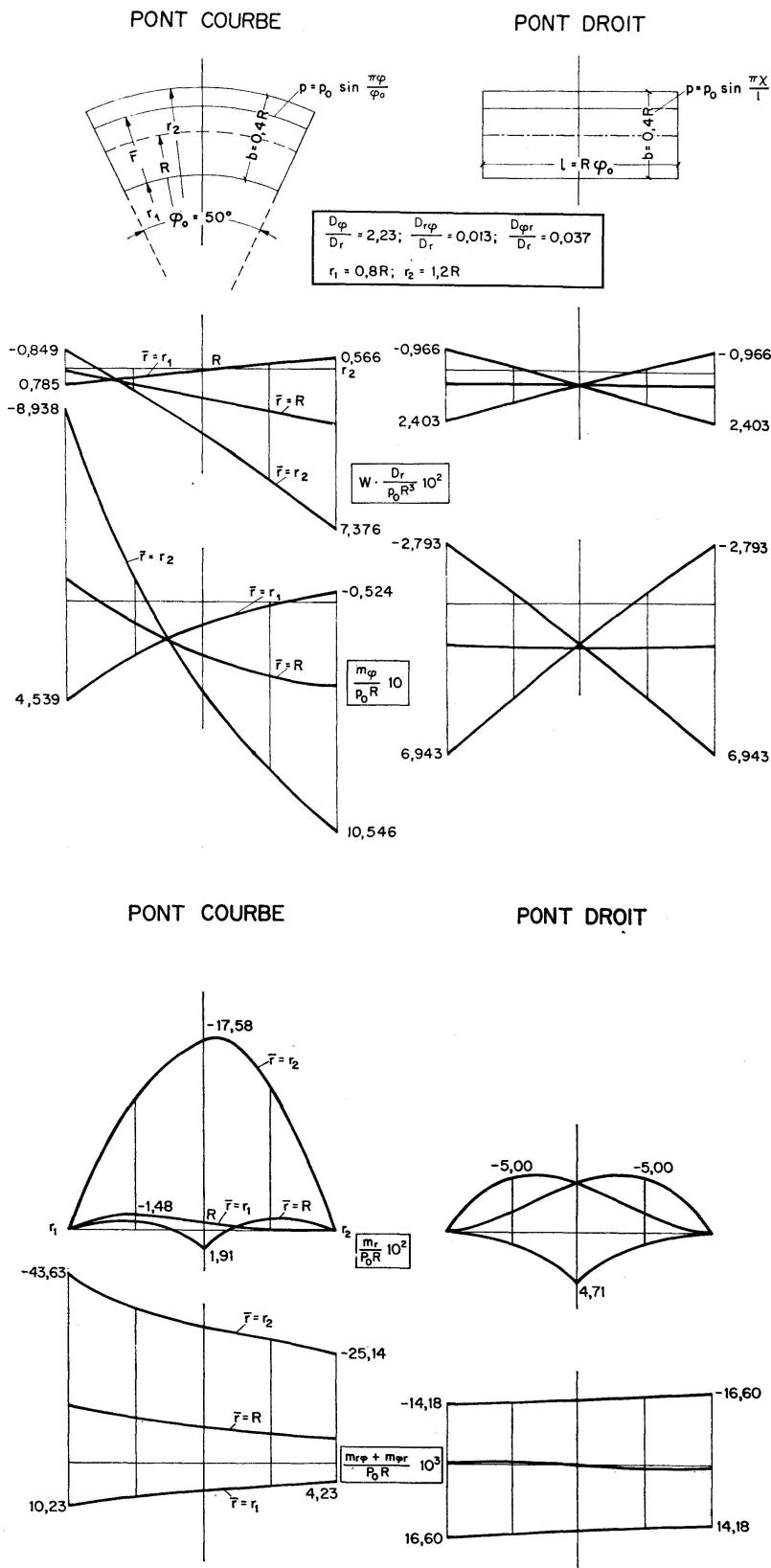


Fig. 4 b.

Les graphiques de la fig. 4 représentent les résultats des calculs relatifs aux deux cas suivants:

$$\frac{D_\varphi}{D_r} = 2,23; \quad \frac{D_{r\varphi}}{D_r} = 0,013; \quad \frac{D_{\varphi r}}{D_r} = 0,037; \quad r_1 = 0,8 R; \quad r_2 = 1,2 R; \quad \begin{cases} \varphi_0 = 25^\circ \\ \varphi_0 = 50^\circ \end{cases}$$

La figure montre les diagrammes transversaux du déplacement vertical w , du moment fléchissant longitudinal m_φ , du moment fléchissant transversal m_r , de la somme des moments de torsion $m_{r\varphi} + m_{\varphi r}$, chacune de ces quantités étant donnée sous une forme sans dimensions.

Les diagrammes de w , m_φ , m_r , grandeurs qui varient avec le sinus de l'angle φ sont relatifs à $\varphi = \varphi_0/2$; le diagramme de $m_{r\varphi} + m_{\varphi r}$, grandeur qui varie avec le cosinus de l'angle φ , est relatif à $\varphi = 0$.

Dans le but de permettre un examen de ces diagrammes, on donne, vis-à-vis de chacun d'eux, celui relatif au pont droit ayant les mêmes rigidités unitaires et le même rapport b/l . Ces diagrammes ont été calculés au moyen des tables numériques données par C. MASSONNET [12]. Les valeurs de $m_{r\varphi} + m_{\varphi r}$ ont été déduites par dérivation des diagrammes de w .

L'examen des diagrammes fait ressortir la différence entre le comportement du pont courbe et celui du pont droit. En particulier, quand l'angle d'ouverture φ_0 devient assez grand, les deux comportements sont très différents, le déplacement vertical et toutes les caractéristiques de sollicitation étant sensiblement plus grandes pour le pont courbe.

Les calculs montrent que, dans les ponts à section ouverte, les tensions unitaires dues à la torsion deviennent rapidement très importantes quand φ_0 croît; il s'ensuit que l'emploi de sections à fortes rigidité et résistance torsionnelles est en général à conseiller pour les ponts courbes.

Les avantages d'un tel emploi peuvent se relever dans la fig. 5. Les rapports $\frac{D_\varphi}{D_r} = 1$ et $\frac{D_{r\varphi} + D_{\varphi r}}{D_r} = 2$ concernent une dalle pleine avec $\nu = 0$ mais ils sont en général encore valables, avec une certaine approximation, pour les dalles allégées et pour les ponts à section en caisson, pourvu que la section ne soit pas trop haute par rapport à la largeur [10].

Cas des entretoises rigides

Dès que la longueur des maîtresses-poutres est suffisamment grande, on peut admettre que les entretoises sont parfaitement rigides.

On posera donc:

$$w = \left(W_1 + \frac{W_2}{R} r \right) \sin \frac{\pi \varphi}{\varphi_0}. \quad (17)$$

Les conditions d'équilibre à la translation selon la verticale et à la rotation autour de la normale par 0 au rayon moyen de l'élément de grillage, représenté

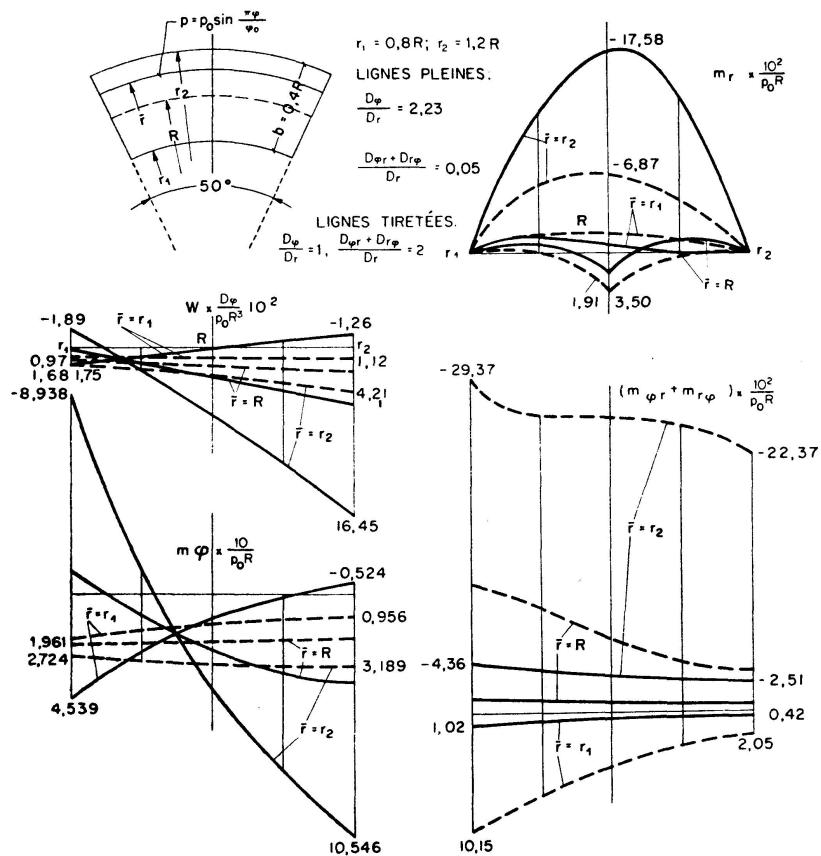
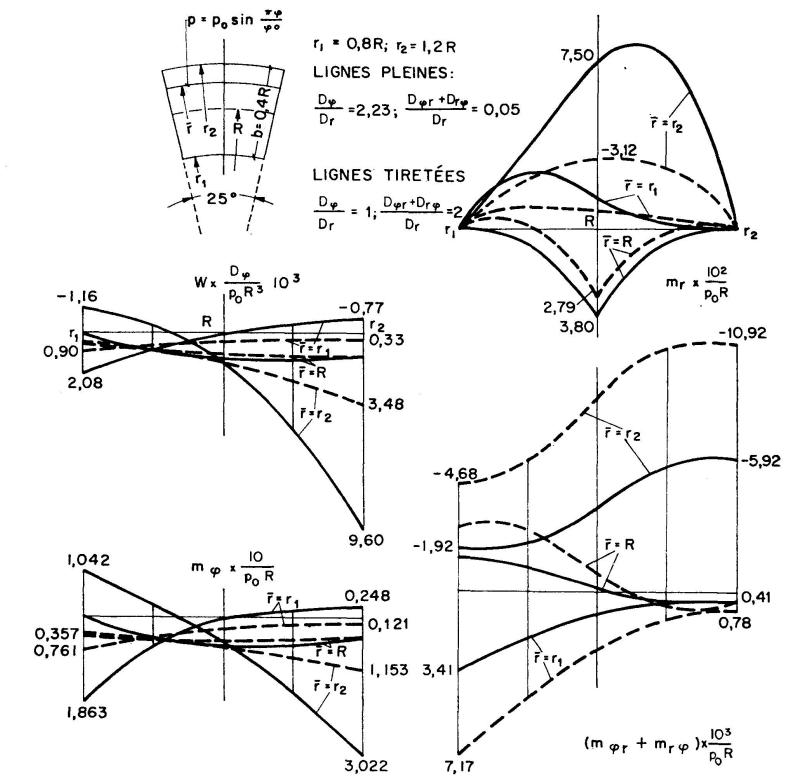


Fig. 5.

à la fig. 6, constituent un système de deux équations linéaires qui fournissent les valeurs de w_1 et w_2 . On doit naturellement tenir compte de l'expression de q_φ , (1b), qui dérive de la condition d'équilibre à la rotation autour du rayon moyen, et des expressions (3) de m_φ , $m_{r\varphi}$, $m_{\varphi r}$, dans lesquelles la constante D_r ne figure pas. En outre, on doit satisfaire aux conditions sur les bords $r=r_{1,2}$ de l'élément:

$$q_r^*(r_{1,2}) = 0.$$

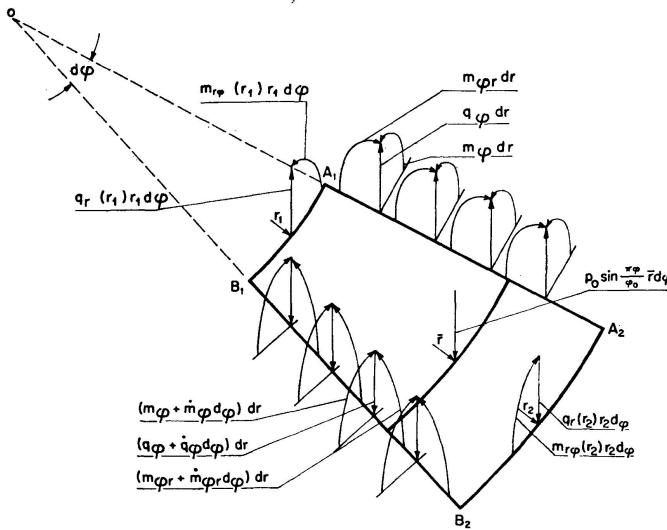


Fig. 6.

Le système d'équations que l'on obtient est le suivant:

$$\begin{aligned} W_1 \left(\frac{\pi^4}{\varphi_0^4} + \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \frac{D_{r\varphi} + D_{\varphi r}}{D_\varphi} \right) \frac{(r_2^2 - r_1^2) R^2}{2 r_1^2 r_2^2} + W_2 \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \left(\frac{\pi^2}{\varphi_0^2} - 1 \right) \frac{(r_2 - r_1) R}{r_1 r_2} &= \frac{p_0 R^3}{D_\varphi} \frac{\bar{r}}{R}, \\ W_1 \left(\frac{\pi^2}{\varphi_0^2} - 1 \right) \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \frac{(r_2 - r_1) R}{r_1 r_2} + W_2 \left(\frac{\pi^2}{\varphi_0^2} - 1 \right)^2 \ln \frac{r_1}{r_2} &= \frac{p_0 R^3}{D_\varphi} \left(\frac{\bar{r}}{R} \right)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Dès que l'on connaît w_1 et w_2 , on peut calculer la déformée w et les caractéristiques de sollicitation q_φ , m_φ , $m_{r\varphi}$, $m_{\varphi r}$; les caractéristiques q_r et m_r , dont les expressions en fonction des dérivées de w contiennent la constante $D_r = \infty$, se calculent en considérant l'élément de la fig. 6 comme une poutre.

On parvient ainsi aux expressions suivantes:

$$\begin{aligned} q_r &= \left\{ \left[D_\varphi \frac{\pi^4}{\varphi_0^4} + (D_{\varphi r} - D_{r\varphi}) \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \right] \frac{1}{2} \frac{r^2 - r_1^2}{r^3 r_1^2} W_1 + D_{r\varphi} \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \frac{1}{r r_1^2} W_1 \right. \\ &\quad \left. + D_\varphi \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \left(\frac{\pi^2}{\varphi_0^2} - 1 \right) \frac{r - r_1}{r^2 r_1 R} W_2 \right\} \sin \frac{\pi \varphi}{\varphi_0} \begin{cases} +0, & \text{pour } r < \bar{r}, \\ -p_0 \frac{\bar{r}}{r} \sin \frac{\pi \varphi}{\varphi_0}, & \text{pour } r > \bar{r}, \end{cases} \end{aligned}$$

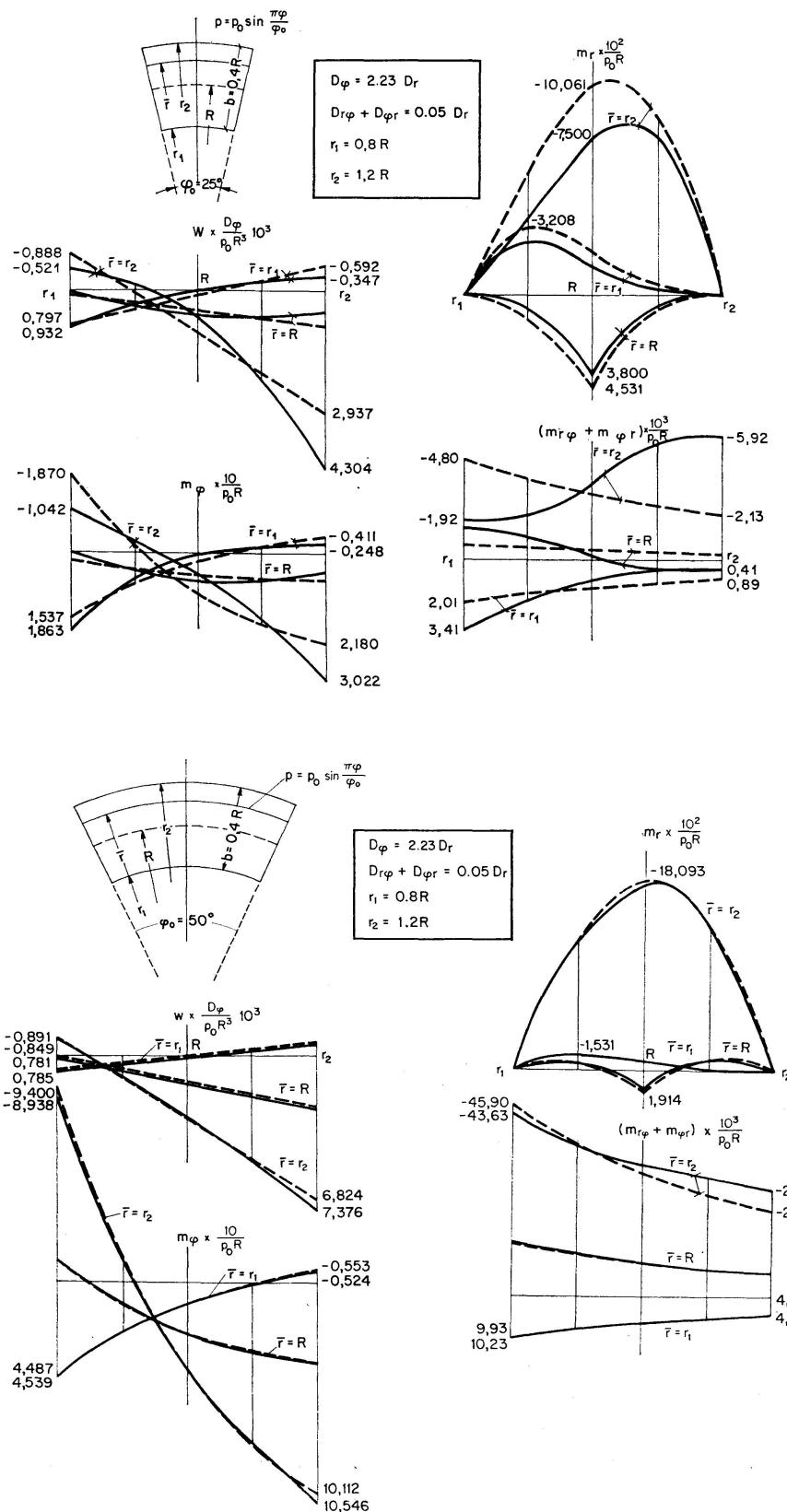


Fig. 7.

$$\begin{aligned}
m_r = & \left\{ \left[D_\varphi \frac{\pi^4}{\varphi_0^4} + (D_{\varphi r} + D_{r\varphi}) \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \right] \frac{1}{2} \frac{r^2 - r_1^2}{r^2 r_1^2} W_1 - D_\varphi \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \left(\frac{\pi^2}{\varphi_0^2} - 1 \right) \frac{r - r_1}{r^2 r_1} W_1 \right. \\
& \left. + D_\varphi \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \left(\frac{\pi^2}{\varphi_0^2} - 1 \right) \frac{r - r_1}{r r_1 R} W_2 - D_\varphi \left(\frac{\pi^2}{\varphi_0^2} - 1 \right)^2 \frac{1}{r R} \ln \frac{r}{r_1} W_2 \right\} \sin \frac{\pi \varphi}{\varphi_0} \\
& + \begin{cases} 0, & \text{pour } r < \bar{r}, \\ -p_0 \bar{r} \frac{r - \bar{r}}{r} \sin \frac{\pi \varphi}{\varphi_0}, & \text{pour } r > \bar{r}. \end{cases}
\end{aligned}$$

On voit donc que l'hypothèse $D_r = \infty$ conduit à de grandes simplifications et permet d'obtenir la solution avec des calculs à la portée de tous.

La fig. 7 donne la comparaison entre les résultats du calcul exact et de celui basé sur l'hypothèse $D_r = \infty$. On constate que, pour $\varphi_0 = 50^\circ$ et $b/l = 0,46$, les résultats de la théorie approchée sont tout à fait satisfaisants.

Cas des rigidités variables selon r

Si D_r , D_φ , $D_{r\varphi}$, $D_{\varphi r}$ varient avec r selon une loi du type $D = D_0 \left(\frac{r}{R} \right)^n$, on peut encore parvenir à une équation différentielle analogue à l'équation (8). Dans ce cas, la solution du problème ne présente pas en principe de difficultés plus grandes que celles offertes par les cas des rigidités constantes [13], [14].

Bibliographie

1. J. COURBON: Théorie des ponts courbes. Annales des Ponts et Chaussées, septembre-octobre 1961.
2. HIROSHI YONEZAWA: Moments and Free Vibrations in Curved Girder Bridges. Proceedings of the American Society of Civil Engineers; Journal of the Engineering Mechanics Division, February 1962.
3. C. MENN: Zur Berechnung gekrümmter Brücken. Schweizerische Bauzeitung, 18. März 1964.
4. E. VREDEN: Die Berechnung des gekrümmten Durchlaufträgers. Ernst-Verlag 1964.
5. H. WITTFOHT: Kreisförmig gekrümmte Träger. Springer-Verlag 1964.
6. Y. GUYON: Calcul des ponts larges à poutres multiples solidarisées par des entretoises. Annales des Ponts et Chaussées, septembre-octobre 1946.
7. C. MASSONNET: Méthode de calcul des ponts à poutres multiples tenant compte de leur résistance à la torsion. Mémoires A.I.P.C. 1950.
8. C. MASSONNET: Contribution au calcul des ponts à poutres multiples. Annales des Travaux Publics de Belgique, juin, octobre, décembre 1950.
9. G. CERADINI: Teoria dei ponti in curva a travi multiple, Nota I: Strutture a rigidezze flessionali e torsionali costanti. Costruzioni Metalliche, n° 2, 1965.
10. C. GAVARINI: Teoria dei ponti in curva a travi multiple, Nota II: Discussione della soluzione. Applicazioni, Criteri di progettazione. Costruzioni Metalliche, n° 3, 1965.
11. G. CERADINI: Teoria dei ponti in curva a travi multiple, Nota III: Ponti con traversi rigidi a flessione. Costruzioni Metalliche, n° 4, 1965.

12. C. MASSONNET: Compléments à la méthode de calcul des ponts à poutres multiples. Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, janvier 1962.
13. C. GAVARINI: Teoria della piastra ad ortotropia polare con rigidezze variabili secondo il raggio. Giornale del Genio Civile, n° 10—11, 1965.
14. C. GAVARINI: Teoria dei ponti in curva a travi multiple, Nota IV: Strutture a rigidezze variabili secondo il raggio. Costruzioni Metalliche, n° 6, 1965.

Résumé

On expose brièvement la théorie des dalles à orthotropie polaire et on l'applique au calcul des ponts courbes à poutres multiples. Les applications numériques ont été développées au moyen d'un calculateur électronique.

On déduit ensuite une théorie simplifiée en introduisant l'hypothèse des entretoises rigides.

Zusammenfassung

Die Theorie polarorthotroper Platten wird kurz dargestellt und anschließend für die Berechnung gekrümmter Balkenbrücken mit mehreren Hauptträgern verwendet. Die rechnerischen Anwendungen wurden für die Benützung eines elektronischen Rechengerätes entwickelt.

Anschließend wird noch eine vereinfachte Theorie abgeleitet durch die Annahme von starren Querträgern.

Summary

The theory of polar-orthotropic plates is briefly described and applied to the analysis of multi-girders curved bridges. The numerical computations are developed by means of an electronic computer.

A simplified theory is then deduced by introducing the hypothesis of rigid transverse beams.

Leere Seite
Blank page
Page vide