

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 25 (1965)

Artikel: Zum Tragverhalten von Verbundquerschnitten auf Biegung

Autor: Moser, Kurt

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-20355>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zum Tragverhalten von Verbundquerschnitten auf Biegung

The Behaviour When Tested to Destruction of Composite Sections Subjected to Bending Stresses

Sur le comportement à la ruine des sections mixtes sollicitées à la flexion

KURT MOSER
Dipl.-Ing. Dr. techn., Graz

1. Einleitung

Bei der Bemessung von Stahlbetonbalken bedient man sich in den letzten Jahren immer mehr der sogenannten Theorie der Biegung im plastischen Bereich. Der Grund ist wohl darin zu suchen, daß in den verflossenen Dezen- nien eine stetige Erhöhung der «zulässigen Spannungen» bei gleichzeitiger Steigerung der Festigkeiten der Baustoffe erfolgte, so daß auch im Bereich der Gebrauchslasten die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes angezweifelt werden mußte [1]. Die bekannten, sogenannten n -freien Verfahren konzentrieren sich auf die wirklichkeitsstreue Erfassung der gesetzmäßigen Abhängigkeit von Spannung und Dehnung des Betons. Für den Stahl wird ein ideal elastisch-plastisches Verhalten vorausgesetzt, das aber nur für weiche Bau- stähle recht gut, für hochfesten, naturharten oder kaltgezogenen Stahl oder gar für Spannstähle nicht einmal näherungsweise zutrifft.

H. BEER hat gemeinsam mit dem Verfasser in einer Studie über das Trag- verhalten von statisch unbestimmten Systemen aus hochfestem Baustahl gezeigt [2], daß zweckmäßig die stetige Veränderlichkeit des E -Moduls mit Hilfe eines sogenannten «Vergrößerungsfaktors» einfach beschrieben werden kann. Dieses Vorgehen bietet sich auch bei Tragwerken aus Stahlbeton an, insbesondere wo Stahleinlagen aus hochfesten Baustählen Verwendung finden; es kann aber auch grundsätzlich zur Herleitung eines allgemeinen Bemessungs- verfahrens für die Biegung des Stahlbetons im plastischen Bereich, sowie auch für die Bestimmung des Bruchmomentes *ohne* Vorspannung, benutzt werden, was der vorliegende Beitrag zeigen soll.

Der Verfasser will mit der vorliegenden Abhandlung nur das Prinzip der Anwendung von Vergrößerungsfaktoren zeigen. Die quantitative Ausarbeitung der hier gezeigten Probleme, insbesondere aber die Anwendung des vom Verfasser vorgeschlagenen Verfahrens zur Ermittlung des Bruchmomentes mit Vorspannung soll in einer vorbereiteten Publikation gebracht werden. Eine gesonderte Behandlung letzteren Problems ist schon mit Rücksicht auf die Vielzahl wesentlicher Detailfragen, wie die Wahl der Vergrößerungsfaktoren auf Grund bekannter Versuchsergebnisse und auf Grund einschlägiger Vorschriften in den einzelnen Ländern, ferner auch die Größe der Risse in der Zugzone im Zusammenhang mit der als «schädlich» zu bezeichnenden Dehnung und so weiter, notwendig.

2. Arbeitslinien und Vergrößerungsfaktoren der Verbundbaustoffe und ihr Zusammenhang im betrachteten Querschnitt

Als Arbeitslinien der jeweiligen Verbundbaustoffe Beton und Stahl sollen deren Spannungs-Dehnungslinien bezeichnet werden.

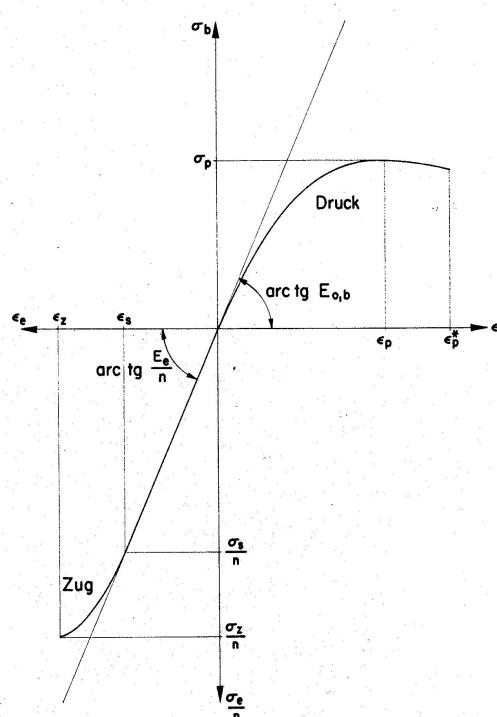


Fig. 1.

In Fig. 1 ist die Arbeitslinie des Verbundquerschnittes dargestellt. Der Druckbereich ist im ersten und der Zugbereich im dritten Quadranten aufgetragen. Die Arbeitslinie im Druckbereich des Verbundquerschnittes sei eine monoton gekrümmte Linie, wie sie bei allen betonartigen Stoffen auftritt. Der funktionelle Verlauf des Vergrößerungsfaktors bestimmt eindeutig die Form

der Arbeitslinie im gesamten plastischen Bereich und umgekehrt. Auf diesen Zusammenhang wird der Verfasser noch zu sprechen kommen (Fig. 2).

Im Zugbereich des Verbundquerschnittes entspräche die Arbeitslinie der eines hochfesten Baustahles. Mit σ_s wird an sich die definierte, technische Streckgrenze bezeichnet; es soll dabei für hochfeste Stähle der Einfachheit halber ganz allgemein angenommen werden, daß die Proportionalitätsgrenze mit dieser Streckgrenze zusammenfällt. Die in der vorliegenden Arbeit gefundenen Beziehungen können aber auch bei Vorhandensein von weichen Baustählen benutzt werden, wenn für σ_s die der Proportionalitätsgrenze entsprechende Spannung dafür eingesetzt wird. — Im übrigen wird, wie üblich, in der Zugzone auf die Mitwirkung des Betons im gesamten Bereich verzichtet.

Der Zusammenhang zwischen Druck- und Zugbereich sei auf Grund der Bernoullischen Hypothese (Ebenbleiben der auf Biegung beanspruchten Querschnitte bis zum Bruch) gegeben. Entsprechend dem n -Verfahren sind im Zugbereich die Spannungswerte mit $1/n$ verzerrt aufgetragen. Für die Festlegung von n interessiert im Rahmen dieser Abhandlung nur das Verhältnis der Anfangsmoduli von Stahl und Beton:

$$n = \frac{E_e}{E_{0b}}. \quad (2.1)$$

Die Dehnungen sind dem Abstand von der neutralen Achse (Nulllinie) des Verbundquerschnittes verhältnisgleich. Das zugeordnete, effektive Spannungsbild σ erhält man durch affine Verzerrung aus der Arbeitslinie.

Projiziert man beispielsweise einen beliebigen Punkt S der Arbeitslinie gemäß Fig. 2 in Richtung der Ordinatenachse, so erhält man den Bildpunkt \bar{S} . «Vergrößert» man also auf die angegebene Art jede «plastische» Spannung σ auf $\bar{\sigma}$, so erhält man ein zugeordnetes fiktives Spannungsbild $\bar{\sigma}$, wo eine zu einer bestimmten Dehnung gehörige Spannung ebenfalls mit dem Abstand von der neutralen Achse des Verbundquerschnittes verhältnisgleich wird («linearisierte» Spannungen).

Setzt man das Verhältnis

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma} = 1 + v \quad (2.2)$$

so stellt v den eingangs erwähnten «Vergrößerungsfaktor» dar.

Welche Beziehung es mit diesem Faktor in bezug auf die Form von σ hat, soll nun anhand von Arbeitslinien, wie sie ganz allgemein z. B. in Fig. 2 dargestellt sind, besprochen werden.

Mit Hilfe der Beziehung (2.2) kann jede «plastische» Spannung σ in eine zugehörige «linearisierte» $\bar{\sigma}$ übergeführt werden. Die Spannungen $\bar{\sigma}$ sind durch den Elastizitätsmodul im Ursprung (Anfangsmodul) eindeutig als Tangente festgelegt. Die Bedeutung des Vergrößerungsfaktors erkennt man besser, wenn man umgekehrt vorgeht und sich die Frage stellt, welchen Verlauf nimmt σ

wenn v z. B. einen linearen Verlauf vom Ursprung an aufweist (v_1). Mit Hilfe von (2.2) erhält man dafür unter Beachtung von $\bar{\sigma}$ eine Arbeitslinie σ_1 . — Einem anderen linearen Verlauf v_3 — mit dem Beginn in G und mit der Ordinate in P von der Größe

$$v_p = \frac{\bar{\sigma}_p}{\sigma_p} - 1$$

entspricht die Spannungskurve σ_3 . — Für einen parabolischen Verlauf v_2 des Vergrößerungsfaktors, im Ursprung mit der Abszisse und in P mit v_3 als Tangente, ergibt sich die Kurve σ_2 , die einen allmählichen Übergang zur Geraden σ_3 aufweist.

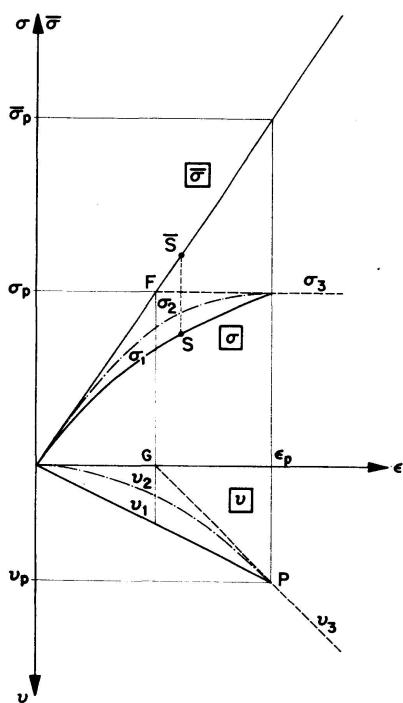


Fig. 2.

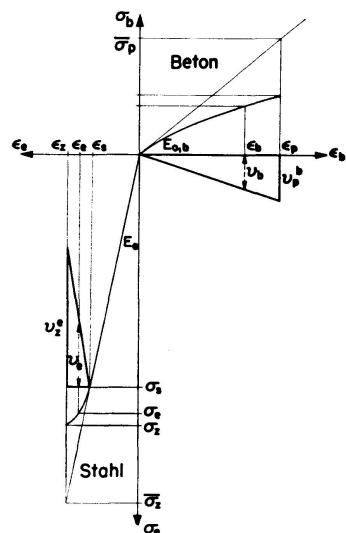


Fig. 3.

Für hochfeste Stahleinlagen ist im plastischen Bereich offensichtlich die Arbeitslinie σ_1 zuständig. Für den Beton im allgemeinen der Kurvenzug $\sigma_2 - \sigma_3$. Will man auch für den Beton einen einfachen geradlinigen v -Verlauf — z. B. den Polygonzug $v_1 - v_3$ — so muß man sich mit der Näherung $\sigma_1 - \sigma_3$ begnügen. Diese Näherung wird aber z. B. im Gebrauchslastfall sicherlich genauer sein, als ein linearer Verlauf der Betonarbeitslinie, wie er üblicherweise im n -Verfahren bisher Verwendung findet.

Da in der vorliegenden Arbeit die Anwendung des «Vergrößerungsfaktors» nur prinzipiell gezeigt werden soll, wählt der Verfasser in der folgenden Abhandlung einen linearen Verlauf v_1 sowohl für den Beton als auch für den Stahl.

Die Betonarbeitslinie wird für die Spannungen von Null bis zur Prismenfestigkeit σ_p gemäß Fig. 3 linearisiert, und zwar nach dem Gesetz

$$\frac{\bar{\sigma}_p}{\sigma_p} = 1 + v_p^b.$$

In der folgenden Abhandlung wird der hochgestellte Index b der Einfachheit halber weggelassen, da durch entsprechende Wahl der laufenden, tiefgestellten Indizes keine Verwechslung möglich ist.

Die Linearisierung der Stahlarbeitslinie ist nur für Spannungen $\sigma > \sigma_s$ notwendig¹⁾, weshalb die «Vergrößerung» laut Fig. 3 für die Zerreißfestigkeit mit

$$\frac{\bar{\sigma}_z - \sigma_s}{\sigma_z - \sigma_s} = 1 + v_z^e \quad (2.3)$$

angeschrieben werden kann. Für den hochgestellten Index e gilt in der Folge das gleiche wie zuvor für b .

Mit der Annahme eines linearen Verlaufs von v für die plastischen Bereiche der Beton- und Stahlarbeitslinien lassen sich beliebige Spannungen sowohl in Abhängigkeit der Prismen- bzw. Zerreißfestigkeit, als auch in Abhängigkeit der jeweiligen «linearisierten» Spannungen beschreiben. Betonspannungen:

Aus
$$\frac{\bar{\sigma}_b}{\bar{\sigma}_p} = \frac{v_b}{v_p}$$

und der Beziehung (2.2) folgt

$$\sigma_b = \left[\frac{v_b}{v_p} \frac{1 + v_p}{1 + v_b} \right] \sigma_p. \quad (2.4)$$

A. PUCHER [1] nennt den in eckiger Klammer stehenden Wert «Ausnützungsgrad» und bezeichnet ihn mit $\bar{\varphi}$.

Setzt man $v_b = v_p \frac{\bar{\sigma}_b}{\bar{\sigma}_p}$ in (2.4) ein, so erhält man die Beziehung

$$\sigma_b = \frac{1}{1 + \frac{\bar{\sigma}_b}{\bar{\sigma}_p} v_p} \bar{\sigma}_b. \quad (2.5)$$

Stahlspannungen: Ähnlich, aber unter Verwendung der Gleichung (2.3) erhält man

$$\sigma_e = \left[\frac{v_e}{v_z} \frac{1 + v_z}{1 + v_e} \right] (\sigma_z - \sigma_s) + \sigma_s. \quad (2.6)$$

Nach PUCHER könnte man analog wieder den in eckiger Klammer stehenden Ausdruck als «Ausnützungsgrad» im plastischen Bereich benennen. Da nur Differenzspannungen in Bezug gesetzt werden, soll diese Größe deshalb mit $\Delta \bar{\varphi}$ bezeichnet werden.

1) Entsprechend den Ausführungen zu Beginn dieses Kapitels wird angenommen, daß die Proportionalitätsgrenze mit der Streckgrenze zusammenfällt und mit σ_s bezeichnet wird.

Setzt man in (2.6)

$$v_e = v_z \frac{\bar{\sigma}_e - \sigma_s}{\bar{\sigma}_z - \sigma_s},$$

so erhält man

$$\sigma_e = \sigma_s + \frac{1}{1 + \frac{\bar{\sigma}_e - \sigma_s}{\bar{\sigma}_z - \sigma_s} v_z} (\bar{\sigma}_e - \sigma_s). \quad (2.7)$$

Letztere Beziehung gilt für $\bar{\sigma}_e - \sigma_s > 0$; im elastischen Bereich $\bar{\sigma}_e - \sigma_s \leq 0$ ist die Stahlspannung von vornherein linear; also ist

$$\sigma_e \equiv \bar{\sigma}_e. \quad (2.7a)$$

3. Die inneren Kräfte

Da auf Grund der in Ziffer 2 gemachten Voraussetzung auf die Mitwirkung des Betons im gesamten Zugbereich des Verbundquerschnittes verzichtet wird, ist die Zugkraft Z stets gegeben mit

$$Z = F_e \sigma_e = b h \mu \sigma_e, \quad (3.1)$$

wobei man zweckmäßiger die zweite Form benutzen wird, wo

$$\mu = \frac{F_e}{b h} \quad (3.2)$$

den Bewehrungsgehalt bezeichnet.

Zur Festlegung der resultierenden Druckkraft und ihrer Lage werden für die beiden, häufig vorkommenden Querschnittsformen — Rechteck- und Plattenbalken — Angaben gemacht, wobei jeweils die auftretende Betonspannung am Druckrand $\sigma_b \leq \sigma_p$ sei.

3.1. Rechteckquerschnitt

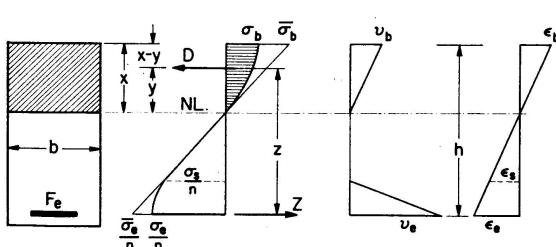


Fig. 4.

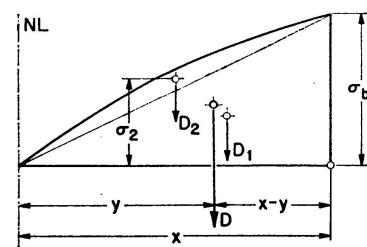


Fig. 5.

Der «Druckkeil» werde nach Figur 5 in die beiden Teile D_1 und D_2 zerlegt. v_b ist der zu σ_b gehörende Vergrößerungsfaktor. Der Verlauf der Faktoren ist in Fig. 4 eingetragen. Damit kann z. B. σ_2 in Fig. 5 mit

$$\sigma_2 = \frac{1 + v_b}{2 + v_b} \sigma_b \quad (3.3)$$

bezeichnet werden. Man erhält schließlich die Druckkraft aus $D = D_1 + D_2$, wenn

$$D_1 = \frac{b_x}{2} \sigma_b$$

und

$$D_2 = \frac{b}{3} x \sigma_b \left(2 \frac{1 + v_b}{2 + v_b} - 1 \right):$$

$$D = \frac{b x}{6} \sigma_b \phi_b. \quad (3.4)$$

ϕ_b hängt von der Form des Querschnittes und der Arbeitslinie ab und lautet für den Rechteckquerschnitt

$$\phi_b = 4 \frac{1+v_b}{2+v_b} + 1. \quad (3.5)$$

Die Lage der Druckkraft erhält man z. B. aus der Summe der Momente um den Druckrand, wo gelten muß, daß

$$6D(x-y) = 2D_1x + 3D_2x.$$

Beziehen wir den Abstand von D vom Druckrand auf x und bezeichnen diese bezogene Größe wie in [1] mit λ , so erhält man im vorliegenden Fall

$$\lambda = \frac{x-y}{x} = 2 \frac{1+v_b}{6+5v_b}. \quad (3.6)$$

Damit sind Größe und Lage der Druckkraft bekannt.

3.2. Plattenbalken

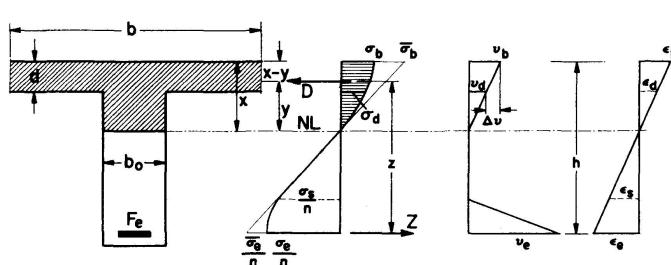


Fig. 6.

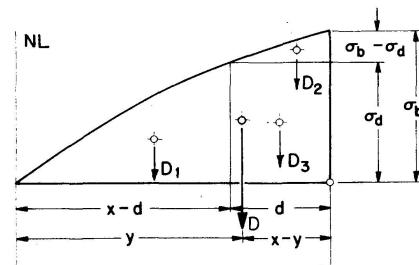


Fig. 7.

Querschnittsabmessungen, Spannungsbild und der Verlauf der Vergrößerungsfaktoren sind aus Fig. 6 zu ersehen. Die Zerlegung des «Druckkeiles» erfolgt ähnlich wie vorhin²⁾, und zwar nach Fig. 7. Für die einzelnen Teildruckkräfte erhält man

²⁾ Unter Verwendung von (3.4) und (3.5); vergleiche auch Fig. 5.

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{x-d}{6} b \sigma_d \frac{b_0}{b} \left(4 \frac{1+v_d}{2+v_d} + 1 \right), \\
 D_2 &= \frac{db}{6} (\sigma_b - \sigma_d) \left(4 \frac{1+\Delta v}{2+\Delta v} + 1 \right), \\
 D_3 &= db \sigma_d.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Damit ergibt sich die gesamte Druckkraft wieder gemäß (3.4), wobei

$$\phi_b = \left(1 - \frac{d}{x} \right) \frac{\sigma_d}{\sigma_b} \frac{b_0}{b} \left(4 \frac{1+v_d}{2+v_d} + 1 \right) + \frac{d}{x} \left(1 - \frac{\sigma_d}{\sigma_b} \right) \left(4 \frac{1+\Delta v}{2+\Delta v} + 1 \right) + 6 \frac{d}{x} \frac{\sigma_d}{\sigma_b} \tag{3.8}$$

bedeutet.

Auf die gleiche Art wie beim Rechteckquerschnitt lässt sich die Lage der Gesamtdruckkraft bestimmen; für den entsprechenden bezogenen Druckrandabstand erhält man

$$\lambda = \frac{D_1}{D} \left[\frac{d}{x} + 2 \frac{1+v_d}{6+5v_d} \left(1 - \frac{d}{x} \right) \right] + 2 \frac{D_2}{D} \frac{d}{x} \frac{1+\Delta v}{6+5\Delta v} + \frac{1}{2} \frac{D_3}{D} \frac{d}{x}. \tag{3.9}$$

Mit ϕ_b und λ sind wieder Größe und Lage der Druckkraft gegeben, wenn man beachtet, daß für

$$\begin{aligned}
 \sigma_d &= \frac{(1+v_b) \left(1 - \frac{d}{x} \right)}{1+v_b \left(1 - \frac{d}{x} \right)} \sigma_b, \\
 v_d &= v_b \left(1 - \frac{d}{x} \right), \\
 \Delta v &= v_b \frac{d}{x}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

zu setzen ist.

4. Tragmomente des Rechteckquerschnittes

Je nachdem, ob das Versagen des betrachteten Rechteckquerschnittes (Fig. 4) bei gleichzeitiger Zerstörung der Betondruckzone und Reißen der Stahleinlage, oder infolge Zerstörung der Betondruckzone, oder infolge Reißen der Stahleinlagen eintritt, unterscheidet man bei der Ermittlung des Tragmomentes dementsprechend drei Fälle.

4.1. Grenzfall

Zuerst wollen wir den Idealfall, Beton und Stahl versagen gleichzeitig, untersuchen. Die Randspannungen nach Fig. 4 haben am Betondruckrand den Wert σ_p und im Schwerpunkt der Stahleinlagen habe die Stahlspannung den Wert σ_z erreicht. Es wird ferner angenommen, daß sämtliche Querschnitts-

werte gegeben sind. Der Bewehrungsgehalt sei gerade so groß, daß der vorausgesetzte Grenzfall eintritt. (In den folgenden Untersuchungen wollen wir stets den jeweiligen Bewehrungsgehalt dem Grenzwert gegenüberstellen, der dem angenommenen Idealfall entspricht, um feststellen zu können, welcher der eingangs erwähnten drei Grundfälle jeweils vorliegt.)

Wenn wir uns zuerst die auftretenden Spannungen «linearisiert» denken, so erhalten wir wie gewohnt die Lage der Nulllinie aus der bekannten Beziehung

$$n \frac{\bar{\sigma}_p}{\bar{\sigma}_z} = \frac{x}{h-x}$$

oder

$$n h \bar{\sigma}_p = (n \bar{\sigma}_p + \bar{\sigma}_z) x.$$

Unter Verwendung von (2.2) und (2.3) erhält man sofort den Abstand der Nulllinie auf den Druckrand bezogen, und zwar in dimensionsloser Schreibweise:

$$\xi_{gr} = \frac{x_{gr}}{h} = \frac{n \sigma_p (1 + v_p)}{\sigma_z + n \sigma_p (1 + v_p) + (\sigma_z - \sigma_s) v_z}. \quad (4.1)$$

Die zum Grenzfall gehörenden, inneren Kräfte sind mit (3.1) und (3.4) gegeben, wenn für die Randspannung $\sigma_b = \sigma_p$ gesetzt wird. Man erhält dann

$$D = \frac{b h}{6} \xi_{gr} \phi_p \sigma_p \quad (4.2)$$

und

$$Z = F_{e,gr} \sigma_z. \quad (4.3)$$

Ferner nach (3.2) und der Gleichgewichtsbedingung $D = Z$ die Grenzbewehrung

$$\mu_{gr} = \frac{1}{6} \xi_{gr} \phi_p \frac{\sigma_p}{\sigma_z}. \quad (4.4)$$

Schließlich ist auch der innere Hebelsarm gegeben:

$$z = h - (x - y) = h (1 - \lambda_{gr} \xi_{gr}) = \zeta_{gr} h,$$

wobei in (3.6) für $v_b = v_p$ einzusetzen ist.

$$\zeta_{gr} = 1 - \lambda_{gr} \xi_{gr}. \quad (4.5)$$

Das Tragmoment für den Grenzfall kann schließlich wegen $M = D z$ mit Hilfe von (4.2) und (4.5) angegeben werden:

$$M_T = \frac{b h^2}{6} \phi_p \xi_{gr} (1 - \lambda_{gr} \xi_{gr}) \sigma_p. \quad (4.6)$$

Unter Beachtung von (4.4) kann dafür auch

$$M_T = b h^2 \mu_{gr} (1 - \lambda_{gr} \xi_{gr}) \sigma_z \quad (4.7)$$

geschrieben werden.

4.2. Versagen der Beton-Druckzone

Bevor wir uns diesem, für die Praxis wichtigsten Fall zuwenden, wollen wir den Grenzfall untersuchen, bei dem die Stahlspannungen gerade den Wert σ_s erreichen. Mit dieser Stahlspannung endet voraussetzungsgemäß der elastische Bereich der Stahlarbeitslinie. Wie in Ziffer 4.1 gezeigt ist auch in diesem Sonderfall vorzugehen.

Anstelle (4.1) erhält man

$$\xi'_{gr} = \frac{n(1+v_p)\sigma_p}{\sigma_s + n(1+v_p)\sigma_p} \quad (4.8)$$

unter Beachtung der oben gefundenen Gleichung gilt auch (4.2) sinngemäß.

$$(4.4) \text{ wird hier zu} \quad \mu'_{gr} = \frac{1}{6} \xi'_{gr} \phi_p \frac{\sigma_p}{\sigma_s} > \mu_{gr}. \quad (4.9)$$

Mit Hilfe dieses Bewehrungsgehaltes kann nun bei gegebener Stahlfläche festgestellt werden, ob die Stahlspannung im elastischen oder im plastischen Bereich liegt.

Gegeben seien wieder sämtliche Querschnittsabmessungen, wobei auf Grund des vorhandenen Bewehrungsgehaltes festgestellt worden sei, daß mit einem Versagen der Beton-Druckzone gerechnet werden muß und daß die Stahlspannung im *plastischen* Bereich liegen wird.

a) Stahlspannung im plastischen Bereich

Gesucht werden das Tragmoment und in der Folge davon die Lage der Nulllinie. Auf Grund der Art des zu erwartenden Versagens wird die größte Randspannung im Druckbereich für den Fall des Versagens σ_p sein. Zur Bestimmung der inneren Kräfte muß σ_e noch ermittelt werden. Wenn v_e der zugehörige Vergrößerungsfaktor ist, stehen zur Bestimmung der unbekannten Größen σ_e , v_e und ξ die folgenden drei Bestimmungsgleichungen zur Verfügung:

$$\mu = \frac{1}{6} \xi \phi_p \frac{\sigma_p}{\sigma_e}, \quad (4.11)$$

$$\xi = \frac{n(1+v_p)\sigma_p}{\sigma_e + n(1+v_p)\sigma_p + (\sigma_e - \sigma_s)v_e} \quad (4.12)$$

$$\text{und} \quad v_e = \frac{(\sigma_e - \sigma_s)v_z}{(1+v_z)(\sigma_z - \sigma_s) - (\sigma_e - \sigma_s)v_z}. \quad (4.13)$$

ξ und v_e sind mit σ_e gegeben. Mit ξ aus (4.11) und (4.12) gleichgesetzt ergibt sich unter Verwendung von (4.13) eine kubische Bestimmungsgleichung für σ_e :

$$\sigma_e^3 + A_2 \sigma_e^2 + A_1 \sigma_e + A_0 = 0. \quad (4.14)$$

Die Koeffizienten lauten:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{n}{6} \frac{(1+v_p)\phi_p}{v_z\mu} \sigma_p^2 [\sigma_s - (1+v_z)\sigma_z], \\ A_1 &= \frac{n}{6} \frac{(1+v_p)\phi_p}{\mu} \sigma_p^2 + n(1+v_p)\sigma_p\sigma_s + \sigma_s^2, \\ A_2 &= \frac{1+v_z}{v_z} (\sigma_z - \sigma_s) - n(1+v_p)\sigma_p - 2\sigma_s. \end{aligned}$$

Die Auflösung von (4.14) erfolgt zweckmäßig durch Probieren, zumal auf Grund des gegebenen Bewehrungsgehaltes und seiner Größe im Verhältnis zu den beiden Grenzwerten μ_{gr} und μ'_{gr} die ungefähre Größe der unbekannten Spannung σ_e abgeschätzt werden kann. Es muß nämlich gelten, daß

$$\sigma_z > \sigma_e > \sigma_s.$$

ξ kann wahlweise statt aus (4.12) mit der aus (4.14) bestimmten Zugspannung σ_e auch aus (4.11) ermittelt werden.

$$\xi = 6 \frac{\mu \sigma_e}{\phi_p \sigma_p}. \quad (4.15)$$

Das Tragmoment kann nunmehr aus

$$M_T = b h^2 \mu (1 - \lambda \xi) \sigma_e \quad (4.16)$$

bestimmt werden. λ ist mit (3.6) gegeben, wenn wir dort für $v_b = v_p$ setzen.

Wieder seien alle Querschnittswerte gegeben. Aus der Gegenüberstellung des gegebenen Wertes μ zu μ_{gr} und μ'_{gr} sei festgestellt worden, daß mit einem Versagen der Beton-Druckzone gerechnet werden muß und daß die Stahlspannung σ_e im *elastischen* Bereich liegen wird.

b) Stahlspannung im elastischen Bereich

Es gilt

$$\begin{aligned} \mu &> \mu_{gr}, \\ &> \mu'_{gr}, \end{aligned}$$

weshalb $\sigma_e < \sigma_s$ sein muß, d. h. die Stahlspannung ist von vornherein linear; v_e interessiert nicht, da eine Linearisierung der Spannungen nicht mehr notwendig ist und somit (4.13) entfallen kann.

Durch Gleichsetzen von ξ aus (4.11) und aus (4.12), wobei dort der dritte Term im Nenner entfällt,

$$\xi = \frac{6 \mu \sigma_e}{\phi_p \sigma_p} = \frac{n(1+v_p)\sigma_p}{\sigma_e + n(1+v_p)\sigma_p} \quad (4.17)$$

erhält man eine quadratische Bestimmungsgleichung:

$$\sigma_e^2 + n(1+v_p)\sigma_p\sigma_e - \frac{n\phi_p}{6\mu}(1+v_p)\sigma_p^2 = 0,$$

woraus sich die unbekannte Stahlspannung sofort anschreiben lässt:

$$\sigma_e = \frac{n}{2} (1 + v_p) \sigma_p \left[\sqrt{1 + \frac{2}{3} \frac{\phi_p}{n \mu (1 + v_p)}} - 1 \right]. \quad (4.18)$$

Für die Formulierung des Tragmomentes gilt wieder Gleichung (4.16).

4.3. Versagen der Stahleinlagen

Gegeben sind alle Querschnittswerte. Die vorhandene Bewehrungsfläche in der Zugzone sei kleiner als die Grenzbewehrung (schwache Bewehrung):

$$\mu < \mu_{gr}.$$

Wie im vorhergehenden Abschnitt stehen auch hier wieder drei Bestimmungsgleichungen zur Verfügung, um die unbekannte Randspannung, diesmal ist es die Beton-Randspannung $\sigma_b < \sigma_p$, zu bestimmen.

$$\mu \sigma_z = \frac{\phi_b}{6} \xi \sigma_b. \quad (4.19)$$

Unter Beachtung von (3.5).

$$\xi = \frac{n \sigma_b (1 + v_b)}{\sigma_z + n \sigma_b (1 + v_b) + (\sigma_z - \sigma_s) v_z} \quad (4.20)$$

$$\text{und } v_b = \frac{\sigma_b v_p}{(1 + v_p) \sigma_p - \sigma_b v_p}. \quad (4.21)$$

Nach Gleichsetzen von (4.19) und (4.20), unter Beachtung von (3.5) und Einsetzen von (4.21) bekommt man wieder eine kubische Gleichung zur Bestimmung der unbekannten Randspannung σ_b :

$$\sigma_b^3 + B_2 \sigma_b^2 + B_1 \sigma_b + B_0 = 0. \quad (4.22)$$

Die Koeffizienten lauten:

$$\begin{aligned} B_0 &= 12 \mu \sigma_z \frac{\sigma_p}{n} \frac{1 + v_p}{v_p} [\sigma_z + (\sigma_z - \sigma_s) v_z], \\ B_1 &= 6 \mu \sigma_z \left\{ 2 \frac{1 + v_p}{v_p} \sigma_p - \frac{3}{n} [\sigma_z + (\sigma_z - \sigma_s) v_z] \right\}, \\ B_2 &= 6 \mu \sigma_z \left[\frac{v_p}{1 + v_p} \frac{\sigma_z + (\sigma_z - \sigma_s) v_z}{n \sigma_p} - \frac{1 + v_p}{\mu v_p} \frac{\sigma_p}{\sigma_z} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Die Auflösung von (4.22) erfolgt wie (4.14) am zweckmäßigsten durch Probieren. ξ kann auch wahlweise aus

$$\xi = 6 \frac{\mu \sigma_e}{\phi_b \sigma_b} \quad (4.23)$$

berechnet werden. Mit den soeben ermittelten Werten, unter Beachtung von (3.6) und σ_z als Stahlspannung eingesetzt, ist das Tragmoment nach Gleichung (4.16) gegeben.

Bei Verwendung von weichem Baustahl mit ausgeprägter Streckgrenze ist in (4.22) für $\sigma_z = \sigma_s$ zu setzen.

5. Freie Bemessung

Mit den im vorangegangenen Kapitel gefundenen Beziehungen ist es ohne weiteres möglich, Bemessungsformeln, wie sie bei den gebräuchlichen n -Verfahren üblich sind, anzugeben.

Bei Einhaltung von vorgegebenen Randspannungen, für die Beton-Druckzone z. B. σ_b und für die Stahleinlage z. B. $\sigma_e > \sigma_s$ (unter Verwendung von (4.12) mit $\sigma_p = \sigma_b$), erhält man für die dimensionsgebundene Bemessung bekanntlich

$$h = k_h \sqrt{\frac{M}{b}}$$

für eine dimensionslose Bemessung nach [1]

$$h = \gamma \sqrt{\frac{M}{b \sigma_b}}.$$

Die entsprechenden Koeffizienten sind nach dem vom Verfasser vorgeschlagenen Verfahren gegeben mit:

$$k_h = \sqrt{\frac{6}{\phi_b \xi (1 - \lambda \xi) \sigma_b}}, \quad (5.1)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{6}{\phi_b \xi (1 - \lambda \xi)}}. \quad (5.2)$$

In Abhängigkeit vom Bewehrungsgehalt und von der maßgebenden Stahlspannung kann dafür auch geschrieben werden:

$$k_h = \sqrt{\frac{1}{\mu (1 - \lambda \xi) \sigma_s}}, \quad (5.3)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{\mu (1 - \lambda \xi)}}. \quad (5.4)$$

Es konnte gezeigt werden, daß mit der Einführung der «Vergrößerungsfaktoren» ein modifiziertes n -Verfahren auch bei Vorhandensein von nicht linear zunehmenden Spannungen (im Zug- und Druckbereich) angewandt werden kann.

6. Schlußbetrachtung

Die gezeigten Beziehungen gelten bei linearem Verlauf der Vergrößerungsfaktoren. Bei polygonalem Verlauf im Betonbereich ist das Verfahren bei Einführung entsprechender Festwerte an den Knickstellen des v -Polygons sinngemäß durchführbar. Auch eine Ergänzung des n -freien Verfahrens bei Vorhandensein hochfester Stahleinlagen ohne ausgeprägte Streckgrenze ist möglich. Auf die besondere Anwendung des Verfahrens zur Bestimmung des Bruchmomentes *mit* Vorspannung wird der Verfasser noch ausführlich zurückkommen.

Das hier vorgeschlagene Verfahren ist ebenso für die Bemessung anderer, verstärkter, plastischer Stoffe anwendbar.

* * *

Für die Förderung dieser Arbeit dankt der Verfasser Herrn o. Professor Dr. techn. H. BEER, für wertvolle Anregungen im Verlaufe geführter Diskussionen Herrn Dr. techn. J. KRISO.

7. Literatur

- [1] PUCHER, A., Lehrbuch des Stahlbetonbaues, Springer-Verlag, Wien, 3. Auflage 1961.
- [2] BEER, H. und MOSER, K., Das Tragverhalten statisch unbestimmter Systeme aus hochfestem Baustahl. Vorbericht zum 7. Kongreß der IVBH in Rio de Janeiro 1964, Sektion IIe1, Seite 537ff.

Zusammenfassung

Zur Beschreibung des Tragverhaltens von Verbundquerschnitten auf Biegung, die aus allgemein elastisch-plastischen Verbundbaustoffen aufgebaut sind, gibt der Verfasser ein einfaches Verfahren an. Unter Verwendung eines dehnungsabhängigen Vergrößerungsfaktors wird der Spannungsverlauf linearisiert. Bei Verbundkonstruktionen, wo die Anfangsmoduli der Verbundstoffe unterschiedlich sind, werden diese in bekannter Art in Beziehung zueinander gesetzt.

Der Verfasser zeigt die Anwendung des Verfahrens für zwei häufig vorkommende Stahlbeton-Querschnittsformen. Es wird die Biegetheorie des Rechteckbalkens im plastischen Bereich allgemein vorgeführt und gezeigt, daß sich auch bei Berücksichtigung des plastischen Verhaltens hochfester Stahleinlagen einfache Formulierungen entsprechend den gebräuchlichen n -Verfahren ergeben. Das Verfahren eignet sich auch zur Bestimmung des Bruchmomentes mit Vorspannung sowie auch für die Bemessung anderer, verstärkter, plastischer Stoffe.

Summary

The author indicates a simple method making it possible to describe the behaviour on destruction of composite sections constructed of materials exhibiting general elasto-plastic characteristics. By using an increase factor which is a function of the elongation, he succeeds in linearising the distribution of the stresses. For composite sections constructed of materials exhibiting different initial moduli of elasticity, the conventional ratios are employed.

The author applies his method to two commonly occurring sections of reinforced concrete. He deals generally with the theory of the bending of beams of rectangular section in the plastic range and shows that even when the plastic behaviour of high-strength reinforcement bars is taken into account, simple formulae are obtained corresponding to the conventional method. The procedure can also be applied to the determination of the moment of rupture of prestressed sections and of the design dimensions of other reinforced plastic materials.

Résumé

L'auteur indique une méthode simple permettant de décrire le comportement à la ruine des sections mixtes réalisées en matériaux présentant des caractéristiques élasto-plastiques générales. En utilisant un facteur de majoration qui est fonction de l'allongement, on réussit à linéariser la distribution des contraintes. Pour les sections mixtes réalisées en matériaux présentant des modules d'élasticité initiaux différents, on utilise les rapports classiques.

L'auteur applique sa méthode à deux sections de béton armé courantes. Il traite de façon générale la théorie de la flexion des poutres à section rectangulaire dans le domaine plastique et montre que, même en tenant compte du comportement plastique des armatures à haute résistance, on obtient des formules simples, correspondant à celles de la méthode classique dite du «coefficient d'équivalence». Le procédé peut aussi s'appliquer à la détermination du moment de rupture des sections précontraintes et au dimensionnement d'autres matériaux plastiques armés.

Leere Seite
Blank page
Page vide