

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 24 (1964)

**Artikel:** Contribution au calcul des coques continues et précontraintes

**Autor:** Fonder, G.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19842>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Contribution au calcul des coques continues et précontraintes**

*Contribution to the Analysis of Prestressed Shells Continuous over Supports*

*Beitrag zur Berechnung durchlaufender, vorgespannter Schalen*

G. FONDER

Ingénieur Civil des Constructions, Aspirant F.N.R.S., Université de Liège (Belgique)

## **Introduction**

Peu de coques continues ont été construites dans le monde. Pour la plupart d'entre elles, le dimensionnement a été effectué par une méthode simplifiée: méthode de la poutre ou bien calcul d'une coque biappuyée et extension à la continuité par de simples considérations sur le diagramme des moments dans les poutres sur appuis multiples. Dans le présent mémoire, nous montrons que les fonctions de base, malgré certains inconvénients, offrent au problème une solution intéressante.

La précontrainte, pour être vraiment utile, doit comporter des câbles dans la coque et dans les poutres de rive. Ils donnent naissance à des efforts d'abuts et des efforts de courbure, qui sont analysés séparément par la méthode la mieux appropriée, puis superposés.

Les développements théoriques sont illustrés par un exemple numérique: celui d'un shed de  $2 \times 40$  m de portée analogue à celui construit à Oosterhout par le Professeur HAAS. Dans ce cas particulier, nous donnons une disposition originale des câbles de précontrainte.

## **Notations et conventions de signe**

Les notations et conventions de signe sont définies ci-après:

*Axes et déplacements*

Axes  $x, \varphi$  ou  $y, z$

Déplacements  $u$   
 $v$   
 $w$  } positifs dans le sens des axes

$\partial \varphi$  positif de  $v$  vers  $w$

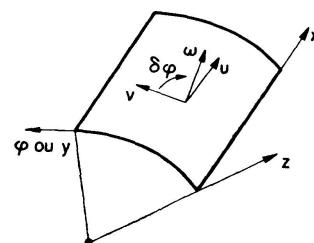


Fig. 1.

### Dimensions et notations spéciales

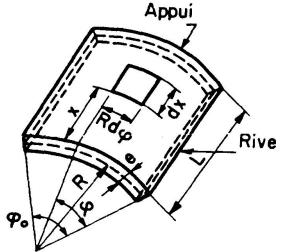


Fig. 2.

$$K = \frac{E e^3}{12}, \quad D = E e$$

$$\rho^8 = \frac{12 \pi^4 R^6}{L^4 e^2}, \quad x = \frac{\pi^2 R^2}{L^2 \rho^2}$$

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f^\circ = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \text{ ou } R \frac{\partial f}{\partial y}$$

### Forces intérieures et extérieures

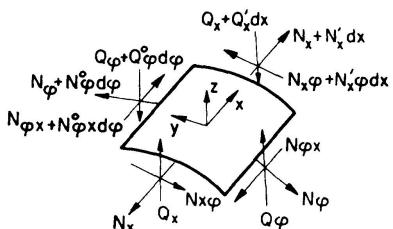


Fig. 3.

 $N_\varphi, N_x$  $N_{x\varphi}, N_{\varphi x}$  $Q_x, Q_\varphi$  $X, Y, Z$ 

positifs en traction.

positifs lorsqu'ils produisent une réduction de l'angle droit des coordonnées.

positifs vers le haut pour des facettes regardant les coordonnées négatives.

positifs dans le sens des axes.

### Tensions et moments

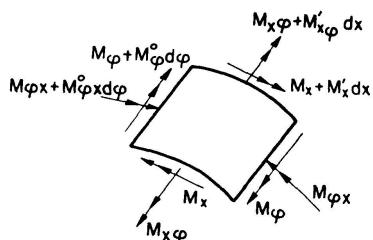


Fig. 4.

 $\sigma_x, \sigma_\varphi, \tau_{x\varphi}, \tau_{\varphi x}$ positifs dans le même sens que  $N_x, N_\varphi, N_{x\varphi}, N_{\varphi x}$ .positifs lorsqu'ils donnent à l'intrados des tensions de même sens que  $N_x, N_\varphi, N_{x\varphi}, N_{\varphi x}$ .

## Première partie: Le problème de la continuité

### Aperçu des méthodes existantes

Parmi l'abondante littérature traitant des coques, les indications concernant le calcul des coques continues sont plutôt rares.

Au cours de notre examen des différentes méthodes, nous avons rapidement exclu les méthodes à la rupture, encore incomplètement développées, les méthodes trop compliquées comme celle de VLASOV ou la méthode itérative de LUNDGREN et les méthodes approchées comme celles de BARETS-CALLARI ou VAN DER EB; pour l'étude de certains effets de précontrainte, nous avons cependant eu recours à la méthode de la poutre.

Restent donc les méthodes dites exactes, c'est-à-dire basées sur la théorie mathématique de l'élasticité et qui, moyennant des hypothèses simplificatrices plus ou moins poussées, dérivent des trois équations fondamentales établies par FLÜGGE [1]. Elles conduisent finalement à une équation en  $w$  contenant des dérivées partielles du 8e ordre par rapport à  $x$  et  $\varphi$ . Habituellement, on sépare les variables en écrivant  $w = w_I(\varphi) w_{II}(x)$  où  $w_{II}(x)$  est un développement en série de FOURIER dont on conserve un ou quelques termes. Il reste alors une équation différentielle du 8e ordre en  $\varphi$ ; sa solution comprend une intégrale particulière pour laquelle on prend la solution de membrane et une intégrale générale souvent appelée la solution de flexion.

On interprète physiquement cette double solution en disant que les charges réparties sur la surface de la coque sont transmises aux appuis uniquement par des tensions dans la surface moyenne de la coque: c'est l'état membranaire. Mais cet état implique aux retombées de la coque des tensions et déformations en général incompatibles avec les conditions à respecter en ces bords. Il faut donc apporter le long de ceux-ci des charges linéaires qui vont donner des moments et des efforts tranchants dans la coque: c'est la solution de flexion.

Une des solutions proposées [2] [3] consiste à assimiler l'effet de la continuité dans les coques à l'effet de la continuité dans les poutres ordinaires. Par exemple, les tensions longitudinales sur appuis d'une coque continue sont, en grandeur et en signe, aux tensions longitudinales au milieu d'une coque bi-appuyée comme les moments sur appuis d'une poutre continue sont au moment à mi-portée d'une poutre bi-appuyée.

La comparaison avec une solution rigoureuse fait défaut pour estimer le degré d'approximation de cette méthode. S'il est vraisemblable qu'elle est satisfaisante pour les efforts  $M_x$ ,  $N_x$  et  $Q_x$  comparables aux éléments de réduction  $M$ ,  $N$ ,  $T$  des poutres, ses résultats sont beaucoup plus douteux lorsqu'il s'agit de fixer l'évolution longitudinale d'efforts  $N_\varphi$ ,  $N_{\varphi x}$ ,  $Q_\varphi$ ,  $M_\varphi$ ,  $M_{\varphi x}$  propres aux plaques et aux coques.

Le manuel de l'A.S.C.E. [3] propose une solution du problème de la continuité qui est présentée comme rigoureuse.

On y résout d'abord le cas d'une membrane continue chargée de forces réparties et développées en séries de FOURIER. On y remarque que les tensions  $N_x$ ,  $N_\varphi$ ,  $N_{\varphi x}$  et les déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  de membrane pour le terme d'ordre  $n$  sont composés de deux parties:

- la première correspond à une membrane biappuyée et contient un facteur  $\sin \frac{n\pi x}{l}$  ou  $\cos \frac{n\pi x}{l}$ ,
- la seconde provient des conditions d'appui propres à la membrane continue et a la forme d'un polynôme en  $x$  et en  $n$ .

Le manuel passe ensuite au cas de charges distribuées sur les bords qui donnent lieu à la solution de flexion. Par analogie avec les résultats de mem-

brane, il suppose qu'elle se compose de deux termes: le premier correspond à la solution de flexion dans la coque biappuyée; quant au second, c'est aussi un polynôme en  $x$  et en  $n$ : il provient du réglage des constantes d'intégration de façon à satisfaire aux nouvelles conditions d'appui.

La solution complète se présente sous une forme compliquée et son emploi est réservé aux coques à bords libres. En effet, la présence simultanée des termes trigonométriques et polynomiaux dans les efforts et déplacements de coque rend impossible le raccord avec les efforts et déplacements d'une éventuelle poutre de rive.

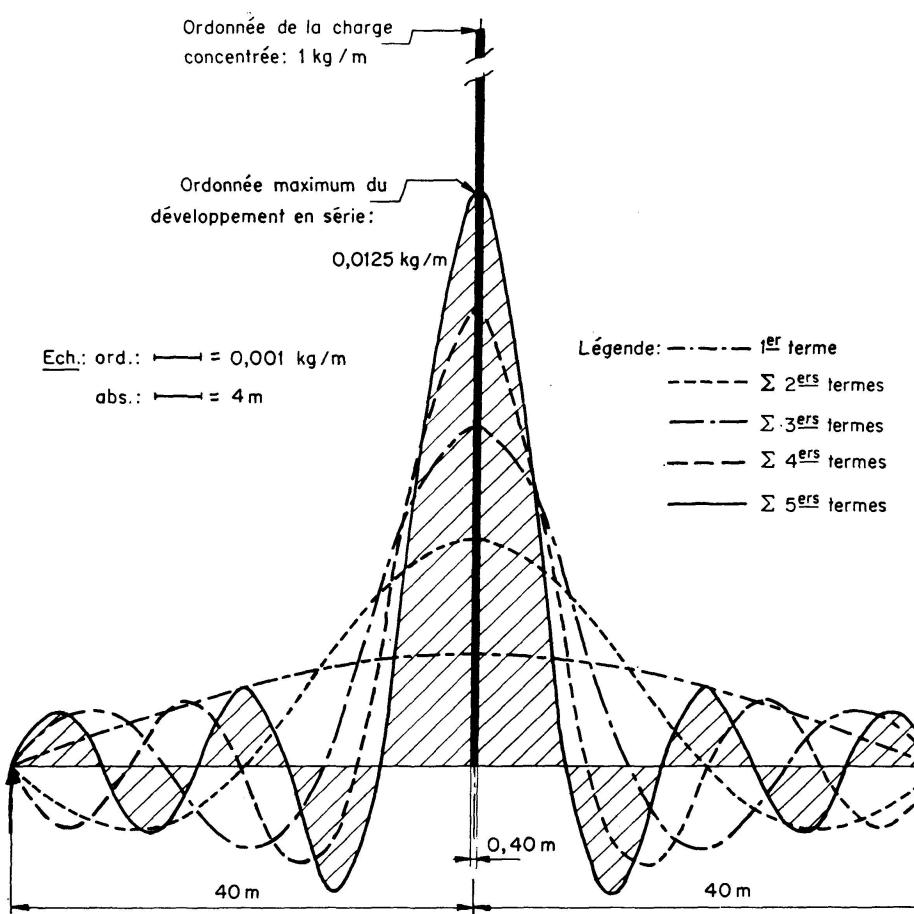


Fig. 5.

Nous avons tenté de calculer la coque continue sur trois appuis comme une coque biappuyée soumise aux charges extérieures et à une force de soulèvement concentrée à mi-portée: la réaction de l'appui central. Mais, alors que, dans les développements usuels en série de FOURIER, on se contente de un ou deux termes, il en aurait fallu un très grand nombre pour rendre compte des phénomènes localisés au voisinage de l'appui. A titre d'exemple, nous montrons à la fig. 5, l'énorme différence entre une charge de 1 kg/m, correspondant à une réaction centrale répartie sur 0,40 m au milieu d'une poutre de  $2 \times 40$  m de portée, et son développement en série dont on a conservé les cinq premiers termes.

*La solution par les fonctions de base*

MORICE [4] fait remarquer que les développements en série de FOURIER ne constituent pas la seule possibilité pour  $w_{II}(x)$  lorsqu'on pose  $w=w_I(\varphi)w_{II}(x)$  pour résoudre l'équation aux dérivées partielles des coques.

Il suffit que  $w_{II}(x)$  soit un développement en série de fonctions orthogonales dont la forme se répète après des dérivations d'ordre 2, 4, 6, 8 c'est-à-dire sous les ordres de différentiation contenus dans l'équation aux dérivées partielles des coques.

Par analogie avec des problèmes rencontrés dans l'étude des vibrations, MORICE fait appel à des «fonctions de base». Il appelle ainsi les équations qui représentent les déformées vibratoires à une, deux ou plusieurs ondes rencontrées dans l'étude des tiges vibrantes. Ces équations sont de la forme

$$\begin{aligned} F(x) &= A_1 \cosh \frac{\alpha x}{L} + A_2 \cos \frac{\alpha x}{L} + A_3 \sinh \frac{\alpha x}{L} + A_4 \sin \frac{\alpha x}{L}, \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x} &= \left( \frac{\alpha}{L} \right) \left( A_1 \sinh \frac{\alpha x}{L} - A_2 \sin \frac{\alpha x}{L} + A_3 \cosh \frac{\alpha x}{L} + A_4 \cos \frac{\alpha x}{L} \right) = \left( \frac{\alpha}{L} \right) \Gamma(x), \\ \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} &= \left( \frac{\alpha}{L} \right)^2 \left( A_1 \cosh \frac{\alpha x}{L} - A_2 \cos \frac{\alpha x}{L} + A_3 \sinh \frac{\alpha x}{L} - A_4 \sin \frac{\alpha x}{L} \right) = \left( \frac{\alpha}{L} \right)^2 \Phi(x), \\ \frac{\partial^3 F(x)}{\partial x^3} &= \left( \frac{\alpha}{L} \right)^3 \left( A_1 \sinh \frac{\alpha x}{L} + A_2 \sin \frac{\alpha x}{L} + A_3 \cosh \frac{\alpha x}{L} - A_4 \cos \frac{\alpha x}{L} \right) = \left( \frac{\alpha}{L} \right)^3 \Pi(x), \\ \frac{\partial^4 F(x)}{\partial x^4} &= \left( \frac{\alpha}{L} \right)^4 \left( A_1 \cosh \frac{\alpha x}{L} + A_2 \cos \frac{\alpha x}{L} + A_3 \sinh \frac{\alpha x}{L} + A_4 \sin \frac{\alpha x}{L} \right) = \left( \frac{\alpha}{L} \right)^4 F(x). \end{aligned}$$

Sous leur forme générale, les fonctions de base peuvent s'adapter à diverses conditions d'appui, notamment au cas biencastré, au cas cantilever, au cas encastré appuyé qui nous intéresse spécialement puisque le cas d'une coque sur trois appuis à travées égales et également chargées s'y ramène par raison de symétrie.

Pour ce dernier cas, quelles que soient les charges et l'angle  $\varphi$ , les déplacements  $w=w_I(\varphi)w_{II}(x)$  doivent toujours

- être nuls sur l'appui central  $\rightarrow w=0$  pour  $x=0 \rightarrow F(x)=0$  pour  $x=0$ ;
- être nuls sur l'appui extrême  $\rightarrow w=0$  pour  $x=L \rightarrow F(x)=0$  pour  $x=L$ ;
- avoir une tangente horizontale sur l'appui central  $\rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}=0$  pour  $x=0 \rightarrow \frac{dF(x)}{dx}=0$  pour  $x=0$ ;
- avoir une courbure nulle sur l'appui extrême (pas de moments  $M_x$ )  $\rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$  pour  $x=L \rightarrow \frac{d^2 F(x)}{dx^2}=0$  pour  $x=L$ .

Ces quatre conditions permettent de fixer des valeurs particulières aux constantes

$$A'_1 = \frac{A_1}{A_4}, \quad A'_2 = \frac{A_2}{A_4}, \quad A'_3 = \frac{A_3}{A_4}$$

et  $\alpha$  qui apparaissent dans l'équation  $F(x)$ . Tous calculs faits, on trouve que, pour une coque sur trois appuis, un développement en série de fonctions de base aura forme suivante:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + \cdots + a_n F_n(x) + \cdots \\ &= a_1 \left[ \cosh \frac{(\pi/4+\pi)x}{L} - \cos \frac{(\pi/4+\pi)x}{L} - \sinh \frac{(\pi/4+\pi)x}{L} + \sin \frac{(\pi/4+\pi)x}{L} \right] + \cdots \\ &\quad + a_n \left[ \cosh \frac{(\pi/4+n\pi)x}{L} - \cos \frac{(\pi/4+n\pi)x}{L} - \sinh \frac{(\pi/4+n\pi)x}{L} \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{(\pi/4+n\pi)x}{L} \right]. \end{aligned}$$

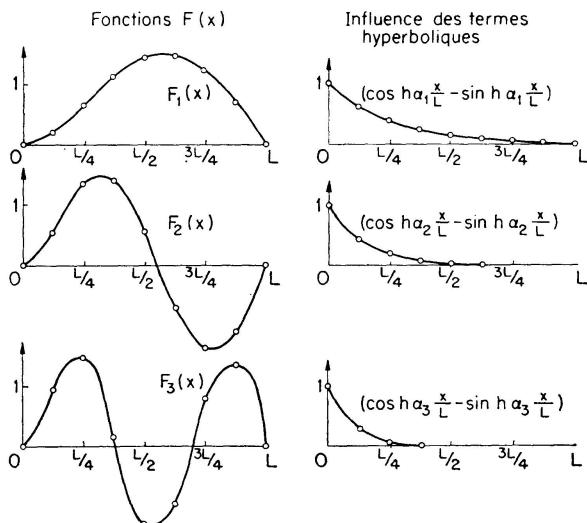


Fig. 6.

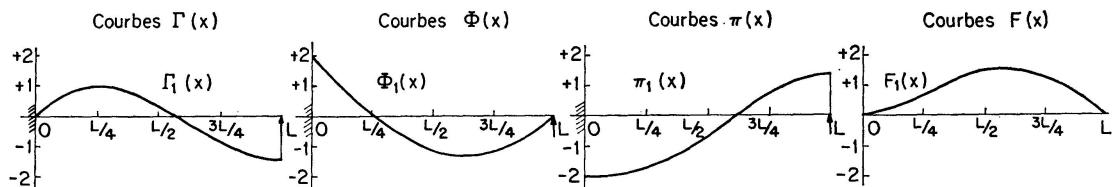


Fig. 7.

Pour information, nous reproduisons à la fig. 6 les courbes  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$ ,  $F_3(x)$  avec, en regard, l'influence des termes hyperboliques qui différencient ces courbes des développements habituels en sinus et cosinus. On peut constater que la partie hyperbolique joue un rôle de plus en plus localisé au voisinage de l'appui central lorsque le nombre de termes du développement augmente. Nous reproduisons également à la fig. 7 les courbes  $F_1(x)$ ,  $\Gamma_1(x)$ ,  $\Phi_1(x)$  et  $\pi_1(x)$ , qui s'en déduisent comme indiqué précédemment.

Il est visible que  $F_1(x)$  et  $\Phi_1(x)$ , par exemple, s'adaptent très bien aux déplacements  $w$  et aux moments  $M_x$  de la coque continue.

Le principe de la détermination des coefficients d'un développements en série de fonctions de base est le même que pour un développement en série de FOURIER.

Soit à déterminer le coefficient  $a_n$  du développement

$$f(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + \cdots + a_n F_n(x) + \cdots$$

Multiplions chaque membre de cette équation par  $F_n(x)$  et intégrons de 0 à  $L$

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) F_n(x) dx &= a_1 \int_0^L F_1(x) F_n(x) dx + \cdots + a_{n-1} \int_0^L F_{n-1}(x) F_n(x) dx \\ &\quad + a_n \int_0^L F_n^2(x) dx + \cdots \end{aligned}$$

Grâce à l'orthogonalité des fonctions de base, nous avons:

$$\int_0^L F_1(x) F_n(x) dx = \int_0^L F_{n-1}(x) F_n(x) dx = \int_0^L F_{n+1}(x) F_n(x) dx = \cdots = 0.$$

En conséquence l'équation se réduit à:

$$\int_0^L f(x) F_n(x) dx = a_n \int_0^L F_n^2(x) dx.$$

De cette équation, on peut tirer la valeur de  $a_n$ . En procédant de la même façon pour tous les coefficients, nous pouvons écrire le développement de  $f(x)$  sous la forme:

$$f(x) = \frac{\int_0^L f(x) F_1(x) dx}{\int_0^L F_1^2(x) dx} F_1(x) + \cdots + \frac{\int_0^L f(x) F_n(x) dx}{\int_0^L F_n^2(x) dx} F_n(x) + \cdots$$

De cette manière, une charge uniforme  $p$  devient après développement

$$p = 0,858316 p F_1(x) + 0,0827317 p F_2(x) + 0,334394 p F_3(x) + \cdots$$

La forme de  $p$  ainsi obtenue est donnée à la fig. 8.

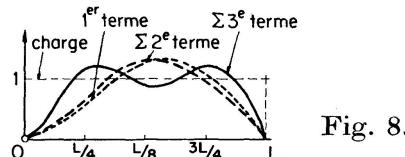


Fig. 8.

Il faut remarquer que les calculs des intégrales  $\int_0^L f(x) F_n(x) dn$  se compliquent fortement dès que  $f(x)$  n'est plus une fonction simple. C'est pourquoi, à plus d'une reprise, nous avons travaillé graphiquement en traçant par un grand nombre de points la courbe  $f(x) F_n(x)$  et en surfaçant cette dernière par la

formule de SIMPSON ou un procédé équivalent. Des vérifications nous ont montré que cette méthode était exacte à moins d'un pour cent.

### *La méthode de Schorer*

Les fonctions de base, contrairement aux fonctions trigonométriques, ne se reproduisent qu'après quatre dérivations.

Elles s'appliquent bien à l'équation de SCHORER

$$\frac{e^3}{12} \frac{\partial^8 w}{\partial y^8} + \frac{e}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0.$$

En introduisant dans celle-ci une expression de la forme  $w=w_I(x)w_{II}(y)$  où on ne conserve de  $w_I(x)$  que le premier terme du développement soit  $w_I F_1(x)$ , on obtient:

$$\frac{e^3}{12} w_I(x) \frac{\partial^8 w_{II}(y)}{\partial y^8} + \frac{e}{R^2} w_{II}(y) \alpha^4 w_I(x) = 0.$$

On peut simplifier par  $w_I(x)$  et obtenir une équation différentielle linéaire à coefficients constants en  $w_{II}(y)$ .

Malheureusement, les fonctions de base ne s'appliquent à aucune des autres équations des coques: celles de DISCHINGER, AAS JACOBSEN, A.S.C.E., FINSTERWALDER et même l'équation DKJ, souvent utilisée à l'heure actuelle, contiennent des dérivées partielles d'ordre 6 et d'ordre 2 de  $w$  par rapport à  $x$ . La simplification par  $w_I(x)$  et la séparation des variables ne serait pas possible.

Rappelons les hypothèses de la théorie des coques selon SCHORER :

- applicabilité de la loi de Hooke.
- conservation des normales (hypothèse de KIRCHHOFF).
- la tension normale à la surface moyenne est nulle.
- les déplacements sont petits vis-à-vis de l'épaisseur de la voûte.
- le coefficient de POISSON  $\nu=0$ .
- on a  $M_x = M_{x\varphi} = 0 \rightarrow Q_x = 0, N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$ .
- on néglige les déformations correspondant à  $N_\varphi$  et  $N_{x\varphi}$ .
- en cours de calcul, on conserve toujours le même degré d'approximation.

Les quatre premières hypothèses sont communes à toutes les théories des coques, les quatre dernières sont spécifiques à SCHORER.

La méthode de SCHORER a été beaucoup critiquée à ses débuts. Mais, dans la suite, on s'est aperçu qu'elle donne des résultats en bon accord avec les méthodes plus exactes, tant qu'on reste dans son domaine d'application. Celui-ci a été défini par SCHORER lui-même [5] puis précisé par LUNDGREN [6] et TOTTENHAM [7]. Notre coque est inclue dans ce domaine et nous avons pu lui appliquer la théorie de SCHORER. La continuité et la précontrainte ayant entre

autres buts l'augmentation de la portée, il est vraisemblable que la plupart des coques continues et précontraintes seront assez longues pour être calculées par la méthode de SCHORER.

Pour abréger l'exposé, nous indiquons seulement les formules qui permettent de passer des déplacements  $w$  aux autres déplacements et aux efforts ainsi que l'expression complète d'un terme du développement de  $w$  après intégration de l'équation différentielle en  $w(y)$

$$\begin{aligned} M_\varphi &= \frac{K}{R^2} w^{\cdot\cdot}, & N''_x &= -\frac{K}{R^5} w^{\cdot\cdot\cdot\cdot}, \\ Q_\varphi &= \frac{K}{R^3} w^{\cdot\cdot\cdot}, & u''' &= -\frac{K}{DR^5} w^{\cdot\cdot\cdot\cdot}, \\ N_\varphi &= -\frac{K}{R^3} w^{\cdot\cdot\cdot\cdot}, & \delta_\varphi &= \frac{w'}{R}, \\ N'_{x\varphi} &= \frac{K}{R^4} w^{\cdot\cdot\cdot}, & v'''' &= \frac{K}{DR^6} w^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_n = \frac{1}{R^3} \left( \frac{L}{\alpha_n} \right)^4 \{ & e^{-\eta_1 \rho_n \varphi} [A^I \cos \xi_1 \rho_n \varphi + B^I \sin \xi_1 \rho_n \varphi] \\ & + e^{-\xi_1 \rho_n \varphi} [C^I \cos \eta_1 \rho_n \varphi + D^I \sin \eta_1 \rho_n \varphi] \\ & + e^{-\eta_1 \rho_n (\varphi_0 - \varphi)} [A^{II} \cos \xi_1 \rho_n (\varphi_0 - \varphi) + B^{II} \sin \xi_1 \rho_n (\varphi_0 - \varphi)] \\ & + e^{-\xi_1 \rho_n (\varphi_0 - \varphi)} [C^{II} \cos \eta_1 \rho_n (\varphi_0 - \varphi) + D^{II} \sin \eta_1 \rho_n (\varphi_0 - \varphi)] \} \alpha_n F_n(x). \end{aligned}$$

On remarque dans le facteur entre accolades deux termes dont l'importance diminue pour des valeurs de  $\varphi$  croissantes et deux termes qui diminuent pour des  $(\varphi_0 - \varphi)$  croissants. Tout se passe comme si les bords  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \varphi_0$  émettaient chacun une onde qui s'amortit exponentiellement en se dirigeant vers le bord opposé. La même constatation pourrait être faite pour les autres déformations et pour les tensions en un point donné; elles résultent de la superposition de perturbations issues des deux bords, perturbations plus ou moins amorties suivant la distance au bord. Les perturbations en question sont constituées des charges linéaires appliquées aux bords dans la solution de flexion pour rétablir la compatibilité des tensions et déformations.

Les constantes  $A^I, B^I, C^I, D^I, A^{II}, B^{II}, C^{II}, D^{II}$  constituent les 8 inconnues du problème, elles doivent se déterminer par des conditions aux bords.

### *La solution de membrane et les fonctions de base*

Pour être superposés aux résultats de la théorie de la flexion, les résultats de la théorie de la membrane doivent être exprimés en fonctions de base. Dans ce but, les charges extérieures qui sont à l'origine des efforts et déplacements membranaires doivent elles-mêmes être développées en séries de fonctions de base.

Outre les hypothèses habituelles de la solution de membrane: suppression des moments de flexion  $M_{\varphi x}$  et  $M_{x\varphi}$ , des moments de flexion  $M_x$ ,  $M_\varphi$  et des efforts transversaux  $Q_x$ ,  $Q_\varphi$ , nous devons conserver les hypothèses de SCHORER: prendre  $\nu=0$ , négliger les déformations correspondant à  $N_\varphi$  et  $N_{x\varphi}$  et conserver partout le même degré d'approximation.

Moyennant quoi les efforts et déplacements habituels de la membrane sont modifiés comme indiqué ci-dessous pour le  $n$ ième terme du développement en série de fonctions de base.

$$\begin{aligned}
 N_\varphi &= Z R, & N_{\varphi_n} &= Z_n R, \\
 N_{x\varphi} &= \int \left( \frac{N_\varphi}{R} + Y \right) dx + C_1(\varphi), & N_{x\varphi_n} &= - \int \left( \frac{N_{\varphi_n}}{R} + Y_n \right) dx + C_1(\varphi), \\
 N_x &= - \int \left( \frac{N_{\varphi x}}{R} + X \right) dx + C_2(\varphi), & N_{x_n} &= - \int \left( \frac{N_{\varphi x_n}}{R} + X_n \right) dx + C_2(\varphi), \\
 u &= \frac{1}{E e} \int (N_x - \nu N_\varphi) dx + C_3(\varphi), & u_n &= \frac{1}{E e} \int N_{x_n} dx + C_3(\varphi), \\
 v &= \frac{1}{E e} \int \left[ 2(1+\nu) N_{x\varphi} - \frac{E e}{R} u \cdot \right] dx + C_4(\varphi), & v_n &= - \int \frac{u_n}{R} dx + C_4(\varphi), \\
 w &= \frac{R}{E e} (N_\varphi - \nu N_x) - v \cdot, & w_n &= -v_n \cdot, \\
 \delta_\varphi &= \frac{1}{R} (w \cdot - v), & \delta_{\varphi_n} &= \frac{w_n}{R}.
 \end{aligned}$$

Ces simplifications ne correspondent pas seulement à un souci d'homogénéité mais, dans certains cas et à cause des fonctions de base, à une réelle nécessité. Si, par exemple, on ne négligeait pas les déformations dues à  $N_{x\varphi}$  dans l'expression de  $v$ , celle-ci contiendrait un terme en  $\Pi(x)$  provenant de  $N_{x\varphi}$  et un terme  $\Gamma(x)$  provenant de  $u \cdot$ . Semblable inconvénient ne se présente pas avec les développements en série de FOURIER: les fonctions trigonométriques se retrouvent après une double dérivation et on obtiendrait un cosinus dans les deux termes.

Les constantes  $C_1(\varphi)$ ,  $C_2(\varphi)$ ,  $C_3(\varphi)$ ,  $C_4(\varphi)$  sont nulles. La démonstration mathématique en est beaucoup plus compliquée que pour les coques biappuyées. Pour ces dernières, il est aisément de voir que  $N_{x\varphi}$  et  $\cos \varphi$  par exemple s'annulent à mi-portée si la charge est uniforme. Pour les coques continues il faut exprimer

$$\begin{aligned}
 \text{l'encastrement sur l'appui central} &\rightarrow u = 0 \text{ pour } x = 0; \\
 &\rightarrow v = 0 \text{ pour } x = 0;
 \end{aligned}$$

la rigidité de l'appui extrême dans son plan  $\rightarrow v = 0$  pour  $x = L$ ;

la souplesse de l'appui extrême perpendiculairement à son plan  $\rightarrow N_x = 0$  pour  $x = L$ .

Ces quatre conditions fournissent quatre équations dont certaines contiennent des dérivées des  $C$  par rapport à  $\varphi$ .

C'est de ces équations qu'il faut tirer  $C_1(\varphi) = C_2(\varphi) = C_3(\varphi) = C_4(\varphi) = 0$ . L'annulation des constantes est logique puisqu'elle ne fait que traduire des conditions d'appui déjà exprimées par la forme particulière des fonctions  $F$ ,  $\Gamma$ ,  $\Phi$  et  $\Pi$ .

### *Principe de résolution exposé sur un exemple numérique*

L'exemple que nous avons traité est celui d'un shed de  $2 \times 40$  m de portée dont les dimensions principales sont définies à la fig. 9.

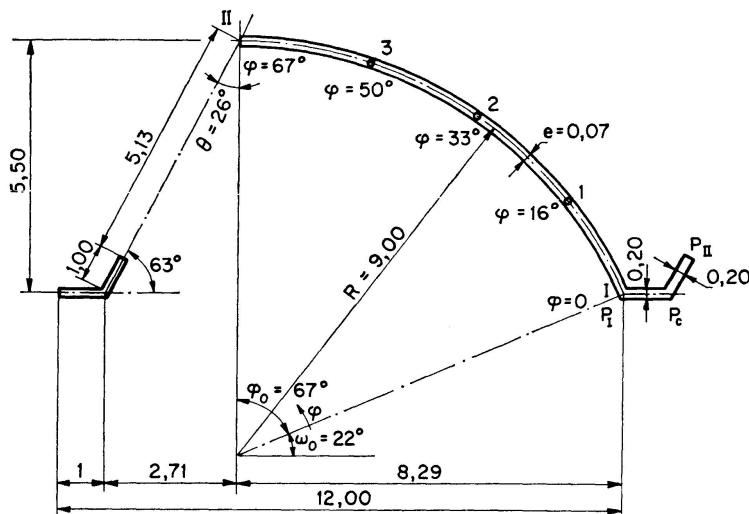


Fig. 9.

Il s'agit de l'élément courant d'un bâtiment industriel calculé par le Professeur HAAS et construit à Oosterhout (Hollande).

Nous y avons déterminé les tensions sous son poids propre, sous la neige, sous l'effet du vent et, bien entendu, sous la précontrainte; l'hypothèse d'un matériau obéissant à la loi de Hooke permet d'obtenir l'état réel par superposition de ces différents états élémentaires. Pour la neige, nous avons supposé une charge uniforme par  $m^2$  de surface de coque et une accumulation dans le chéneau; nous avons étudié le vent agissant en dépression pour voir s'il est capable de provoquer en quelque point un retournement des tensions.

La méthode classique de résolution est la suivante:

1. On calcule les sollicitations extérieures et on les développe en fonctions de base; on ne retient que le premier terme du développement.
2. On calcule les tensions et déformations de membrane dans la coque sous les charges extérieures. Les tensions et déformations obtenues sont en  $F_1(x)$ ,  $\Gamma_1(x)$ ,  $\Phi_1(x)$ ,  $\Pi_1(x)$ .

3. On tire de la solution de flexion, les tensions et déformations aux bords I et II de la coque. Elles sont de la forme  $F_1(x)$ ,  $\Gamma_1(x)$ ,  $\Phi_1(x)$ ,  $\Pi_1(x)$  et dépendent des 8 inconnues  $A^I, B^I, \dots, D^{II}$ .
4. On étudie les tensions et déformations dans la corniche,
  - sous les charges extérieures (développées),
  - sous les charges provenant de la coque.
5. On établit le raccord entre les tensions et déformations de la corniche et celles de la coque (solution de membrane plus solution de flexion).
  - Au bord I: Correspondance des déplacements de la coque et de la corniche: dans le sens des  $x$  (1 condition),  
dans le plan  $\varphi z$  (2 composantes  $\rightarrow$  2 conditions),  
en rotation (1 condition).
  - Au bord II  
on admet que le pilier de fenêtre ne peut transmettre ni  $M_\varphi$ , ni  $N_{\varphi x}$   
 $M_\varphi = N_{\varphi x} = 0$  (2 conditions);  
correspondance du déplacement de la coque et de la corniche dans l'axe du pilier (1 condition);  
le pilier est sollicité axialement  $N_\varphi^{II} \sin \theta = Q_\varphi^{II} \cos \theta$  (1 condition).
6. Les huit conditions aux bords sont exprimées en fonctions de base et celles-ci peuvent être mises en évidence ce qui laisse subsister un système de 8 équations à 8 inconnues  $A^I, B^I, \dots, D^{II}$ .
7. Une fois qu'on a déterminé ces 8 inconnues intermédiaires, on introduit leur valeur dans les tensions et déformations de la coque et de la corniche. On peut alors tracer les diagrammes de tensions et de déformations. C'est à ce stade seulement que par des équilibres statiques on peut contrôler l'ensemble des calculs précédents.

La méthode classique est susceptible de simplification dans le cas des coques symétriques pour lesquelles  $A^I = A^{II}$ ,  $B^I = B^{II}$ ,  $C^I = C^{II}$ ,  $D^I = D^{II}$ . Quatre conditions aux bords et quatre équations à quatre inconnues suffisent ce qui abrège considérablement la solution du problème.

Nous avons adopté une méthode légèrement différente. Au lieu de prendre comme inconnues hyperstatiques les constantes  $A^I, B^I, \dots, D^{II}$ , nous avons choisi les efforts  $M_\varphi^I, Q_\varphi^I, N_\varphi^I, N_{\varphi x}^I$  au bord I et  $M_\varphi^{II}, Q_\varphi^{II}, N_\varphi^{II}, N_{\varphi x}^{II}$  au bord II.

Les quatre premiers points du calcul ne sont pas modifiés.

1. Calcul des sollicitations.
2. Calcul des tensions et déformations de membrane dans la coque.
3. Calcul de la solution de flexion dans la coque.
4. Calcul de la poutre corniche sous les charges extérieures et sous les charges venant de la coque.

5. Etudier la coque chargée au bord I d'un moment unitaire  $M_\varphi^I = 1$  c'est-à-dire une coque dont les conditions au contour sont  $M_\varphi^I = 1$ ,

$$N_\varphi^I = Q_\varphi^I = N_{x\varphi}^I = M_\varphi^{II} = N_\varphi^{II} = Q_\varphi^{II} = N_{x\varphi}^{II} = 0.$$

Ces 8 conditions aux bords permettent de calculer 8 inconnues intermédiaires  $A_1^I, B_1^I \dots D^{II}$ . Ensuite nous calculons les déplacements  $u, v, w, \delta$  des deux retombées sous  $M_\varphi^I = 1$  c'est-à-dire ce que nous appelons les coefficients d'influence de  $M_\varphi^I$

$$\begin{cases} u^I(\overline{M_\varphi^I}), & w^I(\overline{M_\varphi^I}) \\ v^I(\overline{M_\varphi^I}), & \delta^I(\overline{M_\varphi^I}) \end{cases} \quad \begin{cases} u^{II}(\overline{M_\varphi^I}), & w^{II}(\overline{M_\varphi^I}) \\ v^{II}(\overline{M_\varphi^I}), & \delta^{II}(\overline{M_\varphi^I}) \end{cases}$$

6. De la même façon étudier la coque successivement chargée de

$$N_\varphi^I = 1, \quad Q_\varphi^I = 1, \quad N_{x\varphi}^I = 1.$$

7. Par des considérations de symétrie, tirer des points 5 et 6 les coefficients d'influence relatifs à

$$M_\varphi^{II}, \quad N_\varphi^{II}, \quad Q_\varphi^{II}, \quad N_{x\varphi}^{II}.$$

8. En utilisant les coefficients d'influence, nous pouvons obtenir pour tous les déplacements des expressions analogues à la suivante:

$$\begin{aligned} u^I = & [u^I(\overline{M_\varphi^I})] M_\varphi^I + [u^I(\overline{N_\varphi^I})] N_\varphi^I + [u^I(\overline{Q_\varphi^I})] Q_\varphi^I + [u^I(\overline{N_{x\varphi}^I})] N_{x\varphi}^I \\ & + [u^I(\overline{M_\varphi^{II}})] M_\varphi^{II} + [u^I(\overline{N_\varphi^{II}})] N_\varphi^{II} + [u^I(\overline{Q_\varphi^{II}})] Q_\varphi^{II} + [u^I(\overline{N_{x\varphi}^{II}})] N_{x\varphi}^{II}. \end{aligned}$$

où  $u^I(\overline{\text{Effort}})$  représente le coefficient d'influence sur  $u^I$  de l'effort considéré.

9. Comme au point 5 de la méthode classique, on établit alors le raccord entre la coque et la corniche. Ce qui fournit un système de 8 équations en les nouvelles inconnues

$$M_\varphi^I, \quad N_\varphi^I, \quad Q_\varphi^I, \quad N_{x\varphi}^I, \quad M_\varphi^{II}, \quad N_\varphi^{II}, \quad Q_\varphi^{II}, \quad N_{x\varphi}^{II}.$$

La détermination de ces inconnues termine le problème.

Les avantages de cette méthode sont les suivants:

- Elle permet de vérifier les calculs par des contrôles statiques dès les étapes intermédiaires 5, 6, 7 et de dépister d'éventuelles erreurs de calcul longtemps avant le contrôle final qui, bien entendu, est toujours possible après le point 9.
- Alors que la méthode classique doit être totalement recommencée pour chaque cas de charge, les étapes 5, 6, 7 et 8 de la méthode adoptée restent toujours valables. Cette dernière est donc d'autant plus avantageuse que les cas de charge à traiter sont plus nombreux.
- Elle se prête particulièrement à l'étude de la précontrainte qui, nous le verrons, sera introduite sous forme de forces de bords.

N.B.: Il est intéressant d'effectuer les calculs de façon très précise pour qu'un contrôle défectueux puisse être attribué à coup sûr à une erreur de calcul et non à une perte de précision progressive.

### *Problème de la torsion du chéneau*

Pour assurer le raccord de la coque et du chéneau, les charges agissant sur ce dernier sont développées en fonctions de base; ceci permet d'obtenir les moments fléchissants, les efforts tranchants et normaux et les déplacements correspondants sous la même forme dans la coque et le chéneau. Lors de l'écriture des conditions de raccord, chaque équation contient une seule fonction de base et peut être simplifiée par celle-ci.

Mais les charges développées en fonctions  $F$  n'agissent pas nécessairement au centre de torsion du chéneau, il en résulte un moment de torsion qui fait intervenir une intégrale de la forme

$$\int (\text{charge} \cdot \text{bras de levier}) dx + C_1$$

c'est-à-dire une fonction  $\Pi$  plus une constante. Quant à l'angle de rotation  $\delta$  il est de la forme

$$\int \left( \frac{\text{moment}}{\text{rigidité torsionnelle}} \right) dx + C_1 x + C_2$$

donc en fonction  $\Phi$  plus un polynôme en  $x$ .

Or, les  $\delta$  du chéneau doivent se raccorder avec des déplacements de coque exprimés sous forme de fonction  $F$ ! Donc, en écrivant l'égalisation des rotations dans la coque et le chéneau, on obtient une équation contenant un terme en  $F$ , un terme en  $\Phi$  et un polynôme, ce qui bloque la solution.

On peut d'ailleurs constater, en retournant à la fig. 7, que la fonction  $\Phi_1$ , par sa forme convient très mal pour représenter la rotation d'une poutre empêchée de tourner à ses deux extrémités. La fonction  $F_1$  serait beaucoup plus appropriée.

La cause fondamentale de cet ennui est la non-homogénéité des théories de la flexion et de la torsion: en flexion, les déplacements font intervenir l'intégrale quatrième de la charge; en torsion, ils font intervenir l'intégrale seconde. Cette différence n'apparaît pas avec les séries de FOURIER mais bien avec les fonctions de base qui ne se reproduisent qu'après quatre dérivations.

Voici le remède que nous proposons. Pour étudier la torsion, nous ne développons pas la charge  $p$  sur le chéneau mais nous la conservons sous sa forme initiale (répartition uniforme), nous calculons le moment de torsion puis la rotation  $\delta$  et nous développons  $\delta$  directement en la fonction de base appropriée c'est-à-dire  $F$ . Nous commettons ainsi une incohérence car, sauf hasard exceptionnel, le premier terme du développement en série de  $p$  et le premier terme

du développement en série de  $\delta$  ne font pas intervenir la même fraction de la charge. L'approximation commise est cependant du même ordre que celle qui consiste à ne retenir qu'un ou deux termes dans le développement de  $\delta$  et disparaîtrait si on prenait un très grand nombre de termes tant dans le développement de  $p$  que dans celui de  $\delta$ .

Le même type de problème se rencontre lors de l'étude de la torsion du chéneau sous l'action des forces déjà développées provenant de la coque et agissant en son bord. Nous l'avons résolu de la même façon en redéveloppant le plus tard possible les seuls résultats indispensables à la suite du calcul.

### Résultats numériques

Les calculs sont trop longs pour être reproduits ici; nous indiquons seulement quelques résultats à savoir les diagrammes de  $\sigma_x$  dans la coque et le chéneau, de  $u$  et  $w$  dans la coque (Fig. 10, 11 et 12). Ces courbes sont à lire comme suit: les valeurs tirées du diagramme principal doivent être multipliées par un certain facteur tiré du diagramme d'évolution longitudinale et correspondant à la section où on se place.

Fig. 11.

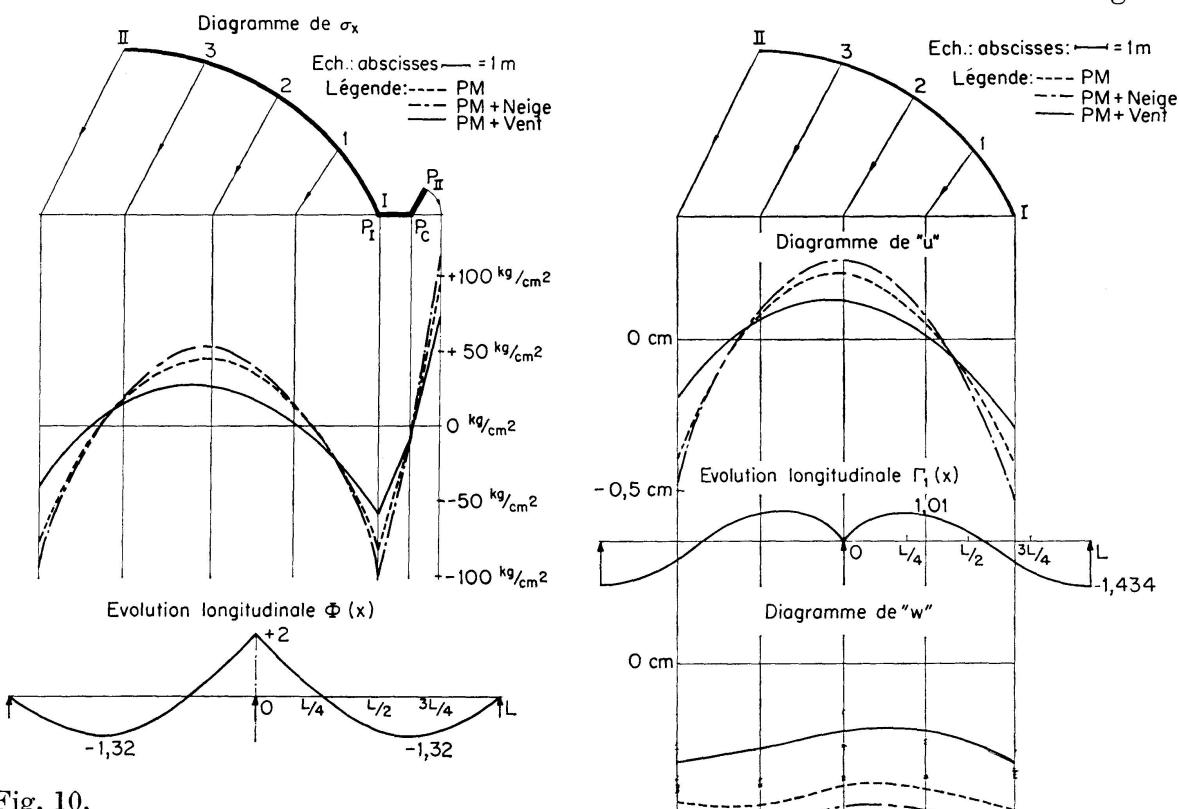
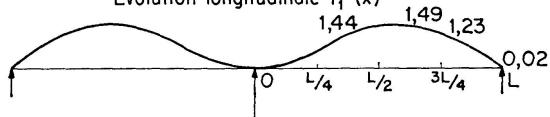


Fig. 10.

Fig. 12.



## **Deuxième partie: Le problème de la précontrainte**

### *Avantages*

Déjà du point de vue théorique, la précontrainte offre des avantages. Par compression préalable des zones tendues, on évite la fissuration du béton; or, on sait que l'apparition de fissures est une des causes principales pour lesquelles le béton n'obéit pas parfaitement à la loi de Hooke; la précontrainte améliore donc la validité de cette loi.

Par une précontrainte appropriée du voile et des poutres de rive, on peut éliminer les discordances de déformations entre ces deux parties et notamment réaliser des poutres de rive dont le comportement élastique est voisin de celui du renfort idéal rigide et sans poids ce qui a pour effet de diminuer la grandeur des moments fléchissants dans la coque.

La précontrainte des zones tendues réduit les déformations, maintient la forme de la coque et ainsi augmente la sécurité au voilement.

Les conséquences pratiques de ces avantages sont:

- L'augmentation de la portée.
- La réduction des armatures et une diminution sensible du poids par suppression des surépaisseurs nécessaires dans les zones tendues et par réduction du nombre de nervures.
- L'amélioration de l'étanchéité par suppression des fissures.
- Eventuellement la possibilité de préfabriquer des coques complètes ou d'assembler des éléments de coques préfabriquées.

### *Placement des câbles*

Comme les tensions de traction se produisent surtout aux retombées des voûtes, on avait pris l'habitude d'établir des poutres fortement armées aux retombées.

Très naturellement c'est dans ces poutres de rive qu'on a d'abord introduit la précontrainte mais cela présentait deux inconvénients:

- A moins de donner aux poutres de rive une hauteur excessive, il n'est guère possible de donner une courbure aux câbles; ils doivent être rectilignes et réaliser une précontrainte uniforme des poutres de rive.
- Lors de la mise en précontrainte, les poutres de rive se raccourcissent et entraînent la coque dans leur raccourcissement. Pour transmettre les effets de la précontrainte à la coque, il apparaît d'importantes tensions de cisaillement au raccord coque-poutre et il faut fortement armer cette zone.

L'étape suivante a consisté à introduire la précontrainte dans le corps de la coque. En utilisant des câbles courbes, on obtient un double effet (voir fig. 13):

- Les efforts d'about introduisent des compressions dans la coque.
- Les efforts de courbure ou poussées au vide «portent» une partie du poids mort et des surcharges. Ces efforts de courbure sont dirigés suivant la normale principale au câble.

Mais un câble courbe dans une coque cylindrique possède une double courbure et l'effort  $q$  comporte une composante utile dans le plan tangent au voile, une composante parasite dirigée suivant le rayon de la coque et tendant à aplatiser celle-ci. Pour éliminer cette composante parasite et réduire les frottements du câble, on épaisse progressivement la coque vers les retombées de façon à placer les câbles dans un plan.

Si les composantes utiles de  $q$  deviennent suffisantes pour équilibrer le poids mort, la coque est suspendue aux câbles, les poutres de rive ne sont pratiquement plus soumises qu'à leur propre poids et peuvent être supprimées. (Voir fig. 14.)

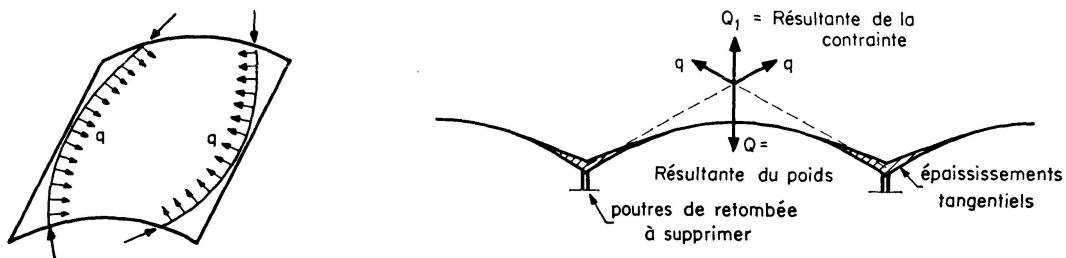


Fig. 14.

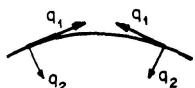


Fig. 13.

Dans le cas d'un shed, la poutre chéneau est indispensable. Si des câbles sont introduits dans la coque, celle-ci se raccourcit; il est tout à fait logique, à la fois pour réduire les cisaillements au raccord coque-poutre et pour améliorer le comportement de la poutre chéneau de la précontraindre également. La situation idéale est atteinte lorsque la résultante des efforts de courbure dans la poutre chéneau, dans la partie supérieure et la partie inférieure de la coque, équilibre la résultante du poids mort et des surcharges. Par la disposition de nos câbles, nous avons essayé de nous rapprocher de cette solution idéale. Toutefois, à cause de la dissymétrie de la toiture, il est très difficile que  $Q_1$  soit égal et directement opposé à  $Q$ . (Voir fig. 27.)

### *Méthode de calcul*

Pour étudier les effets des câbles, nous les décomposons en une série d'efforts fictifs équivalents: efforts d'abouts et efforts de courbure des câbles du chéneau, efforts d'abouts et de courbure des câbles de coque. Aucun d'eux pris

individuellement, ne pourrait exister mais la superposition de tous ces efforts fictifs rend la sollicitation réelle de précontrainte.

Pour chacun de ces efforts, nous avons choisi la méthode de calcul qui s'y adapte le mieux.

### *Efforts de courbure des câbles*

*1. Câbles situés dans la poutre chéneau.* Un câble courbe placé dans le chéneau donne dans chaque section un effort normal, un moment fléchissant et un effort tranchant. Nous laissons provisoirement de côté l'effort normal envisagé lors de l'étude des efforts d'about. Dans la flexion du chéneau, il ne faut pas sous estimer l'importance des moments secondaires de précontrainte dus à l'hyperstaticité du système.

Nous inspirant de la disposition courante dans les poutres sur trois appuis uniformément chargées, nous avons placé les câbles dans la poutre en  $v$  du chéneau comme indiqué à la fig. 15.

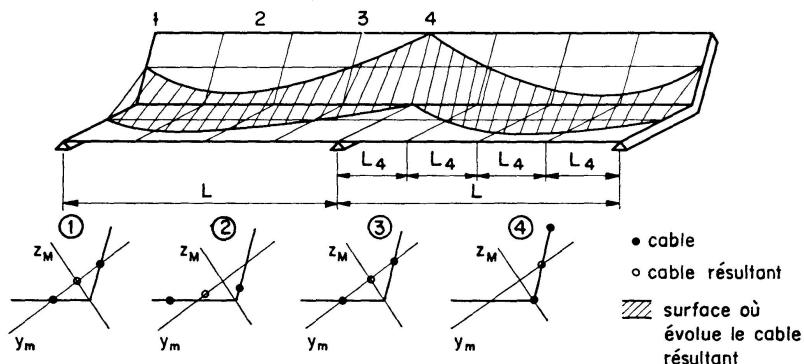


Fig. 15.

Les câbles de précontrainte sont en nombre égal dans la partie horizontale et la partie relevée; leur mouvement dans chacune de ces parties est réglé de telle façon que le câble fictif équivalent se déplace sur l'axe  $y_m$ : nous n'avons donc jamais de flexion autour de cet axe mais une précontrainte uniforme; les déplacements du câble fictif équivalent par rapport à l'axe  $z_m$  sont ceux d'un câble concordant. Comme les charges sont statiques et uniformément réparties, nous connaissons de suite l'allure du diagramme des moments fléchissants dans la poutre sur trois appuis (voir fig. 16), un câble tendu suivant un profil semblable à ce diagramme ne produit aucune réaction d'appui: il est concordant; c'est ce profil que nous adoptons.

En pratique, nous avons cependant encore accentué l'excentricité dans la section 4, ce qui ferait sortir le câble de la poutre si le point anguleux n'était recoupé par un raccordement parabolique. Il est évident aussi que le trait unique dans chaque aile correspond à un faisceau de câbles et qu'il faut tenir compte de leur encombrement.

L'excentricité du câble étant spécifique à une poutre sur trois appuis se prête au développement en fonctions de base, et la fonction  $\Phi$  la représente

particulièrement bien avec un seul terme. On en déduit sans peine le moment  $M$  courant qui, en raison de la concordance, vaut l'excentricité multipliée par l'effort de précontrainte, puis l'effort tranchant  $T = \frac{dM}{dx}$  puis les déplacements  $u, v, w \dots$  etc., et tout cela dans les fonctions de base appropriées qui permettent le raccord avec la coque et la détermination dans celle-ci des conséquences de l'effet de courbure des câbles du châssis.

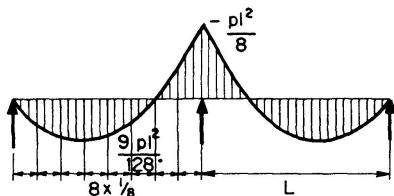


Fig. 16.

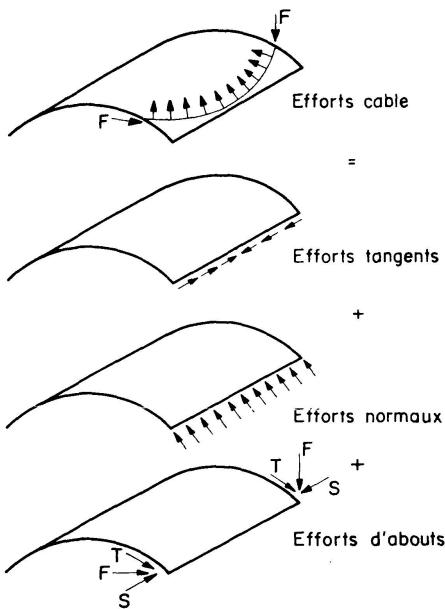


Fig. 17.

*2. Câbles situés dans la coque.* Les efforts de courbure des câbles de coque sont répartis le long de ceux-ci. Mais il est à peu près impossible de tenir compte de leur situation exacte et il est couramment admis de transporter aux bords les efforts normaux et les efforts tangents qui résultent de la courbure (voir fig. 17). Quant aux efforts d'abouts ils sont traités séparément.

La disposition des câbles dans le châssis s'est révélée rationnelle du point de vue tensions et avantageuse du point de vue calcul; aussi, allons-nous nous en inspirer pour placer les câbles de coque (fig. 18).

Nous maintenons la résultante des câbles placés à la partie inférieure et à la partie supérieure sur l'axe  $z_m$  du système coque et châssis. Compte tenu de l'espace disponible aux appuis et à mi-portée, ceci est pratiquement réalisé en plaçant trois fois plus de câbles à la partie inférieure qu'à la partie supérieure.

Par rapport à l'axe  $y_m$ , nous essayons de faire en sorte que la résultante se déplace suivant le mouvement d'un câble concordant. Les câbles sont interrompus au droit de l'appui central; nous pouvons donc y conserver un point anguleux. Mais l'espace disponible ne nous permet pas d'adopter le profil concordant correspondant au diagramme parabolique des  $M$  sous charge répartie. Le profil adopté est un profil parabolique dérivé du profil concordant par une transformation linéaire comme indiqué sur la fig. 19. Le seul effet de la

transformation linéaire est d'introduire des réactions d'appui additionnelles qui n'influencent que le calcul des portiques de support.

Si, pour étudier le chéneau, nous avons envisagé les éléments de réduction dans une section particulière d'abscisse  $x$ , pour étudier la coque nous envisageons la situation représentée à la fig. 20. Les efforts normaux et tangents développés par la méthode semi-graphique en fonction  $F$  et  $\Pi$ , sont considérés comme des charges extérieures  $N_\varphi$  et  $N_{\varphi x}$  agissant aux bords de la coque. Comme les déformations obtenues aux bords dans cet état particulier de charge sont incompatibles avec celles du chéneau non chargé, il faut une fois de plus établir le raccord coque-chéneau au moyen des coefficients d'influence.

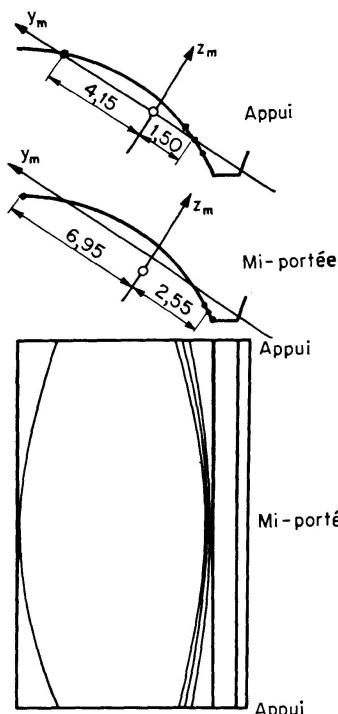


Fig. 18.

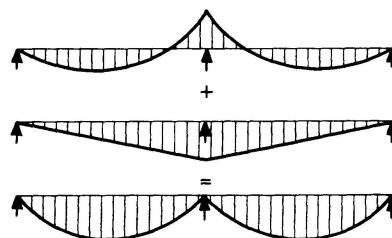


Fig. 19.

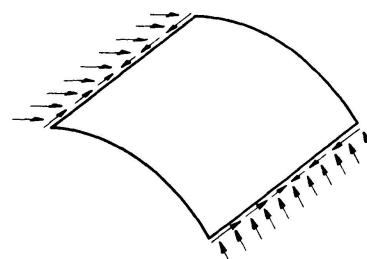


Fig. 20.

### *Efforts d'abouts des câbles*

L'inclinaison des câbles aux appuis est source d'efforts tangentiels  $T$  (voir fig. 17).

Nous admettons que ces efforts sont directement transmis aux portiques de support.

La représentation de la composante normale des efforts d'abouts pose de sérieux problèmes; pour simplifier leur exposé, nous raisonnons sur le cas d'une coque avec poutres de rives seules uniformément postcontraintes (fig. 21).

Pour la coque sur appuis simples, le Professeur HAAS [8] propose de traiter l'effort de compression  $S_0$  constant sur toute la portée comme on traite habituellement les charges réparties c'est à dire par développement en série de FOURIER (voir fig. 22). L'effort et la tension dans une section courante valent:

$$S_x = \frac{4}{\pi} S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\alpha_n x}{L}; \quad \sigma_x = \frac{4}{\pi} \frac{S_0}{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\alpha_n x}{L}.$$

Alors qu'en général le fait de ne prendre que le premier terme du développement n'entraîne pas de conséquence grave, la représentation des tensions est ici très mauvaise: sauf à mi-portée où  $\sigma_x$  est à peu près correct, on a partout une valeur trop faible de  $\sigma_x$ ; l'écart est maximum aux appuis où on trouve  $\sigma_x = 0$ , au lieu de  $\sigma_x = \frac{S_0}{\Omega}$ . Avec plusieurs termes l'accord devient meilleur sauf aux appuis où la situation reste inchangée.

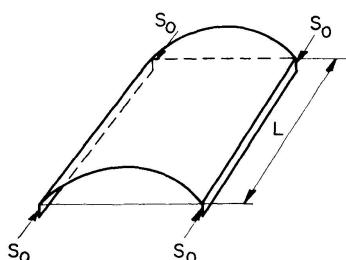


Fig. 21.

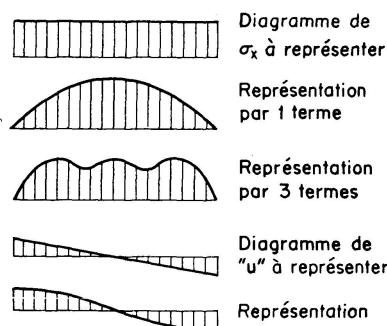


Fig. 22.

Par contre le déplacement  $u$  est assez bien représenté par le premier terme de son développement

$$u = \int \frac{\sigma_x}{E} dx + c^{te} = \frac{4}{\pi} \frac{S_0}{E\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{L}{\alpha_n} \cos \alpha_n x + 0.$$

Or, c'est par la compatibilité des déformations  $u$  dans la coque et dans la poutre de rive qu'on peut tenir compte dans la coque de la précontrainte de la poutre de rive. En ce qui concerne la coque, la méthode, même avec un seul terme peut donner satisfaction.

Si la coque est continue, l'imperfection du développement de  $\sigma_x$  subsiste mais le développement de  $u$  devrait faire intervenir une constante comme indiqué à la fig. 23.

Le mécanisme des simplifications dans l'équation de raccord coque-chéneau et toute la suite de la solution s'en trouveraient perturbés.

Les fonctions de base bien que spécialement adaptées à la continuité n'arrangent pas du tout la situation.

Pour assurer le raccord avec les efforts  $N_x$  dans la coque, l'effort de précontrainte  $S_0$  et les tensions  $\sigma_x$  doivent être développés en série de fonction  $\Phi$ . Qu'on prenne 1, 3 ou davantage de termes, la représentation d'un diagramme de tensions constant par des fonctions  $\Phi$  est extrêmement mauvaise (voir fig. 24).

Pour les coques biappuyées, la situation s'était améliorée lors de la repré-

sentation de  $u$ . Pour les coques continues, le déplacement  $u$ , le plus important pour la transmission de la précontrainte du chéneau dans la coque, doit être exprimé en fonction  $\Gamma$ . Pas plus que la fonction cosinus, celle-ci ne convient pour représenter un déplacement variant linéairement de l'appui central vers l'appui extrême; ceci s'explique si on remarque sur la fig. 6 que la différence entre ces fonctions réside dans les termes hyperboliques qui diminuent d'importance quand l'ordre du terme augmente.

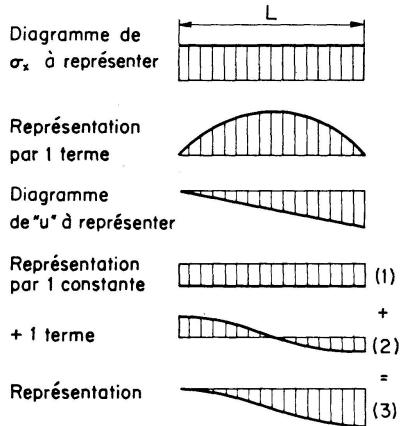


Fig. 23.

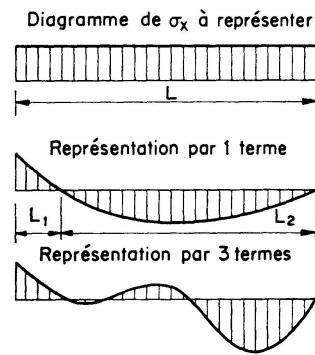


Fig. 24.

Lors du problème de la torsion, nous nous sommes tirés d'embarras en développant le plus tard possible les seuls éléments indispensables à la suite des calculs. Le même procédé, appliqué à la précontrainte n'a donné aucun résultat.

Donc, les développements en série conviennent mal pour représenter les efforts d'about surtout dans les coques continues.

En particulier, les fonctions de base sont parfaites pour représenter des courbes ou diagrammes dont l'allure est spécifique aux poutres continues mais sont totalement inefficaces pour une charge  $S_0$  indépendante du mode d'appui.

Pour traduire les efforts d'abouts, nous utilisons le premier stade de la méthode de la poutre de Lundgren: nous considérons la coque et son chéneau comme une poutre à parois minces et à section ouverte.

Le cas fondamental que nous remontrons est celui d'une poutre sur trois appuis d'épaisseur  $e$  comprimée par un effort  $S$  excentré de  $e_z$  et  $e_y$  par rapport aux axes principaux d'inertie.

Les réactions d'appui valent: au centre  $\frac{3M}{L}$ , aux extrémités  $-\frac{3M}{2L}$ .

Les tensions valent

$$\sigma_x = -\frac{S}{Q} - \frac{z}{I_y} S e_z \left( -\frac{1}{2} + \frac{3x}{2L} \right) - \frac{y}{I_z} S e_y \left( -\frac{1}{2} + \frac{3x}{2L} \right),$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0,$$

$$\tau_{x\varphi} = \frac{T_y}{I_z e} \int_0^S y e ds + \frac{T_z}{I_y e} \int_0^S z e ds.$$

Les déplacements valent

$$\left. \begin{array}{l} u = \int \frac{\sigma_x}{E}, \\ \delta_z = \iint \frac{M_y}{EI_y} dx^2 + C_1 x + C_2, \\ \delta_y = \iint \frac{M_z}{EI_z} dx^2 + C'_1 x + C'_2; \end{array} \right\} \text{les constantes d'intégration s'annulent vu les conditions d'appui.}$$

Les déplacements  $\delta_z$  et  $\delta_y$  sont transformés en déplacements  $v$  et  $w$  de la surface moyenne par projection sur la direction de ces derniers en chaque point.

Les déplacements  $\delta_y$  et  $\delta_z$  d'un point de la section étant assimilés au déplacement de l'axe, le shed subit des translations d'ensemble mais il n'intervient pas de rotation  $\delta$ .

On peut montrer que cette solution obéit aux conditions de compatibilité et aux conditions de contour de manière telle qu'elle constitue une solution satisfaisante du problème des efforts d'about.

La restriction de Saint-Venant aux extrémités de la poutre n'a pas grande importance ici, car si nous parlons toujours d'un câble de précontrainte, il y en a en réalité un grand nombre répartis sur la section.

C'est de cette façon qu'on calcule les effets d'about des câbles du chéneau.

Les câbles de coque, comme leur résultante passe par le centre de gravité des sections d'appui de la poutre coque chéneau, n'introduisent qu'une compression uniforme  $\sigma_x$  et un déplacement  $u$ .

Toutes les grandeurs dues aux effets d'about sont exprimées en polynômes en  $x$ , tandis que celles dues aux effets de courbure et aux charges extérieures sont exprimées en fonctions de base. Pour représenter un effort,  $N_x$  par exemple, il ne suffit plus de tracer son évolution transversale dans une section quelconque puis de représenter son évolution longitudinale, ce que nous avions fait aux fig. 10 à 12; l'allure de la répartition transversale varie cette fois d'une section à l'autre et doit être calculée dans chaque section où elle est désirée.

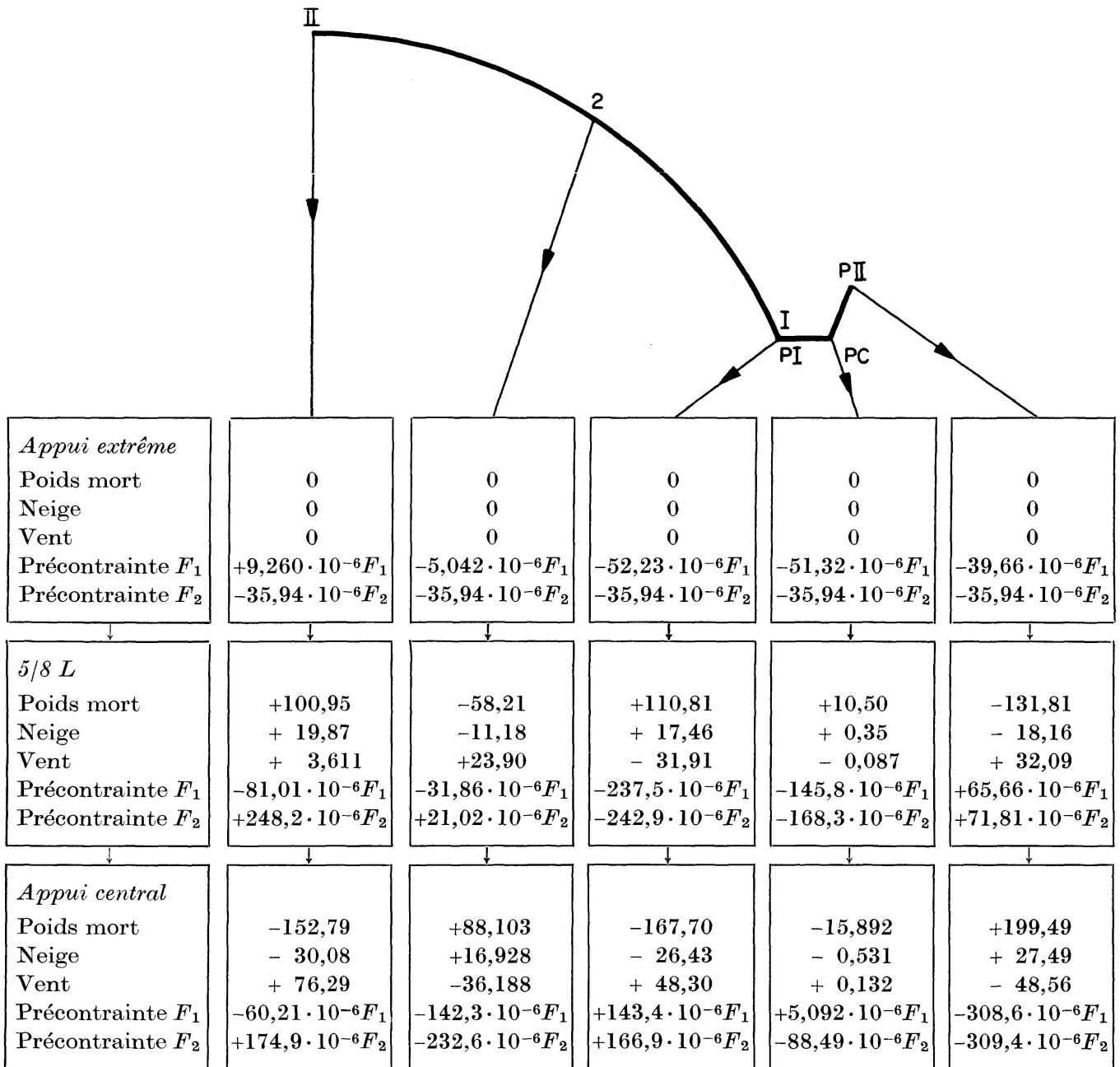
#### *Choix des efforts de précontrainte*

Si nous examinons les résultats obtenus sous poids mort et surcharge, nous constatons que les tensions de loin les plus dangereuses sont les tensions axiales  $\sigma_x$ . Dans le cas du poids mort et de la neige (voir fig. 10), elles varient

de  $-195$  à  $+225$  kg/cm<sup>2</sup> sur l'appui central,  
de  $+129$  à  $-149$  kg/cm<sup>2</sup> à  $5/8 L$ .

La précontrainte doit à tout prix réduire ou supprimer les formidables tensions de traction et réduire les tensions de compression.

Jusqu'à présent, nous n'avons fixé ni la valeur de la précontrainte du chéneau  $F_1$ , ni celle de la coque  $F_2$ . Nous allons le faire en nous basant sur



Tensions en kg/cm<sup>2</sup> permettant de choisir  $F_1$  et  $F_2$

Fig. 25.

l'évolution de  $\sigma_x$  en cinq points de trois sections transversales  $x=0$  (appui central),  $x=25$  m ( $5/8 L$ ),  $x=40$  m (appui extrême) (voir fig. 25). En chacun des points, nous avons indiqué l'influence du poids mort, de la neige, de la précontrainte  $F_1$  (effets de courbure et d'aborts), de la précontrainte  $F_2$  (effets de courbure et d'aborts).

L'examen du tableau montre les inconvénients de câbles placés uniquement dans le chéneau:

- Ils ne peuvent pas réduire les compressions au point II sur l'appui central.
- A moins de créer des tractions ou des compressions excessives respectivement aux points II de la coque, en  $PI$  et  $PC$  du chéneau dans la section extrême initialement non chargée, ils ne peuvent pas éliminer les tensions de traction au point II à  $5/8 L$ .
- En résumé, ils sont efficaces dans le chéneau mais insuffisants pour les points fort éloignés de celui-ci.

Les câbles de coque, seuls, permettent d'améliorer partout la situation. Mais n'utiliser que des câbles de coque ne constitue pas une solution intéressante:

- Leur placement est plus difficile que le placement des câbles dans le chéneau.
- Pour la validité de la loi de Navier, les câbles doivent être répartis de façon à peu près égale sur toute la section du shed.

Après tâtonnements, nous avons trouvé que des efforts  $F_1 = 300\,000$  kg et  $F_2 = 450\,000$  kg permettent de maintenir partout  $\sigma_x$  compris entre 0 et  $-125$  kg/cm<sup>2</sup> pour les 3 cas: poids mort seul, poids mort + neige, poids mort + vent. Nous avons constaté à posteriori que la disposition et le nombre des câbles étaient à peu de chose près identiques à ceux obtenus à Oosterhout par une méthode de calcul assez différente.

Nous donnons à la fig. 26, les diagrammes de  $\sigma_x$  sur l'appui central, à  $5/8 L$  et à l'appui extrême.

#### *Effets de la précontrainte*

La précontrainte réduit très fortement les efforts  $N_x$ . Ceci est un effet prévu et désiré: nous avons choisi  $F_1$  et  $F_2$  pour le réaliser au mieux. Mais également en ce qui concerne les autres tensions et surtout les déformations, la précontrainte a des effets très heureux. Pour le mettre en évidence nous comparons ci-dessous les valeurs maxima de tous ces éléments dans les cas poids mort + neige et poids mort + neige + précontrainte.

<i>Poids mort + neige</i>	$\cdots +$ précontrainte	<i>Comparaison</i>
$M_{\varphi max} = - 455,84$ kgm/m	$- 497,48$ kgm/m	très légère aggravation
$N_{\varphi max} = - 2\,858,36$ kg/m	$- 1923,48$ kg/m	réduction de 1/3
$Q_{\varphi max} = + 475,35$ kg/m	$- 308,56$ kg/m	réduction de 1/3
$N_{x\varphi max} = + 19\,138,84$ kg/m	$+ 7853,97$ kg/m	réduction de 6/10
$u_{max} = - 0,784$ cm	$- 1,555$ cm	valeur doublée
$v_{max} = - 4,471$ cm	$+ 1,101$ cm	réduction de 6/10
$w_{max} = - 8,120$ cm	$- 2,574$ cm	réduction de 7/10
$\delta_{\varphi max} = + 0,8012 \cdot 10^{-2}$ rad	$+ 1,418 \cdot 10^{-2}$ rad	valeur à peu près doublée

Les efforts de précontrainte sont considérés comme appliqués aux retombées de la coque; il est normal que des efforts aux bords produisent des  $M_{\varphi max}$  et des rotations  $\delta_{\varphi max}$  plus grands que des forces réparties comme le poids mort

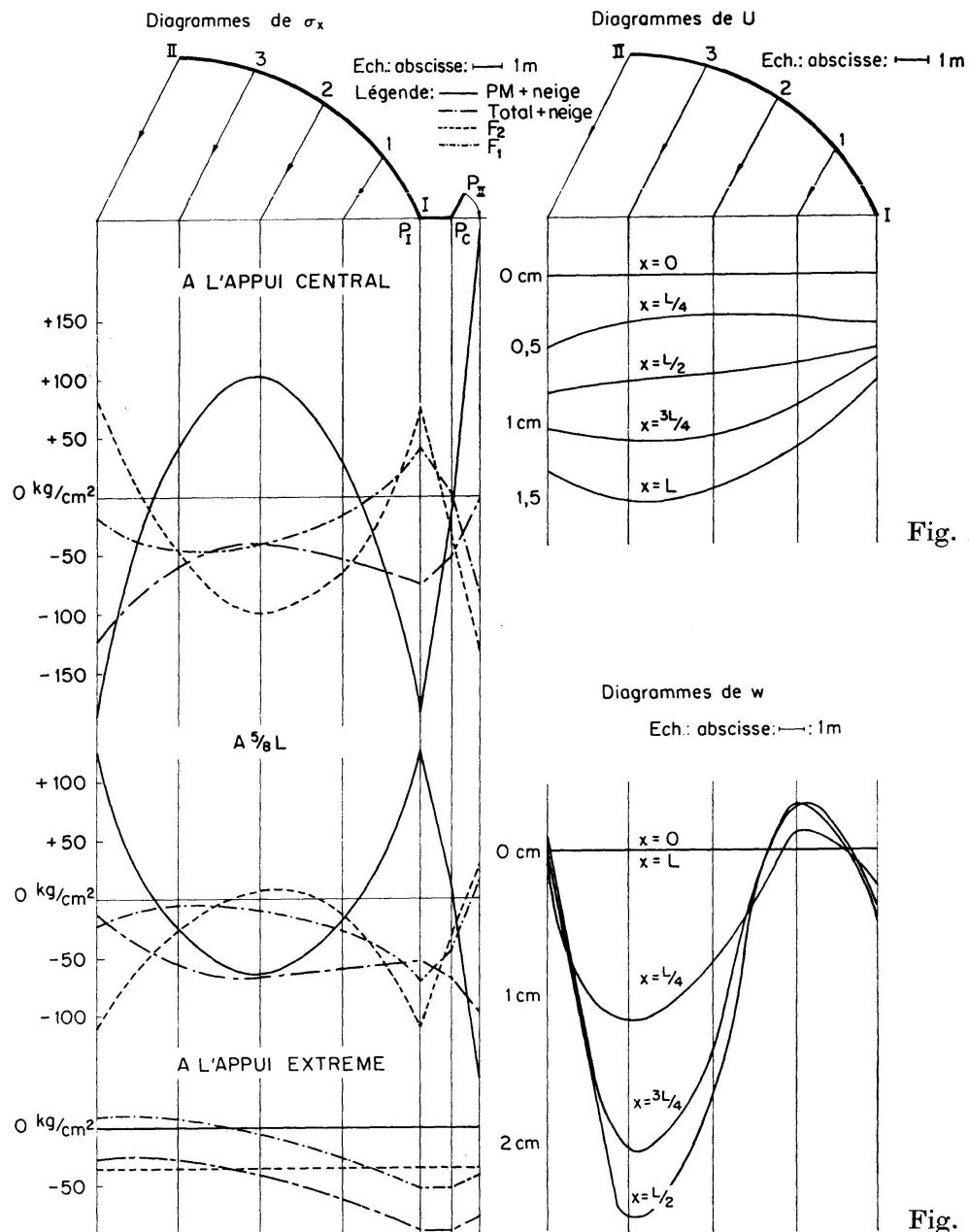


Fig. 28.

Fig. 29.

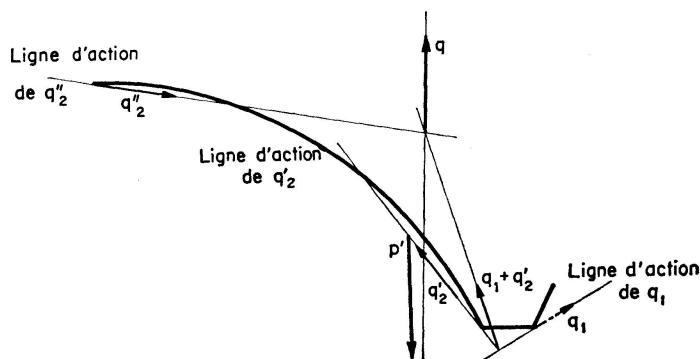


Fig. 27.

et la neige. Il est logique également que la précontrainte cause un raccourcissement de la coque et un déplacement  $u_{max}$  sur l'appui extrême relativement élevé: le portique extrême doit se déplacer de 1,555 cm perpendiculairement à son plan.

Toutes les autres tensions et déformations sont fortement réduites, en particulier le rapport  $\frac{w_{max}}{L}$  (analogue au rapport  $\frac{\text{flèche}}{\text{portée}}$  des poutres) passe de  $\frac{1}{492}$  à  $\frac{1}{1550}$ .

Cette amélioration d'ensemble s'explique si nous nous rappelons que les câbles courbes donnent non seulement une compression mais aussi une composante verticale  $q$  capable de combattre efficacement l'effet du poids mort. La fig. 27 montre que la composante verticale de la précontrainte  $q = 2610 \text{ kg/m}$  équilibre assez bien la résultante  $p = 3820 \text{ kg/m}$  des sollicitations extérieures.

Aux figures 28 et 29, nous donnons l'évolution de  $u$  et  $w$  dans la coque.

### Armatures

Nous les avons calculées par la méthode proposée par FLÜGGE (fig. 30).

Des armatures ne sont pas nécessaires dans le plan moyen. Un calcul des facettes et tensions principales nous a montré que la précontrainte avait redressé toutes les isostatiques parallèlement aux axes  $x$  et  $\varphi$ ; les tensions principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont pratiquement égales à  $\sigma_x$  et  $\sigma_\varphi$  et, en tout cas, ne dépassent pas les tensions admissibles.

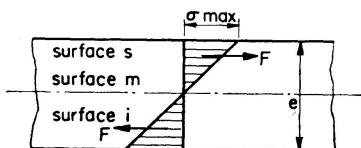


Fig. 30.

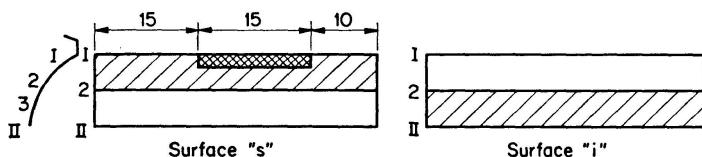


Fig. 31.

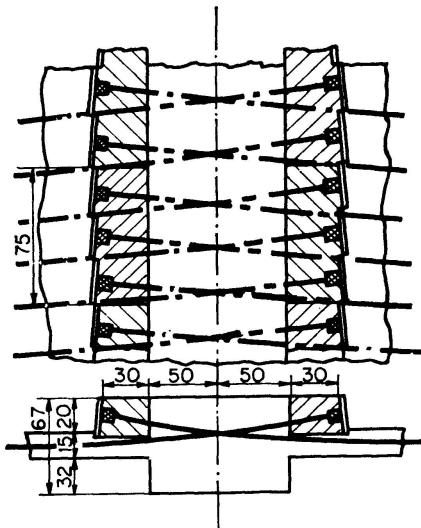


Fig. 32.

Dans le plan  $i$  il faut un quadrillage de 5 barres  $\varnothing 8 \text{ mm}$  par m sur la moitié supérieure de la coque et, dans le plan  $s$ , il faut un quadrillage de 8 barres  $\varnothing 8 \text{ mm}$  par m sur la moitié inférieure, sauf dans une zone spécialement sollicitée où 4 barres supplémentaires par m sont nécessaires dans la direction  $\varphi$  (fig. 31).

L'armaturage des portiques de support et des zones d'ancrage des câbles ne représente pas de difficultés spéciales. Sur l'appui central, les câbles se croisent suivant le schéma déjà exécuté à Oosterhout (voir fig. 32).

### Bibliographie

1. FLÜGGE, W.: "Stresses in Shells." Springer-Verlag 1960.
2. BOUMA, A. L.: "De berekening van de spanningsverdeling in cirkelcylindrische schaal-daken volgens de D.K.J. methode." I.B.C. Mededelingen, avril 1956.
3. A.S.C.E.: "Design of cylindrical concrete shell roofs." Manual of engineering practice No. 31.
4. MORICE, P. B.: "An approximate solution to the problem of longitudinally continuous Shells." Cement and Concrete Association. Technical Report 238, décembre 1956.
5. SCHORER, H.: "Line load on thin cylindrical shells." Proceedings of the A.S.C.E., mars 1935.
6. LUNDGREN, H.: "Cylindrical Shells." The danish Technical Press, 1949.
7. Proceedings of a Symposium on Concrete Shell Roof Construction. Cement and Concrete Association, London 1954.
8. Proceedings on the Second Symposium. "Concrete Shell Roof Construction." Teknisk Ukeblad, Oslo 1957.

### Résumé

Après un bref exposé critique des méthodes existantes pour traiter les coques continues, l'auteur propose une solution faisant appel aux fonctions de base. Quoiqu'elle présente certains inconvénients: emploi obligatoire de l'équation de Schorer, approximation dans la théorie de la membrane et dans la torsion des poutres de rive, cette solution convient bien pour rendre compte des phénomènes de continuité dans les coques continues sur deux ou plusieurs travées et dans les coques à encorbellement.

Les fonctions de base sont aussi utilisées pour traduire les effets de courbure des câbles de précontrainte. Mais, pour les effets d'abouts, il est montré que la méthode de la poutre est préférable.

Des résultats numériques et une disposition originale des câbles sont donnés pour un cas pratique: celui d'un shed de  $2 \times 40$  m de portée précontraint par des câbles dans la coque et dans le chéneau.

### Zusammenfassung

Nach einer kurzen Diskussion der bestehenden Methoden zur Berechnung durchlaufender Schalen schlägt der Autor eine Lösung vor, die auf Grundfunktionen beruht. Trotz einiger Schwierigkeiten (Verwendung von SCHORERS Gleichung, Annäherungen in der Membrantheorie und der Verdrehung der

Randträger) ist diese Lösung gut geeignet zur Untersuchung der über zwei oder mehr Öffnungen durchlaufenden Schalen und der Schalen mit überstehenden Enden.

Die Grundfunktionen werden ebenfalls zur Berücksichtigung der Ablenkungskräfte der gekrümmten Spannkabel verwendet; der Einfluß der Kabelendkräfte wird dagegen besser mit Hilfe der Balkenmethode untersucht.

Numerische Ergebnisse sowie eine neuartige Kabelanordnung werden für einen praktischen Fall angegeben; es handelt sich dabei um eine Shedüberdachung von  $2 \times 40$  m, die mit Kabeln in der Schale und im Rinnenträger vorgespannt ist.

### Summary

After a short appraisal of the existing methods for analysing shells continuous over supports, the author proposes a solution founded on basic functions. In spite of some difficulties: use of Schorer's equation, simplifications in the membrane theory and in the twisting of the edge beams, this solution is quite suitable for taking account of the continuity phenomena in shells continuous over two or more spans and for shells with cantilevered ends.

Basic functions are also used to describe the curvature effects of the pre-stressing cables, but for anchorage effects it is demonstrated that treatment by means of the beam method is preferable.

Numerical results and a novel arrangement of the cables are given for a practical case: a north-light shed of  $2 \times 40$  m, prestressed by cables in the shell and in the edge beam.

**Leere Seite**  
**Blank page**  
**Page vide**