

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 24 (1964)  
  
**Artikel:** Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung von ecksteifen Stahlbetonträgern  
**Autor:** Palotás, László  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19847>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung von ecksteifen Stahlbetontragwerken

*Method for Calculating the Stability of Reinforced Concrete Structures with  
Stiff Angles*

*Etude de la stabilité d'ossatures en béton armé à nœuds rigides*

LÁSZLÓ PALOTÁS

Dr. Ing. Dr. techn., Professor an der Universität für Bau- und  
Verkehrswesen in Budapest

## 1. Allgemeines

In der vorliegenden Arbeit wird ein Näherungsverfahren für die Stabilitätsberechnung ecksteif verbundener Stahlbetonkonstruktionen entwickelt.

Das Verfahren beruht auf der für praktische Fälle sehr geeigneten Theorie von ENGESSER-SHANLEY, die den unteren Grenzwert der Stabilitätsgrundfälle liefert. Die Stabilitätsuntersuchung der Stabkonstruktionen selbst erfolgt nach dem Energie-Verfahren von TIMOSHENKO. Außerdem werden im folgenden noch das Momentenausgleichsverfahren von LUNDQUIST und SLAVIN sowie das sog. Durchbiegungsverfahren von Sattler verwendet.

In Anwendung des Energieprinzips wird in den folgenden Berechnungen die Gleichheit der äußeren und inneren fremden Energien eingeführt (Fig. 1):

$$\boxed{L_{kq} = L_{bq}} \quad (1)$$

$$L_{kq} = L_k = P_k \Delta_l = \frac{1}{2} (Q = 1) \eta_0. \quad (1a)$$

Die innere Energie  $L_b$  kann als die durch die äußere fremde Hilfsbelastung  $Q=1$  zustande gekommene innere fremde Energie bestimmt werden:

$$L_{bq} = L_b = \frac{1}{2} \int \frac{M m_q}{E J} dz = \frac{P_k}{2} \int \frac{\eta m_q}{E J} dz. \quad (1b)$$

Für die kritische Last erhalten wir somit die Formel

$$P_k = \frac{\eta_0}{\int \frac{\eta m_q}{EJ} dz} = \frac{1}{\int \frac{f(z) m_q}{EJ} dz}. \quad (2)$$

Darin ist der Ausdruck  $\eta = \eta_0 f(z)$  eine Funktion der elastischen Linie.

Zur Vorbereitung der Berechnung befassen wir uns zunächst mit den Voraussetzungen des Prinzips der elastischen Knotenpunktfigur, das im folgenden zur Anwendung gelangt. Ziehen wir vorläufig nur lotrechte Lasten, die in den Knotenpunkten angreifen, und Stabwerke aus lotrechten und waagrechten Stäben in Betracht, dann wirkt diese Belastung ausschließlich in den an die Knotenpunkte anschließenden Stützen. Da sich unsere Untersuchungen auf die dem Moment des Ausknickens folgenden Grenzlagen beziehen, nehmen wir an, daß der Elastizitätsmodul — auf Abschnitten mit gleichem Querschnitt und gleichem Trägheitsmoment — konstant sei. Für die zentrisch belasteten Stäbe können wir auf Grund der Theorie ENGESSER-SHANLEY den sog. Tangentialmodul  $E' = E_\sigma$  und für Stäbe, die im Augenblick des Knickens nur eine sekundäre Biegung, bzw. einen sekundären Zug erfahren, den Entlastungsmodul  $E_0$  einführen. Es wird vorausgesetzt, daß die auf die Stabwerke wirkenden Belastungen  $P_1, P_2, \dots$  stufenweise, jedoch gleichzeitig und mit derselben Stärke zunehmen, bis eine oder mehrere unter ihnen den Wert der für die Stabilität des Systems charakteristischen kritischen Belastung erreichen. Das heißt: die aktiven Belastungen lassen sich mit den Beziehungen

$$P_1 = \beta_1 P, \quad P_2 = \beta_2 P, \quad \dots \quad P_i = \beta_i P, \quad \dots$$

ausdrücken.  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \dots$  bedeuten konstante Verhältniszahlen.

Weiter wird vorausgesetzt, daß die Stäbe des Stabwerkes auf ihrer ganzen Länge den gleichen Querschnitt und das gleiche Trägheitsmoment aufweisen und daß das Stabwerk selbst eben ist. Die durch den Schub verursachten Deformationen werden vernachlässigt. Das System kann sich im Moment des Knickens entweder im elastischen oder im plastischen Bereich befinden.

Die *elastische Knotenpunktfigur* des Stabwerkes erhält man, indem die ecksteifen Knotenpunkte und die starren Einspannungen durch *Gelenke*, die bei Biegung *elastischsteif* sind, ersetzt werden. Handelt es sich um Rahmentragwerke mit festen Knotenpunkten, werden außerdem in den ausbiegenden, zentrisch gedrückten Stützen an den Stellen, wo die größte Auslenkung zu erwarten ist, «*elastische Gelenke*» angebracht. (Fig. 1—4, 6—7; die elastischen Gelenke sind in den Abbildungen mit schwarzen Kreisen bezeichnet.) Dieser Zustand wird «*elastischer Gelenkzustand*» genannt. (Fig. 1b—4b, 6—7b.)

Wir nehmen an, daß die Stäbe, bzw. Stababschnitte im Moment des Knickens zwischen den Gelenken eine gerade Achse haben, d. h. daß sie eine unendlich große Biegesteifigkeit aufwiesen. Bei den Knotenpunkten besteht also die Knickformänderung aus lotrecht zu den Achsen der Stäbe gerichteten, relativen Verschiebungen, der Drehung der Stabachsen, bzw. deren Abschnitte.

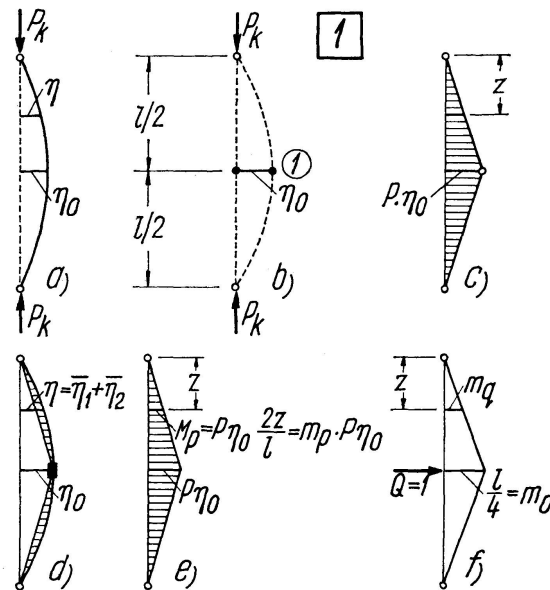


Fig. 1.

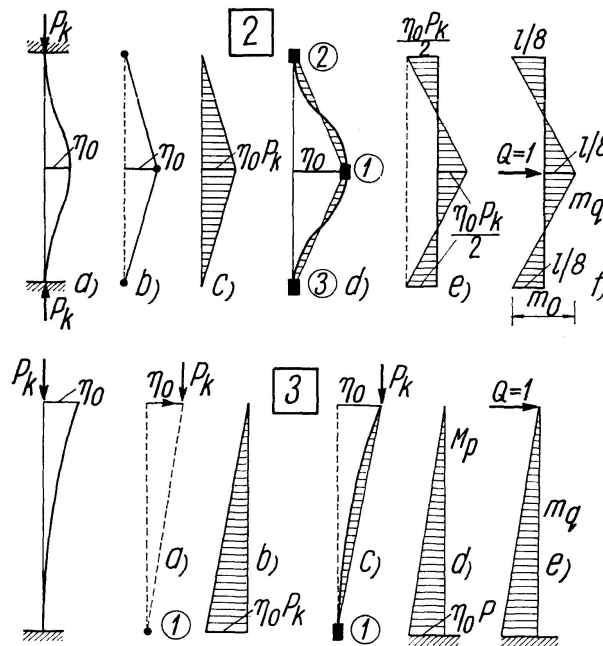


Fig. 2.

Wir stellen uns nun vor, daß das Stabwerk in diesem bewegten Zustand durch gedachte Stäbe gegen die Verschiebung festgehalten und daß danach die elastischen Knotenpunkte unendlich steif und die Stababschnitte zwischen den Gelenken elastisch-biegesteif gemacht werden.

Nun bestimmen wir in dem auf diese Weise zustande gekommenen «Anfangszustand» oder «Starrzustand» die anfänglichen Einspannmomente, wie das bei der Momentenausgleichsmethode und bei der Deformationsmethode allgemein üblich ist. In den Abbildungen werden die im Anfangszustand starr eingespannten Knotenpunkte mit schwarzen Vierecken bezeichnet. (Fig. 1—4, 6, 7 c, d.)

Mit dem Momentenausgleichsverfahren (Cross-Morris) oder mit der Defor-



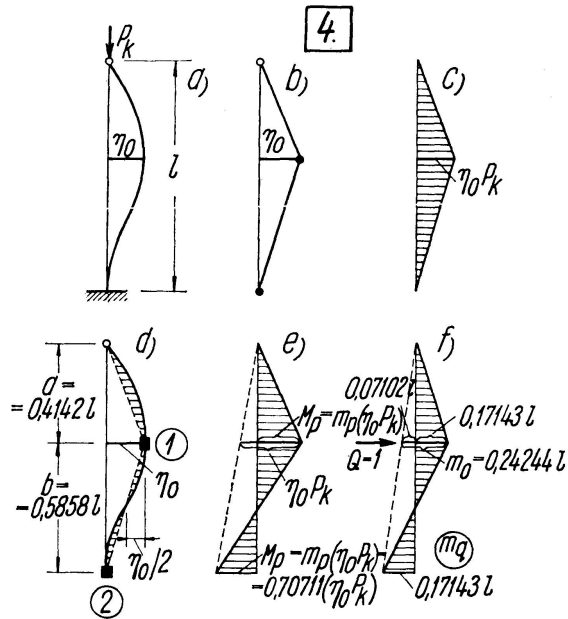


Fig. 3.

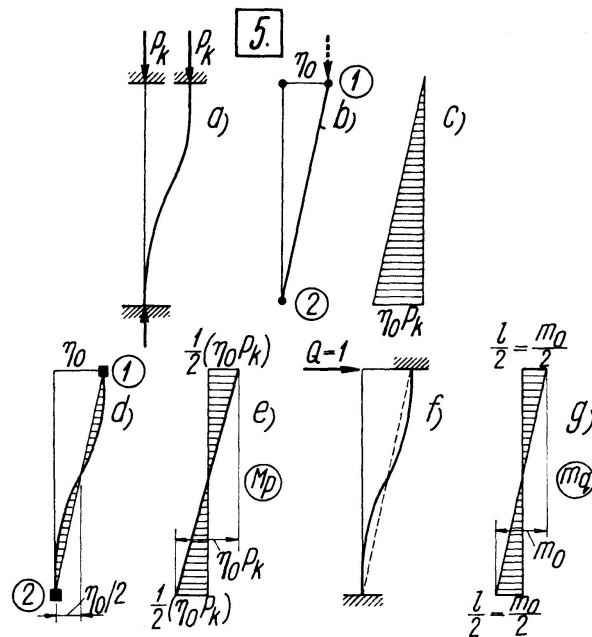


Fig. 4.

mationsmethode erhält man aus den anfänglichen Einspannmomenten, die sich aus der kritischen Last und der dazugehörigen Auslenkung ergaben, die endgültigen Einspannmomente des Stabwerkes in der Form:

$$M_{pi} = \sum \alpha_i m_{pi} \eta_0 P_k.$$

(Fig. 1—4, 6, 7 e.)

Um die äußere und die innere Formänderungsenergie zu bestimmen, lassen wir in den elastisch beweglichen Gelenken einzeln je eine Hilfslast  $Q_i = 1$  wirken und bestimmen die dazugehörigen Momentenwerte  $m_{qi}$  des Stabwerkes.

Um die kritische Last bestimmen zu können, berechnen wir auf Grund der Formel (2) die äußere und innere Energie. Da wir bei den ausgebogenen Stäben

bisher nur geradlinige Ausbiegungen und dementsprechend geradlinig begrenzte Momentenflächen annahmen, kann der so gewonnene Wert von  $P_k$  nur eine Näherung sein. Dieser Näherungswert ist größer als der tatsächliche. Die innere Energie muß daher korrigiert werden, und zwar entweder entsprechend der Differenz zwischen der auf Grund der  $M_{pi}$ -Momente gewonnenen krummlinigen Deformationsfigur und der im elastisch gelenkigen Zustande angenommenen geradlinigen Deformationsfigur (schraffierte Flächen in den Fig. 1—4c) oder entsprechend der Differenz der zu erwartenden endgültigen Ausbiegung — die allgemein als Parabel zweiten Grades oder noch zweckmäßiger als Sinuskurve angenommen werden kann — und der geradlinigen Deformationsfigur. Diese Näherung genügt bei einer Fehlertoleranz von einigen Prozenten.

Die rechte Seite der Gleichung (2) entspricht der durch die Last  $Q_i = 1$  gewonnenen äußeren Energie. Der Ausdruck enthält die unbekannten Auslenkungen  $\eta_0$ , bzw.  $\sum \alpha_i \eta_0$ . Die inneren Energien treten als Funktionen der unbekannten Auslenkungen  $\sum \alpha_i \eta_0$  sowie des Wertes  $P_k$  auf. Es können soviel Energiegleichungen der äußeren und inneren fremden Energie aufgestellt werden, wie elastische Gelenke vorhanden sind. Die Gleichungen weisen keine absoluten Werte auf; es sind homogene, lineare Gleichungen, und es ergeben sich somit nur dann für  $P_k$  von Null verschiedene Lösungen, wenn die Koeffizientendeterminante Null gesetzt wird.

Die Theorie kann bei beliebigen Rahmen-Berechnungsmethoden angewendet werden. Sie hat die Bedeutung eines *Ausbiegungsmodelles*, mit dessen Hilfe die Ausbiegeform mit guter Genauigkeit beschrieben werden kann. Der Vorzug dieser Methode besteht darin, daß sie die kritische Last nicht in Form von Kreis- oder hyperbolischen Funktionen, sondern in einer mit einfachen algebraischen Methoden leicht lösbaren Form enthält.

Als Beispiel wird im folgenden der an beiden Enden gelenkig gelagerte Stab, der erste Grundfall von EULER (Fig. 1), untersucht. Die Biegesteifigkeit  $EJ$  soll konstant sein. Der Knickzustand wird in Fig. 1a veranschaulicht. Die größte Ausbiegung beträgt  $\eta_0$  und befindet sich bei  $l/2$ . Wir führen in der Mitte das elastische Gelenk «1» ein und bringen die kleine Auslenkung  $\eta_0$  an, die dem indifferenten Gleichgewichtszustand des gekrümmten Stabes entspricht. (Fig. 1b.) Die Momentenfläche bei gerade Achse ist in Fig. 1c dargestellt. Das Moment beträgt an der Stelle der größten Ausbiegung

$$M_p = P \eta_0 m_p = \eta_0 P, \quad m_p = 1; \quad \alpha = 1.$$

Im *Anfangszustand* (Fig. 1d und 1e) nehmen wir das elastische Gelenk als unendlich steif, den Stab als elastischsteif an und bringen an der Stelle «1» das ursprüngliche Achsenkreuz (Fig. 1d) und die diesem entsprechende anfängliche Momentenfläche der Fig. 1e an. Letztere stimmt in diesem besonderen Fall — beide Enden sind frei beweglich und weisen an der Stelle «1» eine lotrechte Tangente auf — mit der Fig. 1c überein.

Die durch die Hilfslast  $Q=1$  hervorgerufene Momentenfläche wird in Fig. 1f veranschaulicht. Die äußere fremde Energie beträgt

$$L_k = \frac{1}{2} \int (Q = 1) \eta_0 = \frac{1}{2} \eta_0.$$

Der allgemeine Ausdruck für die innere fremde Energie lautet

$$L_b = \frac{1}{2} \int \frac{M_p m_q}{E J} dz = \frac{\eta_0 P_k}{2 E J} \int f(z) m_q dz.$$

Bei Stabwerken haben die Momentenflächen für die 1. Näherung des Wertes  $P_k$  bei Anwendung der vorliegenden Methode entweder eine Dreieck- oder Trapezform. Die Korrektur ergibt entweder einen Ausschnitt aus einer Sinuskurve oder einer Parabel. Mit den Bezeichnungen der Fig. 1d ergibt sich an der Stelle  $z$

$$\eta(z) = \eta_0 f(z) = \bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_2 = \eta_0 (\eta_1 + \eta_2).$$

$\eta_1 = \frac{\bar{\eta}_1}{\eta_0} = \frac{2z}{l} = m_p$  ist eine Ordinate der dreieckförmigen Momentenfläche.

$\eta_2 = \frac{\bar{\eta}_2}{\eta_0}$  ist die Differenz zwischen der geraden und der ausgebogenen Linie.

Der zu integrierende Teil der fremden inneren Formänderungsenergie setzt sich somit aus zwei Teilen zusammen

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \int \eta_1 m_q dz = \int m_p m_q dz, \\ N_2 &= \int \eta_2 m_q dz, \end{aligned} \right\} N = N_1 + N_2.$$

Nehmen wir im vorliegenden Falle an, daß die gekrümmte Kurve eine Sinuskurve ist, so erhalten wir als Ergebnis die bekannte Formel von EULER.

$$N_1 = \frac{1}{3} 2 \cdot 1 \frac{l}{4} \frac{l}{2} = \frac{l^2}{12}, \quad N_2 = 2 \cdot 0,07195 \frac{l}{2} \frac{l}{4} = 0,01799 l^2,$$

$$N = (0,08333 + 0,01799) l^2 = 0,10132 l^2 = \frac{l^2}{\pi^2},$$

$$P_k = \frac{E J}{0,10132 l^2} = \frac{9,87 E J}{l^2} = \frac{\pi^2 E J}{l^2}.$$

Bei Vernachlässigung des Korrekturgliedes  $N_2$  würden wir für die kritische Last den Wert

$$P_k = \frac{12 E J}{l^2}$$

erhalten, was dem  $\frac{12}{\pi^2} = 1,2159$ -fachen des genauen Werte entspricht.

Das einfachste Verfahren ist dennoch folgendes: Man berechnet den Wert  $N_1$  und multipliziert diesen mit dem Reduktionsfaktor  $\frac{12}{\pi^2}$ . So erhält man die innere Energie des ausgeknickten Stabes, d. h. den genauen Wert des Nenners  $N$ .

$$N = \frac{12}{\pi^2} N_1$$

Wo bei anderen EULERSchen Grundfällen die elastischen Gelenke anzunehmen sind, zeigen die Fig. 2—4.

Bevor mit der Berechnung der Stabwerke begonnen wird, sollen nochmals kurz die wichtigsten Grundlagen des Momentenausgleichsverfahrens und der Deformationsmethode dargestellt werden.

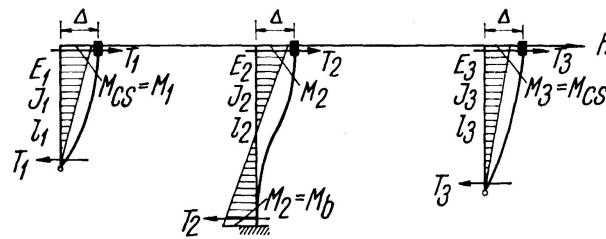


Fig. 5.

Im Falle von Rahmen mit parallel verbundenen Stützen verteilt sich die waagrechte Last  $H$  — im Anfangszustand — proportional dem Verschiebungswiderstand, der sog. «*Stützensteifigkeit*,  $k$ ». Mit den Bezeichnungen der Fig. 5 erhält man

$$\begin{aligned} \sum T_i &= H, & p_i &= \frac{k_i}{\sum k}, & M_{cs} &= T l, \\ T_i &= p_i H, & \sum p_i &= 1, & M_b &= \frac{1}{2} T l. \end{aligned}$$

$k_i$  bedeutet hier die Stützensteifigkeit. Allgemein beträgt sie bei einem Stab mit einem eingespannten und einem gelenkig ausgebildeten Ende  $k_{cs} = \frac{EJ}{4l^3}$ ; bei einem beidseitig eingespannten Stab  $k_b = \frac{EJ}{l^3}$ .

Das gesamte aufgenommene Moment, das wir «*Rahmenmoment*» nennen und mit  $M_k$  bezeichnen, beträgt

$$M_k = \sum T_{cs} l_{cs} + 2 \sum T_b \frac{l_b}{2} = \sum M_{cs} + 2 \sum M_b = T_{cs} l_{cs} + \sum T_b l_b$$

und das Moment, das durch eine Last  $H = 1$  hervorgerufen wird

$$\frac{M_k}{H} = m_k = \frac{1}{H} (\sum p_{cs} H l_{cs} + \sum p_b H l_b),$$

das heißt

$$\sum p_{cs} l_{cs} + \sum p_b l_b = m_k.$$

Bei der Stabilitätsuntersuchung der Rahmen mit verschieblichen Knotenpunkten sind die sogenannten *Rahmenmomente*  $M_k$ , die in den einzelnen Rahmengliedern wirken, im Starrzustande bekannt. Mit diesen und mit Hilfe des Wertes  $m_k$  können wir die für das Rahmenstockwerk gültige Verschiebungskraft  $H$ , bzw. die Schubkraft der Stütze  $T_i$  bestimmen und daraus die Momente

$M_i$  in den Stützen berechnen. Nach Durchführung der notwendigen Berechnungen (z.B. mit Hilfe des Momentenausgleichsverfahrens oder der Deformationsmethode) erhalten wir die Momente  $M_p$ , bzw.  $m_p$ .

## 2. Stabwerke mit festen (unverschieblichen) Knotenpunkten

Das Verfahren wird an dem in Fig. 6 dargestellten Rahmen mit festen Knotenpunkten erläutert. Wir treffen die Annahme, daß das Trägheitsmoment und die Querschnittsfläche längs eines Stabes konstant, von Stab zu Stab jedoch im allgemeinen verschieden sei. Maßgebend für gedrückte Stäbe ist der

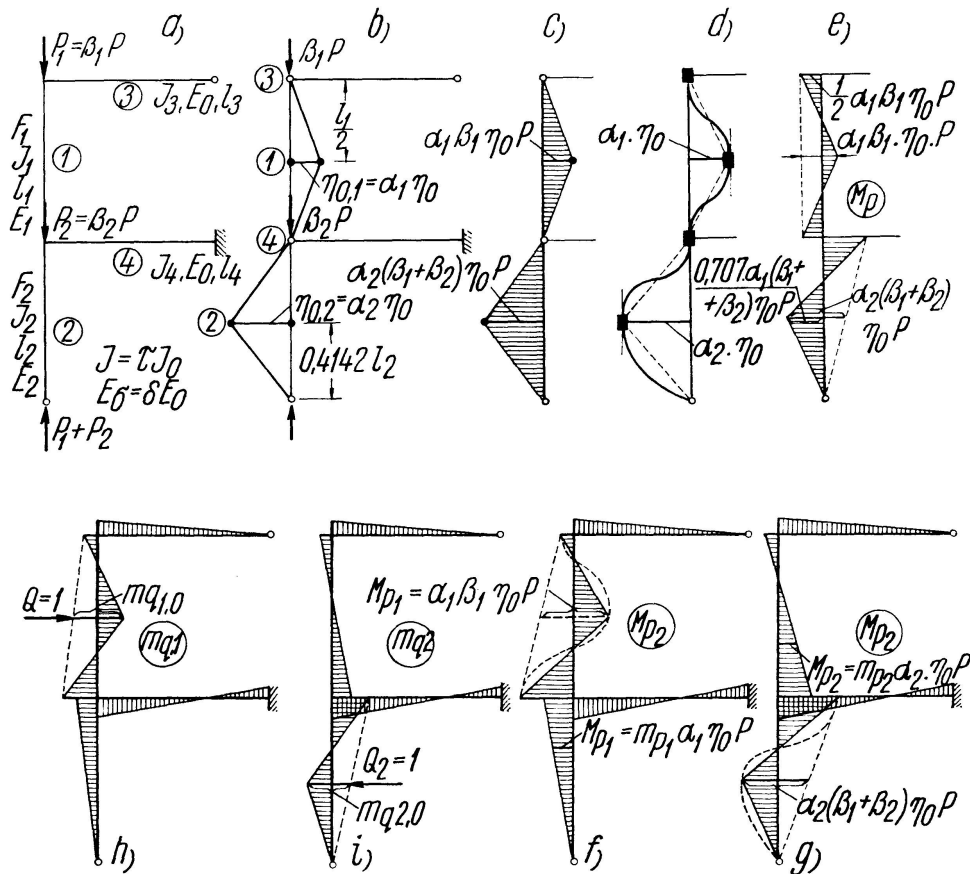


Fig. 6.

Modul  $E_\sigma$  — der im allgemeinen zum voraus geschätzt wird — und für die Balken und Zugstäbe  $E_0$ . Es ist zweckmäßig, die Berechnungen auf den Modul  $E_0$  und auf das beliebige Trägheitsmoment  $J_0$  reduziert durchzuführen. Ist eine vorgegebene Last vorhanden, so kann der Modul  $E_\sigma$  sofort bestimmt werden; im allgemeinen Fall gewinnen wir den richtigen Wert aus einer Iterationsberechnung.

Mit

$$\boxed{E_\sigma = \delta E_0} \quad \text{und} \quad \boxed{J = \tau J_0}$$

ist in der Formel für  $P_k$  der Wert  $E_0 J_0$  im Zähler bekannt. Für Biegebalken und Zugstäbe ist  $\delta = 1$ .

### Der Gang der Lösung

1. Wir führen die elastischen Gelenke bei den Knotenpunkten und in der Nähe der zu erwartenden größten Ausbiegungen ein. Der Modellcharakter ermöglicht — mit einer einfachen Betrachtung — die Konstruktion der entsprechenden «elastischen Knotenpunktfigur», die die größte Formänderungsenergie aufweist, bzw. die größte Ausbiegung zur Folge hat. Existieren mehrere — im allgemeinen identische Figuren —, ist es normalerweise sehr einfach, diejenige auszuwählen, die die größte Formänderungsenergie hat, bzw. die kleinste kritische Last zulässt. Bei Figuren mit einer Stütze ist im allgemeinen die symmetrische Knickfigur nicht maßgebend, denn sie ergibt nicht den kleinsten Wert  $P_k$ . Eine Ausnahme bilden diejenigen Fälle, wo die Knickfigur durch äußere Einwirkung ermöglicht oder erzwungen wird. Im Beispiel der Fig. 6a erhalten wir den kleinsten Wert  $P_k$  auf Grund der antisymmetrischen Figur der Fig. 6b. Im Laufe der Berechnung kann übrigens — nebst den möglichen Kombinationen — auch das symmetrische Knicken mit denselben Gleichungen behandelt werden. Die Stellen der elastischen Gelenke wurden — beim Stab «1» — entsprechend dem *Eulerschen Fall* «2» — in der Mitte, beim Stab «2» — entsprechend dem *Eulerschen Fall* «4» in einer mit  $0,4142l$  berechneten Entfernung vom tatsächlichen Gelenk angenommen. (Bei einer Annahme von  $l/2$  würde das Ergebnis nur unwesentlich abweichen.)

2. Wir bestimmen die Ausbiegungen entsprechend der *Momentenfläche mit geradliniger Achse*, wie sie in Fig. 6c dargestellt wurde.

3. Wir bestimmen die deformierte Form und die *Momentenfläche des Anfangszustandes* entsprechend den Fig. 6d und 6e. Die *Rahmenmomente* für den Stab 1, bzw. 2 betragen nach Fig. 6c

$$M_{k1} = \alpha_1 \beta_1 \eta_0 P \quad \text{bzw.} \quad M_{k2} = \alpha_2 (\beta_1 + \beta_2) \eta_0 P,$$

$$\beta_1 = \frac{P_1}{P}, \quad \beta_2 = \frac{P_2}{P}.$$

Diese Werte sind als Verhältniszahlen angegeben. In den Formeln treten  $\eta_0$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  als Unbekannte auf.  $\eta_0$  fällt jedoch heraus, da  $\eta_0$  auf beiden Seiten der Formänderungsgleichung vorkommt. Der Einfachheit halber könnte man  $\eta_0 = 1$  annehmen.

4. Nun berechnen wir mit einer geeigneten Methode die *endgültigen Momente*  $M_{p1}$ ,  $M_{p2}$ ,  $M_p$ . Es ist zweckmäßig, den Übergang vom Anfangszustand zum Endzustand bei den auf Stab 1, bzw. Stab 2 wirkenden Momenten gesondert

durchzuführen. (Fig. 6f und 6g).  $M_p = M_{p1} + M_{p2}$ ;  $M_{p1} = \alpha_1 m_{p1} \eta_{0p}$ ;  $M_{p2} = \alpha_2 m_{p2} \eta_{0p}$ . Die Momente  $m_{p1}$  und  $m_{p2}$  ergeben sich aus den Verschiebungen  $\eta_{01} = 1$ ,  $\eta_{02} = 1$  und der Last  $P = 1$ .

5. Mit dem folgenden Schritt erhalten wir die endgültigen Hilfsmomente ( $m_{q1}, m_{q2}$ ), die die an der Stelle des Gelenkes 1, bzw. 2 wirkenden Belastungen  $Q_1 = 1$  und  $Q_2 = 1$  hervorrufen. (Fig. 6h und 6i.) Diese Momentenflächen entsprechen ihrer Form nach denjenigen der Momente  $m_{p1}$  und  $m_{p2}$ , bzw. sie sind mit ihnen im Maßstab  $m_{q1,0} = 1$  und  $m_{q2,0} = 1$  identisch.

Es ist somit zweckmäßig, zuerst die durch  $Q_1 = 1$  und  $Q_2 = 1$  zustande gekommenen Momente  $m_{q1}$  und  $m_{q2}$  zu bestimmen und aus diesen die Momentenflächen  $m_{p1}$  und  $m_{p2}$ .

6. Es sind nun die durch die Lasten  $Q_1 = 1$  und  $Q_2 = 1$  dem System zugeführten *äußeren und inneren fremden oder eigenen Energien* zu berechnen, die die Knickbedingung für den Wert  $P_k$  ergeben.

$\alpha)$  Die durch  $Q_1 = 1$  gewonnene Formänderungsenergie ist

$$(L_k) = (Q_1 = 1) \alpha_1 \eta_0 = \alpha_1 \eta_0,$$

$$(L_b) = \frac{\eta_0 P}{E_0 J_0} (N_1 + N_2) = \frac{\eta_0 P}{E_0 J_0} N,$$

$$N = \frac{12}{\pi^2} \left[ \alpha_1 \int_{(-)} \frac{m_{p1} m_{q1}}{\delta \tau} dz + \alpha_2 \int_{(-)} \frac{m_{p2} m_{q1}}{\delta \tau} dz \right] + \left[ \alpha_1 \int_{(+)} \frac{m_{p1} m_{q1}}{\tau} dz + \alpha_2 \int_{(+)} \frac{m_{p2} m_{q1}}{\tau} dz \right].$$

Bei der Berechnung von  $N$  erstreckt sich das Integral in den beiden ersten Gliedern über alle Druckstäbe. Bei den ausgebogenen Druckstäben, für die der Modul  $E_\sigma$  maßgebend ist, steht im Nenner das Produkt  $\delta \tau$ , bei den Biege- und Zugstäben kommt nur  $\tau$  vor, da  $\delta = 1$  ist. In den beiden letzten Gliedern ist nur über die Biege- und Zugstäbe zu integrieren.

Ordnen wir den Ausdruck der äußeren und inneren Formänderungsenergie und führen wir den Wert  $\omega = \frac{P}{E_0 J_0}$  und die Bezeichnungen

$$A_{11} = \frac{12}{\pi^2} \int_{(-)} \frac{m_{p1} m_{q1}}{\delta \tau} dz + \int_{(\pm)} \frac{m_{p1} m_{q1}}{\tau} dz,$$

$$A_{21} = \frac{12}{\pi^2} \int_{(-)} \frac{m_{p2} m_{q1}}{\delta \tau} dz + \int_{(\pm)} \frac{m_{p2} m_{q1}}{\tau} dz$$

ein, gewinnen wir die folgende homogene Lineargleichung

$$\alpha_1 (\omega A_{11} - 1) + \alpha_2 (\omega A_{21}) = 0.$$

$\beta)$  Die durch  $Q_2 = 1$  gewonnene Formänderungsenergie

$$(L_k) = \alpha_2 \eta_0,$$

$$(L_b) = \eta_0 \omega N_1 + \eta_0 \omega N_2 = \eta_0 \omega N;$$

hier beträgt

$$N = \frac{12}{\pi^2} \left[ \alpha_1 \int_{(-)} \frac{m_{p1} m_{q2}}{\delta \tau} dz + \alpha_2 \int_{(-)} \frac{m_{p2} m_{q2}}{\delta \tau} dz \right] + \left[ \alpha_1 \int_{(\pm)} \frac{m_{p1} m_{q2}}{\tau} dz + \alpha_2 \int_{(\pm)} \frac{m_{p2} m_{q2}}{\tau} dz \right].$$

Die Gleichung der äußeren und inneren fremden angenommenen Energie ist:

$$\alpha_1 (\omega A_{12}) + \alpha_2 (\omega A_{22} - 1) = 0;$$

hier ist

$$A_{12} = \frac{12}{\pi^2} \int_{(-)} \frac{m_{p1} m_{q2}}{\delta \tau} dz + \int_{(\pm)} \frac{m_{p1} m_{q2}}{\tau} dz,$$

$$A_{22} = \frac{12}{\pi^2} \int_{(-)} \frac{m_{p2} m_{q2}}{\delta \tau} dz + \int_{(\pm)} \frac{m_{p2} m_{q2}}{\tau} dz$$

und das homogene lineare Gleichungssystem, das die Knickbedingung ausdrückt

$$\alpha_1 (\omega A_{11} - 1) + \alpha_2 (\omega A_{21}) = 0,$$

$$\alpha_1 (\omega A_{12}) + \alpha_2 (\omega A_{22} - 1) = 0.$$

Die nicht triviale Lösung dieses Systems gewinnen wir, wenn die Beiwert-Determinante verschwindet:

$$D = \begin{vmatrix} \omega A_{11} - 1 & \omega A_{21} \\ \omega A_{12} & \omega A_{22} - 1 \end{vmatrix} = 0$$

und

$$P_k = \omega E_0 J_0$$

Die in den einzelnen Stäben auftretenden Druckbelastungen betragen:

$$P_i = \sum \beta_i P_k.$$

In bezug auf  $\omega$  ist die Determinante quadratisch. Wir erhalten aus diesem Grunde für

$$\frac{P_k}{E_0 J_0}$$

zwei Werte. Von diesen Werten ergibt der kleinere die maßgebende kritische Last, die dem skizzierten antisymmetrischen Knickfall entspricht. Der andere Wert gilt für das symmetrische Knicken. Für die kritische Last ist  $\omega_{min}$  maßgebend.

$$P_{kmin} = \omega_{min} E_0 J_0$$



### 3. Stabwerke mit verschieblichen Knotenpunkten

Weist das Stabwerk verschiebliche Knotenpunkte auf, müssen bei den Knotenpunkten und bei den starren Einspannungen elastische Gelenke eingeführt werden. Im *Anfangszustand* ist somit für die einzelnen Stäbe der *Euler'sche Fall* «5» gültig. Wenn die elastische Gelenkfigur bestimmt ist, kann die Knickfigur so angenommen werden, daß die einzelnen Balken und die Stabenden längs der Balkenachsen relative Verschiebungen  $\eta_{01}, \eta_{02} \dots$  erfahren. Das Knicken tritt bei einem bestimmten, vorläufig noch unbekannten System von Verschiebungen ein, das eine Funktion der Geometrie und der Steifigkeitsverhältnisse des Stabwerkes ist. Auf Grund der in unseren Untersuchungen angenommenen Voraussetzungen entspricht eine auf diesem Wege bestimmte Ausbiegungslinie — als verwandte (affine) Form — einer bestimmten zu ihr gehörenden kritischen Belastung.

Wir wenden nun das Verfahren bei dem in Fig. 7 gezeigten, zweifach beweglichen Rahmentragwerk an.

Bei der Belastungsanordnung der Fig. 7a kann die Form  $P_i = \beta_i P$  angewendet werden. In Fig. 7b ist der wahrscheinliche Verschiebungszustand der

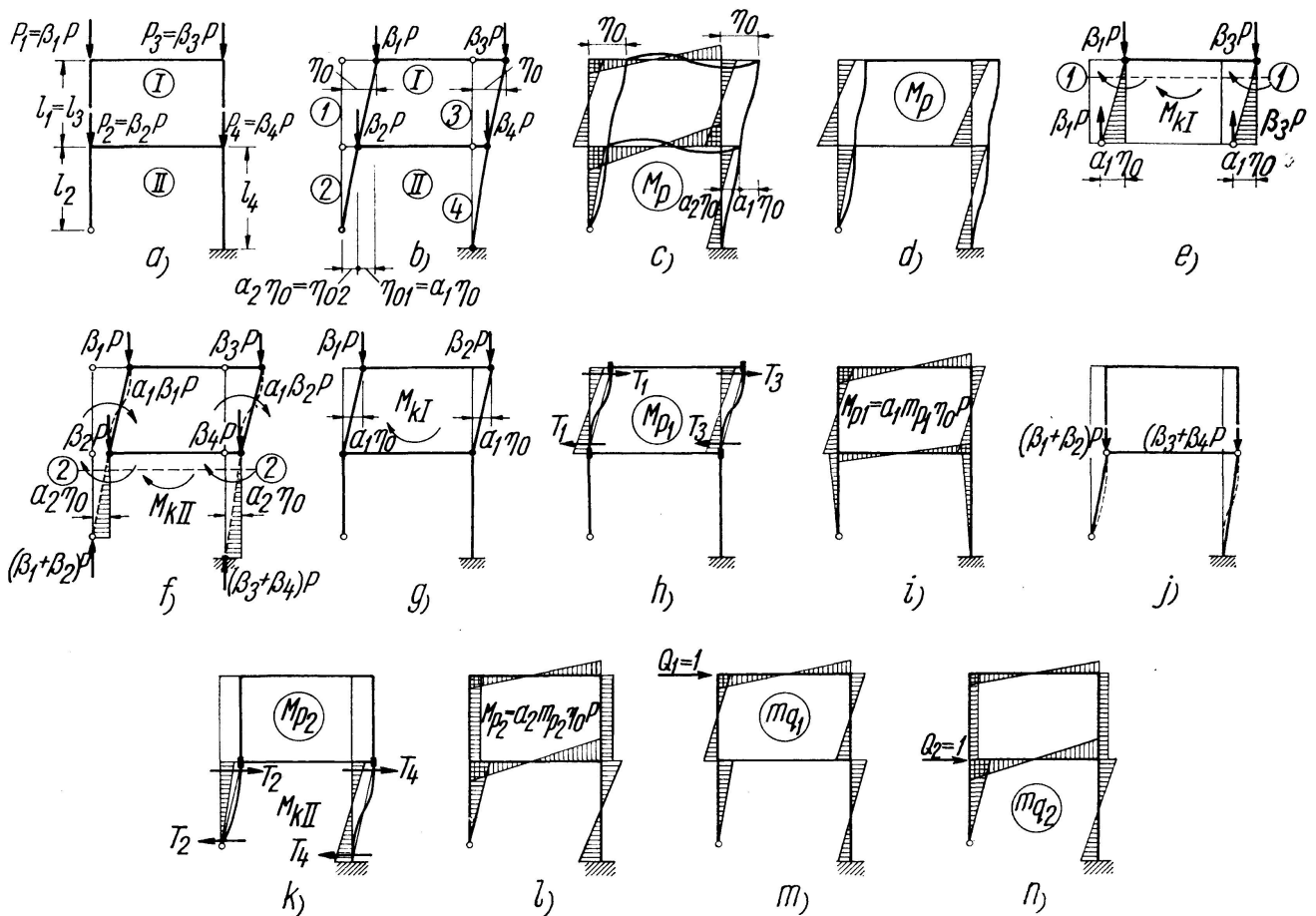


Fig. 7.

elastischen Knotenpunktfigur im Moment des Knickens dargestellt; es handelt sich um diejenige Lage des indifferenten Gleichgewichtszustandes, die dem stabilen Gleichgewichtszustand am nächsten liegt.

Die im Augenblick des Knickens im ursprünglichen Rahmentragwerk entstehende gekrümmte Figur und die dazugehörige Momentenfläche sind formtreu in Fig. 7c und als Anfangszustand in Fig. 7d nochmals dargestellt.

Die gesamte, in der Ebene des mit «I» bezeichneten Balkens auftretende Verschiebung beträgt

$$\eta_0 = \alpha_1 \eta_0 + \alpha_2 \eta_0 = (\alpha_1 + \alpha_2) \eta_0;$$

das heißt

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Das auf dem Schnitt 1 der elastischen Knotenpunktfigur wirkende Rahmenmoment beträgt mit den Bezeichnungen der Fig. 7e

$$M_{kI} = \alpha_1 \beta_1 \eta_0 P + \alpha_1 \beta_2 \eta_0 P = \alpha_1 (\beta_1 + \beta_2) \eta_0 P = \alpha_1 m_{kI} \eta_0 P$$

und allgemein

$$M_{kI} = \alpha_1 \sum \beta_I \eta_0 P = \alpha_1 m_{kI} \eta_0 P, \\ m_{kI} = \sum \beta_I.$$

$\beta_I$  bedeutet hier den Lastanteil sämtlicher über dem Schnitt 1 angreifenden Belastungen. Die Summe bezieht sich somit auf alle über dem Schnitt 1 wirkenden Lasten.

Das im Schnitt 2 wirkende Rahmenmoment beträgt nach der Fig. 7f

$$M_{kII} = \alpha_2 (\beta_1 + \beta_2) \eta_0 P + \alpha_2 (\beta_3 + \beta_4) \eta_0 P = \alpha_2 m_{kII} \eta_0 P,$$

hier ist

$$m_{kII} = \sum \beta_{II}.$$

$\sum \beta_{II}$  umfaßt diejenigen Belastungen, die oberhalb von Schnitt 2 angreifen.

Das ganze durch die Verschiebung des Systems hervorgerufene Rahmenmoment beträgt somit

$$M_k = M_{kI} + M_{kII} = \alpha_1 \sum \beta_I \eta_0 P + \alpha_2 \sum \beta_{II} \eta_0 P.$$

(Es ist zu beachten, daß die Belastungen  $P$  von den Balken auf die Stützen übertragene *aktive Belastungen* sind und nicht lediglich auf die Stützen wirkende Druckbelastungen.)

Die in den Formeln auftretenden  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\eta_0$  sind unbekannt. Im folgenden Schritt bestimmen wir mit der im vorigen Abschnitt beschriebenen Methode die aus den Rahmenmomenten stammenden anfänglichen Verschiebungskräfte (Schubkräfte)  $T_i$  und aus diesen die anfänglichen Einspannmomente  $M_i$ . Es ist zweckmäßig, die Momente  $M_i$  in zwei Schritten zu bestimmen: Zuerst den zur Verschiebung  $\alpha_1 \eta_0$  gehörigen Wert  $M_{p1}$  für den ganzen Rahmen, wobei sich die Verschiebung  $\alpha_1 \eta_0$  auf das Rahmenfeld I bezieht; zweitens den zur relativen Verschiebung  $\alpha_2 \eta_0$  gehörigen Wert  $M_{p2}$  für den ganzen Rahmen, wobei sich die Verschiebung  $\alpha_2 \eta_0$  auf das Rahmenfeld I bezieht.

Die Momente  $M_{p1} = \alpha_1 m_{p1} \eta_0 P$  erhält man aus den anfänglichen Einspannmomenten  $M_{p1}$ , die nur auf jene Stäbe wirken, die eine relative Verschiebung  $\alpha_1 \eta_0$  erfahren haben, d. h. nur mit  $P_1, P_3$  belastet werden.

Die zu berechnende Verschiebungskraft beträgt für das Rahmenfeld  $I$  auf Grund der Fig. 7 g und 7 h

$$H_I = \frac{M_{kI}}{l_1} = \frac{\alpha_1 \sum \beta_I \eta_0 P}{l_1} = \alpha_1 \eta_0 P h_I;$$

hier ist  $\sum \beta_I = \beta_1 + \beta_3$ ;  $h_I$ : die der Belastung  $P = 1$  entsprechende Verschiebungskraft.

$$\begin{aligned} T_1 &= p_1 h_I \alpha_1 \eta_0 P, & M_1 &= \frac{1}{2} T_1 l_1 = \frac{1}{2} p_1 h_I l_1 \alpha_1 \eta_0 P, \\ T_3 &= p_3 h_I \alpha_1 \eta_0 P, & M_3 &= \frac{1}{2} T_3 l_3 = \frac{1}{2} p_3 h_I l_3 \alpha_1 \eta_0 P, \\ p_1 &= \frac{k_1}{k_1 + k_2}, & p_3 &= \frac{k_3}{k_1 + k_3}, & k_1 &= E_1 J_1, & k_3 &= E_3 J_3, & l_1 &= l_3. \end{aligned}$$

Auf Grund der anfänglichen Momente gewinnen wir nun die endgültigen Momente, die die Ausbiegung  $\alpha_1 \eta_0$ , bzw. das Rahmenmoment  $M_{k1}$  hervorrufen (Fig. 7 i)

$$M_{p1} = \alpha_1 m_{p1} \eta_0 P$$

Die Momente  $M_{p2} = \alpha_2 m_{p2} \eta_0 P$  lassen sich auf Grund der anfänglichen Einspannmomente bestimmen.

Nach den Fig. 7 j, k beträgt die auf das Rahmenfeld  $II$  wirkende Schubkraft

$$H_{II} = \frac{M_{kII}}{m_k} = \frac{\alpha_2 \sum \beta_{II} \eta_0 P}{m_k} = \alpha_2 h_{II} \eta_0 P.$$

(Im Rahmenfeld  $I$  bei der relativen Verschiebung  $\alpha_2 \eta_0$  ist die Schubkraft null.)

Dabei ist  $\sum \beta_{II} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ ;  $h_{II}$  ist die der Belastung  $P = 1$  entsprechende Schubkraft;  $m_k = p_2 l_2 + p_4 l_4$ ;

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{k_2}{k_2 + k_4}, & p_4 &= \frac{k_4}{k_2 + k_4}, \\ k_2 &= \frac{E_2 J_2}{4 l_2^3}, & k_4 &= \frac{E_4 J_4}{l_4^3}, \\ T_2 &= p_2 h_{II} \alpha_2 \eta_0 P, & M_2 &= p_2 h_{II} \alpha_2 \eta_0 P, \\ T_4 &= p_4 h_{II} \alpha_2 \eta_0 P, & M_4 &= \frac{1}{2} p_4 h_{II} l_4 \alpha_2 \eta_0 P. \end{aligned}$$

Die endgültigen Momente (Fig. 7 l):

$$M_{p2} = \alpha_2 m_{p2} \eta_0 P$$

Die durch die Hilfsbelastungen  $Q_1 = 1$  und  $Q_2 = 1$  hervorgerufenen Momente  $m_{q1}$  und  $m_{q2}$  sind in den Fig. 7 m und 7 n dargestellt.

Die äußere und innere aufgenommene Formänderungsenergie infolge der Hilfsbelastungen  $Q_1$  und  $Q_2$  lassen sich folgendermaßen darstellen.

Bei der *Belastung*  $Q_I = 1$  ergibt die äußere und innere aufgenommene Formänderungsenergie

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \eta_0 = \omega \eta_0 [\alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{21}],$$

und wenn wir die Gleichung ordnen:

$$\alpha_1 [\omega A_{11} - 1] + \alpha_2 [\omega A_{21} - 1] = 0.$$

Bei der *Belastung*  $Q_2 = 1$  finden wir:

$$\alpha_2 \eta_0 = \omega \eta_0 [\alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{22}],$$

bzw.

$$\alpha_1 [\omega A_{12}] + \alpha_2 [\omega A_{22} - 1] = 0.$$

Auch in diesem Falle kann — *als Knickbedingung* — ein *homogenes* lineares Gleichungssystem aufgestellt werden. Es können so viele Gleichungen angeschrieben werden, wie der Rahmen Bewegungsgrade aufweist. In unserem Beispiel haben wir zwei Gleichungen:

$$\alpha_1 [\omega A_{11} - 1] + \alpha_2 [\omega A_{21} - 1] = 0,$$

$$\alpha_1 [\omega A_{12}] + \alpha_2 [\omega A_{22} - 1] = 0.$$

Der zu  $\omega_{min}$  gehörige Wert der Knicklast beträgt

$$P_{kmin} = \omega_{min} E_0 J_0$$

Im plastischen Bereich ergibt sich die Lösung — wie früher — durch sukzessive Näherung.

Ein überaus einfaches Näherungsverfahren besteht darin, daß die zu den verschiedenen  $P_k$ -Werten gehörigen Werte von  $P_k'$  in einem Diagramm auf-

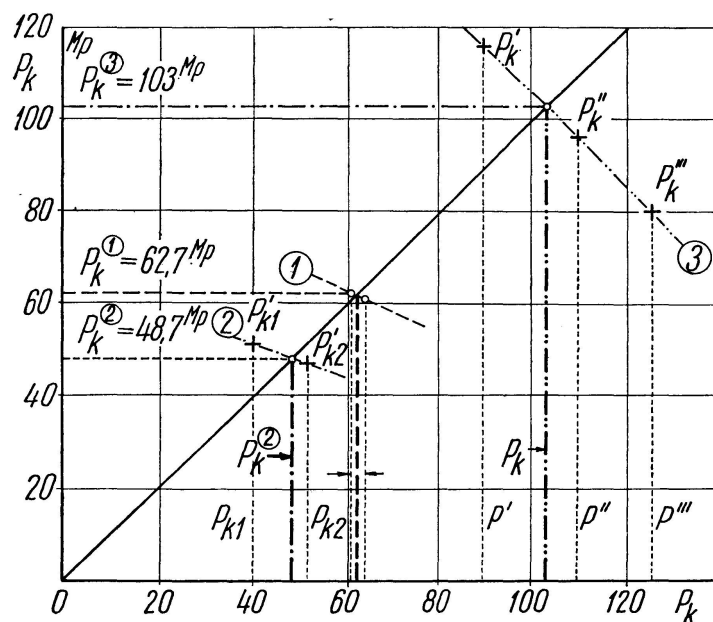


Fig. 8.

getragen werden (Fig. 8). Der endgültige  $P_k$ -Wert wird als Schnittpunkt der Geraden unter  $45^\circ$  mit der Verbindungslinie der  $P_k'$ -Werte gefunden.

Es ist noch zu erwähnen, daß das oben dargestellte Verfahren der «*elastischen Gelenke*» in seinen Prinzipien in den Jahren 1954 und 1955 in meinen Universitätsvorträgen bereits behandelt wurde. Die Methode wurde auch bei komplizierten Beispielen angewandt, und es wurden Vergleiche mit anderen, genauen Verfahren (z. B. mit dem Verfahren von Chwalla) durchgeführt. Die Abweichungen betrugen im allgemeinen weniger als 5%, und zwar ergab sich mit dem hier skizzierten Näherungsverfahren im allgemeinen eine kleinere kritische Last.

### Zusammenfassung

Es wird ein Näherungsverfahren für die Stabilitätsberechnung ebener Stahlbetonkonstruktionen entwickelt, das mit Hilfe der einfachen Methoden der Baustatik praktisch befriedigende Ergebnisse liefert. Die Methode kann bei Stabwerken mit festen und verschiebblichen Knotenpunkten angewendet werden und ist sowohl im elastischen wie auch im plastischen Bereich gültig. Das Verfahren hat den Vorteil, daß sich die kritische Belastung nicht in Form einer Kreis-, bzw. hyperbolischen Funktion, sondern als Lösung eines linearen, homogenen Gleichungssystems ergibt.

### Summary

A method by approximation is described for calculating the stability of plane reinforced concrete structures which, although only making use of simple static methods, provides satisfactory results for practical purposes. This method can be applied to lattices with fixed or displaceable assembly joints and is suitable for application in both the plastic and elastic fields. The procedure has the advantage of determining the critical load, not in the form of circular or hyperbolic functions, but as the solution of a system of homogeneous linear equations.

### Résumé

L'auteur présente une méthode par approximation permettant le calcul de la stabilité d'ossatures planes en béton armé qui, en ne faisant appel qu'à des méthodes simples de la statique, fournit des résultats satisfaisants pour la pratique. Cette méthode peut être appliquée aux ossatures à nœuds fixes ou déplaçables et convient aussi bien dans le domaine plastique que dans le domaine élastique. Le procédé a l'avantage de faire apparaître la charge critique non pas sous la forme de fonctions circulaires ou hyperboliques mais comme la solution d'un système d'équations linéaires homogènes.