

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 24 (1964)

Artikel: Operatorenrechnung und ihre Anwendung auf die Baustatik

Autor: Dimitrov, Nikola

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-19841>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 31.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Operatorenrechnung und ihre Anwendung auf die Baustatik

Operational Calculus and its Application in Structural Statics

Le calcul opérationnel et son application à la statique des constructions

NIKOLA DIMITROV

Dr.-Ing., apl. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe und Lehrbeauftragter
an der Technischen Hochschule Stuttgart, Karlsruhe

1. Allgemeines

Die meisten Tragsysteme sind so ausgerichtet, daß sie stetig oder unstetig verteilte Lasten diskontinuierlich über mehrere Auflager und Stützen abtragen. Einzellasten, Einzelmomente, Streckenlasten, veränderliche Steifigkeiten, unstetig verteilte Schnittkräfte usw. sind unstetige oder nicht stetig differenzierbare Funktionen. Sie werden immer in der Baustatik und Elastizitätslehre gebraucht.

Je nach der mechanischen Voraussetzung des materiellen Körpers: starrer Körper, dehnbarer Körper oder Kontinuum, hat man es mit drei verschiedenen Aussagen für das Gleichgewicht zu tun: vektorielles Gleichgewicht, virtuelle Arbeit oder die Differentialgleichung. Diese Entwicklung der Grundlagen zur Lösung der Spannungsprobleme ist durch eine ungezählte Menge der Rechenverfahren gekennzeichnet, die analog in drei große Gruppen eingeteilt werden können:

- A. Graphische Methoden.
- B. Mechanisch-analytische Verfahren.
- C. Lösungen von Anfangs- und Randwertproblemen.

Bei den Stabilitätsproblemen, die durch Gleichgewichtswechsel unterschieden werden, fällt die Fiktion des starren Körpers weg, und die Einteilung der dazugehörigen Verfahren ist entsprechend:

- D. Energiemethoden.
- E. Lösungen von Eigenwertproblemen.

Die graphische Statik hat früher die gesamte Bautechnik gefördert, aber die mechanische Deutung der Probleme durch Arbeitsgleichungen und Energiegleichungen, s. [1], hat die Entwicklung der Baustatik und der Festigkeitslehre noch weiter getrieben und zu einem gewissen Abschluß gebracht.

Bei manchen Tragwerken sind die oben angeführten Unstetigkeiten wie die Knotenpunkte einiger Fachwerke oder die Biegesteifigkeiten der orthotropen Platte in kleinen Abständen vorgegeben, so daß mit der Annahme einer gleichmäßigen Verteilung der Steifigkeit keine großen Fehler verursacht werden. Man beachte dabei die Arbeit [2], in der über den Grenzübergang zwischen der elastisch-isotropen Platte und Scheibe und dem elastisch-isotropen, gelenkigen und engmaschigen Dreiecksfachwerk berichtet wird. Die Lösung als Kontinuum auf dem Wege der Differentialgleichung gewinnt dabei an Übersichtlichkeit und hat nur einen kleinen Bruchteil der Rechenarbeit, die sonst die übliche Berechnung erfordern würde. Die Berechnung der Fachwerke als Balkenproblem, s. [3], und die der orthotropen Platte als Plattenproblem, s. [4], wird mit Fourieransätzen durchgeführt.

Die Anwendung der Fourier-Transformation ist aus folgenden beiden Gründen erforderlich: die Analysis stellt nur eine beschränkte Auswahl von Funktionen zur Verfügung, so daß die gesuchte Lösung einer linearen oder nicht-linearen Differentialgleichung immer durch Reihen angenähert werden kann; die Fiktion des Kontinuums verlangt, daß auch jede unstetige Funktion durch stetige Funktionen ersetzt werden muß.

Mit Hilfe der Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{-int} \quad (1)$$

kann, beispielsweise, durch die Fourier-Transformation eine Einzellast P an der Stelle $x = \xi$ im Bereich $0 < \xi < L$ durch die stetige Funktion $p(x, \xi)$ ersetzt werden, vgl. Fig. 1a,

$$p(x, \xi) = \frac{2P}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \pi \frac{x}{L} \sin n \pi \frac{\xi}{L}. \quad (2)$$

Diese Gleichung ist eine quellenmäßige Darstellung. Sie kann für $P = 1$ rein formal als Einflußlinie der Belastung aufgefaßt werden. Für jede beliebige Lastverteilung kann man sie auswerten. Die gleichmäßig verteilte Belastung $b = \text{konstant}$ hat z. B. die Entwicklung, s. Fig. 2a,

$$q(x) = 4q \sum_{1, 3, 5}^{\infty} \frac{1}{n \pi} \sin n \pi \frac{x}{L}, \quad (3)$$

die man durch Integration der Gl. (2) nach ξ im Bereich 0 bis L erhält.

Die Fiktion des Kontinuums verlangt, daß alle Funktionen im Bereich $-\infty$ bis $+\infty$ stetige Funktionen sind. In der Tat sind die äußeren Lasten gemäß Gl. (2) und (3) in diesem ganzen Bereich stetig und auch im Gleichgewicht, so

daß die Ermittlung der Auflagerkräfte entfällt. Werden die Randbedingungen für das Biegemoment erfüllt, steht der direkten Anwendung der Differentialgleichung nichts im Wege. Aus $M''(x) = -p(x)$ und $M'(x) = Q(x)$ hat man sofort gem. Gl. (2) und Fig. 1

$$M(x, \xi) = P K(x, \xi) = 2 P L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} \sin n \pi \frac{\xi}{L} \sin n \pi \frac{x}{L}, \quad (2a)$$

$$Q(x, \xi) = P \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} = 2 P \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \pi} \sin n \pi \frac{\xi}{L} \cos n \pi \frac{x}{L}. \quad (2b)$$

a Belastung P_ξ .

b Querkraft $Q(x, \xi) = \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x}$

$$= \begin{cases} x < \xi: & = P \left(1 - \frac{\xi}{L} \right), \\ x > \xi: & = -P \frac{\xi}{L} \end{cases}$$

c Biegemoment $M(x, \xi) = P K(x, \xi)$

$$= \begin{cases} x < \xi: & = P L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{\xi}{L} \right), \\ x > \xi: & = P L \left(1 - \frac{x}{L} \right) \frac{\xi}{L}. \end{cases}$$

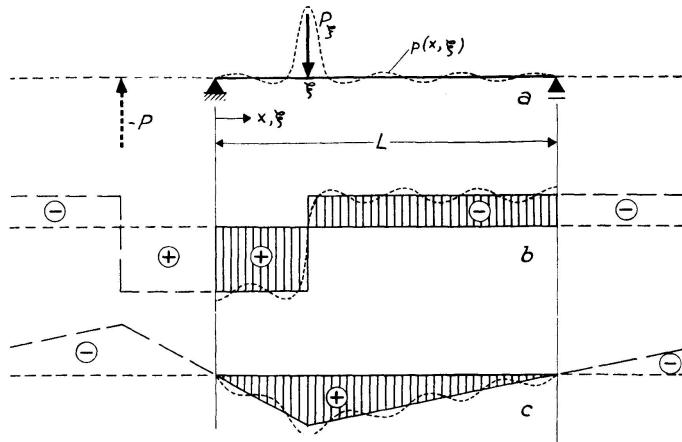


Fig. 1. Balken auf zwei Stützen.

Gem. Gl. (3) und Fig. 2 hat man entsprechend:

$$M(x) = \frac{q L^2}{2} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \frac{x}{L} = 4 q L^2 \sum_{1, 3, 5}^{\infty} \frac{1}{n^3 \pi^3} \sin n \pi \frac{x}{L}, \quad (3a)$$

$$Q(x) = \frac{q L}{2} \left(1 - \frac{2x}{L} \right) = 4 q L \sum_{1, 3, 5}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n \pi \frac{x}{L}. \quad (3b)$$

Die in Gl. (2a) angegebene Funktion $K(x, \xi)$ ist der Musterkern der Fredholmschen Integralgleichung oder die Einflußlinie des Biegemomentes für den einfachen Balken im Bereich 0 bis L , s. Fig. 1c. Die obige Art der Berechnung mit unbestimmten Integralen und Fourier-Entwicklungen ist mühevoll und die Konvergenz ist schlecht. Stellt man bei nichtlinearen Problemen die Zu- oder Abnahme der Schnittkräfte gegenüber der linearen Theorie als Fourier-Entwicklung dar, dann ist die Berechnung sinnvoll und die Konvergenz ausgezeichnet.

In Fig. 3 sind obige Lastfälle durch eine Zugkraft H erweitert. Aus dem Gleichgewicht am verformten Element hat man für den Lastfall a in Fig. 3:

$$M(x, \xi) = P K(x, \xi) - H y(x, \xi) \quad (2c)$$

und für den Lastfall *b*:

$$M(x) = \frac{q L^2}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} - H y(x); \quad (3c)$$

y bedeutet die Biegelinie und *H* den Horizontalschub, der selbst von der äußereren Belastung abhängen kann. Für den ersten Lastfall hat man die Lösung, s. a. [5]:

$$M(x, \xi) = P K(x, \xi) - \frac{2 P H}{E I L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \pi \frac{x}{L} \sin n \pi \frac{\xi}{L}}{\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{H}{E I} \right)}. \quad (2d)$$

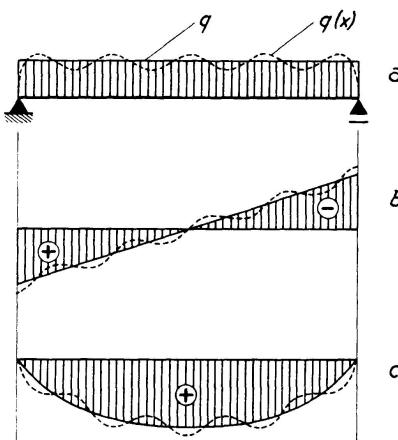


Fig. 2. Balken auf zwei Stützen.

- a gleichmäßig verteilte Last $q = \text{konst.}$
- b Querkraft $Q(x) = \frac{q L}{2} \left(1 - \frac{2x}{L}\right)$.
- c Biegemoment

$$M(x) = \frac{q L^2}{2} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

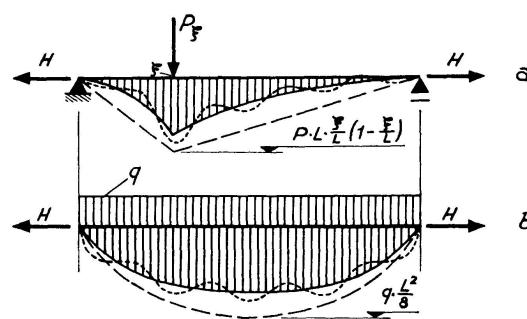


Fig. 3. Verlauf der Biegemomente infolge einer Zugbiegung.

- a Einzellast P_ξ an der Stelle ξ ,
- b gleichmäßige Belastung q .

Die Integration von 0 bis *L* nach ξ ergibt die Momentenverteilung für den zweiten Lastfall:

$$M(x) = \frac{q L^2}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} - \frac{4 q H}{E I L} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin n \pi \frac{x}{L}}{\frac{n^3 \pi^3}{L^3} \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{H}{E I} \right)}. \quad (3d)$$

Bereits für $n=1$ erhält man eine gute Konvergenz, und die maximalen Momente lauten für $x=\xi=L/2$ und $H_k=\pi^2 E I / L^2$:

$$M_{\max} = \frac{PL}{4} \frac{\frac{H_k}{H} + 0,189}{\frac{H_k}{H} + 1}, \quad (2e)$$

bzw.

$$M_{\max} = \frac{q L^2}{8} \frac{\frac{H_k}{H} - 0,032}{\frac{H_k}{H} + 1}. \quad (3e)$$

Die in der Statik wichtigste unstetige Funktion der Einzellast $P=1$ wurde durch die Fourier-Transformation als Gl. (2) abgeleitet und formal als «Einflußlinie» gedeutet. In der Physik und insbesondere in der Elektrotechnik ist sie als Dirac-Delta-Funktion $\delta(x-\xi)$ bekannt. Hierfür wird eine Operatorenrechnung von HEAVISIDE (1899) verwendet, s. [6], die als Laplace-Transformation [7 bis 10] ihren Abschluß fand:

$$g(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \equiv \mathcal{L} f(t). \quad (4)$$

Es bedeuten:

p eine komplexe Veränderliche.

$f(t)$ Oberfunktion oder Originalfunktion.

$g(p)$ Unterfunktion oder Bildfunktion bzw. die \mathcal{L} -Transformierte von $f(t)$.

Das Integral (4) muß in der Halbebene $t \geq 0$ konvergieren.

Im Bauwesen ist die Laplace-Transformation selten angewandt. Ein Versuch, sie auf die Theorie des Balkens zu übertragen, ist in [11] durchgeführt. In [12] wird ein bekannter Stabilitätsfall und in [13] eine wichtige Aufgabe aus dem Gebiet des Stahlbetonbaus gelöst. Diese Transformation scheint für die Baustatik infolge der Auswertung einer komplexen Schwingung $e^{-p} = e^{-(x+iy)}$, ähnlich der Fourier-Transformation, etwas wesensfremd zu sein. In der Elektrotechnik hat sich jedoch das Denken in komplexen Schwingungen allgemein durchgesetzt, s. [7, 8 und 9].

Das Verdienst von MIKUSIŃSKI [14] ist es, gezeigt zu haben, daß Gl. (4) keine Transformation bedeutet, wenn man statt der komplexen Variablen p eine abstrakte Zahl s , die später als Differentialoperator definiert wird, einführt. Statt der Bildfunktion $g(p)$ hat man jetzt eine abstrakte Funktion von s . Aus der Funktion $f(x)$ erhält man die Operatorfunktion

$$\begin{aligned} f &\equiv \{f(x)\} = F(s), \\ \text{d. h.} \quad f &= \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) d\xi \equiv \{f(x)\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Darin bedeutet

$e^{-s\xi}$ den Verschiebungsoperator, der außerhalb des Integrals auch mit h^ξ gekennzeichnet wird.

Für die Baustatik kann dieser Operator als Einflußlinie gedeutet werden, so daß Gl. (5) rein formal die Auswertung selbst darstellt. In Fig. 4 ist der Verschiebungsoperator $e^{-s\xi} = h^\xi$ als Einflußlinie der Belastung $P=1$ aufgezeichnet. Man kann nun sowohl stetige Funktionen gem. Fig. 5, als auch unstetige und nicht stetig differenzierbare, vgl. Fig. 7, als Operatoren nach Gl. (5) darstellen. Eine wichtige Eigenschaft des Verschiebungsoperators h^λ ist in Fig. 6 gezeigt.

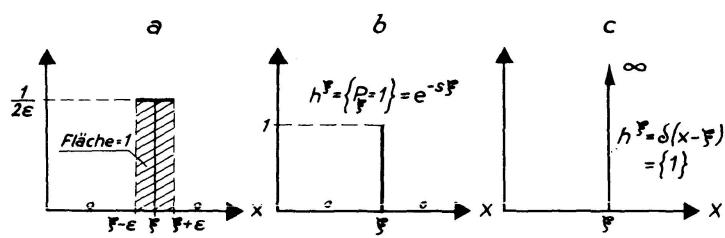


Fig. 4. Darstellung einer Einzellast $P=1$ an der Stelle $x=\xi$.

- a als Streckenlast mit der Fläche = 1,
- b als Operatorfunktion h^ξ und Grenzwert der Fläche = 1 für $\epsilon \rightarrow 0$,
- c als Dirac-Delta-Funktion $h^\xi = \delta(x-\xi)$ mit dem Wert Null für $x \neq \xi$, mit dem Wert ∞ für $x = \xi$, aber Inhalt = 1.

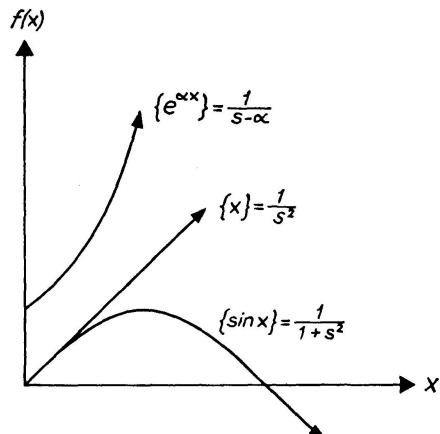


Fig. 5. Operatoren der stetigen Funktionen: x ; $e^{\alpha x}$ und $\sin x$.

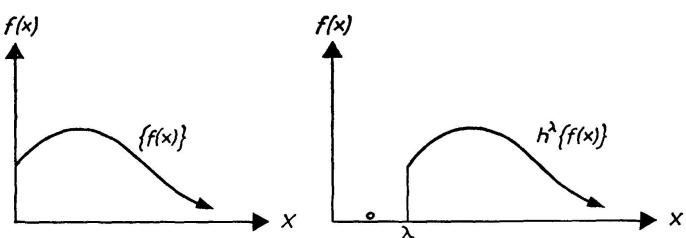


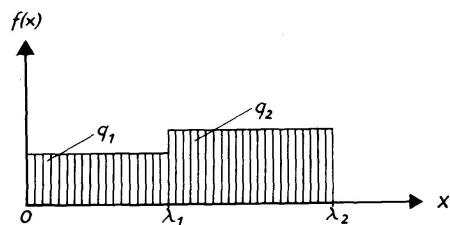
Fig. 6. Verschieben der Funktion $f(x)$ um die Strecke λ in Operatorenform:

$$h^\lambda \{f(x)\} = \begin{cases} 0; & \text{für } x < \lambda \\ f(x-\lambda); & \text{für } x > \lambda \end{cases}.$$

Die Operation gem. Gl. (5) stimmt mit der Laplace-Transformation, Gl. (4), nur formal überein. Beide Methoden sind aber nicht äquivalent, da die Laplace-Transformation nur anwendbar ist, wenn das Integral, Gl. (4), konvergiert. Dagegen hat das Integral nach Gl. (5) immer einen Sinn, falls nur die Funktion $f(x)$ gem. Fig. 7 endlich viele Unstetigkeitsstellen in einem endlichen Bereich besitzt und hier absolut integrierbar ist, d. h. $f(x)$ ist in der Klasse der Funk-

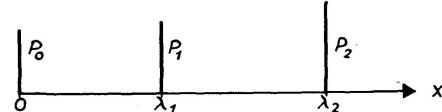
a Streckenlasten q_1 und q_2 :

$$f = \frac{q_1 h^0}{s} + (q_2 - q_1) \frac{h^{\lambda_1}}{s} - q_2 \frac{h^{\lambda_2}}{s},$$



b Einzellasten P_0 , P_1 und P_2 an den Stellen 0 , λ_1 und λ_2 :

$$f = P_0 h^0 + P_1 h^{\lambda_1} + P_2 h^{\lambda_2}; \text{ mit } h^0 = I;$$



c Gemischte Belastung:

$$f = -20 + \frac{20}{s} (h - h^2) - 30 s h^3.$$

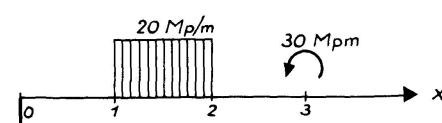
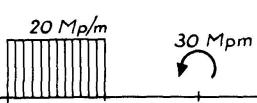


Fig. 7. Operatoren der unstetigen Funktionen.

-20 M_P



30 $M_P m$

tionen eingebettet, die lokal (im Sinne von Lebesgue) summierbar sind. Demnach ist es möglich, die bekannten Tabellen zur Laplace-Transformation [7, 15, 16 und 17] zu gebrauchen. Eine Kenntnis der Funktionentheorie wird dabei nicht vorausgesetzt.

Obwohl die Laplace-Transformation methodisch besser ist und an die Funktionentheorie anschließt, ist die Operatorenrechnung nach MIKUSIŃSKI, die zur abstrakten Algebra gehört und strenger mathematischer Schulung bedarf, für den Bauingenieur durch den Begriff der Einflußlinie geeigneter.

2. Der Operatorenkalkül von Mikusiński

Die Theorie der Operatorenrechnung, s. [14, 18, 19 und 20], geht von dem Begriff der Faltung aus, die durch das Volterrasche Integral

$$c(x) = \int_0^x a(x-u) b(u) du, \quad u \leq x \quad (6)$$

definiert ist.

$c(x)$ bedeutet die Faltung oder das Faltungsprodukt der Funktionen $a(x)$ und $b(x)$.

Man kann leicht nachweisen, daß die Faltung gem. Gl. (6) *kommutativ* ist:

$$\int_0^x a(x-u) b(u) du = \int_0^x b(x-u) a(u) du. \quad (7)$$

Diese Kommutativität der Faltung ist ein Analogon zum Kommutativgesetz bei der Multiplikation von algebraischen Zahlen, d. h.

$$a b = b a \quad (7a)$$

für das beliebige Zahlenpaar a, b .

Die Faltung besitzt auch die Eigenschaft der *Assoziativität* bei der Multiplikation von Zahlen:

$$(a b) c = a (b c). \quad (8a)$$

Ist nämlich

$$\int_0^x a(x-u) b(u) du = g(x)$$

und

$$\int_0^x b(x-u) c(u) du = h(x),$$

so gilt stets

$$\int_0^x g(x-u) c(u) du = \int_0^x a(x-u) h(u) du. \quad (8)$$

Die Faltung enthält noch die dritte Grundeigenschaft der Algebra, nämlich die *Distributivität* des Produktes bezüglich der Addition:

$$a(b+c) = ab + ac. \quad (9a)$$

Es ist stets

$$\int_0^x a(x-u) [b(u) + c(u)] du = \int_0^x a(x-u) b(u) du + \int_0^x a(x-u) c(u) du. \quad (9)$$

Diese Analogien berechtigen zur Einführung einer abstrakten Algebra, wenn a, b, c , die Operatorfunktionen, kurz Operatoren genannt, nach Gl. (5) dargestellt werden.

Man unterscheidet zwischen dem Operator $f = \{f(x)\}$ und dem Wert $f(x)$ der Funktion im Punkte x . Mit den Operatoren kann leicht die oft komplizierte Integralrechnung und Integralumformung durch algebraische Rechnung ersetzt werden. Die *Addition* und das *Faltungsprodukt* sind die grundlegenden Operationen dieser Operatorrechnung. Man definiert demnach die Addition und das Faltungsprodukt zweier Operatoren f und g durch

$$f + g = \{f(x) + g(x)\} \quad (10)$$

$$\text{bzw. } fg = \{f(x)\} \{g(x)\} = \left\{ \int_0^x f(x-u) g(u) du \right\} \quad (11)$$

und das Skalarprodukt durch

$$\alpha \{f(x)\} = \{\alpha f(x)\}. \quad (12)$$

Hierbei ist α eine Zahl, die reell oder komplex sein kann. Diese so definierte Algebra ist nullteilerfrei, und man kann aus der Beziehung

$$fg = c$$

eine Divisionsalgebra einführen.

Die Operatorenfunktion

$$f = \frac{c}{g} \quad (13)$$

ist immer möglich mit der Aussage $g \neq \{0\}$. Gl. (13) ist die zur Faltung (11) inverse Operation.

$$\text{Man nennt } l = \{1\} \quad (14)$$

Integrationsoperator mit der Eigenschaft

$$l\{f(x)\} = \left\{ \int_0^x f(x-u) du \right\}. \quad (15)$$

Der inverse Operator $1/l$ heißt *Differentialoperator* s , d. h.

$$s = \frac{1}{l}. \quad (16)$$

Aus (14) kann durch n -malige Integration gem. Gl. (15) die Operatorenformel für sämtliche Parabelfunktionen ($n-1$)-ten Grades erhalten werden:

$$l^n = \frac{1}{s^n} = \left\{ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right\}. \quad (17)$$

Ist $f(x)$ für $x \geq 0$ eine total stetige Funktion, deren Ableitung $f'(x)$ jedoch endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt und in einem endlichen Intervall absolut integrierbar ist, so gilt

$$sf = f' + f(0). \quad (18)$$

Hierin bedeuten:

$f(0)$ den Wert der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x=0$ (ein Zahlenoperator);
 $f' = \{f'(x)\}$ den Operator der ersten Ableitung.

In Gl. (16) ist die 1 der Wert der Funktion $f(x)=1$ an der Stelle $x=0$, d. h. $f(0)=1$ und $f' = \{f'(x)=0\}=0$. Ist zufällig $f(0)=0$, so bedeutet $sf=f'$ eine einfache Differentiation, womit die Vorstellung von HEAVISIDE in [6], die Differentiale als Zahlen zu betrachten: $a'(x)=Da$, nachgewiesen wird. Das Produkt sf hat stets einen Sinn, auch wenn $f(x)$ nicht differenzierbar wäre.

Aus der Grundgleichung:

$$s^n f = f^{(n)} + s^{n-1} f(0) + s^{n-2} f'(0) + \dots + s f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0) \quad (19)$$

erhält man ein Kalkül zur Lösung von Differentialgleichungen, wenn die $(n-1)$ -te Ableitung $f^{(n-1)}(x)$ total stetig ist und $f^{(k)} = \{f^{(k)}(x)\}$ den Operator der k -ten Ableitung bedeutet.

Für Potenzreihen von Operatoren hat man die Grundgleichungen:

$$\frac{1}{1+f} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f^n, \quad (20)$$

$$\frac{1}{1-f} = \sum_{n=0}^{\infty} f^n, \quad (21)$$

$$\frac{f}{1+f} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f^n, \quad (22)$$

$$\frac{f}{1-f} = \sum_{n=1}^{\infty} f^n. \quad (23)$$

In diesen Formeln ist f^n die n -fache Integration oder die n -fache Faltung der Funktion $f(x)$:

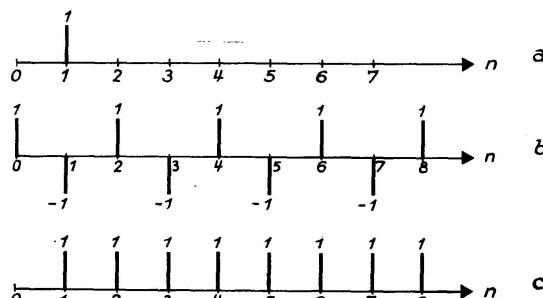


Fig. 8. Einzellasten als Potenzreihen des Verschiebungsoperators h .

a a $f = h^1 = h$ (Einzellast $P = 1$),

b alternierende Einzellasten

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n h^n = \frac{1}{1+h},$$

c monotone Einzellastfolge

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} h^n = \frac{h}{1-h}.$$

$$f^n = \left\{ \int_0^x f(x-u) f^{n-1}(u) du \right\} = f f^{n-1}$$

mit $f^1(x) = f(x)$, oder $f^1 = f = \{f(x)\}$.

Ist $f = h$ der Verschiebungsoperator gem. Fig. 8a, so gilt die Beziehung

$$\frac{1}{1+h} = \sum_0^{\infty} (-1)^n h^n = 1 - h + h^2 - h^3 + \dots,$$

die eine alternierende Folge der Einzellasten $P = 1$ gem. Fig. 8b wiedergibt. Die Relation:

$$\frac{h}{1-h} = \sum_1^{\infty} h^n = h + h^2 + h^3 + \dots$$

stellt den Verlauf der Folge in Fig. 8c dar.

Ganz allgemein gilt die Gleichung:

$$\frac{1}{(1 \mp \alpha h^{\lambda})^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \binom{n+k}{k} \alpha^n h^{n\lambda}. \quad (24)$$

Darin bedeuten: α eine reelle oder komplexe Zahl,
 k eine natürliche Zahl,

$$\binom{n+k}{k} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{1, 2 \dots k}. \quad (24a)$$

Die Formel gilt auch für $k=0$, wenn $\binom{n}{0} = 1$ angenommen wird.

Der Operator $h^n = e^{-sn}$ trägt dazu bei, daß man sich um die Konvergenz der Potenzreihe $\sum a_n h^n$, die eine *Dirichletsche Reihe* ist, nicht zu kümmern braucht. Diese Reihen sind Folgen von Koeffizienten. Der n -te Koeffizient der Gl. (24) z. B. bedeutet den Wert einer Funktion $f(x)$ an der Stelle $x=n\lambda$, oder

$$f(n\lambda) = (\pm 1)^n \binom{n+k}{k} \alpha^n.$$

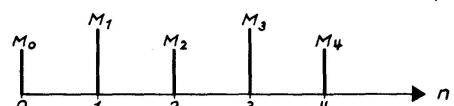
In den Anwendungen wird man den Verlauf eines Biegemomentes M als eine Operator-Potenzreihe darstellen:

$$M = \sum_0^{\infty} M_n h^n = M_0 + M_1 h + M_2 h^2 + \dots \quad (25)$$

h^n gibt die Schnittstelle an und M_n bedeutet den tatsächlichen Wert des Biegemomentes an der Stelle $x=n$, s. a. Fig. 9.

Fig. 9. Darstellung der Biegemomente als Einzel-
lastfolge

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} M_n h^n.$$



Für die numerischen Methoden der Baustatik ist diese Darstellung sehr erwünscht. Es wird noch gezeigt, daß sich jede Rekursionsformel geschlossen in Verschiebungsoperatoren lösen läßt.

3. Lösung der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Die Differentialgleichung

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 f(x) = q(x) \quad (26)$$

mit $a_n \neq 0$ und den Anfangswerten

$$\begin{aligned} f(0) &= c_0 \\ f'(0) &= c_1 \\ &\dots \\ f^{(n-1)}(0) &= c_{n-1}, \end{aligned}$$

kann mit Hilfe der Formel (19) gelöst werden. Man erhält in Operatorenform die Gleichung

$$a_n s^n f + a_{n-1} s^{n-1} f + \cdots + a_0 f = b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \cdots + b_0 + q,$$

wobei

$$b_i = a_{i+1} c_0 + a_{i+2} c_1 + \cdots + a_n c_{n-i-1}; \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (27)$$

Hieraus hat man sofort die Lösung:

$$f = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0} + \frac{q}{a_n s^n + \cdots + a_0}. \quad (28)$$

Um die Lösung in der üblichen Form zu erhalten, braucht man nur die Zerlegung in Partialbrüche durchzuführen. Bei einer Partialbruchzerlegung bekommt man schließlich die Grundformel

$$\frac{1}{s - \alpha} = \{e^{\alpha x}\}. \quad (29)$$

α ist dabei eine Zahl, die reell oder komplex sein kann.

4. Volterrasche Integralgleichungen

Besonders wichtig für die Baustatik sind die Integralgleichungen zweiter Art von der Form

$$f(x) = \int_0^x k(x-u) f(u) du + g(x), \quad u < x; \quad x > 0. \quad (30)$$

Die gesuchte Funktion ist $f(x)$. Diese Gleichung nimmt in Operatorenform die Gestalt an

$$f = k f + g$$

und die Lösung ist

$$f = g \frac{1}{1-k} \quad (31)$$

bzw. $f = g + g \frac{k}{1-k}.$ (31 a)

Mit $G = \frac{k}{1-k} = \sum_1^{\infty} k^n$ (32)

hat man den sogenannten lösenden Kern, und die Lösung der Integralgleichung (30) lautet:

$$f(x) = g(x) + \int_0^x G(x-u) g(u) du. \quad (33)$$

Ist G aus den Tabellen der Laplace-Transformation nicht direkt zu finden, so ist sie in der Form der Potenzreihe (32) als Neumannsche Reihe der iterierten Kerne darstellbar, s. [19].

Die Integralgleichung erster Art

$$\int_0^x k(x-u) f(u) du = g(x) \quad (34)$$

hat in Operatorform die Lösung

$$f = \frac{g}{k}, \quad (35)$$

die im Original, falls sie existiert, aus den Tabellen der Laplace-Transformation [7, 8, 15, 16 und 17] zu finden ist.

5. Grundgleichungen der Baustatik

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$M''(x) = f(x, M)$$

spielt in der Baustatik eine wesentliche Rolle. Zerlegt man die Fiktion des dehnbaren Körpers (lineares Kontinuum) in eine Summe von starren Elementen dx , die elastische Formänderungen ausüben können, so wird das Gleichgewicht durch elementare äußere Kräfte, genannt Schnittkräfte, vgl. Fig. 10a–d, vektoriell leicht gebildet. Gemäß Fig. 10e hat man unmittelbar

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

und für die eingeprägte Belastung $f(x, M)$ die Gleichgewichtsbedingung

$$f(x, M) = \frac{dQ(x)}{dx} = \frac{d^2 M(x)}{dx^2}. \quad (36)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung, vgl. [21], mit den Anfangswerten

$$M(0) = m_i \quad \text{und} \quad M'(0) = Q(0) = A_i$$

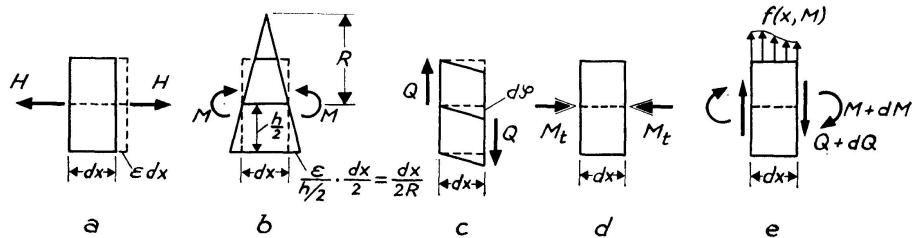


Fig. 10. Positive äußere Schnittlasten am Element $b h dx$ als starrer Körper.

- a Normalkraft H ;
 b Biegemoment $M(x)$ aus linearisierten Formänderungen:

$$\frac{2\epsilon}{h} = \frac{1}{R} = \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI};$$

- c Querkraft als Scher-Streifenlast;
 d Torsionsmoment M_t ;
 e Gleichgewichtsgruppe mit Auflast $f(x, M)$.

ist eine Volterra'sche Integralgleichung

$$M(x) = m_i + A_i x + \int_0^x (x-u) f[u, M(u)] du, \quad (37)$$

bzw. $Q(x) = M'(x) = A_i + \int_0^x f[u, M(u)] du. \quad (38)$

Für die Biegelinie $y(x)$ und den Drehwinkelverlauf $y'(x)$ sind ganz analoge Gleichungen vorhanden. Aus den Randbedingungen an der Stelle $x=x_k$ sind die Parameter der Anfangswerte $M(0)$, $M'(0)$, $y(0)$ und $y'(0)$ unmittelbar gegeben. Die konsequente Anwendung dieser Tatsache hat FALK in [24] durchgeführt. Er hat den Durchlaufträger als hochgradig statisch unbestimmte Aufgabe in Verbindung mit dem Matrizenkalkül auf die Berechnung des statisch bestimmten Balkens zurückgeführt. Alle Schnittkräfte an einer beliebigen Stelle kann man mit Hilfe der obigen Reduktion durch die Anfangswerte ausdrücken. Die statisch Unbestimmten kommen gar nicht vor, sondern bilden einen Teil der Zwischenrechnung. Das Prinzip beruht auf der Anwendung der Volterra'schen Integralgleichungen mit vorgeschriebenen Anfangswerten als Parameter, die aus den Randbedingungen des Endauflagers (des Durchlaufträgers oder des Rahmens) genau ermittelt werden.

Eine geschlossene Lösung der Stabwerke ist möglich. Die elastische Kontinuität ist ebenso wichtig wie das Gleichgewicht. Sie ist durch die Volterra'sche Integralgleichung unmittelbar gegeben. Die Schwierigkeit liegt darin, daß jedes lineare Kontinuum durch unstetige Schnittkräfte gestört ist. Verzichtet man auf die Fourier-Analyse, für die diese Schwierigkeiten entfallen, so können die Unstetigkeiten der Schnittkräfte entweder als Differenzen zweier Ableitungen oder aber als Anfangs- oder Endwerte erfaßt werden. Bei der Operatorenrechnung sind diese Störungen belanglos, vgl. die Beispiele im nächsten Abschnitt.

Das Beispiel in Fig. 3a wird vorerst auf dem Wege der Differentialgleichung

ohne Fourier-Analyse gelöst. Das Biegemoment an der Stelle $x = \xi$ ist nicht stetig differenzierbar, und die Querkraft weist demnach an dieser Stelle einen Sprung von der Größe P auf. Unmittelbar links und rechts von ξ verlaufen die Schnittkräfte stetig, so daß durch zweimaliges Anwenden des Anfangswertproblems, s. a. [22], bei dem die Schnittstelle ξ die Randwerte liefert, die elastische Kontinuität wieder hergestellt wird. Gem. Fig. 10e ist die Lastfunktion für den Lastfall in Fig. 3a:

$$f(x, M) = -P_\xi - \frac{H}{R}. \quad (39)$$

Die Ringbelastung H/R resultiert aus der Entlastung infolge der Zugkraft H , wenn man das Gleichgewicht am verformten Element berücksichtigt. Aus der Linearisierung der Formänderungen, $1/R = -M(x)/EI$, folgt die maßgebende Gleichgewichtsbedingung:

$$M''(x) = -P_\xi + H \frac{M(x)}{EI}. \quad (40)$$

Für den linken Bereich $0 < x < \xi$ hat man die homogene Lösung:

$$M(x)_{links} = A_1 \sin \varphi \frac{x}{L} \quad (41)$$

und für den rechten

$$M(x)_{rechts} = A_2 \sin \varphi \left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

Diese Lösung folgt auch unmittelbar aus den Volterraschen Integralgleichungen, wie noch ausführlich in den Anwendungen gezeigt wird.

Aus den Randbedingungen

$$M(\xi)_{links} = M(\xi)_{rechts}, \quad (42)$$

$$M'(\xi)_{links} - M'(\xi)_{rechts} = -P \quad (42a)$$

sind die unbekannten Koeffizienten A_1 und A_2 leicht zu bestimmen, und die Lösung lautet dann:

$$x < \xi : = P L \frac{\sin \varphi \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) \sin \varphi \frac{x}{L}}{\varphi \sin \varphi}, \quad (43)$$

$$M(x, \xi) = \quad x > \xi : = P L \frac{\sin \varphi \frac{\xi}{L} \sin \varphi \left(1 - \frac{x}{L}\right)}{\varphi \sin \varphi}.$$

φ erhält man durch Einsetzen von Gl. (43) in die Gl. (40), d. h.

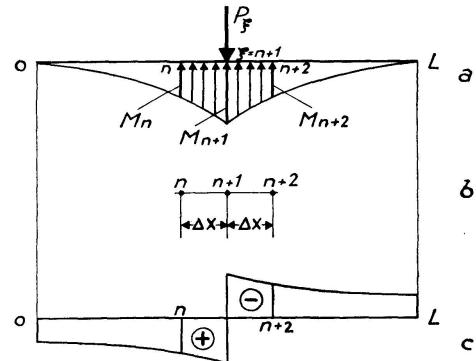
$$\varphi = L \sqrt{\frac{H}{EI}}.$$

Ist die Horizontalkraft H oder die Biegesteifigkeit EI mit x veränderlich, dann kann man analog Fig. 10 kleine dehbare Körper von der Länge ΔL

einführen, bei denen H und EI konstant sind. Die Kontinuität ist an den n Schnittstellen ΔL n -mal gestört. Mit Hilfe der Randbedingungen wird sie hergestellt, und es entstehen die wichtigen Rekursionsformeln, deren Ableitung das Ziel der numerischen Methoden der Baustatik ist.

Fig. 11. Zur numerischen Berechnung der Zugbiegung:

- a Belastung infolge P_ξ und $M(x)$;
- b Einteilung in gleiche Abstände;
- c Randbedingungen der Querkraft an der Unstetigkeitsstelle ($n+1$).



In Fig. 11 ist der Verlauf des Biegemomentes und der Querkraft um den Bereich der Einzellast P_{n+1} für die Zugbiegung wiedergegeben. Das Trägheitsmoment sei veränderlich, jedoch in kleinen gleichen Intervallen ΔL als konstant angenommen (ebenso kann dies auch mit H und E der Fall sein). Man bezeichnet die Verhältniszahlen links und rechts der Schnittstelle ($n+1$) mit

$$\alpha_{n+1} = \frac{I_c}{I_{n+1}^{links}}, \quad \beta_{n+1} = \frac{I_c}{I_{n+1}^{rechts}}. \quad (45a)$$

Die Lösung der Differentialgleichung (40) als Integralgleichung (37) mit den Anfangswerten M_n und Q_n für den linken Bereich (n bis $n+1$) und mit der reduzierten Belastung $\alpha_{n+1} M(x) \frac{H}{EI_c}$ lautet dann:

$$M_{n+1}^{links} = M_n + Q_n \Delta L + \alpha_{n+1} \frac{H}{EI_c} \int_0^{\Delta L} (\Delta L - u) M(u) du. \quad (37a)$$

Gemäß Gl. (38) hat man auch:

$$Q_{n+1}^{links} = Q_n + \alpha_{n+1} \frac{H}{EI_c} \int_0^{\Delta L} M(u) du. \quad (38a)$$

Für den rechten Bereich erhält man analoge Gleichungen mit den Parametern M_{n+2} und Q_{n+2} . Aus den Randbedingungen an der Schnittstelle $\xi = n+1$ gemäß Gl. (42) und (42a) hat man zwei Gleichungen für die beiden Parameter Q_n und Q_{n+2} . Die Lösung als Rekursionsformel erhält man sofort, wenn man für das unbekannte Moment $M(x)$ einen ganz bestimmten Verlauf, z. B. einen trapezförmigen, annimmt. Die Integration nach Gl. (38a) nähert dann den Verlauf der Querkraft, s. Fig. 11c, parabolisch an. Gleichgewicht und elastische Kontinuität werden durch die einzige Gleichung

$$(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) M_{n+1} (1 + 2 \gamma) - (1 - \gamma) [\alpha_{n+1} M_n + \beta_{n+1} M_{n+2}] = \Delta L P_{n+1} \quad (44)$$

mit

$$\gamma = \frac{H \Delta L^2}{6 E I_c} \quad (45)$$

ausgedrückt.

STÜSSI verwendet für diese numerische Methode meist Näherungsparabeln, s. [23]. Seine Seilpolygonmethode als Gleichgewicht der Knotenlasten zwischen zwei starren Körpern an der Stelle $(n+1)$ ist mit diesem Verfahren der Integralgleichungen äquivalent. Die obige Rekursionsformel kann mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus, der Matrizenrechnung oder aber direkt mit Hilfe des Verschiebungsoperators, vgl. die Anwendungen, gelöst werden.

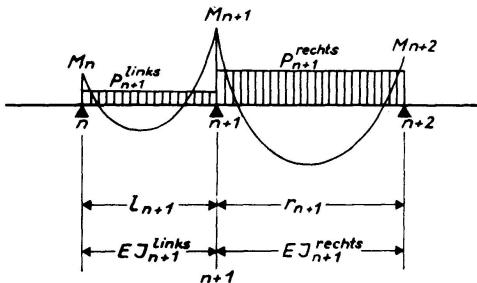


Fig. 12. Zur numerischen Berechnung des Durchlaufträgers mit veränderlichen Verhältniszahlen:

$$\alpha_{n+1}^{links} = \frac{I_c l_{n+1}}{r_c I_{n+1}^{links}}, \quad \beta_{n+1}^{rechts} = \frac{I_c r_{n+1}}{r_c I_{n+1}^{rechts}}.$$

Die bekannte Dreimomentengleichung des Durchlaufträgers auf starren Stützen kann ebenfalls mit Hilfe der Integralgleichungen als Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) = -\frac{M(x)}{E I(x)} \quad (46)$$

aufgestellt werden. In Fig. 12 ist ein Durchlaufträger über drei Stützen n , $n+1$ und $n+2$ mit den Randmomenten M_n und M_{n+2} aufgezeichnet. Hierbei denkt man sich das Trägheitsmoment I feldweise konstant. Die Spannweiten sind verschieden und man bezeichne sie links der Stütze n mit l_n und rechts davon mit r_n , so daß $r_n = l_{n+1}$ und $r_{n+1} = l_{n+2}$ ist. Führt man noch die konstanten Werte r_0 und I_0 ein, dann hat man folgende Verhältniszahlen:

$$\alpha_{n+1} = \frac{I_0 l_{n+1}}{r_0 I_{n+1}^{links}} \quad \text{bzw.} \quad \beta_{n+1} = \frac{I_0 r_{n+1}}{r_0 I_{n+1}^{rechts}}. \quad (47)$$

Die Lösung von Gl. (46) ist in Form von Integralgleichungen gegeben. Für den linken Bereich (n bis $n+1$) mit den Anfangswerten $y_n = 0$ und y'_n hat man beispielsweise

$$y^{links}(x) = y_n + y'_n x - \int_0^x (x-u) \frac{M(u)}{E I(u)} du, \quad (48)$$

$$y'(x)^{links} = y'_n - \int_0^x \frac{M(u)}{E I(u)} du.$$

Setzt man für das vorerst unbekannte Moment einen negativen trapezförmigen Verlauf mit den Unbekannten M_n , M_{n+1} und M_{n+2} an und für das be-

kannte statisch bestimmte Moment einen positiven Verlauf, so ist durch die Randbedingungen

$$y_{n+1}^{links} = y_{n+1}^{rechts} = 0, \quad y_{n+1}'^{links} = y_{n+1}'^{rechts} \quad (49)$$

der Zusammenhang zwischen M_n , M_{n+1} und M_{n+2} gegeben. Die Rekursionsformel der Stützmomente für den Durchlaufträger lautet nun:

$$\frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}} + \frac{M_n + 2M_{n+1} + L_{n+1}}{M_{n+2} + 2M_{n+1} + R_{n+1}} = 0. \quad (50)$$

Hierin bedeuten L und R die Belastungsglieder, die im Sinne links und rechts vom Schnittpunkt $(n+1)$ verstanden werden und genau den Kreuzlinienabschnitten k_{links} und k_{rechts} entsprechen. Für eine gleichmäßig verteilte Last p lauten sie beispielsweise:

$$L_{n+1} = \frac{p_{n+1}^{links} l_{n+1}^2}{4}, \quad R_{n+1} = \frac{p_{n+1}^{rechts} r_{n+1}^2}{4}. \quad (50a)$$

Die Lösung der obigen Differenzengleichung (50) kann man geschlossen mit Hilfe der Verschiebungsoperatoren h^n , s. die Anwendungen, durchführen.

6. Anwendungen

6.1. Lineare Biegung

Darunter versteht man die Spannungstheorie erster Ordnung.

Gegeben sei der einfache Balken mit Kragarmen. In Fig. 13 ist als Belastung ein Einzelmoment m an der Stelle $x=\lambda$, die Auflagerkraft $A=Q(a)$ an der Stelle $x=a$ im Sinne der Fig. 10e negativ und die positive Auflagerkraft B im Abstand $x=a+L$ aufgetragen. Diese Lastfunktion $f(x, M)$ kann nicht ohne nähere Beschreibung analytisch ausgedrückt werden, es sei denn, man wählt die Operatorenform:

$$\{f(x, M)\} = msh^\lambda - Ah^a + Bh^{a+L}.$$

Die Lösung von Gl. (36) als Integralgleichung (37) mit den Anfangswerten $M(0)=0$ und $Q(0)=0$ lautet:

$$M(x) = \int_0^x (x-u) f(u, M) du = \int_0^x k(x-u) f(u) du.$$

Mit $\{k(x)\} = \{x\} = \frac{1}{s^2}$

erhält man die Lösung gem. Gl. (17) in Operatorenform

$$M = k f$$

oder $M = \frac{1}{s^2} [msh^\lambda - Ah^a + Bh^{a+L}], \quad (51)$

und für die Querkraft aus Gl. (38):

$$Q = \frac{1}{s} [msh^\lambda - Ah^\alpha + Bh^{\alpha+L}]. \quad (52)$$

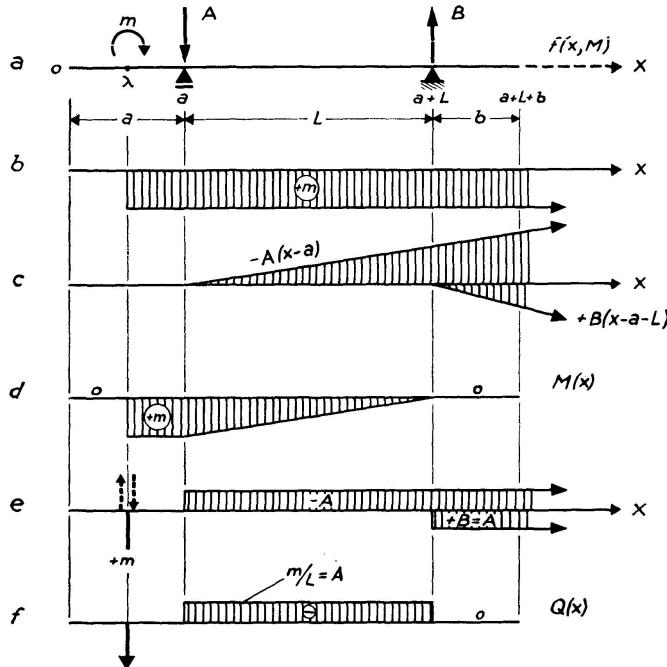


Fig. 13. Reine Biegung unter Einzelmoment m an der Stelle $x = \lambda$.

- a Belastung;
- b Biegemoment infolge des Einzelmomentes;
- c Biegemoment infolge der Auflagerkräfte;
- d Verlauf des Gesamtmomentes $M(x)$;
- e Verlauf der Querkräfte infolge der drei Belastungen m , A und B ;
- f Verlauf der Gesamtquerkraft $Q(x)$.

Die Funktion des Biegemomentes (51) setzt sich aus drei Teilen zusammen, die in Fig. 13 b und c dargestellt sind und von 0 bis ∞ verlaufen. Ab $x = a + L$ löschen sie sich gegenseitig aus, so daß Fig. 13 d den genauen Verlauf wieder gibt. Die Querkraft $Q(x)$, s. Fig. 13 f, hat ebenfalls drei Anteile: ein Kräftepaar unendlich nahe von der Größe m , das als Einzellast m an der Stelle $x = \lambda$ steht (diese Querkraft ist nur mit Operatoren sichtbar und sonst unberechtigterweise vernachlässigt), und aus den beiden konstanten Funktionen gem. Fig. 13 e. Die vorerst unbekannten Auflagerkräfte werden aus den Randbedingungen $M(a + L) = 0$ und $Q(a + L) = 0$ ermittelt:

$$A = -\frac{m}{L}, \quad B = +\frac{m}{L}.$$

Es ist interessant darauf hinzuweisen, daß, wenn $\lambda \rightarrow 0$ und $a \rightarrow 0$ streben, die Lösung wie oben bestehen bleibt und die sogenannten Anfangswerte msh^0 und Ah^0 zur äußeren Belastung $\{f(x, M)\}$ gehören, so wie es auch in der Statik üblich ist.

6.2. Nichtlineare Biegung

Darunter versteht man die Spannungstheorie zweiter Ordnung. Die maßgebende Differentialgleichung

$$M''(x) = f(x, M)$$

hat für die Lastfälle in Fig. 3 die Anfangswerte $M(0) = 0$, $Q(0) = A$ und die Endwerte $M(L) = 0$, $Q(L) = B$. Zählt man diese Werte der äußeren Belastung zu, dann ist

$$\{f(x, M)\} = Ah^0 - Ph^\xi + \left\{ \frac{H}{EI} M(x) \right\} + Bh^L, \quad (53)$$

und die Lösung lautet:

$$M(x) = \int_0^x (x-u) f[u, M(u)] du. \quad (54)$$

In Operatorenform nimmt diese Gleichung die Gestalt

$$M = \frac{1}{s^2} \left[A - Ph^\xi + \frac{H}{EI} M + Bh^L \right] \quad (55)$$

an, mit der Lösung

$$M = A \frac{1}{s^2 - \frac{H}{EI}} - Ph^\xi \frac{1}{s^2 - \frac{H}{EI}} + Bh^L \frac{1}{s^2 - \frac{H}{EI}}. \quad (56)$$

Führt man den dimensionslosen Parameter

$$\varphi = L \sqrt{\frac{H}{EI}} \quad (57)$$

ein, dann hat man aus den Tabellen der Laplace-Transformation die Originalfunktion

$$\frac{1}{s^2 - \frac{\varphi^2}{L^2}} = \left\{ \frac{\sin \varphi \frac{x}{L}}{\frac{\varphi}{L}} \right\}. \quad (58)$$

Unter Beachtung von Fig. 6 lautet nun das Biegemoment:

$$M(x) = A L \frac{\sin \varphi \frac{x}{L}}{\varphi} - P L \frac{\sin \varphi \left(\frac{x}{L} - \frac{\xi}{L} \right)}{\varphi} + B L \frac{\sin \varphi \left(\frac{x}{L} - 1 \right)}{\varphi}. \quad (59)$$

Durch Differenzieren erhält man die Querkraft

$$Q(x) = A \operatorname{Cof} \varphi \frac{x}{L} - P \operatorname{Cof} \varphi \left(\frac{x}{L} - \frac{\xi}{L} \right) + B \operatorname{Cof} \varphi \left(\frac{x}{L} - 1 \right). \quad (60)$$

Bei beiden Gleichungen (59) und (60) verlaufen die ersten Funktionen auf der rechten Seite von 0 bis ∞ , die zweiten von ξ bis ∞ und die dritten von L bis ∞ . Da der Balken nur im Bereich 0 bis L existiert, erhält man aus den Aussagen, daß $M(x)$ und $Q(x)$ im ganzen Bereich L bis ∞ verschwinden müssen, zwei Bestimmungsgleichungen für A und B . Die Kontinuitätsbedingung $M(L) = 0$ und $Q(L) = 0$ heißt, daß beide Funktionen im Bereich $x \geq L$ verschwinden und nicht wie bei der harmonischen Analyse (Fourier-Reihen) nur am Rande,

s. a. Fig. 1c. Demnach hat man sofort:

$$A = P \frac{\sin \varphi \left(1 - \frac{\xi}{L}\right)}{\sin \varphi} \quad \text{und} \quad B = P \frac{\sin \varphi \frac{\xi}{L}}{\sin \varphi}.$$

6.3. Rekursionsformeln und Differenzengleichungen

6.3.1. Nichtlineare Biegung. Die im vorigen Abschnitt gelöste Aufgabe ist auch als Differenzengleichung numerisch formuliert, vgl. Gl. (44). Wählt man das Trägheitsmoment durchgehend konstant, dann erhält man die einfache Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$M_n - 2 \frac{1+2\gamma}{1-\gamma} M_{n+1} + M_{n+2} = -P_{n+1} \frac{\Delta L}{1-\gamma}. \quad (61)$$

Gemäß Fig. 14 ist die Spannweite in gleiche Abschnitte $\Delta L = \frac{L}{m}$ unterteilt. Führt man die Parameter

$$\mathfrak{Cof} z = \frac{1+2\gamma}{1-\gamma}, \quad c = \frac{1}{m(1-\gamma)}$$

ein, dann bekommt man die Rekursionsgleichung

$$M_n - 2 \mathfrak{Cof} z M_{n+1} + M_{n+2} = -c L P_{n+1}. \quad (61a)$$

Das gesuchte Biegemoment ist nur an den Schnittstellen $n \Delta L = \frac{n}{m} L$ vorgegeben, so daß eine Darstellung wie in Fig. 9 durch die Verschiebungsoperatoren h^n möglich ist:

$$M = \sum_0^{\infty} M_n h^n. \quad (62)$$

Das Biegemoment M_{n+1} im Schnittpunkt $(n+1)$ ist allgemein durch die Reihe charakterisiert:

$$\sum_0^{\infty} h^n M_{n+1} = \frac{1}{h} (M - M_0) = M_1 + M_2 h + M_3 h^2 + \dots \quad (62a)$$

und das Biegemoment M_{n+2} durch

$$\sum_0^{\infty} M_{n+2} h^n = \frac{1}{h^2} (M - M_0 - M_1 h) = M_2 + M_3 h + M_4 h^2 + \dots \quad (62b)$$

Gl. (61a) nimmt jetzt in Operatorenform die Gestalt an:

$$M - 2 \mathfrak{Cof} z \frac{M - M_0}{h} + \frac{M - M_0 - M_1 h}{h^2} = -c L \frac{P - P_0}{h}.$$

Die Lösung lautet mit $M_0 = 0$ und $P - P_0 = Ph\xi$:

$$M = M_1 \frac{h}{1 - 2h \mathfrak{Cof} z + h^2} - c P L h \xi \frac{h}{1 - 2h \mathfrak{Cof} z + h^2}. \quad (63)$$

Die Lösung im Original kann man finden, wenn man die rechte Seite dieser Gleichung nach Potenzen von h entwickelt.

Der Ausdruck

$$\frac{h}{1 - 2h \mathfrak{Cof} z + h^2} = \frac{1}{\mathfrak{Sin} z} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Sin}(n z) h^n \quad (64)$$

ist eine erzeugende Funktion der Tschebyscheffschen Polynome, vgl. [17 und 26]. Der Beweis, daß Gl. (64) stimmt, liefert das Produkt der beiden Potenzreihen $(1 - 2h \mathfrak{Cof} z + h^2)$ und $\frac{1}{\mathfrak{Sin} z} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Sin}(n z) h^n$ gemäß der Regel (78). Danach verschwinden alle Koeffizienten von h^n bis auf die 1 für $n=1$. Die Lösungsgleichung (63) hat die allgemeine Entwicklung

$$M = M_1 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Sin}(n z) h^n}{\mathfrak{Sin} z} - c P L \frac{\sum_{n=\xi}^{\infty} \mathfrak{Sin}(n - \xi) z h^n}{\mathfrak{Sin} z}. \quad (65)$$

Der Koeffizientenvergleich mit Gl. (62) liefert das allgemeine Glied

$$M_n = M_1 \frac{\mathfrak{Sin}(n z)}{\mathfrak{Sin} z} - c P L \frac{\mathfrak{Sin}(n - \xi) z}{\mathfrak{Sin} z}. \quad (66)$$

Aus der Randbedingung $M_m = 0$, beispielsweise, und $n = m$ folgt die Bestimmungsgleichung für $M_1 (m > \xi)$

$$M_1 = c P L \frac{\mathfrak{Sin}(m - \xi) z}{\mathfrak{Sin} m z} \quad (67)$$

und für $n > 1$ gemäß Gl. (66) erhält man die geschlossene Formel:

$$M_n = c P L \frac{\mathfrak{Sin} \xi z}{\mathfrak{Sin} z \mathfrak{Sin} m z} \mathfrak{Sin}(m - n) z. \quad (67a)$$

Beispiel:

$$\xi = 2; \quad \Delta L = \frac{L}{m}; \quad m = 8; \quad H = \pi^2 \frac{E I_c}{L^2}; \quad \gamma = \frac{H \Delta L^2}{6 E I_c} = \frac{\pi^2}{6 m^2} = 0,0257;$$

$$\mathfrak{Cof} z = \frac{1 + 2 \gamma}{1 - \gamma} = 1,08; \quad z = 0,39729; \quad c = \frac{1}{8(1 - \gamma)} = 0,1283.$$

Gemäß Gl. (67) hat man

$$M_1 = 0,1283 P L \frac{\mathfrak{Sin} 6 z}{\mathfrak{Sin} 8 z} = 0,0575 P L. \quad (67b)$$

Für $n > 1$ gilt die Gl. (67a)

$$M_n = 2 c P L \frac{\mathfrak{Cof} z}{\mathfrak{Sin} 8 z} \mathfrak{Sin} z (8 - n) = 0,0231 \mathfrak{Sin} (8 - n) z P L. \quad (67c)$$

Beachtet man die Rechenschiebergenauigkeit, so ist z. B. für $n = 2$:

$$M_2 = 0,0231 \mathfrak{Sin} (2,3837) P L = 0,1242 P L.$$

In der Tabelle sind die Ergebnisse eingetragen. Verglichen sind sie mit den genauen Werten nach Gl. (43) und mit den Resultaten nach STÜSSI, s. [25].

Tabelle. Genaue und numerische Berechnung von $M(x)$ nach Fig. 14

	Gl. (43)	n. [25]	Gl. (67 b u. c)	
M_1	0,0583	0,05807	0,0575	
M_2	0,1255	0,12520	0,1242	
M_3	0,0836	0,08362	0,0824	
M_4	0,0551	0,05511	0,0542	
M_5	0,0358	0,03520	0,0345	
M_6	0,0208	0,02080	0,0203	
M_7	0,00965	0,00965	0,0095	

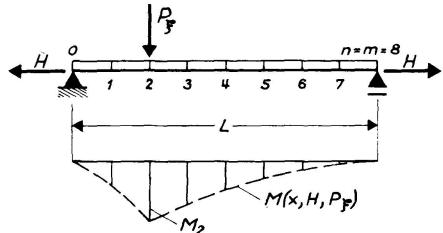


Fig. 14. Beispiel zur Berechnung der Zugbiegung.

6.3.2. Durchlaufträger mit gleichen Spannweiten und konstantem Trägheitsmoment. Mit $\alpha = \beta$ hat man gemäß Gl. (50) die einfache Differenzengleichung

$$M_n + 4M_{n+1} + M_{n+2} = -L_{n+1} - R_{n+1}. \quad (68)$$

Wählt man, beispielsweise, eine konstante gleichmäßig verteilte Last p , dann lauten die Belastungsglieder, s. Gl. (50a):

$$L_{n+1} + R_{n+1} = K_{n+1} = p \frac{L^2}{2},$$

wenn L die Spannweite bedeutet.

Mit Gl. (62), (62a) und (62b) erhält man die Operatorenform

$$M + 4 \frac{M - M_0}{h} + \frac{M - M_0 - M_1 h}{h^2} = - \frac{K - K_0}{h}. \quad (69)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ergibt sich aus Fig. 8c

$$K - K_0 = \frac{p L^2}{2} (h + h^2 + h^3 + \dots) = p \frac{L^2}{2} \sum_1^{\infty} h^n = p \frac{L^2}{2} \frac{h}{1-h}.$$

Die Lösung nimmt die Gestalt an, wenn $M_0 = 0$ ist:

$$M = M_1 \frac{h}{1+4h+h^2} - p \frac{L^2}{2} \frac{h^2}{(1+4h+h^2)(1-h)} \quad (70)$$

oder

$$M = M_1 \sum_0^{\infty} U_n(z) h^n - p \frac{L^2}{2} \sum_1^{\infty} h^n \sum_0^{\infty} U_n(z) h^n. \quad (70a)$$

Nach Gl. (64) können die Tschebyscheffschen Polynome auch geschrieben werden, vgl. a. [26]:

$$\frac{h}{1 - 2h z + h^2} = \sum_0^{\infty} U_n(z) h^n$$

mit $U_n(z) = \binom{n}{1} z^{n-1} - \binom{n}{3} z^{n-3} (1 - z^2) + \dots$

oder $U_0 = 0; \quad U_2(z) = 2z; \quad U_4(z) = 8z^3 - 4z;$
 $U_1 = 1; \quad U_3(z) = 4z^2 - 1; \quad U_5(z) = 16z^4 - 12z^2 + 1.$

Den Nachweis, daß diese Koeffizienten stimmen, gibt die Regel für die Multiplikation zweier Potenzreihen, vgl. Gl. (78). Zum Beispiel wird $U_5(z)$ aus der Relation ermittelt

$$0 = U_5(z) - 2z U_4(z) + U_3(z)$$

oder $U_5(z) = 2z(8z^3 - 4z) - 4z^2 + 1.$

Für $z = -2$ hat man nun

$$U_0 = 0; \quad U_1 = 1; \quad U_2 = -4; \quad U_3 = 15; \quad U_4 = -56; \quad U_5 = 209.$$

Der erste Ausdruck der rechten Seite der Gl. (70a) lautet demnach

$$\frac{h}{1 + 4h + h^2} = \sum_0^{\infty} U_n h^n.$$

Der zweite Ausdruck stellt ein Produkt zwischen dieser Reihe und der Potenzreihe

$$\frac{h}{1 - h} = \sum_1^{\infty} h^n$$

dar, d. h.

$$(0 + h + h^2 + h^3 + \dots) (U_0 + U_1 h + U_2 h^2 + U_3 h^3 + \dots) = \sum_0^{\infty} g_n h^n.$$

Demnach ist

$$g_n = \sum_{i=0}^{n-1} U_i$$

oder $g_0 = 0; g_1 = 0; g_2 = 1; g_3 = -3; g_4 = 12; g_5 = -44$; Gl. (70a) kann auch geschrieben werden:

$$M = M_1 \sum_0^{\infty} U_n h^n - p \frac{L^2}{2} \sum_0^{\infty} g_n. \quad (70b)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit Gl. (62) bekommt man das allgemeine Glied des Stützmomentes

$$M_n = M_1 U_n - p \frac{L^2}{2} g_n. \quad (71)$$

Hat der Durchlaufträger $n = m$ gleiche Öffnungen und ist er über der End-

stütze m frei gelagert, dann wird der endliche Bereich 0 bis m durch die Gleichung abgegrenzt

$$M = \sum_0^{\infty} M_n h^n - \sum_m^{\infty} M_n h^n = \sum_0^m M_n h^n. \quad (72)$$

Für $n \geq m$ verschwinden alle Werte für M_n , und aus der Bedingung

$$M_m = 0 = M_1 U_m - p \frac{L^2}{2} g_m$$

hat man die Bestimmungsgleichung für M_1

$$M_1 = p \frac{L^2}{2} \frac{g_m}{U_m}. \quad (73)$$

Beispiel: $m = 5$;

$$\text{Nach Gl. (73): } M_1 = p \frac{L^2}{2} \frac{-44}{209} = - \frac{22}{209} p L^2 = - 0,10521 p L^2;$$

$$\text{Nach Gl. (71): } M_2 = M_1 \left(-4 + \frac{209}{44} \right) = - \frac{33}{418} p L^2 = - 0,0789 p L^2;$$

$$M_3 = M_1 \left(15 - \frac{3}{0,21042} \right) = - 0,0789 p L^2;$$

$$M_4 = M_1 \left(-56 + \frac{12}{0,21042} \right) = - 0,10521 p L^2.$$

Beispiel: $m = 4$;

$$M_1 = p \frac{L^2}{2} \frac{12}{-56} = - \frac{3}{28} p L^2 = - 0,10714 p L^2;$$

$$M_2 = p L^2 \left(\frac{3}{14} 4 - \frac{1}{2} \right) = - \frac{1}{14} p L^2 = - 0,07143 p L^2;$$

$$M_3 = p L^2 \left(-\frac{3}{28} 15 + \frac{3}{2} \right) = - \frac{3}{28} p L^2 = - 0,10714 p L^2;$$

$$M_4 = p L^2 \left(\frac{3}{28} 56 - 6 \right) = 0, \quad \text{wie es sein muß.}$$

6.3.3. Durchlaufträger mit beliebigen Spannweiten und feldweise veränderlichem Trägheitsmoment. Die maßgebende Rekursionsformel ist die Dreimomentengleichung (50). Die Schreibweise in Operatoren lautet:

$$\frac{M + 2 \frac{M - M_0}{h} + \frac{L - L_0}{h}}{\frac{M - M_0 - M_1 h}{h^2} + 2 \frac{M - M_0}{h} + \frac{R - R_0}{h}} = - \frac{\beta - \beta_0}{\alpha - \alpha_0} = - \kappa. \quad (74)$$

Die Auflösung nach M ergibt, wenn $M_0=0$ gewählt wird:

$$M = M_1 \frac{\kappa h}{\kappa(1+2h)+2h+h^2} - [(L-L_0) + \kappa(R-R_0)] \frac{h}{\kappa(1+2h)+2h+h^2}. \quad (74a)$$

Setzt man $A = \frac{h}{\kappa(1+2h)+2h+h^2} = \sum_0^{\infty} A_n h^n$ (75)

und $B = \kappa A$, (75a)

dann hat man bereits die Entwicklung für M nach den Verschiebungsoptoren

$$M = M_1 \sum_0^{\infty} B_n h^n - (L-L_0) \sum_0^{\infty} A_n h^n - (R-R_0) \sum_0^{\infty} B_n h^n. \quad (76)$$

Die Belastungsglieder $(L-L_0)$ und $(R-R_0)$ sind vorgeschrieben und als Potenzreihen von h leicht darstellbar.

Aus dem Produkt zweier Potenzreihen

$$ab = \sum_0^{\infty} a_n h^n \sum_0^{\infty} b_n h^n = c = \sum_0^{\infty} c_n h^n \quad (77)$$

mit

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0; \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0; \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0; \\ &\dots \\ c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_0; \end{aligned} \quad (78)$$

erhält man das allgemeine Stützmoment von Gl. (76)

$$M_n = M_1 B_n - C_n - D_n. \quad (79)$$

Diese Gleichung gilt für $n=0$ bis ∞ .

Hat der Durchlaufträger $n=m$ Öffnungen, so kann der beschränkte Bereich von 0 bis m durch eine zweite Potenzreihe von rechts nach links abgesteckt werden.

Ist $M_m=0$, dann ist diese Endstütze der Anfangswert $\bar{M}_0=0$ für die Potenzreihe von rechts nach links und ihr erster Wert $\bar{M}_1=M_{m-1}$, vgl. dazu Fig. 15. Für die Lösung dieser zweiten Reihe hat man analog

$$\bar{M}_n = \bar{M}_1 \bar{B}_n - \bar{C}_n - \bar{D}_n. \quad (79a)$$

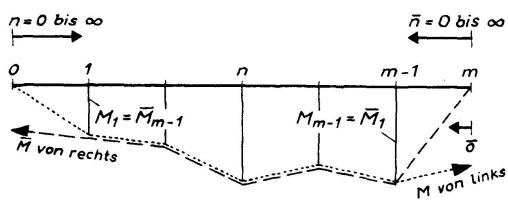


Fig. 15. Zur Berechnung des Durchlaufträgers mit Endgelenk.

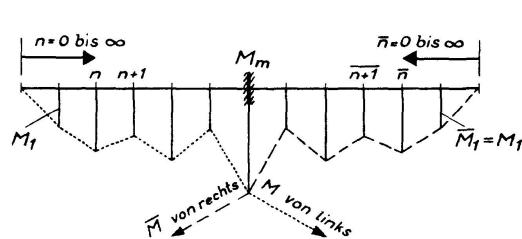


Fig. 16. Zur Berechnung des Durchlaufträgers mit Endeinspannung.

Aus den Relationen nach Fig. 15

$$\bar{M}_1 = M_{m-1} \quad \text{und} \quad M_1 = \bar{M}_{m-1}$$

folgt die Bestimmungsgleichung für M_1 :

$$M_1 = \frac{\bar{B}_{m-1} C_{m-1} + D_{m-1} + \bar{C}_{m-1} + \bar{D}_{m-1}}{B_m \bar{B}_{m-1} - 1}. \quad (80)$$

Ist die Endstütze eingespannt, dann hat man gem. Fig. 16 eine spiegelbildliche Anordnung für die zweite Potenzreihe von rechts nach links, und aus der Relation $M_1 = \bar{M}_1$ erhält man die Bestimmungsgleichung für M_1 aus der Randbedingung

$$M_m = \bar{M}_m,$$

$$\text{d. h.} \quad M_1 B_m - (C_m + D_m) = M_1 \bar{B}_m - (\bar{C}_m + \bar{D}_m)$$

$$\text{oder} \quad M_1 = \frac{(C_m + D_m) - (\bar{C}_m + \bar{D}_m)}{B_m - \bar{B}_m}. \quad (81)$$

Beispiel: In Fig. 17 ist ein Durchlaufträger über fünf Felder aufgetragen. Die Berechnung wird zweimal, d. h. von links nach rechts mit den Operatoren (α, β, L, R, M) und von rechts nach links mit $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{L}, \bar{R}, \bar{M})$ aufgestellt. Gemäß Gl. (74) hat man für den Quotienten κ , s. Fig. 17,

$$\kappa = \frac{\beta - \beta_0}{\alpha - \alpha_0} = \frac{h + 0,875 h^2 + h^3 + 0,75 h^4}{h + h^2 + 0,875 h^3 + h^4 + 0,75 h^5} = \frac{1 + 0,875 h + h^2 + 0,75 h^3}{1 + h + 0,875 h^2 + h^3 + 0,75 h^4}.$$

Die Werte für β und α werden aus Gl. (47) mit $r_0 = 4 \text{ m}$ und $I_0 = 20 \text{ dm}^4$ ermittelt. Die Belastungsglieder sind in der Figur als monotone Folgen aufgezeichnet. Unter Beachtung der Regel (78) hat man

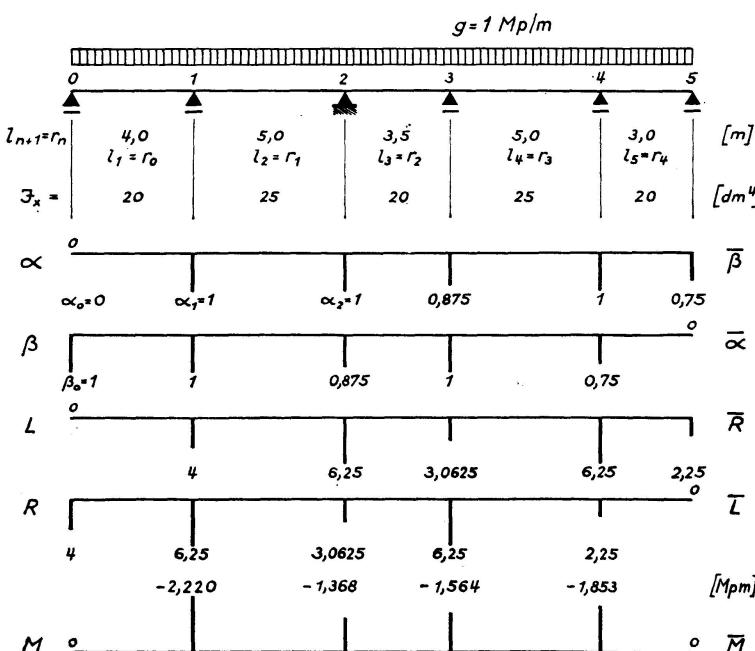


Fig. 17. Beispiel eines Durchlaufträgers mit fünf Feldern.

$$\kappa = 1 - 0,125h + 0,250h^2 - 0,390625h^3 + \dots$$

Die Potenzreihe für A nach Gl. (75) nimmt die Gestalt an

$$A = \frac{h}{\kappa(1+2h)+2h+h^2} = \frac{h}{1+3,875h+h^2+0,109375h^3} \dots$$

oder $A = h - 3,875h^2 + 14,015625h^3 - 50,544921h^4 + \dots$

Entsprechend lautet B nach Gl. (75a):

$$B = \kappa A = h - 4h^2 + 14,75h^3 - 53,65625h^4 + \dots$$

Gem. Fig. 17 erhält man für das linke Belastungsglied L die Potenzreihe:

$$L - L_0 = 4h + 6,25h^2 + 3,0625h^3 + 6,25h^4 + 2,25h^5.$$

Die Reihe

$$C = (L - L_0) A$$

bekommt man nach der Regel (78)

$$C = 4h^2 - 9,25h^3 + 34,90625h^4 - \dots$$

Für das rechte Belastungsglied R hat man analog, s. Fig. 17,

$$R - R_0 = 6,25h + 3,0625h^2 + 6,25h^3 + 2,25h^4.$$

Die Potenzreihe

$$D = (R - R_0) B$$

lautet demnach

$$D = 6,25h^2 - 21,9385h^3 + 86,1875h^4 - \dots$$

Führt man dieselbe Operatorenrechnung von rechts nach links mit den Folgen gem. Fig. 17 durch, d. h.

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0 &= 0,75h + h^2 + 0,875h^3 + h^4; \\ \bar{\beta} - \bar{\beta}_0 &= h + 0,875h^2 + h^3 + h^4; \\ \bar{L} - \bar{L}_0 &= 2,25h + 6,25h^2 + 3,0625h^3 + 6,25h^4 + 4h^5; \\ \bar{R} - \bar{R}_0 &= 6,25h + 3,0625h^2 + 6,25h^3 + 4h^4; \end{aligned}$$

dann hat man

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} &= 1,33333 - 0,61111h + 0,59259h^2 - 0,521604h^3 + \dots \\ \bar{B} &= h - 3,5h^2 + 10,812499h^3 - 32,804695h^4 + \dots \\ \bar{A} &= 0,75h - 2,28125h^2 + 6,730472h^3 - 20,211444h^4 + \dots \\ \bar{C} &= 1,6875h^2 - 0,445312h^3 + 3,182625h^4 - \dots \\ \bar{D} &= 6,25h^2 - 18,8125h^3 + 63,109368h^4 - \dots \end{aligned}$$

Mit $m=5$ liefert Gl. (80) das erste Stützmoment

$$M_1 = \frac{-32,804695 \cdot 121,09375 + 66,291993}{53,65625 \cdot 32,804695 - 1} = -2,22044 \text{ Mpm}$$

und gemäß Gl. (79) entsprechend:

$$\begin{aligned} M_2 &= -2,22044(-4) - 4 - 6,25 = -1,36824 \text{ Mpm}; \\ M_3 &= -2,22044 \cdot 17,45 + 9,25 + 21,9375 = -1,56369 \text{ Mpm}; \\ M_4 &= -2,22044(-53,65624) - 121,09375 = -1,85237 \text{ Mpm}. \end{aligned}$$

Dasselbe Beispiel in [27] liefert die Werte:

$$\begin{aligned} M_1 &= -2,191 \text{ Mpm}; & M_3 &= -1,567 \text{ Mpm}; \\ M_2 &= -1,430 \text{ Mpm}; & M_4 &= -1,820 \text{ Mpm}. \end{aligned}$$

7. Zusammenfassung und Ausblick

Die Existenz von unstetigen und von nicht stetig differenzierbaren Funktionen ist im Bauwesen unbestritten. Mit diesem Beitrag wird ein erster Versuch unternommen, das Interesse des Bauingenieurs auf die Operatorenrechnung zu lenken. Diese Operatorenrechnung kann man aus der Theorie der Laplace-Transformation oder als abstrakte Algebra nach MIKUSIŃSKI ableiten.

Mit Hilfe des Verschiebungsoperators $h = e^{-s}$ ist es möglich, eine Menge von Operationen durchzuführen, so daß sich eine Fourier-Analyse erübrigt.

Die Lösung der Rekursionsformeln der Baustatik und der Elastizitätslehre einerseits und die der Stabilitätstheorie und der Flächentragwerke andererseits, ganz gleich, ob man dabei grobe gewöhnliche Differenzen, das Seilpolygonverfahren nach STÜSSI-DUBAS, das Mehrstellenverfahren nach COLLATZ-ZURMÜHL oder das hier verwendete Verfahren der Volterraischen Integralgleichungen benutzt, ergibt sich als einfaches Rechnen mit Potenzreihen besonderer Art.

Das Produkt der Operator-Potenzreihen ist dem Produkt der Matrizen und dem Faltungsprodukt äquivalent, da die Volterraische Integralgleichung die Grundlage der Stabstatik bildet.

Bei den Beispielen, in denen eine mehrmalige Multiplikation stattfindet, ist der Gebrauch von Rechenmaschinen unentbehrlich.

Es ist abschließend darauf hinzuweisen, daß eine Umstellung auf den Differentialoperator s als abstrakte Zahl, die alle anderen Zahlen umfaßt, und das Rechnen mit dem Verschiebungsoperator rasch möglich ist. Mit dieser Operatorenrechnung kann eine künftige Entwicklung folgen, die einfach und deswegen wünschenswert ist.

8. Schrifttum

1. PASTERNAK, PETER: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegefester Stab- und Flächentragwerke. Zürich, Leemann-Verlag 1927.
2. WIEGHARDT, K.: Über einen Grenzübergang der Elastizitätslehre... Zeitschr. Math. und Phys. (1906), S. 139.

3. LIE, KUO-HAO: Berechnung der Fachwerke und ihrer verwandter Systeme auf neuem Wege. *Stahlbau* 17 (1944), S. 35/39 und S. 41/44.
4. GIENCKE, ERNST: Über die Berechnung regelmäßiger Konstruktionen als Kontinuum. *Stahlbau* 33 (1964), H. 1., S. 1/6, und H. 2, S. 39/48.
5. DIMITROV, N.: Die Einflußlinie der Theorie II. Ordnung und einige praktische Formeln. *Bauingenieur* 28 (1953), H. 1, S. 19/22.
6. HEAVISIDE, O.: Electromagnetic theory. London, Bd. 1 (1893), Bd. 2. (1899), Bd. 3 (1912).
7. HOLBROOK, JAMES, G.: Laplace Transform for electronic engineers. London, Pergamon Press 1959.
8. SCHOUTEN, J. P.: Operatorenrechnung. Berlin, Springer-Verlag 1961.
9. DOETSCH, G.: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Basel, Birkhäuser-Verlag 1959.
10. DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Basel, Birkhäuser-Verlag, Bd. 1 (1950), Bd. 2 (1955), Bd. 3 (1956).
11. IWINSKI, T.: Theory of beams. London, Pergamon Press 1958.
12. WAGNER, H.: Die Stabilitätsberechnung abgesetzter Knickstäbe mit Hilfe der Laplace-Transformation und der Matrizenrechnung. *VDI-Z.* 99 (1957) Nr. 25, S. 1251/1256, und Ergänzung S. 1806.
13. ROUSSOPOULOS, A.: Die allgemeine Lösung des Problems des exzentrisch beanspruchten Eisenbetonquerschnitts. *Annales Techniques*, Athen 1933 (Auszug der Ergebnisse, vgl. *Beton und Eisenbeton* 38 (1939), S. 79/87).
14. MIKUSIŃSKI, JAN: Operatorenrechnung. Berlin, VEB-Verlag 1957 (Original: Warschau 1953), engl. Übersetzung: Operational calculus, London, Pergamon Press 1960.
15. DOETSCH, G.: Tabellen zur Laplace-Transformation. Berlin, Springer-Verlag 1947.
16. ERDÉLYI, A., W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER und F. TRICOMI: Tables of Integral Transform. New York, Mc.Graw-Hill Book Comp. 1954, Bd. 1 und 2.
17. MAGNUS, W. und F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin, Springer-Verlag 1943.
18. ERDÉLYI, A.: Lectures on Mikusiński's theory of operational calculus and generalized functions, Pasadena. Institute of technology 1959.
19. BUTZER, P. L.: Die Anwendung des Operatorenkalküls von Jan Mikusiński auf lineare Integralgleichungen vom Faltungstypus. *Arch. f. Rat. Mech. and Anal.* 2 (1958), S. 114/128.
20. WŁOKA, J.: Über die Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differential-Differenzengleichungen. Diss. Heidelberg 1958.
21. HAMEL, GEORG: Integralgleichungen. Berlin, Springer-Verlag 1949.
22. DIMITROV, NIKOLA: Die Schnittkräfte des Balkens mit schwingender Querbelastung unter Berücksichtigung einer zusätzlichen Normalkraft. *Stahlbau* 26 (1957), S. 107/111.
23. STÜSSI, FRITZ: Numerische Methoden der Baustatik. *Schweizerische Bauzeitung* 79 (1961), S. 275/280.
24. FALK, S.: Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren. *Ing.-Arch.* 24 (1956), S. 174/192.
25. STÜSSI, FRITZ: Entwurf und Berechnung von Stahlbauten. Berlin, Springer-Verlag 1958.
26. DIMITROV, NIKOLA: Beitrag zur Operatorenrechnung. (Unveröffentlichtes Manuskript, Karlsruhe 1963.)
27. Beton-Kalender 1954, S. 220.

Zusammenfassung

Im Anschluß an allgemeine Betrachtungen über die Lösungsprobleme der Baustatik wird der Operatorenkalkül nach Jan Mikusiński abgeleitet und für die speziellen Belange der Baustatik eingeführt. Mit Hilfe der Volterraischen Integralgleichungen vom Faltungstypus werden die Gleichgewichts- und Kontinuitätsbedingungen neu definiert. Das Rechnen mit stetigen, unstetigen oder nicht stetig differenzierbaren Funktionen wird mit algebraischen Operationen ermöglicht. Die zahlreichen Tabellen der Laplace-Transformation können ohne Kenntnis der Funktionentheorie verwendet werden. Die Rekursionsformeln der numerischen baustatischen Methoden werden mit Hilfe des Verschiebungsooperators $h^n = e^{-ns}$ in Potenzreihen dargestellt und sehr einfach gelöst.

Summary

After some general considerations regarding the solution problems of structural statics the operational calculus according to Jan Mikusiński is derived and presented for the problems that are of particular importance for structural statics. By means of Volterra integral equations of the convolution type the equilibrium and continuity conditions are redefined. Calculation with continuous, discontinuous or non-continuous differentiable functions is made possible with algebraic operations. The numerical tables of the Laplace transform can be employed without a knowledge of the theory of functions. The recurrence formulae of the numerical methods of structural statics are obtained as exponential series by means of the displacement operators $h^n = e^{-ns}$ and are very easily solved.

Résumé

Après quelques considérations générales sur la résolution des problèmes de la statique, l'auteur expose le calcul opérationnel de Jan Mikusiński et l'applique au domaine particulier de la statique. On redéfinit les conditions d'équilibre et de continuité à l'aide des équations intégrales de Volterra. Le calcul à effectuer avec des fonctions continues, discontinues ou pourvues de dérivées non continues revient alors à des opérations algébriques. Sans connaître la théorie des fonctions, on peut utiliser les nombreux tableaux donnant les transformées de Laplace. On exprime en séries puissances, au moyen de l'opérateur $h^n = e^{-ns}$, les formules de récurrence obtenues par les méthodes numériques de la statique, et il est très simple de les résoudre.