

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 25 (1965)

Artikel: Die Grenzlagen des Schubmittelpunktes bei Kastenträgern

Autor: Stüssi, F.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-20357>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Grenzlagen des Schubmittelpunktes bei Kastenträgern

The Limiting Positions of the Shear Centre in Box Girders

Les positions limites du centre de cisaillement dans les poutres-caissons

F. STÜSSI

Professor Dr., Präsident der IVBH, ETH, Zürich

1. Problemstellung

Der Schubmittelpunkt, dessen Existenz vor etwa 45 Jahren von den Ingenieuren H. SCHWYZER¹⁾, R. MAILLART²⁾ und A. EGGENSCHWYLER³⁾ gleichzeitig und unabhängig voneinander entdeckt worden ist, besitzt eine Doppelbedeutung: er ist gleichzeitig «Querkraftsmittelpunkt» bei verdrehungsfreier Biegung und Querschnittsdrehpunkt bei biegungsfreier Verdrehung. Er wird in der technischen Literatur bis heute als Querschnittsfestpunkt betrachtet, trotzdem schon vor längerer Zeit darauf hingewiesen wurde, daß dies, auch im Rahmen einer technischen Biegsungslehre für dünnwandige schlanke Stäbe, nicht zutrifft⁴⁾. Nachstehend soll zunächst dieser frühere Hinweis wiederholt und ergänzt werden.

Ein Stab mit unsymmetrischem Querschnitt nach Fig. 1a verbiegt sich dann unter einer lotrechten Belastung p in Richtung der y -Axe verdrehungsfrei, wenn sich die beiden Flanschen in jedem Schnitt um den gleichen Betrag $\eta_a = \eta_b$ durchbiegen; bei gleichen Randbedingungen beider Flanschen ist diese Bedingung für

$$\eta''_a = -\frac{M_a}{EJ_a} + \left(\frac{Q_a}{GF'_a}\right)' = \eta''_b = -\frac{M_b}{EJ_b} + \left(\frac{Q_b}{GF'_b}\right)'$$

¹⁾ H. SCHWYZER: Statische Untersuchung der aus ebenen Tragflächen zusammengesetzten räumlichen Fachwerke, Diss. ETH, 1920.

²⁾ R. MAILLART: Zur Frage der Biegung, Schweizerische Bauzeitung, Band 77, 1921.

³⁾ A. EGGENSCHWYLER: Über die Festigkeitsberechnung von Schiebetoren und ähnlichen Bauwerken, Diss. ETH, 1921.

⁴⁾ F. STÜSSI: Zur Biegung und Verdrehung des dünnwandigen schlanken Stahlstabes, Abhandlungen I.V.B.H., Band 6, Zürich 1940/41.

erfüllt. Bei gleichbleibendem Querschnitt ist mit

$$Q' = M'' = -p,$$

somit

$$\frac{M_a}{E J_a} + \frac{p_a}{G F'_a} = \frac{M_b}{E J_b} + \frac{p_b}{G F'_b}. \quad (1)$$

Dabei ist

$$p_a = p \frac{a_b}{b}, \quad p_b = p \frac{a_a}{b}, \quad p_a + p_b = p,$$

$$M_a = M \frac{a_b}{b}, \quad M_b = M \frac{a_a}{b}, \quad M_a + M_b = M;$$

J_a und J_b sind die Trägheitsmomente der beiden Flanschen bezüglich der x -Axe,

$$J_a = \frac{d_a h_a^3}{12}, \quad J_b = \frac{d_b h_b^3}{12}$$

und F' bedeutet die in der technischen Biegslehre eingeführte «reduzierte» Querschnittsfläche für die Schubverformung; für die hier vorliegenden Rechteckquerschnitte ist

$$F'_a = \frac{5}{6} d_a h_a, \quad F'_b = \frac{5}{6} d_b h_b.$$

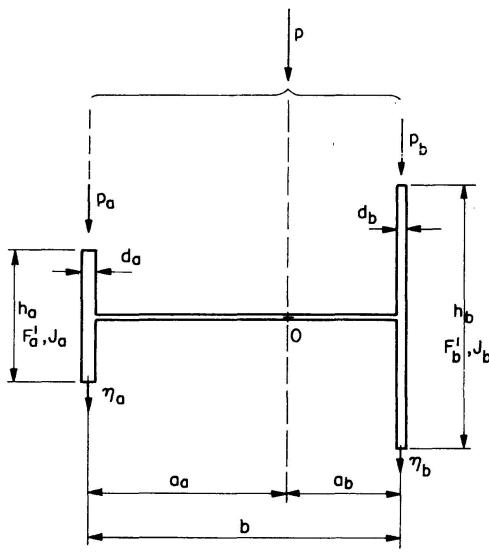


Fig. 1 a.

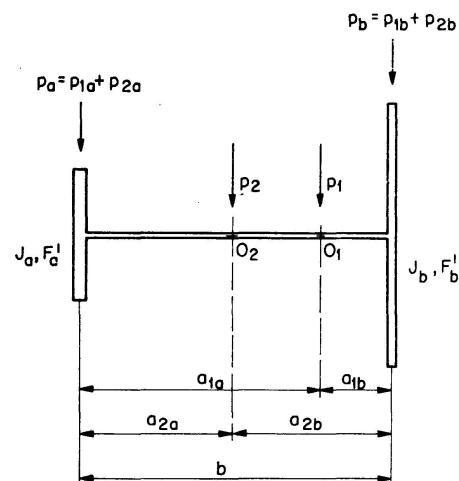


Fig. 1 b.

Setzen wir die Werte

$$p_b = p - p_a, \quad M_b = M - M_a, \quad p_a = -M''_a$$

in Gleichung (1) ein, so erhalten wir die Differentialgleichung für verdrehungsfreie Biegung zu

$$\frac{M''_a}{G} \frac{F'_a + F'_b}{F'_a F'_b} - \frac{M_a}{E} \frac{J_a + J_b}{J_a J_b} = -\frac{p}{G F'_b} - \frac{M}{E J_b}, \quad (1a)$$

oder auf die Normalform $y'' - c y = -F(z)$

geordnet

$$M_a'' - M_a \frac{G}{E} \frac{J_a + J_b}{J_a J_b} \frac{F'_a F'_b}{F'_a + F'_b} = - \frac{F'_a}{F'_a + F'_b} \left(p + M \frac{G}{E} \frac{F'_b}{J_b} \right). \quad (1b)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung (mit den Randbedingungen $M_{aA} = M_{aB} = 0$ für frei drehbar gelagerte Flanschenden) liefert die Momente M_a und daraus die Flanschbelastung p_a und damit die Lage des Schubmittelpunktes,

$$a_a = b \frac{p_b}{p},$$

in welchem die Belastung p angreifen muß, damit verdrehungsfreie Biegung vorliegt.

Der Abstand a_a ist nun nicht konstant, sondern über die Stablänge veränderlich; der Schubmittelpunkt, als Angriffspunkt der Belastung für verdrehungsfreie Biegung definiert, ist kein Querschnittsfestpunkt, sondern diese Schubmittelpunkte bilden über die Stablänge eine gekrümmte Kurve.

Betrachten wir dagegen den Schubmittelpunkt, entsprechend seiner ursprünglichen Deutung, in jedem Schnitt als Angriffspunkt der resultierenden Querkraft Q («Querkraftsmittelpunkt»), so ist seine Lage durch

$$a_a = b \frac{Q_b}{Q}$$

gegeben; auch diese Punkte liegen auf einer Kurve, die jedoch mit der Kurve der «Belastungsmittelpunkte» nicht übereinstimmt.

Wenn wir nun unseren Stab mit einem gleichmäßig verteilten Drehmoment m_d auf biegungsfreie Verdrehung beladen, so wird jeder der beiden Flanschen, abgesehen vom de St.-Venantischen Torsionsanteil $C\varphi'$, durch eine Flanschbelastung p ,

$$p = \mp \frac{T'}{b} = \pm \frac{m_d + C\varphi''}{b}$$

auf Biegung und Querkraft beansprucht und die Flanschdurchbiegung ist gegeben durch

$$\eta_{a,b}'' = - \frac{M_{a,b}}{E J_{a,b}} - \frac{p_{a,b}}{G F'_{a,b}}.$$

Die Lage des Schubmittelpunktes, nun in seiner dualen Bedeutung als Verdrehungszentrum jedes Querschnittes definiert, ist bestimmt durch

$$a_a = b \frac{\eta_a}{\eta_a - \eta_b}.$$

Auch diese Punkte liegen wieder auf einer Kurve, die jedoch mit keiner der beiden aus der verdrehungsfreien Biegung bestimmten Kurven (Belastungsmittelpunkt, Querkraftsmittelpunkt) übereinstimmt.

Dadurch, daß diese drei Kurven nicht mehr miteinander übereinstimmen, gehen nicht nur die Doppelbedeutung des «Schubmittelpunktes» und die Dualität zwischen verdrehungsfreier Biegung und biegunsfreier Verdrehung verloren, sondern es entsteht die grundsätzliche Schwierigkeit, daß der Begriff des Schubmittelpunktes überhaupt nicht mehr eindeutig definiert werden kann. Wohl lassen sich einfache Aufgaben der Biegung und Verdrehung, wie etwa unser Beispiel der Fig. 1 lösen, ohne daß der Schubmittelpunkt verwendet wird, in allgemeineren Fällen, bei komplizierten Querschnittsformen, wird eine solche Untersuchung jedoch schwierig und mühsam, wenn nicht überhaupt unmöglich.

Diese Schwierigkeit in der Definition des Schubmittelpunktes verschwindet jedoch, wenn wir unsere Untersuchung nicht auf einen in seiner Lage veränderlichen Schubmittelpunkt, sondern auf *seine beiden Grenzlagen* beziehen. Vernachlässigen wir in Gleichung (1a) die Beiträge der Schubverformung, so ergibt sich

$$M_a = \frac{J_a}{J_a + J_b} M$$

und damit die Lage des ersten Schubmittelpunktes 0_1 , wegen $M'' = Q' = -p$ zu

$$a_{1a} = b \frac{J_b}{J_a + J_b}.$$

Berücksichtigen wir dagegen nur die Schubverformung allein, so erhalten wir analog für den zweiten Schubmittelpunkt 0_2

$$a_{2a} = b \frac{F'_b}{F'_a + F'_b}.$$

Diese beiden Schubmittelpunkte sind Querschnittsfestpunkte und beide besitzen für die zugehörigen Belastungsanteile p_1 und p_2 bzw. T_1 und T_2 wieder die Doppelbedeutung als Querkrafts- bzw. Belastungsmittelpunkt bei verdrehungsfreier Biegung und als Verdrehungszentrum bei biegunsfreier Verdrehung. Für beide Belastungsanteile muß die Elastizitätsbedingung erfüllt sein; im Rahmen einer technischen Biegungslehre bedeutet dies, daß die Form des Querschnittes an jeder Stelle des Stabes erhalten bleiben muß. Für den ersten Belastungsanteil p_1 bei verdrehungsfreier Biegung führt diese Bedingung auf eine ebene Verteilung der Normalspannungen σ_1 ; die Elastizitätsbedingung nach der Hypothese Bernoulli-Navier vom Ebenbleiben der Querschnitte der elementaren Biegungslehre ist somit als Sonderfall in der erweiterten Elastizitätsbedingung von der Erhaltung der Querschnittsform enthalten⁴⁾.

Nachstehend sei der Rechnungsgang für den Fall verdrehungsfreier Biegung im Beispiel eines Stabes mit Querschnitt nach Figur 1a skizziert. Für die Normalspannungen σ_1 des ersten Belastungsanteils $p_1 = -M'_1$, der im ersten Schubmittelpunkt 0_1 angreift, bleibt der Querschnitt eben oder es ist

$$\sigma_1 = -\frac{M_1}{J_x} y$$

mit $J_x = J_a + J_b$. Zu den Spannungsänderungen

$$\frac{d\sigma_1}{dz} = \sigma'_1 = -\frac{Q_1}{J_x} y = -\frac{M'_1}{J_x} y$$

gehören Schubspannungen $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ in den beiden Flanschen:

$$\tau d = -\int \sigma'_1 dF + C,$$

die sich zu den beiden «Scheibenquerkräften» \mathfrak{Q}_a und \mathfrak{Q}_b ,

$$\mathfrak{Q}_{1a} = \int^a \tau dF, \quad \mathfrak{Q}_{1b} = \int^b \tau dF,$$

d. h. zu

$$\mathfrak{Q}_{1a} = \frac{J_a}{J_a + J_b} Q_1, \quad \mathfrak{Q}_{1b} = \frac{J_b}{J_a + J_b} Q_1$$

aufsummieren lassen; die resultierende Querkraft $Q_1 = \mathfrak{Q}_{1a} + \mathfrak{Q}_{1b}$ greift somit im ersten Schubmittelpunkt O_1 an, der deshalb aus der ebenen Verteilung der Normalspannungen σ_1 bestimmt werden kann.

$$\text{Nun sind aber wegen } \eta'_Q = \frac{\mathfrak{Q}}{G F'}$$

die beiden Flanschdurchbiegungen infolge dieser Scheibenquerkräfte \mathfrak{Q}_{1a} und \mathfrak{Q}_{1b} verschieden groß und die Elastizitätsbedingung ist somit nicht erfüllt. Diese Ungleichheit der Flanschdurchbiegungen wird nun durch die Normalspannungen σ_2 bzw. die Flanschbiegungsmomente \mathfrak{M}_2 ,

$$\mathfrak{M}_{2a} + \mathfrak{M}_{2b} = M_2$$

des zweiten Belastungsanteiles p_2 korrigiert:

$$-\frac{\mathfrak{M}_{2a}}{E J_a} + \left(\frac{\mathfrak{Q}_{1a}}{G F'_a} \right)' = -\frac{\mathfrak{M}_{2b}}{E J_b} + \left(\frac{\mathfrak{Q}_{1b}}{G F'_b} \right)'; \quad (2)$$

dagegen sind die Flanschdurchbiegungen infolge der Flanschquerkräfte $\mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{M}'_2$ gleich groß:

$$\frac{\mathfrak{Q}_{2a}}{G F'_a} = \frac{\mathfrak{Q}_{2b}}{G F'_b},$$

$$\text{oder es ist } \mathfrak{Q}_{2a} = \frac{F'_a}{F'_a + F'_b} Q_2, \quad \mathfrak{Q}_{2b} = \frac{F'_b}{F'_a + F'_b} Q_2$$

und damit ist analog

$$\mathfrak{M}_{2a} = \frac{F'_a}{F'_a + F'_b} M_2, \quad \mathfrak{M}_{2b} = \frac{F'_b}{F'_a + F'_b} M_2.$$

Die resultierende Belastung $p_2 = -M''_2$ und die resultierende Querkraft $Q_2 = M'_2$ greifen somit im zweiten Schubmittelpunkt O_2 an. Setzen wir diese

Werte von \mathfrak{M}_2 sowie die Werte von \mathfrak{Q}_1 unter Beachtung von $Q_1 = M'_2$ und unter Beschränkung auf den Fall gleichbleibenden Querschnittes in Gleichung (2) ein, so erhalten wir

$$-\frac{F'_a}{F'_a + F'_b} \frac{M_2}{E J_a} + \frac{J_a}{J_a + J_b} \frac{M''_1}{G F'_a} = -\frac{F'_b}{F'_a + F'_b} \frac{M_2}{E J_b} + \frac{J_b}{J_a + J_b} \frac{M''_1}{G F'_b},$$

woraus sich nach kurzer Zwischenrechnung

$$M_2 = -\frac{E}{G} \frac{J_a J_b}{J_a + J_b} \frac{F'_a + F'_b}{F'_a F'_b} M''_1$$

ergibt. Setzen wir diesen Wert in die Gleichgewichtsbedingung

$$M_1 + M_2 = M$$

ein, so erhalten wir nach Ordnen auf die Normalform mit

$$\underline{M''_1 - \frac{G}{E} \frac{J_a + J_b}{J_a J_b} \frac{F'_a F'_b}{F'_a + F'_b} M_1 = -\frac{G}{E} \frac{J_a + J_b}{J_a J_b} \frac{F'_a F'_b}{F'_a + F'_b} M} \quad (2a)$$

die Differentialgleichung zur Bestimmung des Momentenanteils M_1 , für die die zugehörige Belastung im ersten Schubmittelpunkt angreift. Die Normalspannungen σ_2 infolge des zweiten Belastungsanteils $p_2 = p - p_1$ sind nicht mehr nach einer Ebene über den Querschnitt verteilt, sondern es ist auch bei verdrehungsfreier Biegung eine Querschnittsverwölbung festzustellen. Die beiden Differentialgleichungen (1b) und (2a) führen mit

$$M_a = \frac{J_a}{J_a + J_b} M_1 + \frac{F'_a}{F'_a + F'_b} M_2 \quad (3)$$

auf die gleichen Ergebnisse; sie unterscheiden sich dementsprechend durch das Belastungsglied.

Die Verhältnisse sollen nun noch durch die Ergebnisse eines *Zahlenbeispiels* veranschaulicht werden. Wir wählen für den Querschnitt nach Fig. 1

$$h_a = h, \quad h_b = 2h, \quad d_a = 2d, \quad d_b = d;$$

damit ist

$$J_a = \frac{dh^3}{6}, \quad J_b = \frac{4dh^3}{6} = 4J_a, \quad F'_a = F'_b = \frac{5dh}{3}.$$

Ferner sei $G/E = 3/8$ und die Stablänge $l = 12h$.

Mit diesen Werten ergibt sich Gleichung (1b) zu

$$M''_a - \frac{75}{32h^2} M_a = -\frac{1}{2} \left(p + \frac{15}{16h^2} M \right)$$

und Gleichung (2a) zu

$$M''_1 - \frac{75}{32h^2} M_1 = -\frac{75}{32h^2} M.$$

In der folgenden Tabelle sind die Werte M ,

$$M = \frac{p}{2} z(l-z),$$

sowie die Lösungen der Differentialgleichungen⁵⁾ (1 b) und (2 a) für die halbe Stablänge bei frei drehbar gelagerten Flanschenden zusammengestellt.

Pkt.	M	Gl. (1 b)		Gl. (2 a)	
		M_a	p_a	M_1	p_1
<i>A</i>	0	0	0,50000	0	0
1	5,50	1,20034	0,26483	5,1655	0,78390
2	10,00	2,12202	0,21401	9,5933	0,95330
3	13,50	2,82671	0,20303	13,0776	0,98990
4	16,00	3,32772	0,20066	15,5743	0,99780
5	17,50	3,62794	0,20015	17,0735	0,99951
<i>m</i>	18,00	3,72797	0,20006	17,5734	0,99980

$\cdot p h^2$

$\cdot p h^2$

$\cdot p$

$\cdot p h^2$

$\cdot p$

Die beiden Wertegruppen sind miteinander durch Gleichung (3) verbunden:

$$M_a = 0,50 M - 0,30 M_1, \quad p_a = 0,50 p - 0,30 p_1.$$

Hätten wir, entsprechend der üblichen Theorie der Biegung und Verdrehung von Stäben mit offenem Querschnitt, die Schubverformungen vernachlässigt und den Schubmittelpunkt 0 als Querschnittsfestpunkt 0_1 eingeführt, so hätten wir

$$\begin{aligned} M_a &= 0,20 M, & p_a &= 0,20 p, \\ M_1 &= M, & p_1 &= p \end{aligned}$$

erhalten. Es ist festzustellen, daß der Einfluß der Schubverformung sich deutlich bei der Belastungsverteilung an den Stabenden bemerkbar macht (dies ist auch bei noch schlankeren Stäben der Fall), die Momente in Stabmitte dagegen weniger stark beeinflußt ($M_{am} = 0,20711 M_m$).

Da der Schubmittelpunkt dazu dient, eine beliebige Belastung aufzuteilen in einen Anteil, der verdrehungsfreie Biegung und einen Anteil, der biegsungsfreie Verdrehung verursacht, wird der Einfluß der Schubverformung in vielen Fällen, mehr als dies in der heutigen Praxis der Fall ist, zu beachten sein. Hier soll jedoch der Fall von Stäben mit offenem Querschnitt, der sich verhältnismäßig einfach behandeln läßt, nicht weiter verfolgt werden. Dagegen haben wir hier das einfache Beispiel der Fig. 1 deshalb so eingehend besprochen, weil sich einige

⁵⁾ Auf diese Berechnung (numerische Lösung) sei hier nicht eingetreten; es sei hiefür verwiesen auf F. STÜSSI: Grundlagen des Stahlbaues, Berlin, Springer, 1958.

grundssätzliche Zusammenhänge, die auch für den Kastenträger gültig sind, einfach erkennen lassen.

Es soll nun nachstehend zunächst ein fachwerkförmiger Kastenträger untersucht werden, worauf die Berechnung eines aus vollwandigen Scheiben bestehenden Kastenträgers unter der Voraussetzung, daß die Querschnittsform erhalten bleibt, dargestellt werden soll.

2. Fachwerkförmiger Kastenträger

Ein einfacher Balken mit zwei Hauptträgern, zwei Windverbänden und zwei Endquerverbänden, der durch $n - 1$ Zwischenquerverbände in n Zellen unterteilt wird, ist bei einfacher Lagerung n -fach statisch unbestimmt (Fig. 2). Wir erhalten ein statisch bestimmtes Grundsystem dadurch, daß wir

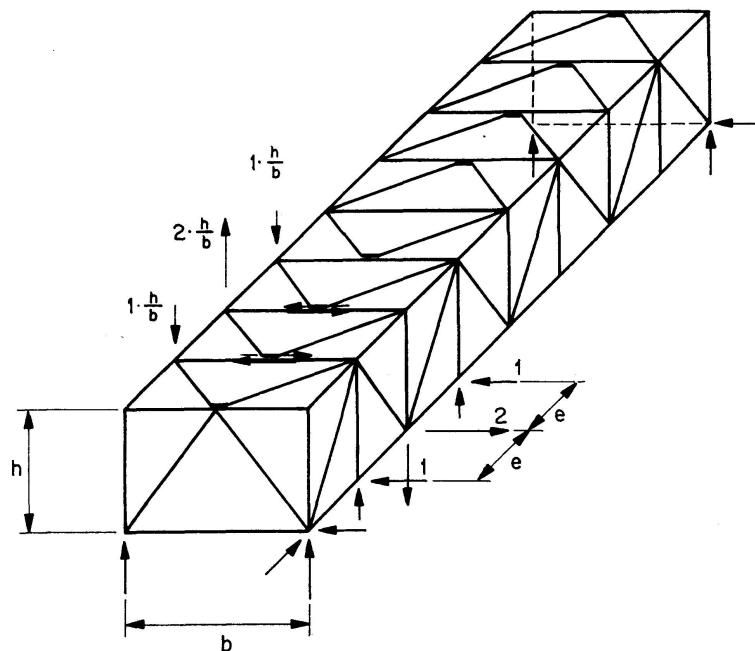


Fig. 2.

beispielsweise im oberen Windverband in jeder Zelle einen Diagonalstab durchschneiden oder den Strebenanschluß lösen. Würden wir nun die Schnittkraft an jeder dieser Schnittstellen als überzählige Größe einführen, so würden wir ein sehr unbequemes System von Elastizitätsgleichungen erhalten, weil in jeder Elastizitätsgleichung alle überzähligen Größen vorkommen. Führen wir dagegen die Kombination von zwei entgegengesetzt gleich großen Schnittkräften zweier aufeinanderfolgenden Zellen ein, so wird das System dreigliedrig,

$$a_{i,i-1} X_{i-1} + a_{i,i} X_i + a_{i,i+1} X_{i+1} + a_{i,0} = 0 \quad (4)$$

und ist deshalb sehr einfach aufzulösen. Die Verschiebungsgrößen a_{ik} ergeben sich am einfachsten aus der Arbeitsgleichung zu

$$a_{ik} = \sum \frac{S_i S_k}{E F} s. \quad (4a)$$

Es ist zweckmäßig, als überzählige Größen X die senkrecht zur Längsachse wirkenden Komponenten der Strebenkräfte des Windverbandes einzuführen; infolge $X_i = 1$ entstehen dann die in Fig. 2 angegebenen Hauptträgerbelastungen. Die Windverbandsquerkraft Q_h beträgt dann:

$$\begin{aligned} \text{im ersten Feld: } & Q_1 = X_1, \\ \text{im zweiten Feld: } & Q_2 = X_2 - X_1, \\ \text{im dritten Feld: } & Q_3 = X_3 - X_2 \text{ usw.,} \end{aligned}$$

oder es ist

$$\begin{aligned} X_2 &= Q_1 + Q_2, & X_3 &= Q_1 + Q_2 + Q_3, \\ X_m &= \sum_1^m Q_i \end{aligned}$$

und damit bedeutet wegen

$$M_m = e X_m = \sum_1^m Q_i e$$

die mit der Zellenlänge e multiplizierte überzählige Größe X das Moment im Windverband.

Mit Rücksicht auf die spätere Umformung der Elastizitätsgleichung (4) führen wir für den Beitrag der Streben an die Verschiebungsgrößen a_{ik} eine «Schubsteifigkeit» $E K$ ein. Für ein Hauptträgerfeld mit einfachem Strebenzug beträgt dieser Beitrag

$$\Delta a_{ik} = \frac{D_i D_k d}{E F_D} = \frac{Q_i}{\sin \alpha} \frac{Q_k}{\sin \alpha} \frac{d}{E F_D} = \frac{Q_i Q_k e}{E K_v},$$

$$\text{oder es ist } K_v = F_D \frac{h^2 e}{d^3}. \quad (4b)$$

Analog ergibt sich für ein Feld eine K -Fachwerkes (Windverband)

$$K_h = F_D \frac{b^2 e}{2 d^3}. \quad (4c)$$

In Fig. 3 sind die Kräfte infolge $X_i = 1$ im oberen Windverband und im vorderen Hauptträger eingetragen; im unteren Windverband und im hinteren Hauptträger sind die Kräfte entgegengesetzt gleich groß. Beanspruchte Stäbe sind kräftig, unbeanspruchte dünn ausgezogen. Damit kann die Verschiebungsgröße $E a_{ii}$ direkt abgelesen werden zu

$$E a_{ii} = 2 \frac{e^3}{b^2} \left(\frac{1}{F_0} + \frac{5}{F_u} \right) + \frac{2 e}{K_{h0}} + \frac{2 e}{K_{hu}} + \frac{4 h^2 e}{b^2 K_v},$$

wobei $E K_{h0}$, $E K_{hu}$ und $E K_v$ die Schubsteifigkeit des oberen und unteren Windverbandes sowie der Hauptträger bedeuten, während mit F_0 und F_u die Querschnitte von Obergurt und Untergurt bezeichnet sind. Für aufeinanderfolgende Doppelfelder wechseln die Beiträge für Obergurt und Untergurt, d. h. für F_0 und F_u alternierend ab. Analog finden wir

$$E a_{i,i-1} = 2 \frac{e^3}{b^2} \frac{1}{F_u} - \frac{e}{K_{h0}} - \frac{e}{K_{hu}} - \frac{2h^2 e}{b^2 K_v},$$

$$E a_{i,i+1} = 2 \frac{e^3}{b^2} \frac{1}{F_0} - \frac{e}{K_{h0}} - \frac{e}{K_{hu}} - \frac{2h^2 e}{b^2 K_v}.$$

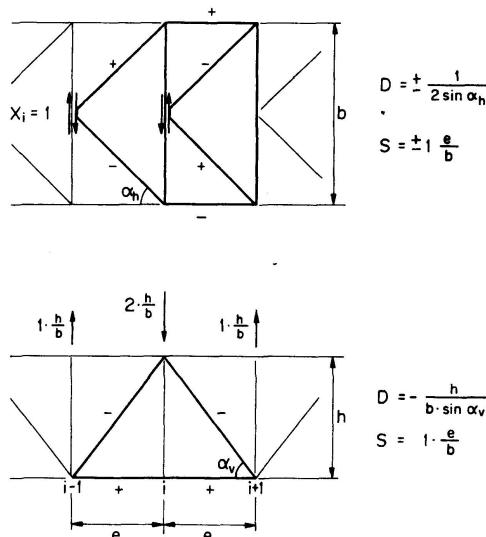


Fig. 3.

Ein äußerer Drehmoment m_d kann im Grundsystem nur durch Belastung $\pm p_0$ der beiden Hauptträger aufgenommen werden:

$$p_0 = \frac{m_d}{b};$$

die zugehörigen Querkräfte und Momente in den Hauptträgern bezeichnen wir mit Q_0 und M_0 :

$$M_0'' = Q_0' = -p_0.$$

Mit $S_{u,i} = \frac{M_{0,i}}{h}$, $S_{0,i+1} = -\frac{M_{0,i+1}}{h}$

ergibt sich das Belastungsglied der Elastizitätsgleichung für Punkt i zu

$$-E a_{i0} = 2 S_{u,i} \frac{e^2}{b} \frac{3}{F_u} + 2 S_{0,i+1} \frac{e^2}{b} \frac{1}{F_0} + 2 \frac{eh}{b} \left(\frac{Q_{0,i}}{K_{v,i}} - \frac{Q_{0,i+1}}{K_{v,i+1}} \right).$$

Die Verformungen der Querverbände lassen sich ohne Schwierigkeiten berücksichtigen, doch seien sie hier vernachlässigt, weil die Annahme starrer Querverbände der Voraussetzung von der Erhaltung der Querschnittsform entspricht.

Auf gleiche Weise kann, statt eines Drehmomentes m_d , jede andere gegebene äußere Belastung untersucht werden; es ändert sich jeweils nur das Belastungsglied a_{i0} . Dagegen ist es direkt nicht möglich, diejenige waagrechte Belastung zu bestimmen, die das Tragwerk auf verdrehungsfreie Biegung beansprucht.

Um diese normale statische Berechnung des hochgradig statisch unbestimmten Tragwerks mit der noch aufzustellenden Differentialgleichung des Kastenträgers zu vergleichen, nehmen wir noch den Grenzübergang für immer kürzer werdende Zellen, $e \rightarrow dz$, vor. Dafür dürfen wir setzen

$$X_{i-1} = X_i = X_{i+1}$$

$$\text{und } \frac{X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}}{e^2} \rightarrow X''_i;$$

beachten wir noch, daß $X_i e$ das Moment M_{hi} bedeutet und daß die alternierenden Beiträge der Gurtstäbe auszugleichen sind, so folgt aus der Elastizitätsgleichung (4) durch Einsetzen der Verschiebungsgrößen a_{ik} und Division durch e^2 die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} M_h \frac{8}{b^2} \left(\frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_u} \right) - \left[M'_h \left(\frac{1}{K_{h0}} + \frac{1}{K_{hu}} + \frac{2h^2}{b^2 K_v} \right) \right]' \\ = \frac{4M_0}{bh} \left(\frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_u} \right) - \frac{2h}{b} \left(\frac{Q_0}{K_v} \right)' \end{aligned} \quad (5)$$

die sich für konstante Strebenquerschnitte auf

$$M_h \frac{8}{b^2} \left(\frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_u} \right) - M''_h \left(\frac{1}{K_{h0}} + \frac{1}{K_{hu}} + \frac{2h^2}{b^2 K_v} \right) = \frac{4M_0}{bh} \left(\frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_u} \right) + \frac{2h p_0}{K_v} \quad (5a)$$

vereinfacht. Diese Gleichung wird am einfachsten nach Einsetzen der Zahlenwerte auf die Normalform geordnet.

Diese Differentialgleichung kann auch direkt aus Fig. 4 abgeleitet werden. Ein äußeres Drehmoment m_d wird durch die Wandbelastungen p_h und p_v nach der Gleichgewichtsbedingung

$$p_h h + p_v b = m_d$$

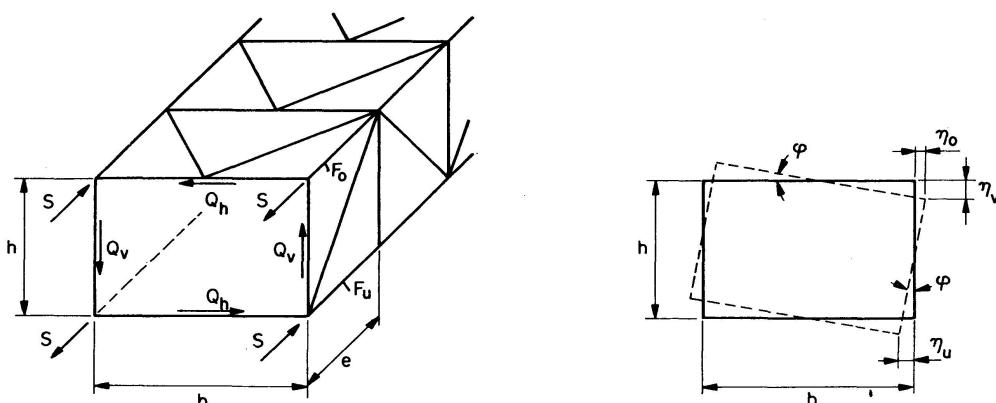


Fig. 4.

aufgenommen. Dabei gelten auch die Beziehungen

$$\begin{aligned} M_h'' &= Q_h' = -p_h, \\ M_v'' &= Q_v' = -p_v, \\ \Phi'' &= T' = -m_d. \end{aligned}$$

In den Gurtstäben treten die Gurtkräfte S auf:

$$\begin{aligned} S &= \pm \frac{M_h}{b} \mp \frac{M_v}{h} = \pm \frac{M_h}{b} \mp \frac{1}{bh} (\Phi - M_h h), \\ S &= \pm 2 \frac{M_h}{b} \mp \frac{\Phi}{bh}. \end{aligned}$$

Die Elastizitätsbedingung von der Erhaltung der Querschnittsform lautet bei der vorausgesetzten einfachen Symmetrie

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2 \eta_v}{b} = \frac{\eta_0 + \eta_u}{h} \\ \text{bzw. } \frac{2 \eta_v''}{b} &= \frac{\eta_0'' + \eta_u''}{h}. \end{aligned}$$

Für die einzelnen Scheibendurchbiegungen η gilt

$$\begin{aligned} E \eta_v'' &= \frac{1}{h} \left(\frac{S}{F_0} + \frac{S}{F_u} \right) + \left(\frac{Q_v}{K_v} \right)', \\ E \eta_0'' &= -\frac{2}{b} \frac{S}{F_0} + \left(\frac{Q_h}{K_{h0}} \right)', \\ E \eta_u'' &= -\frac{2}{b} \frac{S}{F_u} + \left(\frac{Q_h}{K_{hu}} \right)'; \end{aligned}$$

setzen wir diese Werte in die Elastizitätsbedingung ein, so folgt

$$\frac{2}{b} \left(\frac{S}{F_0} + \frac{S}{F_u} \right) + \frac{2}{b} \left(\frac{Q_v}{K_v} \right)' = -\frac{2}{b} \frac{S}{F_0} + \frac{1}{h} \left[\left(\frac{Q_h}{K_{h0}} \right)' + \left(\frac{Q_h}{K_{hu}} \right)' \right]$$

und daraus durch Einsetzen von S , Elimination von $Q_v = \frac{1}{b}(T - Q_h h)$ und Ordnen

$$\begin{aligned} M_h \frac{8}{b^2} \left(\frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_u} \right) - \left[M'_h \left(\frac{1}{K_{h0}} + \frac{1}{K_{hu}} + \frac{2h^2}{b^2 K_v} \right) \right]' \\ = \frac{4\Phi}{b^2 h} \left(\frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_u} \right) - \frac{2h}{b^2} \left(\frac{T}{K_v} \right)'. \end{aligned} \tag{6}$$

Wegen $\Phi = M_0 b$, $T = Q_0 b$ stimmt Gleichung (6) mit Gleichung (5) überein.

Auf gleiche Weise ergibt sich für eine waagrechte Belastung $p_h = p_{h0} + p_{hu}$ diejenige Verteilung der Windverbandsbelastungen, die verdrehungsfreie Biegung verursacht (Fig. 5). Aus den Stabkräften S ,

$$S_0 = \frac{M_{h0}}{b} + \frac{M_v}{h}, \quad S_u = \frac{M_{hu}}{b} + \frac{M_v}{h}$$

und den Elastizitätsbedingungen

$$\eta_0 = \eta_u, \quad \eta_v = 0$$

folgt unter Beschränkung auf gleichbleibende Strebenquerschnitte die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} M_{h0} \frac{2}{b^2} \left(\frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_u} \right) \left[1 + \frac{K_v b^2}{2 h^2} \left(\frac{1}{K_{h0}} + \frac{1}{K_{hu}} \right) \right] - M''_{h0} \left(\frac{1}{K_{h0}} + \frac{1}{K_{hu}} \right) \\ = M_h \left[\frac{2}{F_u b^2} + \frac{K_v}{K_{hu} h^2} \left(\frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_u} \right) \right] + \frac{p_h}{K_{hu}}; \end{aligned} \quad (7)$$

gleichzeitig ist

$$M_v = \frac{K_v b}{2 h} \left(\frac{M_{h0}}{K_{h0}} - \frac{M_{hu}}{K_{hu}} \right).$$

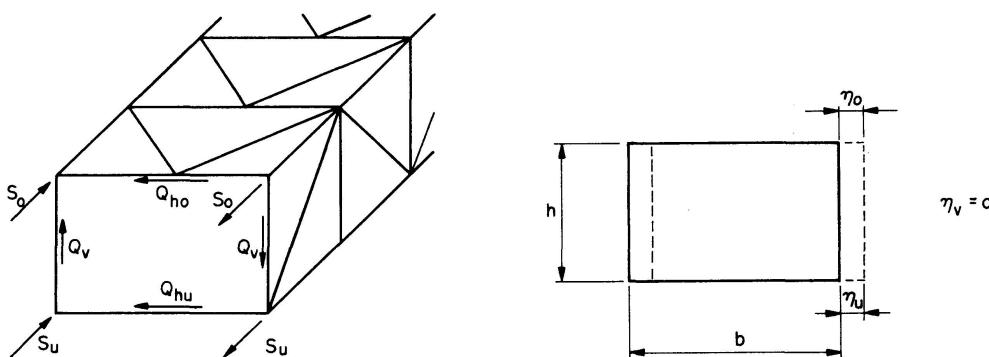


Fig. 5.

Aus den beiden Differentialgleichungen (6) und (7) folgt, daß auch für den untersuchten fachwerkförmigen Kastenträger selbst im einfachsten Fall von gleichmäßig verteilter Belastung p_h oder m_d und konstanten Querschnitten weder die Querkraftsmittelpunkte noch die Verdrehungszentren auf einer Geraden liegen, der Schubmittelpunkt also auch hier kein Querschnittsfestpunkt ist. Ein Zahlenbeispiel soll im Anschluß an die im nächsten Abschnitt darzustellende Berechnungsmethode des vollwandigen Kastenträgers die Verhältnisse veranschaulichen.

3. Der vollwandige Kastenträger mit einfach geschlossenem Querschnitt

Voraussetzungen und Grundlagen

Wir untersuchen einen aus mehreren ebenen prismatischen Scheiben zusammengesetzten Stab mit einfach geschlossenem Querschnitt und freien Flanschen (Fig. 6) unter beliebiger Belastung, die sich in einen Anteil, der den Stab verdrehungsfrei auf Biegung, und in einen Anteil, der den Stab biegsfrei auf Verdrehen beansprucht, zerlegen läßt. Für beide Anteile bleiben die Stabquerschnitte normalerweise nicht mehr eben; an Stelle der Elastizitätsbedingung vom Ebenbleiben der Querschnitte (Hypothese von Bernoulli-

Navier) der elementaren Biegsungslehre tritt hier, in unserer erweiterten Biegsungslehre, die Elastizitätsbedingung, daß die Form der Stabquerschnitte auch unter den eintretenden Formänderungen erhalten bleibt.

Für die Einzelscheibe der Breite b_i , die wir als dünnwandig voraussetzen, soll dagegen die elementare Biegsungslehre gültig bleiben; die Normalspannungen σ sind somit linear über die Scheibenbreite b_i verteilt (Fig. 7). Damit

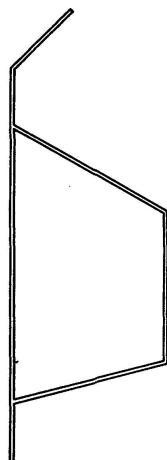


Fig. 6.

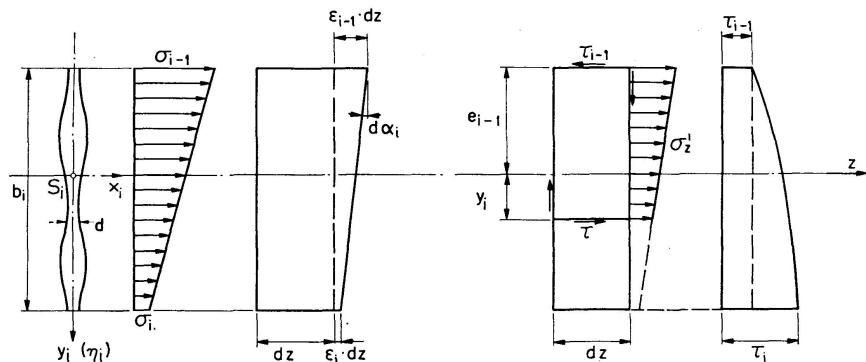


Fig. 7.

ergibt sich für ein Scheibenelement der ursprünglichen Länge dz eine gegenseitige Drehung der Schnittfläche z und $z+dz$ um den Winkel $d\alpha_i$,

$$d\alpha_i = \frac{\epsilon_{i-1} - \epsilon_i}{b_i} dz = \frac{\sigma_{i-1} - \sigma_i}{E b_i} dz.$$

Da aber $d\alpha_i/dz$ die Neigungsänderung der elastischen Linie bedeutet,

$$\frac{d\alpha_i}{dz} = \frac{d\eta'}{dz} = \eta'',$$

folgt

$$\eta''_{i\sigma} = \frac{\sigma_{i-1} - \sigma_i}{E b_i}. \quad (8)$$

Infolge der Spannungsänderungen $\sigma'_z = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$ treten entsprechend der Gleichgewichtsbedingung $\sum Z = 0$ an einem Scheibenelement $dy dz$,

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

Schubspannungen $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_i$ auf:

$$d \cdot \tau = - \int_{e_{i-1}}^{y_i} \sigma'_z dF + C; \quad (9)$$

beginnen wir die Integration an einem schubfreien Rand $i-1$, so verschwindet die Integrationskonstante C . Die Schubspannungen lassen sich zu Scheibenquerkräften \mathfrak{Q}_i zusammenfassen:

$$\mathfrak{Q}_i = \int_{e_i}^{b_i} \tau dF. \quad (10)$$

Besitzt die Scheibe b_i konstante Stärke d_i , so lassen sich die Integrationen der Gleichungen (9) und (10) wegen der linearen Verteilung der Spannungsänderungen σ'_z und der parabolischen Verteilung der Schubspannungen τ formelmäßig durchführen. Bei einer Schubspannung τ_{i-1} am oberen Rand $i-1$ der Scheibe b_i beträgt die Schubspannung τ_{im} in Scheibenmitte

$$\tau_{im} = \tau_{i-1} - \frac{b_i}{8} (3\sigma'_{i-1} + \sigma'_i) \quad (9a)$$

und am unteren Rand

$$\tau_i = \tau_{i-1} - \frac{b_i}{2} (\sigma'_{i-1} + \sigma'_i) \quad (9b)$$

und die Scheibenquerkraft \mathfrak{Q}_i ergibt sich zu

$$\mathfrak{Q}_i = \frac{d_i b_i}{6} (\tau_{i-1} + 4\tau_{im} + \tau_i) = b_i \left[\tau_{i-1} d_i - \frac{b_i d_i}{6} (2\sigma'_{i-1} + \sigma'_i) \right]. \quad (10a)$$

Wir stellen fest, daß das zweite Klammerglied eine Knotenlast darstellt. Beginnen wir die Integration an einem schubfreien Rand, so ist deshalb

$$\mathfrak{Q}_1 = -b_1 \frac{b_1 d_1}{6} (2\sigma'_0 + \sigma'_1) = -b_1 K_0(\sigma').$$

An der Kante 1 ist

$$\tau_1 d_1 = \tau_{2-1} d_2 = -\frac{b_1 d_1}{6} [(2\sigma'_0 + \sigma'_1) + (\sigma'_0 + 2\sigma'_1)] = -K_0 - K_1^l$$

und damit wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_2 &= -b_2 \left[K_0 + K_1^l + \frac{b_2 d_2}{6} (2\sigma'_1 + \sigma'_2) \right] = -b_2 (K_0 + K_1), \\ \text{oder allgemein } \mathfrak{Q}_i &= -b_i \sum_0^{i-1} K(\sigma'). \end{aligned} \quad (10b)$$

Die Scheibenquerkraft \mathfrak{Q}_i verursacht eine Schubverformung $\eta'_{i\tau}$ der Scheibe b_i , die nach der normalen Biegsungslehre dem mittleren Schubwinkel γ_m gleichgesetzt werden kann:

$$\eta'_{i\tau} = \gamma_m = \frac{\tau_m}{G} = \frac{\mathfrak{Q}_i}{G \kappa F_i} = \frac{\mathfrak{Q}_i}{G F'_i}.$$

$F'_i = \kappa F_i$ bedeutet eine reduzierte Querschnittsfläche, derart bestimmt, daß die Unverträglichkeit der Elastizitätsbedingung vom Ebenbleiben der Querschnitte mit der Schubverformung in der Krümmung η'' ausgeglichen erscheint⁶⁾:

$$\eta''_i = \frac{\sigma_{i-1} - \sigma_i}{E b_i} + \left(\frac{\mathfrak{Q}_i}{G F'_i} \right)' . \quad (8a)$$

⁶⁾ F. STÜSSI: Baustatik I, Birkhäuser, Basel, 1946, 1953, 1962, Abschnitt VII, 1c.

Aus einer Arbeitsgleichung für die Verdrehung eines Kastenträgers zeigt sich, daß für alle zu einem geschlossenen Querschnittsteil gehörenden Scheiben die Schubverformung mit dem vollen Querschnitt $F'_i = F_i$, $\kappa = 1$, zu berechnen ist. Bei freien Flanschen ist der Wert von κ nicht nur von der Querschnittsform, sondern auch von der Verteilung der Spannungen abhängig. Fig. 8 zeigt einige typische Fälle für einen freien Flansch mit Rechteckquerschnitt. Es wäre nun im Rahmen einer technischen Biegslehre unerwünscht, wenn der Wert von κ je nach dem Belastungsfall mit veränderlicher Größe eingeführt werden müßte. Wir setzen deshalb zur Vereinfachung auch für freie Flanschen $F'_i = F_i$, $\kappa = 1$. Diese Vereinfachung hat deshalb keinen unzulässigen Fehler zur Folge, weil die Schubverformungen nur die Lage des zweiten Schubmittelpunktes O_2 und damit die Größe der auf diesen orientierten sekundären Belastungsanteile beeinflussen. Vergleichsrechnungen zeigen, daß auch in ungünstigen Fällen die durch diese Vereinfachung ($\kappa = 1$ auch bei freien Flanschen) verursachten Fehler vernachlässigbar sind.

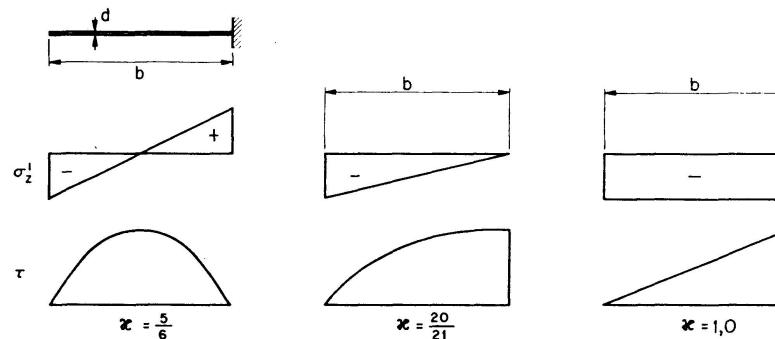


Fig. 8.

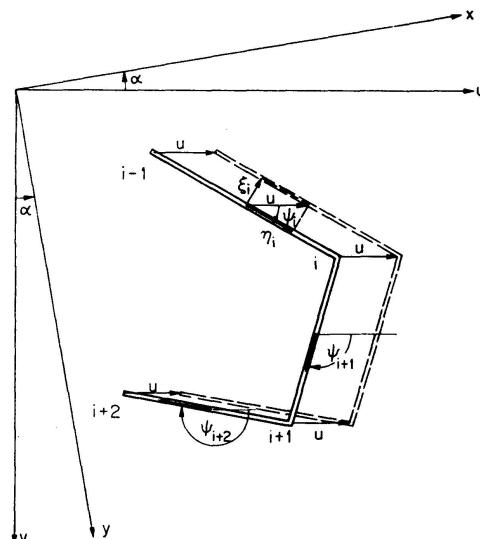


Fig. 9.

Die erste Grenzlage O_1 des Schubmittelpunktes

Da für die beiden Grenzlagen O_1 und O_2 des Schubmittelpunktes die Doppelbedeutung als Querkraftsmittelpunkt bei verdrehungsfreier Biegung und als Verdrehungszentrum bei biegungsfreier Verdrehung besteht, existieren auch

zwei Wege zu ihrer Bestimmung; wir bestimmen hier 0_1 und 0_2 als Querkraftsmittelpunkte bei verdrehungsfreier Biegung.

Bei verdrehungsfreier Biegung erfahren nach unserer Voraussetzung von der Erhaltung der Querschnittsform alle Punkte eines Querschnittes gleiche Verschiebungen u . Nach Fig. 9 gilt für die Verschiebungskomponenten η in Scheibenebene und ξ senkrecht dazu:

$$\eta_i = u \cos \psi_i, \quad \xi_i = u \sin \psi_i.$$

Da wir dünne Scheiben (dünnwandiger Stab) voraussetzen, leisten sie einer Verschiebung ξ nur einen vernachlässigbar kleinen Widerstand; es sind deshalb im Kräftespiel nur die Scheibendurchbiegungen η zu berücksichtigen.

Für einen ersten Belastungsanteil, entsprechend dem ersten Schubmittelpunkt 0_1 , gilt somit für die Normalspannungen σ_{1i} nach Gleichung (8)

$$\eta''_{1i} = \frac{\sigma_{1,i-1} - \sigma_{1,i}}{E b_i} = u'' \cos \psi_i$$

oder

$$u'' = \frac{\sigma_{1,i-1} - \sigma_{1,i}}{E b_i \cos \psi_i} = \text{konst.} \quad (11)$$

Dies bedeutet, daß alle auf die u -Richtung projizierten Spannungsdiagramme der Einzelscheiben gleiche Neigung besitzen und daraus folgt, daß für verdrehungsfreie Biegung die Normalspannungen σ_1 des ersten Belastungsanteils nach einer Ebene über den Querschnitt verteilt sind und daß deshalb dafür die Normalspannungsformel nach der klassischen Biegungslehre gilt; für konjugierte Schwerachsen ist somit

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} - \frac{M_{1x}}{J_x} y + \frac{M_{1y}}{J_y} x.$$

Es ist nun zweckmäßig, die Berechnung der Normalspannungen σ_1 auf die Hauptschwerachsen x, y des Querschnittes zu beziehen, weil dann auch die zugehörigen Verschiebungen u, v voneinander unabhängig werden, d. h. Kraft- und Verschiebungsrichtung je miteinander übereinstimmen.

Infolge einer Querkraft $Q_x = M'_y$ entstehen (mit $N' = 0, M'_x = 0$) Spannungsänderungen

$$\sigma'_{zx} = \frac{Q_x}{J_y} x,$$

die sich aber bei einem Kastenquerschnitt nicht ohne weiteres zu Schubspannungen und daraus zu Scheibenquerkräften aufsummieren lassen, weil am kastenförmigen Querschnittsteil keine Stelle mit $\tau = 0$ bekannt ist. Wir müssen deshalb durch Aufschneiden einer Scheibe erst ein statisch bestimmtes Grundsystem schaffen und an der Schnittstelle einen überzähligen Schubfluß $s = \tau_x d$ einführen (Fig. 10). Bezeichnen wir die Schubspannungen, die wir im Grundsystem nach Gleichung (9) aus den Spannungsänderungen σ'_{zx} erhalten, mit τ_0 und die entsprechende Winkeländerung mit γ_0 ,

$$\gamma_0 = \frac{\tau_0}{G},$$

so ergibt sich für ein Scheibenelement b_i mit $dz=1$ der Anteil Δa_{10} an die Verschiebungsgröße a_{10} aus einer Arbeitsgleichung mit dem virtuellen Belastungszustand $s=\tau_x d=1$ zu

$$\Delta a_{10} = \int \frac{\tau_0}{G} \tau_x dF = \int \frac{\tau_0}{G} \frac{s=1}{d} dF = \frac{1}{G} \int \tau_0 \frac{dF}{d}.$$

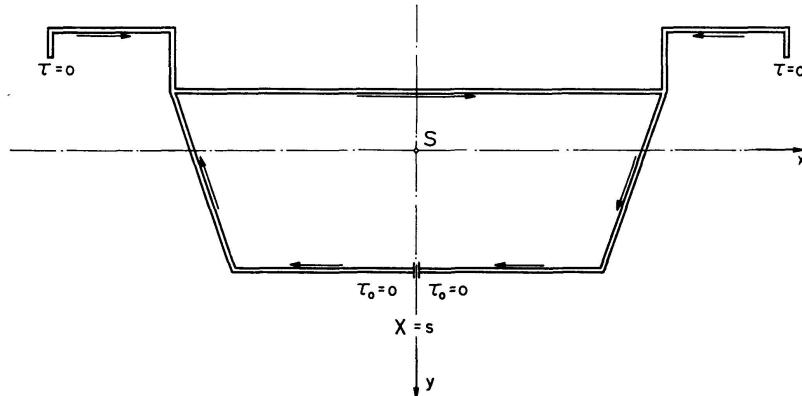


Fig. 10.

Führen wir mit u die von der Schnittstelle aus gemessene Länge des Umfangs des geschlossenen Querschnittsteiles ein, so ist

$$\frac{dF}{d} = du$$

und wir erhalten

$$a_{10} = \frac{1}{G} \int^K \tau_0 du$$

und analog

$$a_{11} = \frac{1}{G} \int^K \frac{1}{d} du.$$

Diese Integrale \int^K erstrecken sich über den kastenförmigen Teil des Querschnittes. Die Elastizitätsbedingung normaler Form

$$\begin{aligned} sa_{11} + a_{10} &= 0, \\ \text{bzw. } s \int^K \frac{1}{d} du + \int^K \tau_0 du &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

liefert den überzähligen Schubfluß s , was mit

$$\tau = \tau_0 + \frac{s}{d} \quad (13)$$

mit der im Flugzeugbau bekannten Beziehung

$$\int^K \tau du = 0 \quad (14)$$

inhaltlich übereinstimmt.

Besteht der Querschnitt aus Einzelscheiben konstanter Stärke d_i , so ist es bequem, die Schubspannungen zu Scheibenquerkräften zusammenzufassen und die Elastizitätsbedingung in der Form

$$s \sum_{i=1}^K \frac{b_i}{d_i} + \sum_{i=1}^K \frac{\Omega_{0i}}{d_i} = 0 \quad (12a)$$

anzuschreiben; auch diese Summen beziehen sich nur auf den geschlossenen Querschnittsteil. Freie Flanschen beeinflussen wohl die Schubspannungen τ_0 des Grundsystems, kommen aber in der Elastizitätsbedingung nicht vor, da sie ja durch den überzähligen Schubfluß nicht beansprucht werden.

Aus den resultierenden Scheibenquerkräften Ω_i

$$\Omega_i = \Omega_{0i} + s b_i, \quad (13a)$$

für die die Elastizitätsbedingung

$$\sum_{i=1}^K \frac{\Omega_i}{d_i} = 0 \quad (14a)$$

erfüllt ist, ergibt sich die resultierende Querkraft Q_x und damit ein erster geometrischer Ort des Schubmittelpunktes O_1 . Analog ist auch die Lage der Querkraft Q_y aus den Spannungsänderungen σ'_y

$$\sigma'_y = -\frac{Q_y}{J_x} y,$$

zu bestimmen. Bei einfach symmetrischen Querschnitten liegt der Schubmittelpunkt auf der Symmetriearchse, bei doppelter Symmetrie fällt er mit dem Schwerpunkt zusammen.

Besteht der Stab aus Scheiben verschiedenen Baustoffes (z. B. Verbundträger), so hebt sich selbstverständlich der Schubmodul G in der Elastizitätsbedingung (12) des Schubflusses nicht heraus, sondern es ist

$$s \int \frac{1}{G d} du + \int \frac{\tau_0}{G} du = 0$$

bzw.

$$s \sum_{i=1}^K \frac{b_i}{G d_i} + \sum_{i=1}^K \frac{\Omega_{0i}}{G d_i} = 0.$$

Die zweite Grenzlage O_2 des Schubmittelpunktes

Der Schubmittelpunkt O_2 , als Querkraftsmittelpunkt definiert, ist der Angriffspunkt einer Querkraft Q , deren Schubspannungen eine verdrehungsfreie Biegung erzeugen. Nehmen wir beispielsweise eine Verschiebung u' (z. B. $u'=1$) in Richtung u an, so ist für jede Scheibe b_i

$$\eta'_{i\tau} = u' \cos \psi_i = 1 \cos \psi_i,$$

während auch hier die Verformungen ξ_i normal zur Mittelebene der als dünn vorausgesetzten Scheiben vernachlässigt werden dürfen. Da für die Schubverformung allein

$$\eta'_{i\tau} = \frac{\mathfrak{Q}_i}{G F_i}$$

gilt, wird

$$\frac{\mathfrak{Q}_{iu}}{G F_i} = 1 \cos \psi_i$$

oder

$$\mathfrak{Q}_{iu} = G F_i \cos \psi_i. \quad (15)$$

Aus diesen Scheibenquerkräften kann die Resultierende Q_u nach Größe und Lage bestimmt werden.

In bezug auf die Vorzeichen ist zu beachten, daß wir für die Scheibenquerkräfte \mathfrak{Q}_i und die Scheibendurchbiegungen η_i einen gleichbleibenden Drehsinn um den geschlossenen Querschnittsteil herum als positiv annehmen. Der Winkel ψ_i ist zwischen der positiven Verschiebungsrichtung u und der positiven Durchbiegungsrichtung η_i zu messen; für $\frac{\pi}{2} \leq \psi_i \leq \frac{3\pi}{2}$ wird $\cos \psi_i$ negativ (Fig. 9).

Analog ergibt sich für eine angenommene Verschiebungsrichtung v aus $v' = 1$ eine resultierende Querkraft Q_v . Der gesuchte Schubmittelpunkt O_2 ist der Schnittpunkt von Q_u und Q_v . Ist die Verschiebungsrichtung v senkrecht zur Verschiebungsrichtung u , so wird

$$\mathfrak{Q}_{iv} = G F_i \sin \psi_i.$$

Für die Scheibenquerkräfte \mathfrak{Q}_{iu} und \mathfrak{Q}_{iv} ist die Elastizitätsbedingung des Schubflusses im geschlossenen Querschnittsteil,

$$\int \tau du = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum^K \frac{\mathfrak{Q}_i}{d_i} = 0,$$

erfüllt.

Es ist nun zu beachten, daß die Richtung der resultierenden Querkräfte Q_u und Q_v nicht mit den entsprechenden Verschiebungsrichtungen u und v übereinstimmt. Bei senkrechtem Axenkreuz u, v besitzt Q_u eine Komponente Q_{uu} in Richtung u ,

$$Q_{uu} = \sum G F_i \cos^2 \psi_i,$$

und eine Komponente Q_{uv} in Richtung v ,

$$Q_{uv} = \sum G F_i \cos \psi_i \sin \psi_i.$$

Analog ist für Q_v

$$Q_{vv} = \sum G F_i \sin^2 \psi_i,$$

$$Q_{vu} = Q_{uv} = \sum G F_i \sin \psi_i \cos \psi_i.$$

Drehen wir das rechtwinklige Axenkreuz u, v um den Winkel α in die Lage x, y , so wird

$$\begin{aligned}Q_{xx} &= \sum G F_i \cos^2(\alpha + \psi_i), \\Q_{xy} = Q_{yx} &= \sum G F_i \sin(\alpha + \psi_i) \cos(\alpha + \psi_i), \\Q_{yy} &= \sum G F \sin^2(\alpha + \psi_i).\end{aligned}$$

Setzen wir die Beziehungen

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \psi_i) &= \sin \alpha \cos \psi_i + \cos \alpha \sin \psi_i, \\\cos(\alpha + \psi_i) &= \cos \alpha \cos \psi_i - \sin \alpha \sin \psi_i\end{aligned}$$

ein, so erhalten wir nach kurzer Zwischenrechnung

$$\begin{aligned}Q_{xx} &= Q_{uu} \cos^2 \alpha + Q_{vv} \sin^2 \alpha - 2 Q_{uv} \sin \alpha \cos \alpha, \\Q_{yy} &= Q_{uu} \sin^2 \alpha + Q_{vv} \cos^2 \alpha + 2 Q_{uv} \sin \alpha \cos \alpha, \\Q_{xy} &= (Q_{uu} - Q_{vv}) \sin \alpha \cos \alpha + Q_{uv} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).\end{aligned}\tag{16}$$

Zwischen diesen Querkraftskomponenten bestehen somit genau die gleichen Beziehungen wie zwischen den Trägheits- und Zentrifugalmomenten bei der Drehung eines rechtwinkligen Axenkreuzes und es gelten auch analoge Folgerungen. So existiert ein einziges rechtwinkliges Axenkreuz, für das die beiden Verschiebungsrichtungen mit den Richtungen der zugehörigen resultierenden Querkräfte übereinstimmen. Wir nennen diese beiden Achsen *Schubhaupttaxen*, in Analogie zu den *Biegungshaupttaxen*; ihre Lage (mit Ursprung im Schubmittelpunkt O_2) ist gekennzeichnet durch die Beziehung

$$\tg 2\alpha = -\frac{2 Q_{uv}}{Q_{uu} - Q_{vv}}\tag{16a}$$

Die Richtungen der Schubhaupttaxen und der Biegungshaupttaxen stimmen bei unsymmetrischen Querschnitten normalerweise nicht miteinander überein; daraus ergibt sich bei verdrehungsfreier Biegung eine grundsätzliche, wenn auch zahlenmäßig nicht stark ins Gewicht fallende Unverträglichkeit zwischen den beiden Belastungsanteilen.

Verdrehungsfreie Biegung

Eine beliebige äußere Belastung p beansprucht den Stab auf Biegung und Verdrehung. Um die Beanspruchung aufzuteilen zu können, benötigen wir zuerst die Lage von p , die den Stab auf verdrehungsfreie Biegung beansprucht; dann kann das Drehmoment m_d bestimmt werden, das den Stab auf Torsion belastet.

Der Querschnitt sei auf die Biegungshaupttaxen x, y orientiert. Wir zerlegen die Belastung p in zwei Komponenten p_x und p_y parallel zu den Hauptachsen. Es genügt, wenn wir die Belastung p_x untersuchen; für p_y ist dann die Untersuchung analog durchzuführen.

Der erste Anteil p_1 von p_x mit

$$p_1 = -Q'_{1x} = -M''_{1y}$$

verursacht Normalspannungen $\sigma_1 = \sigma_{1z}$, die linear über den Querschnitt verteilt sind:

$$\sigma_1 = \frac{M_{1y}}{J_y} x;$$

die zugehörigen Spannungsänderungen σ'_1 ,

$$\sigma'_1 = \frac{Q_x}{J_y} x,$$

liefern die Scheibenquerkräfte \mathfrak{Q}_i nach Gleichung (13a), deren Resultierende Q_x durch den Schubmittelpunkt O_1 geht. Unter den Schubverformungen infolge der Scheibenquerkräfte $\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{Q}_{1i}$ ist die Elastizitätsbedingung von der Erhaltung der Querschnittsform nicht erfüllt; diese Verformungen müssen deshalb ergänzt werden durch die Verformungen infolge der Normalspannungen $\sigma = \sigma_2$ des zweiten Belastungsanteils $p_2 = p - p_1$ mit der Formänderungsbedingung

$$\underbrace{\frac{\sigma_{i-1} - \sigma_i}{E b_i}}_{\text{inf. } p_2} + \underbrace{\left(\frac{\mathfrak{Q}_i}{G F_i} \right)'}_{\text{inf. } p_1} = u'' \cos \psi_i \quad (17)$$

oder

$$\sigma_{i-1} - \sigma_i = E u'' b_i \cos \psi_i - \frac{E}{G} \left(\frac{\mathfrak{Q}_i}{d_i} \right)' \quad (17a)$$

Zusammen mit einer Gleichgewichtsbedingung $\int \sigma dF = 0$ oder einer Symmetriebedingung bei einfach symmetrischen Querschnitten liefert das System dieser Differenzengleichungen die Normalspannungswerte $\sigma = \sigma_2$ in der Form

$$\sigma_i = \alpha_i E u'' - \beta_i Q'_{1x} = \alpha_i E u'' - \beta_i M''_{1y} \quad (17b)$$

und analog

$$\sigma'_i = \alpha_i E u''' - \beta_i Q''_{1x}.$$

Damit können für die beiden Anteile von σ'_i die entsprechenden Scheibenquerkräfte $\mathfrak{Q}_{\alpha i}$ und $\mathfrak{Q}_{\beta i}$ nach Gleichung (13a) ermittelt werden. Dabei braucht die Zahlenrechnung für $\mathfrak{Q}_{\alpha i}$ nicht mehr neu durchgeführt zu werden, weil wegen

$$\mathfrak{Q}_{\alpha i} = E u''' \mathfrak{Q}_i J_y$$

die Scheibenquerkräfte $\mathfrak{Q}_{\alpha i}$ proportional zu den Scheibenquerkräften \mathfrak{Q}_i der Gleichung (17) sind, die ja schon bei der Bestimmung des ersten Schubmittelpunktes benötigt worden sind.

Da die resultierende Querkraft Q_{2x} durch den zweiten Schubmittelpunkt O_2 gehen muß, ist

$$\mu \sum^F \mathfrak{Q}_{\alpha i} a_{2i} - \sum^F \mathfrak{Q}_{\beta i} a_{2i} = 0. \quad (18)$$

Mit

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^F \Omega_{\beta i} a_{2i}}{\sum_{i=1}^F \Omega_{\alpha i} a_{2i}}$$

ergibt sich somit

$$\Omega_{2i} = \mu \Omega_{\alpha i} - \Omega_{\beta i}. \quad (18a)$$

a_{2i} bedeutet den Abstand der Scheibe b_i vom zweiten Schubmittelpunkt O_2 ; analog werden wir mit a_{1i} den Abstand vom ersten Schubmittelpunkt O_1 bezeichnen. Aus den Scheibenquerkräften Ω_{2i} ergibt sich die resultierende Querkraft Q_{2x} in der Form

$$Q_{2x} = \sum_{i=1}^F \Omega_{2i} \cos \psi_i = -c Q''_{1x}.$$

Damit folgt aus der Gleichgewichtsbedingung $Q_{1x} + Q_{2x} = Q_x$ die Differentialgleichung der gestellten Aufgabe,

$$Q_{1x} - c_B^2 Q''_{1x} = Q_x \quad (19)$$

oder auch

$$M_{1y} - c_B^2 M''_{1y} = M_y \quad (19a)$$

bzw.

$$p_{1x} - c_B^2 p''_{1x} = p_x, \quad (19b)$$

die die Aufteilung der äußeren Belastung

$$p_x = -Q'_x = -M''_y$$

in die beiden Anteile

$$p_{1x} = -M''_{1y} \quad \text{und} \quad p_{2x} = p_x - p_{1x}$$

zu bestimmen erlaubt.

Zu den bisher bestimmten Durchbiegungen u des ersten Belastungsanteils p_1 sowie infolge der Normalspannungen σ_2 des zweiten Belastungsanteils p_2 nach Gleichung (17) tritt nun noch eine Schubverformung infolge der Querkräfte Ω_{2i} nach Gleichung (18a) des zweiten Belastungsteils p_2 , für die grundätzlich die Beziehung

$$\frac{\Omega_{2i}}{G F_i} = u'_{2\tau} \cos \psi_i \quad (17c)$$

gilt. Nun zeigt sich aber, daß diese Beziehung bei größerer Scheibenzahl und besonders wenn freie Flanschen vorhanden sind, nicht für alle Scheiben sich genau erfüllt, weil die Verteilung der Scheibenquerkräfte Ω_{2i} über den Querschnitt nicht genau mit der durch Gleichung (15) gegebenen Verteilung übereinstimmt. Die Durchbiegung $u_{2\tau}$ ist deshalb aus der Summe aller Gleichungen (17c) zu bestimmen:

$$\sum_{i=1}^F \Omega_{2i} = G u'_{2\tau} \sum_{i=1}^F F_i \cos \psi_i, \quad (17d)$$

Die hier bestehende Unverträglichkeit kann durch Einführung von «Ergänzungskräften» $\Delta \Omega_{2i}$ derart, daß für alle Scheiben die Durchbiegungsbedingung erfüllt ist, veranschaulicht werden:

$$\Omega_{2i} + \Delta \Omega_{2i} = G u'_{2\tau} F_i \cos \psi_i. \quad (17e)$$

Diese Ergänzungskräfte ΔQ_{2i} stehen miteinander im Gleichgewicht und beeinflussen (bei den vorausgesetzten steifen Querverbindungen) somit die Verformungen des Stabes nicht; eine weitere Verfeinerung der Berechnung ist für technische Zwecke nicht notwendig.

Unter den Normalspannungen σ_2 bleiben die Querschnitte nicht mehr eben, sondern es tritt eine Querschnittsverwölbung ein. Fallen dagegen die beiden Schubmittelpunkte O_1 und O_2 zusammen, so ist, weil Q_{1x} im ersten Schubmittelpunkt O_1 angreift, in Gleichung (18)

$$\sum^F \Omega_{\alpha i} a_{2i} = \sum^F \Omega_{\alpha i} a_{1i} = 0;$$

damit muß auch

$$\sum^F \Omega_{\beta i} a_{2i} = \sum^F \Omega_{\beta i} a_{1i} = 0$$

sein oder die ganze äußere Belastung p wird durch den ersten Belastungsanteil p_1 allein aufgenommen; die Normalspannungen $\sigma = \sigma_1$ sind nach einer Ebene über den Querschnitt verteilt, der somit verwölbungsfrei bleibt.

Torsion

Bei geschlossenem Querschnitt wird das äußere Torsionsmoment T primär durch einen Schubfluß s aufgenommen; die Scheibenquerkräfte $\Omega_{si} = b_i s$ in den zum geschlossenen Querschnittsteil gehörenden Scheiben halten dem Torsionsmoment Gleichgewicht:

$$T = s \sum^F a_i b_i = 2 F_m s. \quad (20)$$

Dabei bedeutet F_m den Flächeninhalt des durch die Scheibenmittellinien umgrenzten Kastenquerschnittes. Gleichung (20) ist die bekannte Bredtsche Formel.

Die Bredtsche Formel ist jedoch nur dann genau gültig, wenn die Elastizitätsbedingung von der Erhaltung der Querschnittsform erfüllt ist:

$$\frac{\eta'_{si}}{a_i} = \frac{b_i s}{a_i G F_i} = \varphi' = \text{konst.} \quad (21)$$

Für Scheiben konstanter Stärke d_i , auf die wir uns der einfacheren Schreibweise wegen im folgenden beschränken wollen, bedeutet dies

$$\frac{s}{G a_i d_i} = \varphi' = \text{konst.}$$

oder bei konstantem Schubmodul G

$$a_i d_i = \text{konst.} \quad (21a)$$

Für diesen Fall der reinen Schubflußtorsion ist somit

$$G \varphi' = \frac{s}{a_i d_i} = \frac{T}{a_i d_i \sum^K a_i b_i} = \frac{T}{\sum^K a_i^2 b_i d_i}. \quad (21b)$$

Die Verdrehungssteifigkeit der als dünnwandig vorausgesetzten Einzelscheiben,

$$G J_d = G \frac{(b_i - 0,63 d_i) d_i^3}{3} \cong G \frac{b_i d_i^3}{3},$$

kann gegenüber der Verdrehungssteifigkeit des Kastenquerschnittes,

$$G \sum^K a_i^2 b_i d_i,$$

vernachlässigt werden.

Bei reiner Schubflußtorsion fallen die beiden Schubmittelpunkte 0_1 und 0_2 zusammen. Damit besteht eine Dualität zwischen reiner Schubflußtorsion und wölbungsfreier Verbiegung.

Ist dagegen die Elastizitätsbedingung Gleichung (21) nicht erfüllt oder weist der Querschnitt neben dem geschlossenen Querschnittsteil noch freie Flanschen auf, in denen ja kein Schubfluß s wirkt, so müssen neben dem Schubfluß s noch Normalspannungen σ_i auftreten, damit die Querschnittsform erhalten bleibt, und die Elastizitätsbedingung lautet bei Drehung um die erste Grenzlage 0_1 des Schubmittelpunktes

$$\frac{\eta''_{1i}}{a_{1i}} = \frac{s'}{a_{1i} d_i G} + \frac{\sigma_{i-1} - \sigma_i}{a_{1i} b_i E} = \varphi''_1 = \text{konst.} \quad (22)$$

bzw. $\sigma_{i-1} - \sigma_i + \frac{E}{G} \frac{b_i}{d_i} s' = E a_{1i} b_i \varphi''_1. \quad (22a)$

Schreiben wir diese Gleichungen (22a) für alle diejenigen Scheiben an, die zusammen den geschlossenen Querschnittsteil bilden und addieren, so heben sich alle Spannungswerte σ heraus und es ist

$$\varphi''_1 \sum^K a_{1i} b_i - \frac{s'}{G} \sum^K \frac{b_i}{d_i} = 0;$$

mit den Abkürzungen

$$a_{11} = \sum^K \frac{b_i}{d_i}, \quad 2 F_m = \sum^K a_i b_i, \quad \Phi = \frac{2 F_m}{a_{11}}$$

folgt somit

$$\varphi''_1 = \frac{a_{11}}{2 G F_m} s' = \frac{s'}{G \Phi}. \quad (23)$$

Setzen wir diesen Wert von φ''_1 in Gleichung (22a) ein, so ergibt sich für zum geschlossenen Querschnittsteil gehörende Scheiben

$$\sigma_{i-1} - \sigma_i = \frac{E}{G} \left(\frac{a_{1i} b_i}{\Phi} - \frac{b_i}{d_i} \right) s'. \quad (22b)$$

Für freie Flanschen, in denen ja kein Schubfluß s wirkt, gilt dagegen

$$\sigma_{i-1} - \sigma_i = \frac{E}{G} \frac{a_{1i} b_i}{\Phi} s'. \quad (22c)$$

Diese Differenzengleichungen, in Verbindung mit einer Symmetriebedingung oder der Gleichgewichtsbedingung

$$\int \sigma dF = 0,$$

erlauben uns, die zu einem primären Schubfluß $s = s_1$,

$$s_1 = \frac{T_1}{2 F_m} \quad (20a)$$

gehörenden Längsspannungen σ zu bestimmen.

Zu diesen Längsspannungen σ , bzw. zu den entsprechenden Spannungsänderungen σ' gehören nun aber auch Schubspannungen τ_0 , bzw. Scheibenquerkräfte Ω_{0i} nach Gleichung (10) und zu diesen ein überzähliger Schubfluß s_2 . Für diesen zweiten Belastungsanteil ist ebenfalls eine Elastizitätsbedingung für die Erhaltung der Querschnittsform anzuschreiben:

$$\frac{\Omega_i}{a_{2i} b_i d_i G} = \left(\frac{\Omega_{0i}}{b_i d_i} + \frac{s_2}{d_i} \right) \frac{1}{a_{2i} G} = \varphi'_2 = \text{konst.} \quad (24)$$

wobei sich der Querschnitt um die zweite Grenzlage 0_2 des Schubmittelpunktes dreht. Aus diesen Gleichungen (24) sind die beiden Unbekannten s_2 und φ'_2 in Funktion von s_1 zu bestimmen; unbekannt sind ferner auch die beiden Koordinaten des zweiten Schubmittelpunktes 0_2 , die wir jedoch mit Hilfe der Scheibenquerkräfte nach Gleichung (15) auf anderem Wege (Querkraftsmittelpunkt) bestimmt haben. Bei Querschnitten mit mehr als vier Scheiben und besonders, wenn freie Flanschen vorhanden sind, sind im allgemeinen Fall die Elastizitätsbedingungen Gleichung (24) nicht mehr für alle Einzelscheiben erfüllt, sondern es können auch hier aus dieser Unverträglichkeit Ergänzungskräfte $\Delta \Omega_i$ auftreten:

$$\Omega_i + \Delta \Omega_i = G \varphi'_2 a_{2i} b_i d_i.$$

Wir beheben die hier aufgetretene Schwierigkeit wie folgt: Zunächst wählen wir die Integrationskonstante C in Gleichung (9) bei der Bestimmung der Scheibenquerkräfte Ω_{0i} derart, daß das Moment verschwindet:

$$\sum_{i=1}^F \Omega_{0i} a_{2i} = 0.$$

Multiplizieren wir nun Gleichung (24) mit $a_{2i}^2 b_i d_i$ und summieren über den ganzen Querschnitt (wobei in den freien Flanschen kein Schubfluß s_2 wirkt), so folgt

$$\underbrace{\sum_{i=1}^F \Omega_{0i} a_{2i} + s_2 \sum_{i=1}^K a_{2i} b_i}_{=0} = G \varphi'_2 \sum_{i=1}^F a_{2i}^2 b_i d_i. \quad (25)$$

Eine zweite abgeleitete Gleichung erhalten wir, indem wir Gleichung (24) mit $a_{2i} b_i d_i$ multiplizieren und über den Querschnitt summieren:

$$\sum_{i=1}^F \Omega_{0i} + s_2 \sum_{i=1}^K b_i = G \varphi'_2 \sum_{i=1}^F a_{2i} b_i d_i. \quad (26)$$

Dabei ist das Vorzeichen der Scheibenquerkräfte \mathfrak{Q}_{0i} selbstverständlich entsprechend dem Umlaufsinn zu berücksichtigen.

Die beiden Gleichungen (25) und (26) erlauben nun die Bestimmung der beiden Unbekannten s_2 und $G\varphi'_2$ in Funktion von s''_1 . Damit ergibt sich der zweite Anteil T_2 des Torsionsmomentes zu

$$T_2 = \underbrace{\sum_{i=0}^F \mathfrak{Q}_{0i} a_{2i}}_{=0} + s_2 \sum_{i=1}^K a_{2i} b_i = 2 F_m s_2 = -c 2 F_m s''_1$$

und damit folgt aus der Gleichgewichtsbedingung $T = T_1 + T_2$ die Differentialgleichung des Torsionsproblems zu

$$s_1 - c_T^2 s''_1 = \frac{T}{2 F_m} \quad \text{oder} \quad T_1 - c_T^2 T''_1 = T. \quad (27)$$

Die Ergänzungskräfte $\Delta \mathfrak{Q}_i$ bilden auch hier, bei der sekundären Torsion, ein Gleichgewichtssystem. Fig. 11 zeigt ein Beispiel mit einem aus fünf Scheiben bestehenden Kastenträger mit unsymmetrischem Querschnitt. Da dieses Gleichgewichtssystem die Verformungen des Stabes unter der getroffenen Voraussetzung von der Erhaltung der Querschnittsform nicht beeinflußt, darf die Aufgabe mit der Aufstellung der Differentialgleichung (27) als gelöst betrachtet werden.

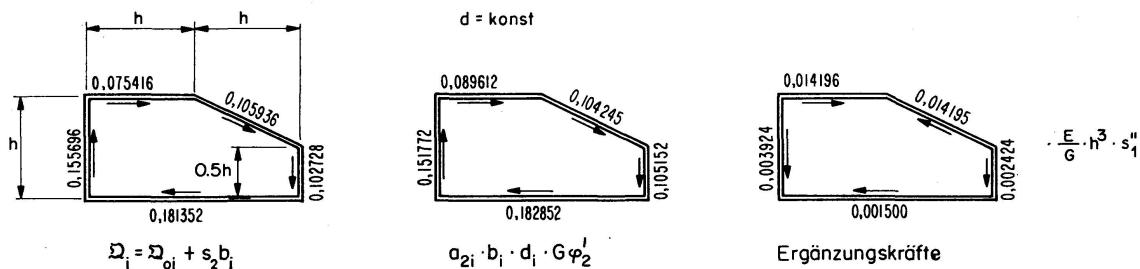


Fig. 11.

Zahlenbeispiel: Fachwerkförmiger Kastenträger

Wir untersuchen als Anwendungsbeispiel einen fachwerkförmigen Kastenträger nach Fig. 2. Die gewählten Zahlenwerte sind in Fig. 12 zusammengestellt.

Gegenüber dem vollwandigen Kastenträger tritt hier die Besonderheit auf, daß die Normalspannungen σ durch die Gurtungen allein aufgenommen werden; an Stelle der Knotenlasten $K(\sigma')$ der Gleichungen (10) tritt hier einfach der Wert

$$K_i(\sigma') = F_i \sigma'_i = s'_i,$$

wobei F_i den Gurtquerschnitt bedeutet. Da wir die Schubsteifigkeiten EK der Scheiben nach den Gleichungen (4b) und (4c) auf den Elastizitätsmodul E orientiert haben, ist für die Schubverformung mit

$$\eta'_{i\tau} = \frac{\mathfrak{Q}_i}{E K_i}$$

zu rechnen; an Stelle des Schubmoduls G ist somit hier der Elastizitätsmodul E zu setzen. Für die Scheibenstärke d_i ist der fiktive Wert

$$d_i = \frac{K_i}{b_i}$$

einzuführen.

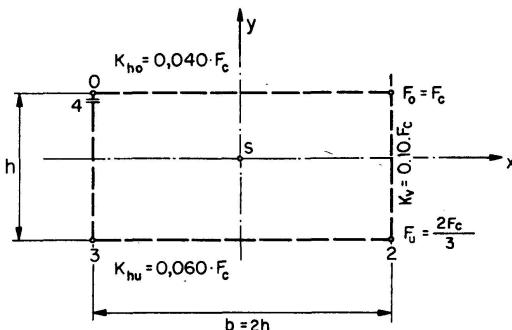


Fig. 12.

Da der Querschnitt bezüglich der y -Axe symmetrisch ist, ist die Lage des ersten Schubmittelpunktes O_1 lediglich aus den Scheibenquerkräften infolge der Spannungsänderung σ'_x

$$\sigma'_x = \frac{Q_x}{J_y} x$$

mit

$$J_y = \frac{b^2}{2} (F_0 + F_u) = \frac{10}{3} h^2 F_c$$

zu bestimmen. Die Zahlenrechnung ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

	σ'_x	K	$\sum K$	\mathfrak{Q}_{0i}	d_i	$\frac{\mathfrak{Q}_{0i}}{d_i}$	$\frac{b_i}{d_i}$	$s \cdot b_i$	\mathfrak{Q}_i
0	-0,30	-0,30	-0,30	0,60	0,020	30,000	100,0	-0,178571	0,421429
1	0,30	0,30	0	0	0,100	0	10,0	-0,089286	-0,089286
2	0,30	0,20	0,20	-0,40	0,030	-13,333	66,667	-0,178571	-0,578571
3	-0,30	-0,20	0	0	0,100	0	10,0	-0,089286	-0,089286
4 = 0	-0,30								

$$\cdot \frac{Q_x}{h F_c} \quad \cdot \frac{Q_x}{h} \quad \cdot Q_x \quad \cdot \frac{F_c}{h} \quad 16,667 \quad 186,667 \quad \cdot Q_x \quad \cdot Q_x$$

Der überzählige Schubfluß s beträgt

$$s = -\frac{16,667}{186,667} \frac{Q_x}{h} = -0,0892857 \frac{Q_x}{h}.$$

Aus den Scheibenquerkräften $\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{Q}_{0i} + s b_i$ ergibt sich der Abstand a_{1u} des Schubmittelpunktes 0_1 von der unteren Scheibe zu

$$a_{1u} = (0,421429 - 2 \cdot 0,089286) h = 0,242857 h.$$

Für den zweiten Schubmittelpunkt 0_2 kann

$$a_{2u} = \frac{K_{h0}}{K_{h0} + K_{hu}} h = \frac{0,040}{0,040 + 0,060} h = 0,04 h$$

direkt angeschrieben werden.

Bei der Untersuchung der Torsion sind zunächst die Spannungsänderungen aus Gleichung (22b)

$$\sigma'_{i-1} - \sigma'_i = \left(\frac{a_{1i} b_i}{\Phi} - \frac{b_i}{d_i} \right) s''_1$$

mit $\Phi = \frac{2 F_m}{a_{11}} = \frac{4 h^2 F_c}{186,667 h^2} = \frac{F_c}{46,667}$

zu bestimmen, aus denen sich die Scheibenquerkräfte \mathfrak{Q}_{0i} mit der Bedingung

$$\sum \mathfrak{Q}_{0i} a_{2i} = 0$$

ergeben. Die nachstehende Tabelle enthält die Zahlenrechnung.

	$\sigma'_{i-1} - \sigma'_i$	σ'_i	K	$\sum K$	$b_i \sum K$	\mathfrak{Q}_{0i}	$a_{2i} b_i d_i$	$a_{2i}^2 b_i d_i$
0	-29,333	-14,667	-14,667	-14,667	-29,333	14,667	0,0240	0,0144
1	36,667	14,667	14,667	0	0	-7,333	0,1000	0,1000
2	-44,00	-22,000	-14,667	-14,667	-29,333	14,667	0,0240	0,0096
3	36,667	22,000	14,667			-7,333	0,1000	0,1000
4 = 0		-14,667					0,2480	0,2240

$$\cdot \frac{h^2}{F_c} s''_1 \quad \cdot h^2 s''_1 \quad \cdot h^3 s''_1 \quad \cdot h F_c \quad \cdot h^2 F_c$$

Die Gleichungen (25) und (26) lauten mit diesen Zahlenwerten

$$s_2 4,0 h^2 = G \varphi'_2 0,2240 h^2 F_c,$$

$$14,6667 h^3 s''_1 + s_2 6,0 h = G \varphi'_2 0,2480 h F_c;$$

ihre Auflösung liefert

$$s_2 = -9,333 h^2 s''_1, \quad G \varphi'_2 = -166,667 \frac{h^2}{F_c} s''_1.$$

Damit ist die Differentialgleichung zu

$$T_1 - 9,333 h^2 T_1'' = T$$

oder auch mit $m = -T'$ zu

$$m_1 - 9,333 h^2 m_1'' = m$$

beziehungsweise

$$m_1'' - 0,107143 \frac{m_1}{h^2} - 0,107143 \frac{m}{h^2} = 0$$

gefunden. Die direkt aufgestellte Gleichung (6) lautet dagegen mit unseren Zahlenwerten

$$M_h'' - 0,107143 \frac{M_h}{h^2} + 0,107143 \frac{m}{h} + 0,107143 \frac{\Phi}{2h^2} = 0.$$

Die Ergebnisse der beiden Gleichungen sind identisch.

Auf die Wiedergabe der Zahlenrechnung für verdrehungsfreie Biegung darf wohl verzichtet werden; wir begnügen uns mit der Angabe der Differentialgleichung

$$p_1'' - 0,280 \frac{p_1}{h^2} + 0,280 \frac{p}{h^2} = 0$$

beziehungsweise

$$M_1'' - 0,280 \frac{M_1}{h^2} + 0,280 \frac{M}{h^2} = 0.$$

In der folgenden Tabelle sind noch für einen Stab der Länge $l=8h$ und frei drehbar gelagerten Scheiben die Scheibenbelastungen für Torsion unter konstantem Drehmoment m und für verdrehungsfreie Biegung unter konstanter waagrechter Belastung p zusammengestellt.

	Torsion		Biegung		
	p_h	p_v	p_{h0}	p_{hu}	p_v
A	0,10714	0,44643	0,40000	0,60000	0
1	0,19902	0,40049	0,40847	0,59153	0,03529
2	0,25837	0,37082	0,41322	0,58678	0,05508
3	0,29158	0,35421	0,41562	0,58438	0,06508
m	0,30227	0,34886	0,41635	0,58365	0,06812

$$\cdot \frac{m}{h}$$

$$\cdot p$$

Diese Zahlenwerte zeigen deutlich, daß die Scheibenbelastungen bei Torsion stark von der Bredtschen Schubflußtorsion mit

$$p_h = 0,50 \frac{m}{h}, \quad p_v = 0,25 \frac{m}{h}$$

abweichen können. Aber auch bei der Biegung ist eine starke Abweichung von den nach der normalen Biegsungslehre zu erwartenden Werten

$$p_{h0} = 0,60 p, \quad p_{hu} = 0,40 p, \quad p_v = 0$$

festzustellen.

Mit dem besprochenen Beispiel ist nachgewiesen, daß mit der für den vollwandigen Kastenträger aufgestellten Theorie der Biegung und Verdrehung sinngemäß auch fachwerkförmige Kastenträger untersucht werden können. Daraus folgt, daß diese Theorie auch auf Kastenträger gemischter Bauart, mit vollwandigen und fachwerkförmigen Scheiben und mit konzentrierten Gurtquerschnitten anwendbar ist.

4. Mehrzellige Kastenträger

Bei mehrzelligen Kastenträgern oder bei mehrfach geschlossenem Querschnitt nach Fig. 13 tritt die Besonderheit auf, daß jede Zelle aufgeschnitten

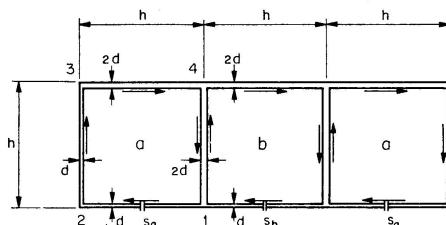


Fig. 13.

werden muß, um das Grundsystem für die Berechnung des überzähligen Schubflusses zu erhalten; das System ist somit in bezug auf den Schubfluß mehrfach statisch unbestimmt. In Scheiben, die zu zwei Zellen a und b gehören, wirkt eine Schubflußdifferenz $s_a - s_b$. Die Auswirkung dieser Besonderheit auf die Berechnung soll nachstehend besprochen werden, wobei die wichtigsten Schritte am Zahlenbeispiel der Fig. 13 veranschaulicht werden sollen.

Die Lage des ersten Schubmittelpunktes 0_1 ergibt sich als Querkraftsmittelpunkt aus den Scheibenquerkräften \mathfrak{Q}_i , die aus den Spannungsänderungen

$$\sigma' = \frac{Q_x}{J_y} x$$

entstehen. Es ist zweckmäßig, die Knotenlasten $K(\sigma')$ wie folgt anzuschreiben und auszurechnen

$$\begin{aligned} \text{Punkt 1: } \sigma'_1 &= -0,5 \frac{Q_x}{J_x} h, & K_1 &= \frac{d h}{6} (7 \sigma'_1 + \sigma'_2 + 2 \sigma'_4) = -1,000 \frac{Q_x}{J_x} dh^2 \\ 2: \quad \sigma'_2 &= -1,5 & K_2 &= \frac{d h}{6} (\sigma'_1 + 4 \sigma'_2 + \sigma'_3) = -1,33333 \\ 3: \quad \sigma'_3 &= -1,5 & K_3 &= \frac{d h}{6} (\sigma'_2 + 6 \sigma'_3 + 2 \sigma'_4) = -1,91667 \\ 4: \quad \sigma'_4 &= -0,5 & K_4 &= \frac{d h}{6} (2 \sigma'_1 + 2 \sigma'_3 + 10 \sigma'_4) = -1,5000 \end{aligned}$$

Die Knotenlasten $K_i(x)$ und $K_i(y)$ erlauben übrigens eine einfache Bestimmung der Trägheits- und Zentrifugalmomente:

$$J_y = \sum x_i K_i(x), \quad J_x = \sum y_i K_i(y), \quad Z_{xy} = \sum y_i K_i(x) = \sum x_i K_i(y).$$

Aus den Knotenlasten $K_i(\sigma')$ ergeben sich mit

$$\mathfrak{Q}_{0i} = -b_i \sum K(\sigma')$$

nach Gleichung (9) die Scheibenquerkräfte \mathfrak{Q}_{0i} des Grundsystems, die in Fig. (14 a) eingetragen sind.

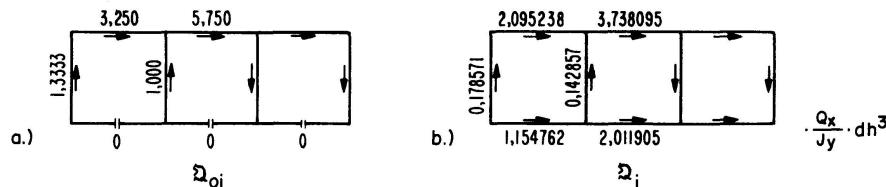


Fig. 14.

Die Elastizitätsbedingungen für den überzähligen Schubfluß lassen sich sinngemäß zu Gleichung (12a) für jede Zelle zu

$$\begin{aligned} s_a \sum_{i=1}^{K_a} \frac{b_i}{d_i} - s_b \left(\frac{b}{d} \right)_{ab} + \sum_{i=1}^{K_a} \frac{\mathfrak{Q}_{0i}}{d_i} &= 0, \\ -s_a \left(\frac{b}{d} \right)_{ab} + s_b \sum_{i=1}^{K_b} \frac{b_i}{d_i} - s_c \left(\frac{b}{d} \right)_{bc} + \sum_{i=1}^{K_b} \frac{\mathfrak{Q}_{0i}}{d_i} &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

anschreiben. Für das Zahlenbeispiel der Fig. 13 lauten, weil aus Symmetriegründen $s_c = s_a$ ist, die beiden Elastizitätsbedingungen

$$\begin{aligned} 3,0 \frac{h}{d} s_a - 0,5 \frac{h}{d} s_b + 2,458333 \frac{Q_x}{J_x} h^3 &= 0, \\ -1,0 &\quad + 2,5 &+ 3,8750 &= 0 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$s_a = -1,154762 \frac{Q_x}{J_x} dh^2, \quad s_b = -2,011905 \frac{Q_x}{J_x} dh^2.$$

In Fig. 14 b sind die resultierenden Scheibenquerkräfte

$$\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{Q}_{0i} + b_i s$$

beziehungsweise

$$\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{Q}_{0i} + b_i \Delta s$$

eingetragen. Daraus ergibt sich der Abstand des Schubmittelpunktes a_{1u} von den unteren Scheiben zu

$$a_{1u} = \frac{8,607141}{12,250} h = 0,702624 h.$$

Die Lage des zweiten Schubmittelpunktes folgt aus den Scheibenquerkräften \mathfrak{Q}_{iu} nach Gleichung (15) zu

$$a_{2u} = \frac{2,0}{3,0} h = 0,66667 h.$$

Die Scheibenquerkräfte \mathfrak{Q}_{2i} des zweiten Belastungsanteils der verdrehungsfreien Biegung ergeben sich, wie bei einfach geschlossenen Querschnitten, aus der Superposition nach Gleichung (18a) mit

$$\mu \sum^F \mathfrak{Q}_{\alpha i} a_{2i} - \sum^F \mathfrak{Q}_{\beta i} a_{2i} = 0,$$

wobei die Werte $\mathfrak{Q}_{\alpha i}$ direkt aus Fig. 14b entnommen werden können, während die Werte $\mathfrak{Q}_{\beta i}$ sich aus den Spannungsänderungen

$$\sigma'_{i-1} - \sigma'_i = - \frac{E}{G} \frac{\mathfrak{Q}'_i}{d_i}$$

unter Berücksichtigung der überzähligen Schubflüsse nach Gleichung (28) ergeben. Die resultierenden Scheibenquerkräfte \mathfrak{Q}_{2i} stimmen in ihrer Verteilung im allgemeinen Fall nicht genau mit der Verteilung nach Gleichung (15) überein, sondern die Unverträglichkeiten sind auch hier durch Ergänzungskräfte $\Delta \mathfrak{Q}_i$ auszugleichen. Diese Ergänzungskräfte sind für die Bemessung des Trägers von untergeordneter Bedeutung und damit vernachlässigbar.

Bei der Torsion erhalten wir die Gleichungen zur Bestimmung der überzähligen primären Schubflüsse s_1 dadurch, daß wir die Gleichungen (22a) je für alle Scheiben einer Zelle summieren, um die zugehörigen Normalspannungen σ zu eliminieren, wobei zu beachten ist, daß in zu zwei Zellen gehörenden Scheiben eine Schubflußdifferenz wirkt. Für das Zahlenbeispiel der Fig. 13 lauten diese Bestimmungsgleichungen

$$3,0 \frac{h}{d} s'_{1a} - 0,5 \frac{h}{d} s'_{1b} = 2 h^2 G \varphi''_1,$$

$$- 1,0 \frac{h}{d} s'_{1a} + 2,5 \frac{h}{d} s'_{1b} = 2 h^2 G \varphi''_1$$

mit den Lösungen

$$\sigma'_{1b} = \frac{4}{3} s'_{1a}, \quad G \varphi''_1 = \frac{7}{6} \frac{s'_{1a}}{h d}.$$

Damit können aus Gleichung (22a) die Spannungen σ bzw. die Spannungsänderungen σ' und daraus die Knotenlasten $K(\sigma')$ berechnet werden. Diese Zahlenwerte lauten für unser Beispiel

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= 0,256803 \frac{E}{G} \frac{h}{d} s''_{1a}, & K_1(\sigma') &= 0,319161 \frac{E}{G} h^2 s''_{1a}. \\ \sigma'_2 &= 0,437075 & K_2(\sigma') &= 0,282030 \\ \sigma'_3 &= -0,312925 & K_3(\sigma') &= -0,293367 \\ \sigma'_4 &= -0,159864 & K_4(\sigma') &= -0,285147 \end{aligned}$$

In Fig. 15a sind die sich aus diesen Knotenlasten ergebenden Scheibenquerkräfte \mathfrak{Q}_{0i} des Grundsystems eingetragen, aus denen die überzähligen Schubflüsse s_2 und die Änderung des zweiten Drehwinkels $G\varphi'_2$ mit der zweiten Elastizitätsbedingung Gleichung (24) berechnet werden müssen.

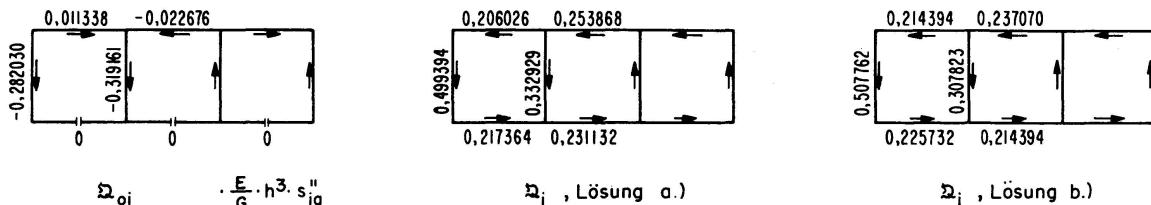


Fig. 15.

Es zeigt sich nun auch hier wieder die Schwierigkeit, daß mehr Bestimmungsgleichungen vorhanden sind als Unbekannte. Wesentlich ist, daß der Drehwinkel ($G\varphi'_2$) und das resultierende Torsionsmoment T_2 ,

$$T_2 = \sum^F \mathfrak{Q}_{2i} a_{2i},$$

korrekt bestimmt werden. Dies ist dann der Fall, wenn wir die Gleichung (24) mit $a_{2i}^2 b_i d_i G$ multiplizieren,

$$(\mathfrak{Q}_{0i} + b_i s_2) a_{2i} = G\varphi'_2 a_{2i}^2 b_i d_i, \quad (29)$$

und passende Gruppen zur Bestimmung der Unbekannten bilden, wobei wichtig ist, daß in diesem neuen Gleichungssystem der Momente $\mathfrak{Q}_i a_{2i}$ alle Scheiben berücksichtigt sind. Für unser Zahlenbeispiel lassen sich unter Berücksichtigung der Symmetrie folgende 6 Gleichungen (29) anschreiben:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & -3 \cdot 0,282030 \frac{E}{G} h^4 s''_{1a} + 3,0 s_{2a} h^2 & = 4,50 h^3 d G\varphi'_2, \\
 2. \quad & -0,319161 & -1,0 s_{2a} h^2 + 1,0 s_{2b} h^2 = 1,0, \\
 3. \quad & +\frac{2}{3} \cdot 0,011338 & +\frac{2}{3} s_{2a} h^2 & = \frac{4}{9}, \\
 4. \quad & 0 & +\frac{4}{3} s_{2a} h^2 & = \frac{8}{9}, \\
 5. \quad & -\frac{1}{3} \cdot 0,022676 & +\frac{1}{3} s_{2b} h^2 & = \frac{2}{9}, \\
 6. \quad & 0 & +\frac{2}{3} s_{2b} h^2 & = \frac{4}{9}.
 \end{aligned}$$

Bilden wir das System der Bestimmungsgleichungen aus 1., 2. und 3. + 4. + 5. + 6., so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 -0,846090 \frac{E}{G} h^4 s_{1a}'' + 3,0 s_{2a} h^2 &= 4,50 h^3 dG \varphi_2', \\
 -0,319161 \frac{E}{G} h^4 s_{1a}'' - 1,0 s_{2a} h^2 + 1,0 s_{2b} h^2 &= 1,0 h^3 dG \varphi_2', \\
 0 &+ 2,0 s_{2a} h^2 + 1,0 s_{2b} h^2 = 2,0 h^3 dG \varphi_2'
 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned}
 s_{2a} &= -0,217364 \frac{E}{G} h^2 s_{1a}'', \quad s_{2b} = -0,231132 \frac{E}{G} h^2 s_{1a}'', \\
 G \varphi_2' &= -0,332929 \frac{E}{G} \frac{h}{d} s_{1a}''.
 \end{aligned}$$

Bilden wir dagegen die Gleichungen aus (1. + 2.), (3. + 4.) und (5. + 6.), so wird

$$\begin{aligned}
 -1,165251 \frac{E}{G} h^4 s_{1a}'' + 2,0 s_{2a} h^2 + 1,0 s_{2b} h^2 &= 5,50 h^3 dG \varphi_2' \\
 0,007559 &+ 2,0 &= \frac{4}{3} \\
 -0,007559 &+ 1,0 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned}
 s_{2a} &= -0,225732 \frac{E}{G} h^2 s_{1a}'', \quad s_{2b} = -0,214394 \frac{E}{G} h^2 s_{1a}'', \\
 G \varphi_2' &= -0,332929 \frac{E}{G} \frac{h}{d} s_{1a}''.
 \end{aligned}$$

In den Fig. 15a und 15b sind die resultierenden Scheibenquerkräfte für diese beiden Lösungen eingetragen.

Die beiden Lösungen unterscheiden sich nur durch die Ergänzungskräfte ΔQ_i gegenüber den Werten

$$\Delta Q_i = a_{2i} b_i d_i G \varphi_2',$$

nicht aber im Drehwinkel, noch im resultierenden sekundären Torsionsmoment T_2 ,

$$T_2 = \sum \Delta Q_i a_{2i} = 2,49697 \frac{E}{G} h^4 s_{1a}''.$$

Damit kann aus der Gleichgewichtsbedingung $T_1 + T_2 = T$ die Differentialgleichung

$$T_1 - c_T^2 T_1'' = T$$

aufgestellt werden und damit ist die Aufgabe gelöst.

Zusammenfassung

Es wird zunächst an einem einfachen Beispiel, einem vollwandigen Stab mit offenem Querschnitt gezeigt, daß der Schubmittelpunkt kein Querschnittsfestpunkt mehr ist, sobald neben den Formänderungen aus den Normalspannungen σ auch die Formänderungen aus den Schubspannungen τ berücksichtigt werden. Auch geht die Doppelbedeutung des Schubmittelpunktes als Querkraftsmittelpunkt und als Verdrehungszentrum verloren. Zum gleichen Ergebnis führt die Untersuchung eines fachwerkförmigen Kastenträgers. Es wird deshalb, in Ergänzung früherer Ansätze, ein Berechnungsverfahren für Biegung und Verdrehung einfacher und mehrfach geschlossener Kastenträger, unter der Voraussetzung, daß die Querschnittsform unter den Formänderungen des Stabes erhalten bleibt, angegeben, das darauf beruht, daß die äußere Belastung in zwei Anteile aufgeteilt wird, von denen der erste sich auf die erste Grenzlage 0_1 , der zweite sich auf die zweite Grenzlage 0_2 des Schubmittelpunktes bezieht. Für die beiden Grenzlagen gilt wieder die Doppelbedeutung des Schubmittelpunktes. Das Verfahren ist nicht nur für vollwandige, sondern auch für fachwerkförmige Kastenträger und auch für solche gemischter Bauart anwendbar.

Summary

It is first of all demonstrated on a simple example, namely that of a plate girder of open section, that the shear centre is no longer a fixed point of the section when, in addition to the deformations due to the normal stresses σ , the deformations due to shear τ are taken into consideration. The shear centre then also loses its dual significance as centre of the shearing force and centre of torsion. A study of a lattice-type box girder leads to the same results. To supplement previous expressions and assuming that the shape of the sections is not altered by the deformations of the girder, a method for calculating the deflection and torsion of simple and multiple closed box girders is presented. The method suggested is based on the sub-division of the external load into two components, one of which relates to the first limiting position 0_1 of the shear centre, while the other is related to the second limiting position 0_2 . For these two limiting positions, the shear centre regains its dual significance. The application of this method is not confined to the case of plate girders. It can also be employed with lattice-type box girders or similar structures comprising both plate and lattice members.

Résumé

Sur un exemple simple d'abord, celui d'une barre à âme pleine de section ouverte, on montre que le centre de cisaillement cesse d'être un point fixe de

la section dès qu'on considère, en plus des déformations dues aux contraintes normales σ , celles dues aux cisaillements τ . Le centre de cisaillement perd alors aussi sa double signification de centre de l'effort tranchant et de centre de torsion. L'étude d'une poutre-caisson en treillis conduit aux mêmes résultats. En complément à de précédents travaux et en admettant que la forme des sections n'est pas altérée par les déformations de la barre, on présente un procédé de calcul de la flexion et de la torsion des poutres-caissons simplement et multiplement connexes; la méthode proposée procède de la subdivision de la charge extérieure en deux composantes dont l'une se rapporte à la première position limite 0_1 du centre de cisaillement tandis que l'autre est rapportée à la seconde position limite 0_2 . Pour ces deux positions limites, le centre de cisaillement retrouve sa double signification. L'application de ce procédé ne se limite pas au cas des âmes pleines, on peut aussi l'utiliser avec des poutres-caissons en treillis ou des constructions semblables comprenant à la fois des éléments à âme pleine et en treillis.

Leere Seite
Blank page
Page vide